CONCOURS APRÈS CLASSES PRÉPARATOIRES

ANNALES DES ÉPREUVES ORALES DE MATHÉMATIQUES

2025

une école de la
CCI PARIS ILE-DE-FRANCE

AVANT-PROPOS

Ces annales corrigées de mathématiques des épreuves orales du concours ESCP regroupent une partie des exercices posés en 2025 ainsi que leur corrigé dans les options scientifique et littéraire B/L.

Cette année, la demi-heure de préparation a été supprimée et chaque candidat a été interrogé sur le premier exercice directement au tableau (donc *sans préparation*) pendant une vingtaine de minutes. Une question courte en dix minutes a suivi, comme dans l'ancien format.

Cet ouvrage est destiné à aider les candidats pour leur préparation à l'épreuve orale de mathématiques de l'ESCP, voire aux différentes épreuves écrites. Cet ouvrage pourra aussi fournir des ressources aux enseignants des classes préparatoires économiques et commerciales.

L'attention des candidats et des professeurs qui les préparent est néanmoins attirée sur le fait que les corrigés proposés sont destinés aux interrogateurs. Ainsi certaines formulations abrégées des réponses ne sont pas exactement celles qui sont attendues des candidats (qui doivent être plus complètes ou plus conformes aux formulations précises du programme officiel de leur filière). De plus, certains exercices publiés dans ces annales sont assez longs : ce sont des sujets d'étude et le jury n'en attend pas nécessairement de la part des candidats une résolution complète.

Les énoncés et corrigés des exercices ont été regroupés en cinq rubriques : analyse, algèbre, probabilités, sujets de l'option littéraire B/L et questions courtes.

Ces annales n'auraient pu voir le jour sans la fidèle collaboration et l'investissement dans la conception des exercices, de tous les examinateurs de l'oral de mathématiques de l'ESCP. Nous les en remercions.

Léon Laulusa, Directeur Général ESCP.

Muriel Granjean, Responsable des Admissions ESCP.

Frédéric Cadet, Henri Lemberg et Magali Rocher, Responsables des épreuves orales de mathématiques du concours ESCP.

CHAPITRE

1

ALGÈBRE

Sujet 1.1

Soit un entier $n \geqslant 2$.
Si A, B et C sont trois matrices données de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on s'intéresse à l'équation d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$(*) \qquad AM - MB = C.$$

1. Dans cette question, on suppose que A et B sont diagonales :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix},$$

   avec $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. On note $c_{i,j}$ les coefficients de C *i.e.* $C = [c_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

   (a) Exprimer l'équation $(*)$ à l'aide des coefficients $m_{i,j}$ de la matrice M.

   (b) En déduire le nombre de solutions M de $(*)$ lorsque les ensembles $\{a_1, \cdots, a_n\}$ et $\{b_1, \cdots, b_n\}$ sont disjoints.

   (c) On suppose que A et B sont données et qu'il existe $(r, s) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $a_r = b_s$.
   Trouver une matrice C telles que $(*)$ n'a pas de solution.

2. Dans cette question, les deux matrices A et B sont symétriques et n'ont pas de valeur propre commune. Déterminer le nombre de solutions de $(*)$.

3. On suppose maintenant que A et B n'ont pas de valeur propre commune et que B est diagonalisable. On note $\mathrm{Sp}\,(B) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$ ($m \in [\![1, n]\!]$) l'ensemble des valeurs propres (distinctes) de B.

   (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une solution de $(*)$.

   Montrer que, pour tout polynôme Q donné par $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell} q_k x^k$ (avec $q_k \in \mathbb{R}$) on a :

$$Q(A)M - MQ(B) = \sum_{k=1}^{\ell} q_k C_k, \qquad \text{avec } C_k = \sum_{i+j=k-1} A^i C B^j \text{ (pour tout } k \in \mathbb{N}^*).$$

   (b) Résoudre l'équation $(*)$.

