DM n° 12 - pour le 09/03/26

Exercice : les matrices de Gram

1. Dans cette question, on suppose que $n = p = 3$ et on considère les trois vecteurs:

$$u_1 = (1, -1, 0), u_2 = (1, 0, -1), u_3 = (1, 1, 1)$$

   (a) On calcule :

$$\langle u_1, u_1 \rangle = 2, \langle u_1, u_2 \rangle = 1, \langle u_1, u_3 \rangle = 0, ...$$

   et on obtient aisément la matrice de Gram associée à (u_1, u_2, u_3) :

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   Cette matrice est symétrique donc diagonalisable.

   (b)

$$G^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 4G - 3I_3$$

   (c) On en déduit que le polynôme $P = X^2 - 4X + 3$ est annulateur de G. Comme

$$Sp(G) \subset \{\text{racines de P}\}$$

   on trouve que $Sp(G) \subset \{1, 3\}$.

   De plus, $rg(G - I) = rg(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}) = 2$ et

   $rg(G - 3I) = rg(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1$

   Par le théorème du rang, $\dim(Ker(G - I)) = 1$ et $\dim(Ker(G - 3I) = 2$ et en particulier 1 et 3 sont bien valeurs propres de G.

   Bilan : $\boxed{Sp(G) = \{1, 3\} \text{ et les dimensions des sous-espaces propres associés sont 1 et 2}}$

   Dans toute la suite de l'exercice, on revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 2.

2. Soit p un entier appartenant à $[\![1, n]\!]$ et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note G la matrice de Gram de $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

   (a) Pour tout $(i, j) \in [[1, p]]^2$,

$$(G)_{i,j} = \langle u_i, u_j \rangle = \langle u_j, u_i \rangle = (G)_{j,i} \text{ (par symétrie du produit scalaire)}$$

   donc la matrice G est symétrique. D'après le cours, elle est diagonalisable.

   (b) Pour tout $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned} q_G(x_1, ..., x_p) &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} (G)_{i,j} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \langle u_i, u_j \rangle x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{p} x_i \left\langle u_i, \sum_{j=1}^{p} x_j u_j \right\rangle \text{ par bilinéarité du produit scalaire} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i u_i, \sum_{j=1}^{p} x_j u_j \right\rangle \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{p} x_i u_i \right\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

   D'après le cours, on peut dire que $Sp(G) \subset \mathbb{R}_+$.

3. Soit encore p un entier appartenant à $[\![1, n]\!]$ et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On pose F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ et on note G la matrice de Gram de $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

   On considère des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et on pose $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

   (a) On suppose que $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j = 0$.

$$\begin{aligned} GX &= \begin{pmatrix} \langle u_1 \mid u_1 \rangle & \langle u_1 \mid u_2 \rangle & \ldots & \langle u_1 \mid u_p \rangle \\ \langle u_2 \mid u_1 \rangle & \langle u_2 \mid u_2 \rangle & \ldots & \langle u_2 \mid u_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle u_p \mid u_1 \rangle & \langle u_p \mid u_2 \rangle & \ldots & \langle u_p \mid u_p \rangle \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} \langle u_1, u_j \rangle .\alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} \langle u_p, u_j \rangle .\alpha_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle u_1, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j.u_j \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle u_p, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j.u_j \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Donc $GX = 0$.

   (b) En reprenant les calculs précédents, on voit que $GX = 0$ si et seulement si

$$\forall i \in [[1, p]], \left\langle u_i, \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [[1, p]], \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j \perp u_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j \in F^{\perp}$$

   Mais comme $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j \in F$, ce vecteur appartient à $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.
   Donc $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j = 0$.

(c) On raisonne par double implication.

- Supposons que G est inversible. Montrons que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre. Soit $(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $\sum_{j=1}^p \alpha_j u_j = 0$. Notons $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$.

  Alors $GX = 0$, mais comme G est inversible, cela implique que $X = 0$, donc $\alpha_1 = ... = \alpha_p = 0$ et la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre.
- Supposons que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre.

  Alors pour tout $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

  $$GX = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^p \alpha_j u_j = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0 \text{ (par liberté de la famille)} \Leftrightarrow X = 0$$

  Donc $Ker(G) = \{0\}$ et par le th. du rang matriciel, $rg(G) = p$: la matrice G est inversible.

