

Sujet Ecricome ECS - 2022

Exercice 1

Dans tout cet exercice, on fixe a un réel strictement supérieur à 1. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction polynomiale f_n par

$$f_n : x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

1. a. En notant pour tout réel x et pour tout entier naturel k , $t_k(x) = \frac{x^k}{k!}$, exprimer pour k un entier naturel non nul, $t_k(x)$ en fonction de $t_{k-1}(x)$, x et k .

SOLUTION :

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $k \geq 1$, on a $k! = (k-1)! \times k$ donc :

$$t_k(x) = \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \times \frac{x}{k} = t_{k-1}(x) \times \frac{x}{k}$$

- b. Recopier et compléter la fonction **Scilab** suivante qui, prenant en entrée les valeurs de l'entier n et du réel x renvoie la valeur de $f_n(x)$.

```
function S = f(n,x)
    t= 1 // t=t_0(x)
    S= 1 // S=f(0,x)
    for k = 1:n
        t = t * .....
        S = .....
    end
endfunction
```

SOLUTION :

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Sachant qu'on a la relation de récurrence : pour tout $k \geq 1$: $f_k(x) = f_{k-1}(x) + t_k(x)$, on complète la fonction ainsi :

```
function S = f(n,x)
    t= 1 // t=t_0(x)
    S= 1 // S=f(0,x)
    for k = 1:n
        t = t * x/k
        S = S + t
    end
endfunction
```

2. Justifier que, pour tout entier n strictement positif, l'équation $f_n(x) = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, que l'on note u_n .

SOLUTION :

f_n est une fonction polynomiale donc définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Et $\forall x \in \mathbb{R}$ fixé, $f'_n(x) = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!}$, en ayant posé $j = k-1$.

Et pour tout $x > 0$, $f'_n(x) > 0$. Par conséquent, f_n est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Et, étant continue sur $\mathbb{R}^+$, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$; elle réalise donc une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[f_n(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)[= [1; +\infty[$.

En effet, comme fonction polynomiale, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = +\infty$. Et $f_n(0) = 1$.

Par conséquent pour tout $a > 1$, $a \in [1; +\infty[$ donc il existe un unique réel $x \in \mathbb{R}^+$ solution de l'équation $f_n(x) = a$.

3. a. Soit x un réel positif.

Montrer que la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante et déterminer sa limite.

SOLUTION : Soit $x \geq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$; et puisque x est positif, on a $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$.

la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante

On reconnaît dans l'expression de $f_n(x)$ la somme partielle de la série exponentielle, série convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^x$

b. En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$

SOLUTION :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ donc d'après la question précédente, $f_{n+1}(u_n) \geq f_n(u_n)$. Donc $f_{n+1}(u_n) \geq a$, car $f_n(u_n) = a$.

Mais on a aussi $f_{n+1}(u_{n+1}) = a$. Donc $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$.

Mais comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que u_n et u_{n+1} sont dans $\mathbb{R}^+$, on a $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$ implique $u_n \geq u_{n+1}$.

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

c. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

SOLUTION :

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 0 puisque tous ses termes sont dans $\mathbb{R}^+$ (cf Q.2) donc

la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite $\ell \geq 0$.

4. a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\ln(a) \leq u_n$.

SOLUTION :

On a vu que pour $x \geq 0$, la suite $(f_n(x))$ est croissante et converge vers e^x . Donc $\forall n \geq 1$, $f_n(x) \leq e^x$.

Puisque $a > 1$, on a $\ln(a) > 0$, et on peut lui appliquer la propriété précédente : $\forall n \geq 1$, $f_n(\ln(a)) \leq a$.

Mais sachant que $a = f_n(u_n)$ et que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que u_n et $\ln(a)$ sont dans $\mathbb{R}^+$, on a $f_n(\ln(a)) \leq f_n(u_n)$ implique $\ln(a) \leq u_n$.

pour tout $n \geq 1$, $\ln(a) \leq u_n$

b. Soit K un réel positif et minorant la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. Montrer que $e^K \leq a$.

SOLUTION :

Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq K \leq u_n$, or f_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc on a : $f_n(K) \leq f_n(u_n)$. C'est à dire $f_n(K) \leq a$.

Mais comme la suite $(f_n(K))$ converge vers e^K , on a par inégalités sur les limites : $e^K \leq a$

c. Déduire des questions précédentes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(a)$.

SOLUTION :

On a vu que $\forall n \geq 1$, $\ln(a) \leq u_n$ donc en notant $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, on obtient par inégalités sur les limites : $\ln(a) \leq \ell$.

Mais comme (u_n) est décroissante, ℓ est un minorant de la suite, et d'après la question 4.b) on a donc $e^\ell \leq a$.

Donc par croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $\ell \leq \ln(a)$.

De ces deux inégalités, on en déduit que $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(a)$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$R_n(x) = \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

5. a. Justifier que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

On considère dorénavant un réel M strictement positif vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \leq M$$

SOLUTION :

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge donc elle est bornée.

AUTRE MÉTHODE :

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est bornée : $\forall n \geq 1, 0 \leq u_n \leq u_1$; avec $u_1 = a - 1$.

b. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|R_n(u_n)| \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$$

SOLUTION :

Soit $n \geq 1$ fixé. On a $0 \leq u_n$.

Pour tout $t \in [0; u_n]$, on a d'après ce qui précède $0 \leq t \leq u_n \leq M$. Donc par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, $0 \leq e^t \leq e^{u_n} \leq e^M$.

$$\text{Donc } 0 \leq e^t \frac{(u_n - t)^n}{n!} \leq e^{u_n} \frac{(u_n - t)^n}{n!} \leq e^M \frac{(u_n - t)^n}{n!}.$$

Les fonctions $t \mapsto e^t \frac{(u_n - t)^n}{n!}$ et $t \mapsto e^M \frac{(u_n - t)^n}{n!}$ sont continues sur le segment $[0, u_n]$ donc par croissance de l'intégrale, dans le sens croissant des bornes, on a : $0 \leq R_n(u_n) \leq e^M \int_0^{u_n} \frac{(u_n - t)^n}{n!} dt$

Donc en particulier, $|R_n(u_n)| = R_n(u_n)$.

