Révisions : algèbre linéaire et polynômes

Exercice 1
Utiliser le cours sur les polynômes (**)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $k \in [[0, n]]$, $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $f_k(x) = \exp(kx)$.
Prouver que $\mathcal{B} = (f_0, \cdots, f_n)$ est libre.

Exercice 2
idem EML sujet 0 (**) On admet que l'application suivante définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$: :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad < P, Q >= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\, dt$$

On considère l'application φ telle que $\forall P \in E$, $\varphi(P) = P'' - 2XP'$. On admet que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que φ est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 3
Diagonalisation simultanée - questions 2 et 3 pas faciles mais reviennent régulièrement (***)
Soit E un ev sur $\mathbb{R}$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.
On suppose que f admet n valeurs propres distinctes λ_1, λ_2, ..., λ_n.

1. Soit $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, avec $T \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$. Justifier que T n'est pas un polynôme annulateur de f.
2. Soit $P = (X - \lambda_1). \cdots .(X - \lambda_n)$. Justifier que P est un polynôme annulateur de f.
3. Soit u un vecteur propre de f. Justifier que u est aussi un vecteur propre de g.
4. Prouver alors que g est diagonalisable dans une base $\mathcal{B}$ de E qui diagonalise aussi f

Exercice 4
Classique - pas dur (*)
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et a_1, a_2, ..., a_{n+1} n+1 réels deux à deux distincts.
Soit l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $f(P) = (P(a_1), P(a_2), \cdots, P(a_{n+1}))$.
Prouver que f est un isomorphisme. Donner la matrice de f dans les bases canoniques.

Exercice 5
Matrices carrées de rang 1 (**)
Soit $n \in \mathbb{N}$ où $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

1. Justifier qu'il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = U.{}^tV$.
2. Justifier alors qu'il existe un unique réel noté $m(A)$ tel que $A^2 = m(A).A$ et exprimer $m(A)$ en fonction de U et V.
3. Justifier que U est un vecteur propre de A. Préciser la valeur propre associée.
4. Justifier que $Spec(A) = \{0, m(A)\}$.
5. Justifier que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $B \neq 0$.

Exercice 6
Polynômes de Lagrange, très souvent utilisés (**)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $n+1$ réels deux à deux distincts a_1, a_2, ..., a_{n+1}.
On considère les $n+1$ polynômes $(L_j)_{1 \leq j \leq n+1}$ où

$$L_j = \prod_{1 \leq k \leq n+1 \text{ où } k \neq j} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$$

1. Quel est le degré de L_j ? Calculer $L_j(a_i)$ pour tout $(i, j) \in [[1, n+1]]^2$.
2. Prouver que $\mathcal{B} = (L_1, L_2, \cdots, L_{n+1})$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Justifier que $P = \sum_{j=1}^{n+1} P(a_j).L_j$.
4. Préciser la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ où $\mathcal{C} = (1, X, X^2, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 7
Polynômes de Legendre - pas facile (***)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $P_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
2. Que vaut $P_n^{(2n)}$?
3. Justifier que pour tout $k \in [[0, n-1]]$, $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$.
4. (a) Justifier via le théorème de Rolle que pour tout $k \in [[0, n-1]]$, $P_n^{(k)}$ a au moins $k+2$ racines distinctes dans $[-1, 1]$.
   (b) Justifier que L_n admet exactement n racines distinctes dans $]-1, 1[$.
5. A l'aide de la formule de Leibniz, justifier que

$$L_n = n!.\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 .(X-1)^k.(X+1)^{n-k}$$

Exercice 8
Polynômes de Tchebychev (de seconde espèce) (**)
Très classique : trigo, récurrence double... Variante des polynômes de Tchebychev
On considère la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1, \ T_1 = 2X \text{ et } \forall n \geq 2, \ T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n et déterminer le coefficient dominant de T_n.
2. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$T_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que T_n admet n racines distinctes réelles $\alpha_k \in]-1, 1[$ où $k \in [[1, n]]$. On déterminera ces racines α_k en les exprimant en fonction de n et de cos.
4. Factoriser alors dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme T_n en produit de polynômes du premier degré.