Devoir surveillé n°8 - 18/03/2026

Consignes : Vous devez numéroter les pages et encadrer à la règle vos résultats.

Exercice 1

Etant donnée une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

$$ker(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \ MX = 0\} \ \text{ et } \ Im(M) = \{MX, \ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$$

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$ et on note $\|\|$ sa norme associée.
On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier naturel k non nuls tels que $A^k = {}^tA$. On pose alors $B = {}^tAA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer ${}^tB$ et établir que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle BX, X\rangle = \|AX\|^2$.
2. Montrer que B est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont positives.
3. Prouver que $B^k = B$. Quelles sont les valeurs propres possibles de B ?
4. Justifier que $B^2 = B$.
5. Montrer que: $ker(B) = ker(A)$ puis que : $Im(B) = Im(A)$.
6. Etablir que : $\forall X \in Im(A)$, $\|AX\| = \|X\|$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{1}{5}[x^2(1 - x^2) + y^2(1 - y^2) + 2xy]$$

On considère également la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \ \text{ avec } (u_0, u_1) \in [0, 1]^2$$

1. Etude de f
   (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, puis calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (b) Si (a, b) est un point critique de f, justifier que $a = b$ puis déterminer tous les points critiques de f, ainsi que la valeur de f en chacun de ses points critiques.

   On admettra dans toute la suite que :

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \leq \frac{2}{5}(x^2 + y^2) - \frac{1}{10}(x^2 + y^2)^2$$

   (c) Préciser le ou les extrema de la fonction $g : t \mapsto \dfrac{2t}{5} - \dfrac{t^2}{10}$.
   (d) Démontrer que la fonction f possède un maximum et qu'elle n'est pas minorée.

2. Python : écrire un programme Python:
   - une fonction intitulée `def f(x,y):` qui définit la fonction f, puis
   - une fonction intitulée `def u(n,a,b):` prenant comme paramètre un entier n et deux réels a et b appartenant à $[0,1]$, et qui renvoie le terme n-ième terme u_n de la suite sachant que $u_0 = a$ et $u_1 = b$.

3. Etude de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. On considère la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1}) \text{ avec } a_0 = u_0 \text{ et } a_1 = u_1$$

   (a) Démontrer que : $\forall n \geq 0,\ 0 \leq u_n \leq 1$.
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1})$.

   (b) Justifier que : $\forall n \geq 0,\ u_n \leq a_n$.

   (c) Etablir l'existence de quatre réels λ, μ, r, s tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda r^n + \mu s^n$$

   puis étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Problème : discrétisées de variables à densité

Soit x un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie réelle de x c'est-à-dire l'unique entier $\lfloor x \rfloor = N$ tel que $N \leqslant x < N+1$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On définit X_d sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_d(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor.$$

On admet que X_d est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On l'appelle "la discrétisée de X".

Le problème étudié dans cet exercice consiste :

- à étudier quelques propriétés de la discrétisée de variables suivant certaines lois usuelles (**Partie 1**)
- puis à étudier plus spécifiquement le cas où les variables possèdent une densité définie par un polynôme (**Partie 2**)
- et enfin à établir qu'une variable discrète, satisfaisant à certaines conditions, est la variable discrétisée d'une variable à densité (**Partie 3**).

Les Parties 1, 2 et 3 sont largement indépendantes.

Partie 1 : Calculs de discrétisées

1. Python
Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[0,a]$ $(a \in \mathbb{R}_+)$ et X_d sa discrétisée. Ecrire une fonction Python intitulée `def Xd(a):` qui à un réel a positif fourni par l'utilisateur renvoie une réalisation de X_d.

2. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f. Montrer que:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{P}(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x)dx$$

3. Soit N un entier naturel non nul et X une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, N]$.
Déterminer la loi de X_d (on précisera les valeurs prises par X_d).

4. Etablir que l'on définit bien une variable aléatoire discrète Y en posant :

$$Y(\Omega) = \{1, 2 \ldots 9\} \quad \text{et} \quad \forall k \in Y(\Omega),\ \mathrm{P}(Y = k) = \frac{1}{\ln(10)} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

Proposer une densité f telle que si une variable aléatoire X posséde f pour densité alors sa discrétisée X_d suit la loi de Y.