Et sachant que $\int_0^{u_n} \frac{(u_n - t)^n}{n!} dt = \int_0^{u_n} \frac{(x)^n}{n!} dx = \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}$ et $0 \leq u_n^{n+1} \leq M^{n+1}$, on a :

$$|R_n(u_n)| \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$$

c. En déduire que

$$R_n(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

SOLUTION :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ par croissance comparées des suites usuelles. Donc

$$R_n(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

6. a. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = f_n(x) + R_n(x)$$

SOLUTION :

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

La fonction $\varphi : t \mapsto e^t$ est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. Avec pour tout $k \in \llbracket 0; n+1 \rrbracket$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi^{(k)}(t) = e^t$ et $\varphi^{(k)}(0) = 1$.

Donc d'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \varphi^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt = f_n(x) + R_n(x)$$

b. En se rappelant que $f_n(u_n) = a$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déduire des deux questions précédentes que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

SOLUTION :

D'après la question précédente : $u_n = \ln(f_n(u_n) + R_n(u_n)) = \ln(a + R_n(u_n)) = \ln(a) + \ln\left(1 + \frac{1}{a}R_n(u_n)\right)$

Et sachant que $R_n(u_n)$ tend vers 0 d'après la question 5.c), on a $\ln\left(1 + \frac{1}{a}R_n(u_n)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a}R_n(u_n)$ et $\frac{1}{a}R_n(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$; donc $\ln\left(1 + \frac{1}{a}R_n(u_n)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Et ainsi,

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

7. a. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

SOLUTION :

C'est la question 6.a écrite à l'ordre $n+1$: sachant que $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

b. En déduire que :

$$e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

SOLUTION :

D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{u_n} = f_n(u_n) + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$

Et $f_n(u_n) = a$. Montrons que $\int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$.

Par croissance de l'intégrale, dans le sens croissant des bornes :

$$0 \leq \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt \leq e^M \int_0^{u_n} \frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

$$\text{donc } 0 \leq \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt \leq e^M \frac{(u_n)^{n+2}}{(n+2)!}.$$

$$\text{Or } e^M \frac{(u_n)^{n+2}}{(n+2)!} = e^M \frac{(u_n)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{u_n}{n+2} \leq e^M \frac{(u_n)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{M}{n+2}.$$

Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n+2} = 0$ donc $\int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$. Ainsi,

$$e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

- c. Justifier que $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

SOLUTION :

$$\frac{u_n^{n+1}}{(\ln(a))^{n+1}} = e^{(n+1) \ln\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right)}$$

et $\frac{u_n}{\ln(a)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\ln\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$; donc $(n+1) \ln\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \ln\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right) = 0$ et donc par composition des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(n+1) \ln\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right)} = 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(\ln(a))^{n+1}} = 1$. Soit $u_n^{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (\ln(a))^{n+1}$.

Et par conséquent, par produits d'équivalents :

$$\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

- d. En déduire finalement que :

$$u_n - \ln(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}$$

SOLUTION :

D'après 7.b) $u_n = \ln(e^{u_n}) = \ln\left(f_n(u_n) + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!} dt\right)$

$$u_n = \ln\left(a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!} dt\right) = \ln(a) + \ln\left(1 + \frac{u_n^{n+1}}{a(n+1)!} + \frac{1}{a} \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!} dt\right)$$

Et on a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ et $\frac{1}{a} \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$

Donc $u_n - \ln(a) = \ln\left(1 + \frac{u_n^{n+1}}{a(n+1)!} + \frac{1}{a} \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!} dt\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n^{n+1}}{a(n+1)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}$
d'après 7.c).

$$u_n - \ln(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}$$

Exercice 2

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

On dit qu'un endomorphisme h est nilpotent quand il existe un entier naturel p tel que h^p soit l'endomorphisme nul.

L'objectif de ce problème est de montrer que f est la somme de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent, dont l'un est diagonalisable et l'autre est nilpotent.

1. a. Vérifier que -1 et 2 sont des valeurs propres de f et déterminer les sous-espaces propres associés.

SOLUTION :

Pour montrer que -1 est valeur propre de f et, en même temps donner une base de son sous-espace propre, on résout $(f - (-1)\text{Id})((a, b, c)) = (0, 0, 0)$ d'inconnue $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Avec la base canonique, on dispose d'une traduction matricielle immédiate,

$$(f - (-1)\text{Id})((a, b, c)) = (0, 0, 0) \iff (A + I_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a + b - c = 0 \\ 3b = 0 \\ a + 4b - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = a \\ b = 0 \end{cases} \\ \iff (a, b, c) &= (a, 0, a) = a(1, 0, 1) \iff (a, b, c) \in \text{Vect}((1, 0, 1)). \end{aligned}$$

Comme il y a une solution non nulle, -1 est valeur propre de f et $\text{SEP}(f, -1) = \text{Vect}((1, 0, 1))$. Cet espace est engendré par un vecteur non nul, il est donc de dimension 1. C'est une droite vectorielle.

On recommence mutatis mutandis avec 2.

$$\begin{aligned} (f - 2\text{Id})((a, b, c)) &= (0, 0, 0) \iff (A - 2I_3) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2a + b - c = 0 \\ a + 4b - 4c = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1} \begin{cases} -2a + b - c = 0 \\ a = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} c = b \\ a = 0 \end{cases} &\iff (a, b, c) = (0, b, b) = b(0, 1, 1) \iff (a, b, c) \in \text{Vect}((0, 1, 1)). \end{aligned}$$

Comme il y a une solution non nulle, 2 est valeur propre de f et $\text{SEP}(f, 2) = \text{Vect}((0, 1, 1))$. Cet espace est engendré par un vecteur non nul, il est donc de dimension 1. C'est une droite vectorielle.

b. On suppose que f est diagonalisable.

En étudiant la trace de A , aboutir à une contradiction.

Que peut-on en déduire sur f ?

SOLUTION :

En supposant f diagonalisable, A l'est aussi et il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. On sait que -1 a un SEP de dimension 1 et que 2 a un SEP de dimension 1 donc f et A ont une troisième valeur propre notée ici α avec encore un SEP de dimension 1. Donc la diagonale de D contient $-1, 2$ et α . Donc la trace de D est $1 + \alpha$. Comme A et D sont semblables, elles ont la même trace et on a $1 + \alpha = 0$ donc $\alpha = -1$. C'est absurde car cela implique que -1 apparaît deux fois dans D donc que son SEP est de dimension 2. C'est faux d'après Q.1.a). On en conclut que

f n'est pas diagonalisable

2. Montrer que $\ker(f + \text{Id}) \subset \ker((f + \text{Id})^2)$ et que $\ker(f + \text{Id}) \neq \ker((f + \text{Id})^2)$.

