# Révisions : analyse de première année

**Exercice 1**
**Bijection réciproque (*)**
Soit $f$ la fonction définie sur $I = [0, \frac{\pi}{4}[$ par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

1. Justifier que $f$ réalise une bijection de $I$ sur un intervalle $J$ à préciser.
2. Vérifier que pour tout $y \in J$,
$$\cos(f^{-1}(y)) = \frac{1}{y} \text{ et } \sin(f^{-1}(y)) = \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}$$
3. Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et que
$$\forall y \in J \setminus \{1\}, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{y.\sqrt{y^2 - 1}}$$
4. Tracer les deux courbes en Python dans un même repère.

**Exercice 2**
**Suite contractante (*)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 + u_n}$.
Soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$, où $f(x) = \dfrac{1}{2 + x}$.

1. (a) Justifier que l'intervalle $[0; +\infty[$ est stable par $f$.
   Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ et le déterminer.
   (b) Vérifier que $f$ est décroissante.
   (c) Montrer que pour tout $(x, y) \in [0; +\infty[^2$,
$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{4}|y - x|$$
2. (a) Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
   (c) En appliquant le 1.(c), montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$.
   (d) Python : écrire un programme qui donne un entier $n$ tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-4}$.
3. Autre méthode : soit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{2n+1}$. Prouver que ces deux suites sont adjacentes (on pourra utiliser $f \circ f$) puis montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$.



**Exercice 3**
**Une suite implicite (**)**
**Ingrédients : théorème de la bijection et propriétés de la bijection réciproque**
**Cf aussi Edhec 2018 "épreuve n°3"**

Soit $n$ un entier , $n \geq 3$. On considère la fonction $f_n$ définie sur $]0, n]$ par $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. Justifier que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in ]0, n]$ admet une seule solution notée $u_n$.
2. Prouver que pour tout $n \geq 3$, $1 < u_n < e$.
3. Exprimer $f_n(u_{n+1})$ en fonction de $u_{n+1}$ et prouver que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est monotone.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ converge puis prouver que sa limite est égale à 1.
5. Justifier que $u_n - 1 \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$.

**Exercice 4**
**Que faut-il montrer ? + DL et équivalents classiques**
Soit $a$ un réel avec $0 < a < 1$. Soit $f$ la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :
$$f(x) = \frac{\cos(ax) - 1}{\sin(\frac{x}{2})} \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$
Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et déterminer $f'$.

**Exercice 5**
**Lemme de Lebesgue - très classique**
**Déjà vu en exercice début d'année**
Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^\pi f(x).\cos(nx)dx$.
Prouver que la suite $(u_n)$ converge vers 0.

**Exercice 6**
**Classique mais pas si facile à rédiger**
Justifier que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2}.e^{|u|}$.

**Exercice 7**
**Termes pairs / impairs, revient souvent**
On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge et la calculer.

**Exercice 8**
**Quelle notion du cours de 1ère année ?**
**Peut servir dans un exercice sur les fonctions de plusieurs variables**

1. Montrer que pour tout $(a, b, c) \in ]0; +\infty[^3$,
$$\ln(\frac{a + b + c}{3}) \geq \frac{1}{3}(\ln(a) + \ln(b) + \ln(c))$$
2. Montrer que pour tout $(a, b, c) \in ]0; +\infty[^3$,
$$\frac{a + b + c}{3} \geq (abc)^{\frac{1}{3}}$$
3. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$.