Révisions : probabilités discrètes et dénombrement

Exercice 1

1. **Inégalité de Boole (*)**
   Soit A_1, ..., A_n n événements (où $n \geq 1$). Montrer que $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$
2. **Une égalité classique sur l'espérance (**)** ("La seconde formule de l'espérance")
   Soit X une variable aléatoire discrète avec $X(\Omega) = [[0, n]]$.
   Montrer que $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$.
3. **(*)** Soit X une variable aléatoire discrète, avec $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, admettant une espérance. Justifier que la variable $Y = \ln(X)$ admet une espérance.

Exercice 2
(**) Soit n un entier, $n > 4$. Les n personnes d'une assemblée élisent leur président. Chacune des n personnes vote pour l'un des trois candidats a, b ou c, en choisissant au hasard leur vote. Un candidat est élu s'il remporte au moins $n - 2$ voix.
Quelle est la probabilité pour qu'aucun candidat ne soit élu ?

Exercice 3
Tous contre un (*)
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. n personnes jouent au jeu suivant formé d'une succession de parties.
A chaque partie chacun lance une pièce équilibrée; un joueur est perdant à cette partie si tous les autres ont un résultat contraire au sien.
Soit X le nombre de parties nécessaires pour avoir un perdant. Déterminer la loi de X, donner $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4
Somme et Max de lois uniformes (**)
Soit X et Y deux variables indépendantes suivant la loi uniforme sur $[[1, n]]$. Soit $S = X+Y$ et $M = Max(X, Y)$.

1. Déterminer $S(\Omega)$. Justifier que pour tout $k \in [[2, n]]$, $P(S = k) = \frac{k-1}{n^2}$.
2. Montrer que pour tout $k \in [[n + 1, 2n]]$, $P(S = k) = \frac{2n-k+1}{n^2}$.
3. Calculer $E(S)$.
4. Pour tout $k \in [[1, n]]$, calculer $P(M \leq k)$. En déduire la loi de M.

Exercice 5
Loi de Pascal (**)
On considère un processus binômial de paramètre $p \in]0, 1[$, c'est-à-dire une succession d'épreuves indépendantes telles que chaque épreuve conduit à un succès avec la probabilité p ou à un échec avec la probabilité $q = 1-p$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On note X_r le rang d'apparition du r-ième succès.
Que peut-on dire de X_1 ? Donner $X_r(\Omega)$, puis justifier que

$$\forall k \in X_r(\Omega), \quad P(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r.q^{k-r}$$

Exercice 6
Ecricome 2017 (**)
Pour tout entier n strictement positif, on considère l'expérience suivante : on dispose de n urnes initialement vides, numérotées de 1 à n et on dispose d'un grand stock de boules que l'on dépose une à une dans ces urnes. Pour chaque boule, on choisit au hasard, de façon équiprobable, l'urne dans laquelle la boule est déposée.
On note X_n le rang du premier tirage pour lequel une des urnes contiendra deux boules.

1. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire X_n :

```
1. def X(n):
2.     urnes=np.zeros(n)
3.     X = 0
4.     while ........................:
5.             choix = floor(n*rd.random())+1
6.             urnes(choix) = urnes(choix)+1
7.             X = ..........
8.     return X
```

   Par quelle instruction peut-on remplacer la ligne 5 ?
2. On suppose dans cette question que $n = 1$.
   Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
3. On suppose dans cette question que $n = 2$.
   Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance et sa variance.
4. On se place ici dans le cas général, n désigne un entier strictement positif.
   (a) Déterminer $X_n(\Omega)$ en justifiant brièvement.
   (b) Montrer que :

$$\forall k \in [[2, n + 1]], \quad P(X_n = k) = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$

Exercice 7
(**) Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard une poignée de jetons dans cette urne, toutes les poignées (y compris la poignée vide) étant équiprobables, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros des jetons tirés. Pour $k \in [[1, n]]$, on note A_i l'événement "le jeton numéro i est dans la poignée tirée", et $Y_i = \mathbb{1}_{A_i}$.

1. Combien y a-t-il de poignées possibles ? Combien réalisent l'événement A_i ?
   En déduire $P(A_i)$, puis la loi de Y_i.
2. Exprimer X en fonction des Y_i, en déduire l'espérance de X.