SOLUTION :

Soit $x \in \text{Ker}(f + \text{Id})$, alors $(f + \text{Id})(x) = \vec{0}$, on applique $f + \text{Id}$, cela donne

$$(f + \text{Id})^2(x) = (f + \text{Id})(\vec{0}) = \vec{0}$$

donc $x \in \text{Ker}(f + \text{Id})^2$. On a bien $\text{Ker}(f + \text{Id}) \subset \text{Ker}((f + \text{Id})^2)$.

Dans la base canonique, la matrice de $f + \text{Id}$ est $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Son rang est 2 car les colonnes 1 et 3 sont proportionnelles tandis que les colonnes 1 et 2 ne le sont pas.

Le calcul donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1 bien sûr.

On en déduit que $\text{rg}((f + \text{Id})^2) = 1$ donc avec le théorème du rang et $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, cela assure que $\text{Ker}((f + \text{Id})^2)$ est dimension 2. Tandis que $\text{Ker}(f + \text{Id}) = \text{SEP}(f, -1)$ est de dimension 1 donc $\text{Ker}((f + \text{Id})^2) \neq \text{Ker}(f + \text{Id})$.

3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f - 2\text{Id}) \oplus \ker((f + \text{Id})^2)$.

SOLUTION :

On sait que $(0, 1, 1)$ est une base de $\ker(f - 2\text{Id}) = \text{SEP}(f, 2)$.

Donnons une base de $\ker((f + \text{Id})^2)$.

$$(f + \text{Id})^2((a, b, c)) = (0, 0, 0) \iff (A + I_3)^2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff b = 0 \iff (a, b, c) = a(1, 0, 0) + c(0, 0, 1) \iff (a, b, c) \in \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1)).$$

Il reste à montrer que $((0, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$ est libre. On saura alors que, dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{On résout } a(0, 1, 1) + b(1, 0, 0) + c(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0.$$

On voit qu'en concaténant une base de $\ker((f + \text{Id})^2)$ et de $\ker(f - 2\text{Id})$, on a une base de $\mathbb{R}^3$ donc

$$\mathbb{R}^3 = \ker((f + \text{Id})^2) \oplus \ker(f - 2\text{Id}).$$

Pour simplifier les notations, on note dorénavant.

$$F = \ker(f - 2\text{Id}) \text{ et } G = \ker((f + \text{Id})^2)$$

4. Montrer que F et G sont stables par f .

SOLUTION :

On utilise le fait que f commute avec toute combinaison linéaire de puissances de f . Soit $x \in F$, on a $(f - 2\text{Id})(x) = \vec{0}$ donc

$$(f - 2\text{Id})(f(x)) = (f - 2\text{Id}) \circ f(x) = (f^2 - 2f)(x) = f \circ (f - 2\text{Id})(x) = f(\vec{0}) = \vec{0}$$

donc $f(x) \in F$. Donc F est stable par f .

De même Soit $x \in G$, on a $((f + \text{Id})^2)(x) = \vec{0}$ donc

$$((f + \text{Id})^2)(f(x)) = ((f + \text{Id})^2) \circ f(x) = f \circ ((f + \text{Id})^2)(x) = f(\vec{0}) = \vec{0}$$

donc $f(x) \in G$. Donc G est stable par f .

5. On note $P = (X + 1)^2(X - 2)$. Justifier que $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

SOLUTION :

On voit que $P(f) = (f + \text{Id})^2 \circ (f - 2\text{Id}) = (f - 2\text{Id}) \circ (f + \text{Id})^2$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on sait qu'il existe $x_F \in F, x_G \in G$ tel que $x = x_F + x_G$ car $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. Or $(f - 2\text{Id})(x_F) = \vec{0}$ et $(f + \text{Id})^2(x_G) = \vec{0}$ donc

$$\begin{aligned} P(f)(x) &= P(f)(x_F) + P(f)(x_G) = (f + \text{Id})^2 \circ (f - 2\text{Id})(x_F) + (f - 2\text{Id}) \circ (f + \text{Id})^2(x_G) \\ &= (f + \text{Id})^2(\vec{0}) + (f - 2\text{Id})(\vec{0}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Donc $P(f)$ est bien l'endomorphisme nul.

On note dorénavant $\pi_1 = \frac{1}{9}(f + \text{Id})^2$ et $\pi_2 = -\frac{1}{9}(f + 4\text{Id}) \circ (f - 2\text{Id})$.

6. Justifier que les endomorphismes π_1 et π_2 commutent.

SOLUTION :

Les endomorphismes π_1 et π_2 sont des combinaisons linéaires de puissances de f ou des « polynômes en f » donc ils commutent.

7. a. Que vaut l'endomorphisme $\pi_2 \circ \pi_1$?

SOLUTION :

On note θ , l'endomorphisme nul sur $\mathbb{R}^3$. On a

$$\pi_2 \circ \pi_1 = -\frac{1}{81}(f + \text{Id}) \circ (f + \text{Id})^2 \circ (f - 2\text{Id}) = -\frac{1}{81}(f + \text{Id}) \circ P(f) = -\frac{1}{81}(f + \text{Id}) \circ \theta = \theta.$$

$\pi_2 \circ \pi_1$ est l'endomorphisme nul

b. En déduire une inclusion entre $\ker(\pi_2)$ et $\text{Im}(\pi_1)$.

SOLUTION :

Soit $y \in \text{Im}(\pi_1)$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = \pi_1(x)$ donc $\pi_2(y) = \pi_2 \circ \pi_1(x) = \theta(x) = \vec{0}$.

Donc $y \in \text{Ker}(\pi_2)$. Finalement $\text{Im}(\pi_1) \subset \text{Ker}(\pi_2)$.

8. a. Montrer que $\pi_1 + \pi_2 = \text{Id}$.

SOLUTION :

On sait que f et Id commutent donc en développant,

$$\pi_1 + \pi_2 = \frac{1}{9}(f^2 + 2f + \text{Id}) - \frac{1}{9}(f^2 + 2f - 8\text{Id}) = \frac{1}{9}\text{Id} + \frac{8}{9}\text{Id} = \text{Id}.$$

b. En déduire une inclusion entre $\ker(\pi_2)$ et $\text{Im}(\pi_1)$.

SOLUTION :

Soit $x \in \text{Ker}(\pi_2)$ alors $(\pi_1 + \pi_2)(x) = \pi_1(x)$. Et comme $\pi_1 + \pi_2 = \text{Id}$, on a aussi $(\pi_1 + \pi_2)(x) = x$. Donc $x = \pi_1(x)$, cela montre que x est dans $\text{Im}(\pi_1)$. Donc $\text{Ker}(\pi_2) \subset \text{Im}(\pi_1)$.