<u>Bilan :</u> $\boxed{\text{la famille } (u_1, u_2, \dots, u_p) \text{ est libre si et seulement si la matrice } G \text{ est inversible}}$

4. On considère dans cette question une famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \|v_i\| = 1 \text{ et } \quad \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j, \quad \|v_i - v_j\| = 1$$

(a) Pour tous a et b dans $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|a - b\|^2 &= \langle a - b, a - b \rangle \\ &= \langle a, a \rangle - \langle a, b \rangle - \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle \text{ par bilinéarité du produit scalaire} \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

(b) On en déduit que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \frac{1}{2}(\|v_i\|^2 + \|v_j\|^2 - \|v_i - v_j\|^2) = \frac{1}{2}$$

D'où la matrice de Gram de $(v_1, \cdots, v_n)$:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(c) On pose $A = 2G$ et on note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 et enfin I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

i.

$$A = 2G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} = I_n + J$$

D'où $A^2 = I_n + 2J + J^2 = I_n + 2J + nJ = I_n + (n+2)J$. Comme $J = A - I_n$, on a enfin

$$A^2 = I_n + (n+2).(A - I_n) = (n+2)A - (n+1)I_n$$

ii. On en déduit que

$$(n+2)A - A^2 = (n+1)I_n \Leftrightarrow A.(\frac{n+2}{n+1}I_n - \frac{1}{n+1}A) = I_n$$

Par conséquent A est inversible (et d'inverse $A^{-1} = \frac{n+2}{n+1}I_n - \frac{1}{n+1}A$).

iii. Comme A est inversible, il en est de même de la matrice de Gram G et d'après les questions précédentes, la famille $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est libre. Comme elle est de cardinal $n = \dim(\mathbb{R}^n)$, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^n$.

5. Soit $\mathscr{B}_1 = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ une base quelconque de $\mathbb{R}^n$ et soit G la matrice de Gram de $(w_1, w_2, \dots, w_n)$.
Soit $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
On pose $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} \langle x \mid w_1 \rangle \\ \langle x \mid w_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x \mid w_n \rangle \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(a) Comme la famille $\mathscr{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^n$, c'est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, donc sa matrice de Gram G est inversible.
De plus, d'après les calculs en 3.a),

$$GX = \begin{pmatrix} \left\langle w_1, \sum_{j=1}^p \alpha_j.w_j \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle w_p, \sum_{j=1}^p \alpha_j.w_j \right\rangle \end{pmatrix} = Z$$

et ainsi $X = G^{-1}Z$.

(b) Soit encore $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$. Soit $i \in [[1, n]]$. Alors x vérifie la propriété :

$$(*) \forall j \in [\![1, n]\!] \quad \langle x \mid w_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

si et seulement si (avec les notations précédentes), et en notant $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ le ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$Z = E_i \Leftrightarrow GX = E_i \Leftrightarrow X = G^{-1}E_i \Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}_1}(x) = G^{-1}E_i$$

Comme un vecteur est déterminé de façon unique par sa matrice dans une base, il existe bien un unique vecteur x qui vérifie la condition $(*)$. On note ce vecteur w_i^*.
Ceci étant vrai pour tout $i \in [[1, n]]$, il existe donc bien une unique famille $\mathscr{B}_1^* = (w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \langle w_i^* \mid w_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

(c) Montrons que la famille $\mathscr{B}_1^*$ est libre. Soit $(\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i^* = 0$$

Alors pour tout $j \in [[1, n]]$,

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i^*; w_j \right\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle w_i^*, w_j \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \beta_j = 0 \text{ par hypothèse sur } w_i^* \end{aligned}$$

Donc la famille $\mathscr{B}_1^*$ est libre. De plus $Card(\mathscr{B}_1^*) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$ donc $\mathscr{B}_1^*$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j$. Alors avec le calcul ci-dessus, on voit que pour tout $i \in [[1, n]]$, $\langle x, w_i^* \rangle = \alpha_i$. Par conséquent la matrice de x dans la base $\mathcal{B}_1$ est donnée par :

$$Mat_{\mathcal{B}_1}(x) = \begin{pmatrix} \langle x, w_1^* \rangle \\ \cdots \\ \langle x, w_n^* \rangle \end{pmatrix}$$