5. Soient X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et n un entier naturel non nul. On pose $Y_n = \dfrac{\lfloor nX \rfloor}{n}$.
   (a) Justifier que la variable nX possède une densité f_n que l'on précisera.
   (b) Donner la loi de la variable $\lfloor nX \rfloor$. Vérifier que $\lfloor nX \rfloor + 1$ suit une loi usuelle dont on donnera le nom et le paramètre.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Prouver que :

$$\mathrm{P}\left(Y_n \leqslant x\right) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}\right)$$

   (d) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.
   (e) Montrer que la suite $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

Partie 2 : discrétisées et lois "polynômiales"

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des fonctions polynômiales de degré au plus n et on pose :

$$\forall k \in [[0, n]], \quad e_k : x \in \mathbb{R} \mapsto x^k$$

Si Q appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $u(Q)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(Q)(x) = \int_x^{x+1} Q(t)dt$$

1. Pour tout entier $k \in [[0, n]]$, calculer $u(e_k)$ puis exprimer $u(e_k)$ en fonction de e_0, ..., e_n.

2. Etablir la linéarité de u et justifier que si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $u(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$.

3. Etablir que la famille $(u(e_k))_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Justifier que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme $Q_R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \int_x^{x+1} Q_R(t)dt$$

5. En considérant $n = 1$, expliciter Q_R lorsque: $\forall x \in \mathbb{R}$, $R(x) = \frac{x}{6}$.

6. Soient N un entier naturel et X une variable aléatoire dont f est une densité.

   (a) On suppose qu'il existe un entier naturel n et un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(x) = Q(x) \text{ si } x \in [0, N+1[\\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   Etablir l'existence d'un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

   $$\begin{cases} X_d(\Omega) = [[0, N]], \\ \forall k \in X_d(\Omega), \quad P(X_d = k) = R(k) \end{cases}$$

   (b) On considère la variable aléatoire discrète Y définie par :

   $$\begin{cases} Y(\Omega) = [[0, 3]], \\ \forall k \in Y(\Omega), \quad P(Y = k) = \frac{k}{6} \end{cases}$$

   Montrer qu'il n'existe aucun polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

   $$\forall x \in [0, 4[, \quad f(x) = Q(x)$$

   et tel que Y soit la discrétisée de X.
   Indication : *procéder par l'absurde et constater que l'une des propriétés des densités n'est pas satisfaite*

Partie 3 : condition suffisante pour être une discrétisée

On considère une variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ainsi qu'une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et telles que :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \ \mathrm{P}(Y = k) = g(k).$$

En particulier, la série $\sum_{k \geqslant 0} g(k)$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1$.

On suppose en outre que g est décroissante et qu'il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \left|g'(x)\right| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2} \text{ et } \left|g''(x)\right| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2}$$

Pour tout réel x, on pose :

$$\begin{cases} f(x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) \text{ si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 \text{ si } \ x < 0. \end{cases}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Prouver la convergence de la série $\sum_{k \geqslant 0} g'(x+k)$.
   Quel est le signe de f ?

2. (a) Etablir que $\forall (x, a) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$

   $$\left|g'(x+k) - g'(a+k)\right| \leqslant \frac{C|x-a|}{(k+1)^2}$$

   (b) Prouver l'existence d'un réel $D \geqslant 0$ tel que :

   $$\forall (x, a) \in (\mathbb{R}_+)^{2\cdot}, \quad |f(x) - f(a)| \leqslant D|x-a|$$

   Justifier la continuité de f en tout réel $a \in \mathbb{R}_+$.

3. Soit t un réel positif, pour tout entier N, on pose :

$$S_N(t) = -\sum_{k=0}^{N} g'(t+k) \quad \text{et} \quad R_N(t) = -\sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t+k)$$

(a) Démontrer que : $\forall k \geqslant 1$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{(t+k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}.$$

puis que : $\forall N \geqslant 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |R_N(t)| \leqslant \frac{C}{N+1}$.

(b) Prouver que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f(t)dt = g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)dt$$

(c) Justifier que $\lim_{k\to+\infty} g(k) = 0$ et que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = g(0)$

4. (a) Vérifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t+1) - f(t) = g'(t)$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$$

(b) Pour tout entier $N \geqslant 0$, on pose $S_N = \displaystyle\int_0^N f(t)dt$.

Etablir que : $\forall N \geqslant 1, \quad S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} g(k)$, puis que:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S_{\lfloor x \rfloor} \leqslant \int_0^x f(t)dt \leqslant S_{\lfloor x \rfloor + 1}$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$.

(c) Démontrer que f peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X et que sa discrétisée X_d suit la même loi que Y.