9. Justifier que $\ker(\pi_2) = \text{Im}(\pi_1)$ et que $\ker(\pi_1) = \text{Im}(\pi_2)$.

SOLUTION :

Les inclusions de 7.b) et 8.b) donnent $\text{Ker}(\pi_2) = \text{Im}(\pi_1)$.

Comme π_1 et π_2 commutent, avec 7.a), on a aussi $\pi_1 \circ \pi_2 = \theta$ donc de même $\text{Im}(\pi_2) \subset \text{Ker}(\pi_1)$.

Comme en 8.b), $\pi_1 + \pi_2 = \text{Id}$ donne $\text{Ker}(\pi_1) \subset \text{Im}(\pi_2)$. Finalement $\text{Ker}(\pi_1) = \text{Im}(\pi_2)$.

10. Dédurre des questions 7.a) et 8.a) que π_1 et π_2 sont des projecteurs.

SOLUTION :

Avec 8(a), $\pi_1 = \text{Id} - \pi_2$ donc $\pi_1^2 = \pi_1 \circ (\text{Id} - \pi_2) = \pi_1 \circ \text{Id} - \underbrace{\pi_1 \circ \pi_2}_{=\theta \text{ selon 7(a)}} = \pi_1 - \theta = \pi_1$.

Ainsi, $\pi_1^2 = \pi_1$ et π_1 endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donc π_1 est un projecteur

Le raisonnement est analogue pour π_2 .

11. Montrer que π_2 est le projecteur sur G parallèlement à F . Identifier π_1 .

SOLUTION :

Soit $x_F \in F$ alors $\pi_2(x_F) = -\frac{1}{9}(f + 4\text{Id})((f - 2\text{Id})(x_F)) = -\frac{1}{9}(f + 4\text{Id})(\vec{0}) = \vec{0}$.

Soit $x_G \in G$ alors $\pi_2(x_G) = -\frac{1}{9}(f + 4\text{Id}) \circ (f - 2\text{Id})(x_G) = -\frac{1}{9}(f^2 + 2f - 8\text{Id})(x_G)$.

Or $x_G \in G = \text{Ker}((f + \text{Id})^2)$ donc $f^2(x_G) + 2f(x_G) + x_G = \vec{0}$. Donc $f^2(x_G) + 2f(x_G) = -x_G$.

Ainsi $\pi_2(x_G) = -\frac{1}{9}(f^2 + 2f - 8\text{Id})(x_G) = -\frac{1}{9}(-x_G - 8x_G) = x_G$.

On a montré que pour tout $x = x_F + x_G$, on a $\pi_2(x) = \pi_2(x_F) + \pi_2(x_G) = x_G$.

Comme $F \oplus G = \mathbb{R}^3$, on retrouve la définition de la projection sur G parallèlement à F .

On a aussi $\pi_1(x) = (\text{Id} - \pi_2)(x) = x - x_G = x_F$. Donc π_1 est la projection sur F parallèlement à G .

On pose maintenant

$$g = 2\pi_1 - \pi_2 \text{ et } h = f - g$$

- 12.** Justifier que g et h sont des polynômes de l'endomorphisme f .

SOLUTION :

On sait qu'une combinaison linéaire de polynômes de l'endomorphisme f est un polynôme de l'endomorphisme f . Or π_1 et π_2 sont des polynômes de l'endomorphisme f donc $g = 2\pi_1 - \pi_2$ est un polynôme de l'endomorphisme f . Donc $h = f - g$ aussi.

- 13.** Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de g dans cette base soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

SOLUTION :

On sait que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ donc en concaténant une base de F avec une base de G , on a une base de $\mathbb{R}^3$. On sait que F est de dimension 1 et donc G de dimension 2. Je note u_1 une base de F et (u_2, u_3) une base de G . Ainsi (u_1, u_2, u_3) une base de $\mathbb{R}^3$.

On calcule avec la question 11, $g(u_1) = (2\pi_1 - \pi_2)(u_1) = 2\pi_1(u_1) - \pi_2(u_1) = 2u_1$ car $\pi_2(u_1) = \vec{0}$.

$g(u_2) = (2\pi_1 - \pi_2)(u_2) = 2\pi_1(u_2) - \pi_2(u_2) = -u_2$ car $\pi_1(u_2) = \vec{0}$.

$g(u_3) = (2\pi_1 - \pi_2)(u_3) = 2\pi_1(u_3) - \pi_2(u_3) = -u_3$ car $\pi_1(u_3) = \vec{0}$.

On obtient donc, dans la base (u_1, u_2, u_3) , la matrice annoncée.

- 14.** Montrer que $h = (f - 2\text{Id}) \circ \pi_1 + (f + \text{Id}) \circ \pi_2$.

En déduire que $h^2 = 0$.

SOLUTION :

On calcule avec le 8(a),

$$(f - 2\text{Id}) \circ \pi_1 + (f + \text{Id}) \circ \pi_2 = f \circ \pi_1 - 2\pi_1 + f \circ \pi_2 + \pi_2 = f \circ \underbrace{(\pi_1 + \pi_2)}_{=\text{Id}} - 2\pi_1 + \pi_2$$

$$= f - 2\pi_1 + \pi_2 = f - (2\pi_1 - \pi_2) = f - g = h.$$

En tant que polynômes de f , $(f + \text{Id})$, $(f - 2\text{Id})$, π_1 , π_2 commutent donc

$$\begin{aligned} h^2 &= (f - 2\text{Id})^2 \circ \pi_1^2 + 2(f - 2\text{Id}) \circ (f + \text{Id}) \circ \pi_1 \circ \pi_2 + (f + \text{Id})^2 \circ \pi_2^2 \\ &= (f - 2\text{Id})^2 \circ \pi_1 + (f + \text{Id})^2 \circ \pi_2 = \frac{1}{9}(f - 2\text{Id})^2 \circ (f + \text{Id})^2 - \frac{1}{9}(f + \text{Id})^2 \circ (f + 4\text{Id}) \circ (f - 2\text{Id}) \\ &= \frac{1}{9}(f - 2\text{Id}) \circ P(f) - \frac{1}{9}(f + 4\text{Id}) \circ P(f) = \theta. \end{aligned}$$

Car $P(f) = \theta$.

- 15.** Conclure.

SOLUTION :

On a $f = f - g + g = h + g$. Or $h^2 = \theta$ donc h est nilpotente et g a une matrice diagonale dans une base de $\mathbb{R}^3$ donc g est diagonalisable.

Finalement f est somme d'un endomorphisme nilpotent h et d'un endomorphisme g diagonalisable. Et g et h commutent car ce sont des polynômes en f .

