Révisions – Probabilités discrètes

Exercice 1

1. Récurrence + formule du crible :

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \leq P(A)+P(B)$$

2. Classique, par exemple

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\,P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k\,\big(P(X>k-1)-P(X>k)\big)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k\,P(X>k-1) - \sum_{k=0}^{n} k\,P(X>k)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\,P(X>i) - \sum_{k=0}^{n-1} k\,P(X>k) \quad \text{car } P(X>n)=0$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k)$$

3. $\forall x>0,\ \ln(x) \leq x-1 \leq x$

↑ inégalité classique de convexité

Donc $0 \leq \ln(X) \leq X$. Par domination, comme $E(X)$ existe, $E(\ln(X))$ existe

Exercice 2 :

Notons que, comme $n>4$, deux candidats ne peuvent pas être élus en même temps.

Notons A l'événement "un candidat est élu".

Soit X le nombre de voix obtenues par le candidat a (Y — candidat b, Z — candidat c).

Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;\frac{1}{3})$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\frac{1}{3})$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\frac{1}{3})$.

Attention : ces trois variables ne sont pas indépendantes !

On a $X+Y+Z=n$.

$$A = [X\geq n-2] \cup [Y\geq n-2] \cup [Z\geq n-2].$$

Ces trois événements étant incompatibles,

$$P(A) = P(X\geq n-2)+P(Y\geq n-2)+P(Z\geq n-2)$$

$$= 3\,P(X\geq n-2) \quad \text{car même loi}$$

$$= 3\left(\binom{n}{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \binom{n}{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right) + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$$

$$P(A) = 3\left[\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{4}{3^n} + n\cdot\frac{2}{3^n} + \frac{1}{3^n}\right]$$

Puis la probabilité qu'aucun candidat ne soit élu vaut $1-P(A)$.

Exercice 3

* Notons A l'événement : "la partie a un perdant" et Y le nombre de joueurs ayant obtenu Pile.

$$A = [Y=1] \cup [Y=n-1]$$

d'où $\underline{P(A)} = \binom{n}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + \binom{n}{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \underline{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

* Puis $\underline{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}$, d'où $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4

1. $S(\Omega) = [\![2;2n]\!]$.

Si $k \in [\![2;n]\!]$

$$[S=k] = \bigcup_{i=1}^{k-1} [X=i]\cap[Y=k-i]$$

d'où par incompatibilité (possible car $k-i \in [\![1;n]\!]$)

$$P(S=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P([X=i]\cap[Y=k-i])$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i)\times P(Y=k-i) \text{ par indépendance}$$

$\underline{P(S=k) = \frac{k-1}{n^2}}$ si $k \in [\![2;n]\!]$

2. Soit $k \in [\![n+1;2n]\!]$.

⚠ $[X=i]\cap[Y=k-i]$ possible si $1 \leq i \leq n$

et si $1 \leq k-i \leq n$

$\Leftrightarrow 1-k \leq -i \leq n-k$

$\Leftrightarrow \underbrace{k-n}_{\geq 1 \text{ car } k\geq n+1} \leq i \leq \underbrace{k-1}_{k-1\geq n}$

$$[S=k] = \bigcup_{i=k-n}^{n} [X=i]\cap[Y=k-i]$$

D'où comme précédemment

$\underline{P(S=k)} = \frac{n-(k-n)+1}{n^2} = \underline{\frac{2n-k+1}{n^2}}$ si $k \in [\![n+1;2n]\!]$

3. $\underline{E(S)} = E(X)+E(Y) = 2\times\frac{n+1}{2} = \underline{n+1}$.

4. $\forall k \in [\![1;n]\!]$,

$$P(M \leq k) = P([X\leq k]\cap[Y\leq k])$$

$$= P(X\leq k)\times P(Y\leq k) \text{ par indépendance}$$

$$= \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

D'où $\forall k \in [\![1;n]\!]$,

$\underline{P(M=k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2}$.

Rque : loi de min via l'anti-fonction de répartition.

Exercice 5

- $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
- $X_r(\Omega) = [\![r; +\infty [\![$
- Soit $k \in [\![r; +\infty [\![$.

$[X_r = k]$ est réalisé ssi

- on a obtenu exactement $r-1$ succès lors des $k-1$ premières épreuves
- et la $k^{ième}$ épreuve est un succès.

Notons : - Y le nombre de succès lors des $k-1$ premières épreuves
- A_k l'évènement : "la $k^{ème}$ épreuve est un succès".

$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(k-1, p)$.

$[X_r = k] = [Y = r-1] \cap A_k$

$P(X_r = k) = P(Y = r-1) \times P(A_k)$ car les épreuves sont indépendantes

$$= \binom{k-1}{r-1} \cdot p^{r-1} \cdot q^{k-r} \cdot p$$

$$= \binom{k-1}{r-1} \cdot p^{r} \cdot q^{k-r}$$

Exercice 6

1. 5. `while np.max(urnes) <= 1:`

8. `X = X + 1`

On peut remplace 4. par `choix = rd.randint(1, n+1)` ce qui serait plus simple... Mais les concepteurs aiment bien le générateur "minimal" `rd.random()`

2. $X_1 = 2$; $E(X_1) = 2$ et $V(X_1) = 0$

3. $X_2(\Omega) = \{2, 3\}$. $P(X_2 = 2) = \frac{1}{2}$; $P(X_2 = 3) = \frac{1}{2}$

$E(X_2) = \frac{5}{2}$ $\quad E(X_2^2) = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{13}{2}$ $\quad V(X) = \frac{13}{2} - \frac{25}{4} = \frac{1}{4}$.

4.
(a) $X_n(\Omega) = [\![2; n+1]\!]$ dans le pire des cas...

(b) Déterminons $P([X_n = k])$.

- On pose au hasard k boules : il y a n^k résultats possibles
- Pour que $[X_n = k]$ soit réalisé :
  - on obtient des numéros différents lors des $k-1$ premiers placements : $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+2)$ résultats possibles (il y a déjà $k-2$ numéros occupés)
  - puis on retombe sur l'un des $k-1$ numéros : $k-1$ choix

D'où $\boxed{P(X_n = k) = \frac{n!}{(n-k+1)!} \times \frac{k-1}{n^k}}$.

Exercice 7

1. * Il y a 2^n poignées possibles (il s'agit du cardinal de $\mathcal{P}(⟦1;n⟧)$).

* Soit $i \in ⟦1;n⟧$. Choisir une partie de $⟦1;n⟧$ contenant le numéro i revient à choisir une partie de $⟦1;n⟧ \setminus \{i\}$, d'où 2^{n-1} poignées contenant le numéro i

* D'où $P(A_i) = \frac{1}{2}$ et $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$

Rappel : $Y_i(\Omega) = \mathbb{1}_{A_i}(\Omega) = \{0, 1\}$ (donc loi de Bernoulli)

et $\begin{cases} Y_i = 1 \iff A_i \text{ réalisé} \\ Y_i = 0 \iff A_i \text{ non réalisé} \end{cases}$

2. $X = \sum_{i=1}^{n} i \cdot Y_i$

D'où $E(X) = \sum_{i=1}^{n} i \, E(Y_i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$.