Problème

Dans ce problème, on considère un réel μ et un réel strictement positif a , et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$F_{\mu,a} : x \mapsto \exp \left(- \exp \left(\frac{\mu - x}{a} \right) \right)$$

Partie I

Soient a et μ deux réels tels que $a > 0$.

1. a. Justifier que $F_{\mu,a}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression de sa dérivée notée $f_{\mu,a}$ et de sa dérivée seconde $f'_{\mu,a}$.

SOLUTION :

$\exp$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, donc, par composition, $F_{\mu,a}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_{\mu,a}(x) &= F_{\mu,a}(x) = \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right) \times -\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right) \times \frac{-1}{a} \\ &= \frac{1}{a} \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right) \exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right) \\ f'_{\mu,a}(x) &= \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right) \left(\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right)^2 - \frac{1}{a} \exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right) \exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right) \right) \\ &= \frac{1}{a^2} \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right) \exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right) \left(\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

- b. En déduire les variations et la convexité de $F_{\mu,a}$ sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites de $F_{\mu,a}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Donner l'allure de la courbe de $F_{\mu,a}$ en y faisant figurer le point d'inflexion.

SOLUTION :

Comme $\exp$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et $a > 0$, $F_{\mu,a} > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $F_{\mu,a}$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	μ	$+\infty$
$\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right) - 1$	$\searrow$	0	$\searrow$
$F''_{\mu,a}(x)$	+	0	-
$F'_{\mu,a}(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
	convexe	inflexion	concave
$F_{\mu,a}(x)$	0	$\nearrow$	$\nearrow$ 1

En $-\infty$: $F_{\mu,a} : x \mapsto \underbrace{\exp\left(-\underbrace{\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)}_{\rightarrow +\infty}\right)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow 0$ et la courbe a une asymptote horizontale d'équation

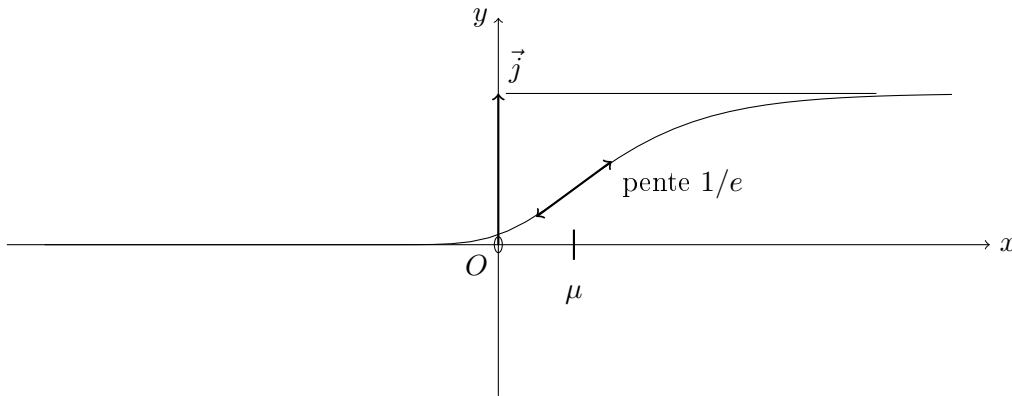
$y = 0$.

En $+\infty$: $F_{\mu,a} : x \mapsto \underbrace{\exp\left(-\underbrace{\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)}_{\rightarrow -\infty}\right)}_{\rightarrow 0} \rightarrow e^0 = 1$ par continuité de $\exp$ en 0 et asymptote

d'équation $y = 1$

En μ , point d'inflexion, valeur $F_{\mu,a}(\mu) = \frac{1}{e}$ et une pente de $F'_{\mu,a}(\mu) = \frac{1}{ae}$

Tracé : les deux asymptotes $y = 0$ et $y = 1$, et la tangente tracée en μ , valeur qui peut être positive ou négative.



c. Montrer que $F_{\mu,a}$ a est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer.

On note G la réciproque de $F_{0,1}$. Expliciter G .

SOLUTION :

$F_{\mu,a}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc

$$\text{bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \left] \lim_{-\infty} F_{\mu,a}, \lim_{+\infty} F_{\mu,a} \right[=]0, 1[$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0, 1[$

$$F_{0,1}(x) = y \iff \exp(-\exp(-x)) = y \iff -\exp(-x) = \ln(y)$$

car $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\exp(\cdots)$ et y en sont éléments ; donc

$$F_{0,1}(x) = y \iff \exp(-x) = -\ln(y) \iff -x = \ln(-\ln(y))$$

car $y \in]0, 1[$ donc $\ln(y) < 0$ et $-\ln(y) \in \mathbb{R}_+^*$ et pour la même raison que précédemment ; donc

$$F_{0,1}(x) = y \iff x = -\ln(-\ln(y))$$

Donc la réciproque de $F_{0,1}$ est $G : y \mapsto -\ln(-\ln(y))$ définie sur $]0, 1[$

2. Soient a et μ deux réels tels que $a > 0$.

Montrer que $f_{\mu,a}$ est une densité, et que $F_{\mu,a}$ est la fonction de répartition associée.

SOLUTION :

Méthode

On peut répondre à la question dans un ordre ou dans l'autre

$f_{\mu,a}$ est continue sur $\mathbb{R}$, positive.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,a}(t) dt$ est impropre en $\pm\infty$.

Soit $A < 0$: $\int_A^0 f_{\mu,a}(t) dt = [F_{\mu,a}(t)]_A^0 = F_{\mu,a}(0) - F_{\mu,a}(A) \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} F_{\mu,a}(0)$

donc $\int_{-\infty}^0 f_{\mu,a}(t) dt$ converge et $= F_{\mu,a}(0)$.

Soit $A > 0$: $\int_0^A f_{\mu,a}(t) dt = [F_{\mu,a}(t)]_0^A = F_{\mu,a}(A) - F_{\mu,a}(0) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 - F_{\mu,a}(0)$

donc $\int_0^{+\infty} f_{\mu,a}(t) dt$ converge et $= 1 - F_{\mu,a}(0)$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,a}(t) dt$ converge et est égale à 1.

Donc $f_{\mu,a}$ est bien une densité de probabilité.

Et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^x f_{\mu,a}(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_{\mu,a}(t) dt + \int_0^x f_{\mu,a}(t) dt = F_{\mu,a}(0) + F_{\mu,a}(x) - F_{\mu,a}(0) = F_{\mu,a}(x)$$

donc $F_{\mu,a}$ est bien la fonction de répartition associée à $f_{\mu,a}$.

VARIANTE : on peut, plus rapidement, répondre à l'envers :

$F_{\mu,a}$ est continue sur $\mathbb{R}$, croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{-\infty} F_{\mu,a} = 0$ et $\lim_{+\infty} F_{\mu,a} = 1$ donc $F_{\mu,a}$ est une fonction de répartition.

De plus, $F_{\mu,a}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc

$F_{\mu,a}$ est une fonction de répartition d'une variable à densité, et une densité est $F'_{\mu,a} = f_{\mu,a}$

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on suppose que toutes les variables aléatoires introduites dans la suite du problème sont définies sur cet espace probabilisé.

Soient μ et a des réels tels que $a > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) , ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\mu, a)$, si elle admet $f_{\mu,a}$ comme densité.

3. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

Soit μ un réel et a un réel strictement positif.

Montrer que la variable aléatoire $X = aZ + \mu$ est une variable aléatoire à densité qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) .

SOLUTION :

On a $f_{0,1}(x) = \exp(-\exp(-x)) \exp(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comme $a \neq 0$, par transformation affine, $X = aZ + \mu$ est une variable à densité et une densité est :

$$x \mapsto \frac{1}{|a|} f_{0,1}\left(\frac{x-\mu}{a}\right) = \frac{1}{a} \exp\left(-\exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{a}\right)\right)\right) \exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{a}\right)\right) = f_{\mu,a}(x)$$

Donc, $X = aZ + \mu \hookrightarrow \mathcal{G}(\mu, a)$

On admet que réciproquement, si X suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) , alors $Z = \frac{X-\mu}{a}$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

4. a. Soit U une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(-\ln(U))$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

SOLUTION :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$[Y \leq x] = [-\ln(-\ln(U)) \leq x] = [\ln(-\ln(U)) \geq -x] = [-\ln(U) \geq \exp(-x)]$$

car $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; donc

$$[Y \leq x] = [\ln(U) \leq -\exp(-x)] = [U \leq \exp(-\exp(-x))]$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(-x) > 0$ donc $-\exp(-x) < 0$ et $0 < \exp(-\exp(-x)) < e^0$ et $\exp(-\exp(-x)) \in [0, 1]$.

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction de répartition de U est $F_U(t) = t$

Donc $P(Y \leq x) = P(U \leq \exp(-\exp(-x))) = \exp(-\exp(-x)) = F_{0,1}(x)$ fonction de répartition d'une v.a qui suit la loi $\mathcal{G}(0, 1)$.

Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(0, 1)$

AUTRE MÉTHODE : en se servant de la question 1.c)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$[Y \leq x] = [-\ln(-\ln(U)) \leq x] = [G(U) \leq x] = [U \leq F_{0,1}(x)]$$

car G est la bijection réciproque de $F_{0,1}$, qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc $P(Y \leq x) = P(U \leq F_{0,1}(x)) = F_{0,1}(x)$ car $F_{0,1}(x) \in]0, 1[$ d'après la question 1.

Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(0, 1)$

- b. Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function g = gumbel(mu,a)` renvoyant une réalisation d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(\mu, a)$.

SOLUTION :

On part d'une loi uniforme sur $]0, 1[$ que l'on transforme pour obtenir $Z = Y \hookrightarrow \mathcal{G}(0, 1)$ que l'on transforme pour obtenir $X = aZ + \mu \hookrightarrow \mathcal{G}(\mu, a)$

```
function g=gumbel(mu,a)
    U=rand()
    Y=-log(-log(U))
    g=a*Y+mu
endfunction
```

5. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) et $Z = \frac{X - \mu}{a}$.

- a. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \ln(u) e^{-u} du$ converge.

SOLUTION :

$u \mapsto \ln(u) e^{-u}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} \ln(u) e^{-u} du$ est impropre en $\pm\infty$.

En $+\infty$: $\ln(u) e^{-u} = \frac{\ln(u)}{e^{u/2}} e^{-u/2}$ avec $\ln(u) = o(e^{u/2})$ donc $\ln(u) e^{-u} = o(e^{-u/2})$

et $\int_1^{+\infty} e^{-u/2} du$ converge, donc par domination de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \ln(u) e^{-u} du$ converge.

En 0 : $\ln(u) e^{-u} \sim \ln(u) = o\left(\frac{1}{u^{1/2}}\right)$ et $\int_0^1 \frac{1}{u^{1/2}} du$ converge, donc par domination par une fonction positive, $\int_0^{+\infty} \ln(u) e^{-u} du$ converge également.

D'où $\boxed{\int_0^{+\infty} \ln(u) e^{-u} du \text{ converge.}}$

- b. À l'aide du changement de variable $t = e^{-u}$, montrer que l'intégrale $\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$ converge.

On notera dans la suite :

$$\gamma = - \int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$$

SOLUTION :

Pour tout $t \in]0, 1[$: $-\ln(t) > 0$ donc $t \mapsto \ln(-\ln(t))$ est continue sur $]0, 1[$ et $\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$ est impropre en 0 et en 1.

On effectue le changement de variable $t = e^{-u} = \varphi(u)$ dans $\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$

φ est bijective de $]0, +\infty[$ dans $]0, 1[$ (fonction continue et strictement décroissante), décroissante, et de classe C^1 .

$\varphi'(u) = -e^{-u}$ pour tout $u \in]0, +\infty[$.

Donc $\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$ est de même nature que $\int_{+\infty}^0 \ln(-\ln(e^{-u})) \times -e^{-u} du$

Or $\ln(-\ln(e^{-u})) e^{-u} = \ln(u) e^{-u}$ et $\int_0^{+\infty} \ln(u) e^{-u} du$ converge.

Donc $\boxed{\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt \text{ converge et est égale à } \int_0^{+\infty} \ln(u) e^{-u} du},$

- c. Montrer que Z admet une espérance et que $E(Z) = \gamma$.

On pourra utiliser le changement de variable $u = \exp(-\exp(-x))$.

SOLUTION :

Z a une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{0,1}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp(-\exp(-x)) \exp(-x) dx$, impropre en $\pm\infty$ converge absolument.

ce qui équivaut à la convergence simple de $\int_0^{+\infty} \dots dx$ et de $\int_{-\infty}^0 -\dots dx$

donc à la convergence simple de $\int_{-\infty}^{+\infty} x \exp(-\exp(-x)) \exp(-x) dx$.

Méthode

$u = \exp(-\exp(-x))$. dans $\int_{-\infty}^{+\infty} x \exp(-\exp(-x)) \exp(-x) dx$ est le changement dans le sens compliqué. Il faut préparer l'expressions.

Variante : on pense que cela correspond à l'intégrale précédente, et on fait le changement dans le sens simple.

Variante : on transforme le changement compliqué par sa réciproque qui elle est simple.

$u \mapsto -\ln(-\ln(u)) = G(u)$ réciproque de $F_{1,0}$ d'après la question 1.b) est bijective de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$, croissante et de classe C^1 .

$$G'(u) = \frac{-1}{-\ln(u)} \frac{-1}{u} = \frac{-1}{u \ln(u)}$$

Donc, par changement de variable $x = -\ln(-\ln(u))$

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp(-\exp(-x)) \exp(-x) dx$$

est de même nature que $\int_0^1 -\ln(-\ln(u)) \times u \times -\ln(u) \times \frac{-1}{u \ln(u)} du$ qui est convergente et vaut γ .

Donc (absolue convergence) $\boxed{Z \text{ a une espérance et } E(Z) = \gamma}$, l'intégrale sans valeur absolue.

VARIANTE Dans $\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$ on effectue le changement $t = \exp(-\exp(-x)) = F_{0,1}(x) = \varphi(x)$

$\varphi = F_{0,1}$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$, de classe C^1 est croissante et

$\varphi'(x) = \exp(-\exp(-x)) \exp(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc par changement de variable,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(-\ln(\exp(-\exp(-x)))) \exp(-\exp(-x)) \exp(-x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -x \exp(-\exp(-x)) \exp(-x) dx \end{aligned}$$

converge et est égale à $-\gamma$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x \exp(-\exp(-x)) \exp(-x) dx$ converge absolument est égale à γ .

et absolue convergence) $\boxed{Z \text{ a une espérance et } E(Z) = \gamma}$.

d. En déduire que X admet une espérance et déterminer $E(X)$ en fonction de γ, μ et a .

SOLUTION :

$Z = \frac{X - \mu}{a}$ donc $X = aZ + \mu$. D'après la question précédente, Z admet une espérance donc X aussi, et par linéarité de l'espérance $\boxed{E(X) = a\gamma + \mu}$

On admet que X admet un moment d'ordre 4 et en particulier que la variance de X notée σ^2 est égale à $a^2 c$ où c est un réel strictement positif indépendant de a et de μ .

6. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes, de même loi de Gumbel de paramètre $(0,1)$.

- a. Montrer que $-Z$ est une variable aléatoire à densité, et déterminer une densité g de $-Z$.

SOLUTION :

Par transformation affine, $-Z$ est à densité et a pour densité $g : t \mapsto \frac{1}{|-1|} f_{0,1} \left(\frac{t}{-1} \right) = f_{0,1}(-t)$

$$f_{0,1}(-t) = \exp(-\exp(-(-t))) \exp(-(-t))$$

et $\boxed{g : t \mapsto \exp(-\exp(t)) \exp(t)}$

- b. Montrer que pour tout réel x , l'intégrale $\int_0^{+\infty} u e^{-(e^{-x}+1)u} du$ converge et déterminer sa valeur.

SOLUTION :

Soit $\alpha = e^{-x} + 1$, $\alpha > 0$

Soit $Y \hookrightarrow \varepsilon(\alpha)$ alors Y a une espérance et $E(Y) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{e^{-x} + 1} = \int_0^{+\infty} u (e^{-x} + 1) e^{-(e^{-x}+1)u} du$

Donc $\boxed{\int_0^{+\infty} u e^{-(e^{-x}+1)u} du \text{ converge et vaut } \frac{1}{(e^{-x} + 1)^2}}$

- c. À l'aide du changement de variable $u = e^t$, en déduire que pour tout réel x , l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t) dt \text{ converge.}$$

SOLUTION :

$\int_0^{+\infty} u e^{-(e^{-x}+1)u} du$ converge et $\exp$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$, croissante et de classe C^1 .

$\exp'(t) = e^t$. D'où par changement de variable $u = e^t$, la convergence et l'égalité :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u e^{-(e^{-x}+1)u} du &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^t e^{-(e^{-x}+1)e^t} e^t dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t} \exp(-(e^{-x} + 1)e^t) dt \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\exp(-(x-t))) \exp(-(x-t)) \exp(-\exp(t)) \exp(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-e^{t-x} - e^t) e^{2t-x} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(e^{-x} + 1)e^t) e^{2t} e^{-x} dt \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)dt \text{ converge et vaut } e^{-x} \int_0^{+\infty} u e^{-(e^{-x}+1)u} du = \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2}}$

- d. Montrer que $Y - Z$ est une variable aléatoire à densité, de densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

SOLUTION :

Méthode

Deux hypothèses possibles pour le théorème de convolution.

Ou bien l'une des densité est bornée

Ou bien la convolution converge et donne une fonction continue, sauf en un nombre fini de point.

Y et $-Z$ sont deux variable indépendantes (coalition) à densité, et, leur convolution

pour tout $x \in \mathbb{R} : h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)dt = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ converge.

De plus h est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc $Y - Z$ est à densité, de densité $x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

VARIANTE : $f_{0,1}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0$ et $f_{0,1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $f_{0,1}$ est bornée. Donc $Y - Z$ est à densité et une densité est donnée par convolution.

Partie II

Soient μ et a deux réels tels que $a > 0$.

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant chacune la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) .

On définit pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

et

$$C_n = \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n}$$

7. Méthode des moments

- a.** Montrer que si les suites de variables aléatoires $(V_n)_{n \geq 0}$ et $(W_n)_{n \geq 0}$ convergent respectivement en probabilité vers deux variables aléatoires V et W , alors pour tous réels α et β , la suite de variables aléatoires $(\alpha V_n + \beta W_n)_{n \geq 0}$ converge en probabilité vers $\alpha V + \beta W$.

SOLUTION :

On suppose α et β non tous deux nuls, sinon il n'y a rien à démontrer...

Pour $\varepsilon > 0$ donné et $n \in \mathbb{N}$, par l'inégalité triangulaire,

$$|(\alpha V_n + \beta W_n) - (\alpha V + \beta W)| \leq |\alpha| |V_n - V| + |\beta| |W_n - W|$$

Donc si $|V_n - V| < \varepsilon$ et $|W_n - W| < \varepsilon$ alors $|(\alpha V_n + \beta W_n) - (\alpha V + \beta W)| < (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon$.

Par contraposée, on a :

$$|(\alpha V_n + \beta W_n) - (\alpha V + \beta W)| \geq (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon \subset [|V_n - V| \geq \varepsilon] \cup [|W_n - W| \geq \varepsilon]$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|(\alpha V_n + \beta W_n) - (\alpha V + \beta W)| \geq (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon) &\leq \mathbb{P}(|V_n - V| \geq \varepsilon) \cup \mathbb{P}(|W_n - W| \geq \varepsilon) \\ &\leq \mathbb{P}(|V_n - V| \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(|W_n - W| \geq \varepsilon) \\ &\text{car } \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

Mais $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent en probabilité respectivement vers V et W donc

$\mathbb{P}(|V_n - V| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\mathbb{P}(|W_n - W| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$; d'où, par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|(\alpha V_n + \beta W_n) - (\alpha V + \beta W)| \geq (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon) = 0$$

ce qui établit la convergence en probabilité de $(\alpha V_n + \beta W_n)$ vers $\alpha V + \beta W$.

- b.** Montrer que les variables aléatoires M_n et C_n convergent en probabilité respectivement vers $E(X_1)$ et $E(X_1^2)$.

SOLUTION :

On peut appliquer la loi faible des grands nombres à la suite des v.a (X_i) : les v.a (X_i) sont indépendantes identiquement distribuées et admettent un moment d'ordre 2. Donc la suite M_n de leur moyenne converge en probabilité vers leur espérance commune $E(X_1)$.

On peut appliquer la loi faible des grands nombres à la suite des v.a (X_i^2) : les v.a (X_i) sont indépendantes donc par le lemme des coalitions, les v.a (X_i^2) sont indépendantes ; elles sont identiquement distribuées et admettent un moment d'ordre 2 car X_i admet un moment d'ordre 4. Donc la suite C_n de leur moyenne converge en probabilité vers leur espérance commune $E(X_1^2)$.

- c. Montrer que $A_n = \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{C_n - M_n^2}$ est un estimateur convergent de a .

SOLUTION :

$A_n = \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{C_n - M_n^2}$ est un estimateur de a car il est défini à l'aide d'un n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ et ne dépend pas de a .

D'une part $M_n \xrightarrow{\text{Proba}} E(X_1)$ et la fonction $t \mapsto t^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $M_n^2 \xrightarrow{\text{Proba}} E(X_1)^2$.

Et d'autre part $C_n \xrightarrow{\text{Proba}} E(X_1^2)$; donc d'après la question 7.a) :

$$C_n - M_n^2 \xrightarrow{\text{Proba}} E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \sigma^2 = a^2 c.$$

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on a $g(C_n - M_n^2) =$

$$\sqrt{C_n - M_n^2} \xrightarrow{\text{Proba}} g(a^2 c) = a\sqrt{c}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{c}}t$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $A_n = \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{C_n - M_n^2} \xrightarrow{\text{Proba}} a$.

$A_n = \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{C_n - M_n^2} \text{ est un estimateur convergent de } a$

- d. Montrer alors que $S_n = M_n - A_n \gamma$ est un estimateur convergent de μ .

SOLUTION :

D'après la question 7.a, $S_n = M_n - A_n \gamma$ converge en probabilité vers $E(X_1) - a\gamma$; et d'après Q.5.b), $E(X_1) - a\gamma = \mu$.

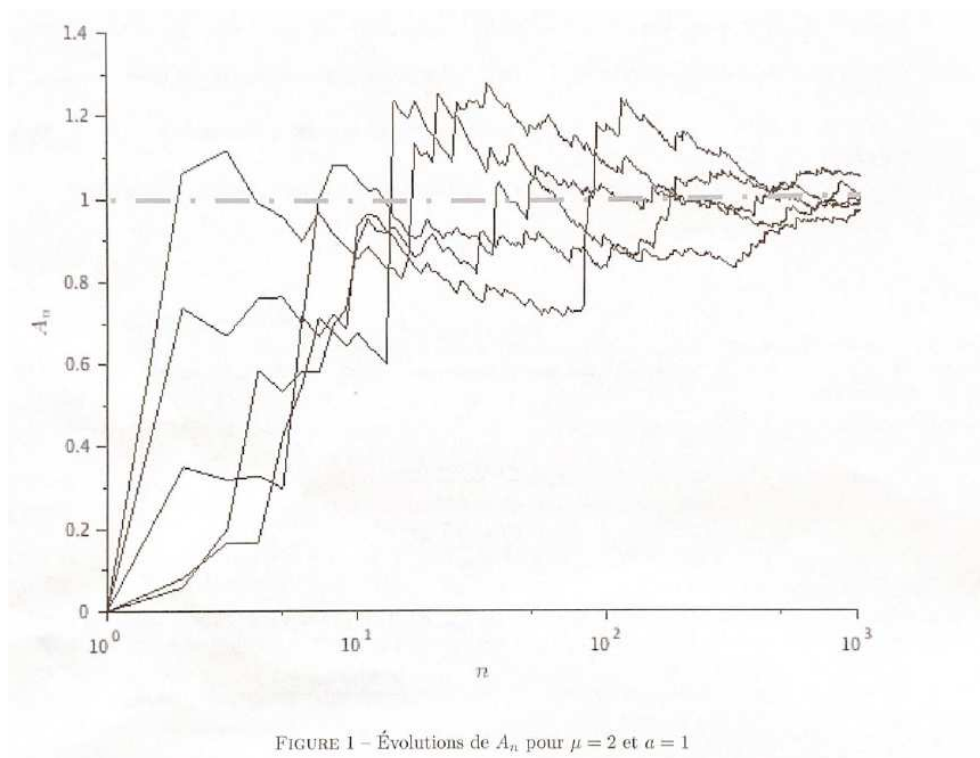
8. On suppose qu'ont été définies précédemment dans un script Scilab des valeurs approchées de γ et de c , dans des variables notées **gamma** et **c**.

- a. Écrire une fonction Scilab d'en-tête **function A = estimateur-a(X)** renvoyant la valeur de l'estimateur A_n étudié précédemment, lorsque X est un vecteur-ligne de longueur n dont les coefficients sont des réalisations de $X_1, X_2, \dots, X_n$.

SOLUTION :

```
function A = estimateur-a(X)
    M = mean(X)
    C = mean(X.^2)
    A = (1/sqrt(c)) * sqrt(C-M^2)
endfunction
```

- b. On a tracé sur la figure 1 l'évolution de cinq réalisations indépendantes de cet estimateur A_n , pour le cas particulier $\mu = 2$ et $a = 1$.
Commenter ce graphique.

**SOLUTION :**

Les valeurs simulées semblent converger vers 1. Ce qui est confirmé par le fait que A_n converge en probabilité vers $a = 1$ (cf Q.7.c).