Solution du sujet 1.1

1. (a) Le calcul donne que $AM = [a_i m_{i,j}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $MB = [b_j m_{i,j}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, d'où :
$$(*) \iff \forall i,j \in [\![1,n]\!],\ (a_i - b_j)m_{i,j} = c_{i,j}.$$
   (b) Comme $a_i - b_j \neq 0$ pour tout (i,j), d' après Q1.a, il y a $\boxed{\text{une unique solution}}$
$$M = \left[(a_i - b_j)^{-1} c_{i,j}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$
   (c) Avec $\boxed{C = E_{r,s}}$ (matrice élémentaire) la condition de Q1.a $1 = c_{r,s} = (a_r - b_s)m_{r,s} = 0$ est impossible.
2. D'après le théorème spectral A et B se diagonalisent en $A = PA'\,{}^tP$ et $A = QB'\,{}^tQ$, avec P et Q orthogonales. Alors :
$$(*) \iff PA'\,{}^tP\,M - MQB'\,{}^tQ = C \iff A'M' - M'B' = C',$$
avec $C' = {}^tP\,CQ$ et $M' = {}^tP\,MQ$.
Comme $Sp(A) = Sp(A')$ et $Sp(B) = Sp(B')$, on voit que A' et B' n'ont pas de coefficient diagonal commun.
D'après 1.b) il y a une unique solution M' donc $\boxed{\text{une unique solution}}$ $M = PM'\,{}^tQ$ à $(*)$.
Comme les matrices A et B sont symétriques, le cours. assure l'existence de deux matrices diagonales A' et B' et de deux matrices orthogonales P et Q telles que $A = PA'\,{}^tP$ et $A = QB'\,{}^tQ$.
3. D'après la question prédécente, l'équation $(*)$ s'écrit $C = PA'\,{}^tP\,M - MQB'\,{}^tQ$, soit $C' = A'M' - M'B'$ $(**)$, avec $C' = {}^tP\,CQ$ et $M' = {}^tP\,MQ$. Comme $Sp(A) = Sp(A')$ et $Sp(B) = Sp(B')$, on voit que A' et B' n'ont pas de coefficient diagonal commun.
D'après 1.b) il y a une unique solution M' à $(**)$ donc $\boxed{\text{une unique solution}}$ $M = PM'\,{}^tQ$ à $(*)$.
4. (a) *Indication possible :* regarder ce qui se passe lorsque $Q(x) = x^2$.
On montre par récurrence sur $k \geqslant 1$ que $A^kM - MB^k = C_k$. Pour $k = 1$ cela provient de $(*)$.
Si l'on suppose $A^kM - MB^k = C_k$, alors il vient
$$A^{k+1}M - MB^{k+1} = A(A^kM - MB^k) + (AM - MB)B^k = A\sum_{i+j=k-1} A^iCB^j + CB^k = C_{k+1}.$$
Par suite, par combinaison linéaire, on a : $Q(A)M - MQ(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} q_k(A^kM - MB^k) = \sum_{k=1}^{\ell} q_kC_k$.
Pour tout $k \in [\![1,m]\!]$, comme $\lambda_k \notin \mathrm{Sp}\,(A)$, la matrice $A - \lambda_kI$ est inversible, donc $P(A)$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
   (b) *Indication : utiliser le polynôme P défini par $P(x) = (x - \lambda_1)\cdots(x - \lambda_m)$.*
Si M est solution de $(*)$, le 4(a) donne $P(A)M = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} p_kC_k$, soit $\boxed{M = P(A)^{-1}\left[\sum_{k=1}^{m} p_kC_k\right]}$,
car $\boxed{P(A)\text{ est inversible}}$ comme produit des matrices inversibles $A - \lambda_kI$ (puisque $\lambda_k \notin \mathrm{Sp}\,(A)$).
Réciproquement c'est bien une solution de $(*)$, car,en posant $N = P(A)^{-1}$, et développant P, en $P(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} p_kx^k$, on a :
$$AM - MB = N\sum_{k=1}^{m} p_k[AC_k - C_kB] = N\sum_{k=1}^{m} p_k[A^kC - CB^k] = N\,[P(A)C - CP(B)] = C,$$
car $P(B) = 0$ puisque B est semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux appartiennent à $\mathrm{Sp}\,(B) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$.
Ainsi, pour tout C, l'équation $(*)$ a une unique solution M donnée par la formule ci-dessus.

Sujet 1.2

Soit un entier $n \geqslant 2$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée. On définit la matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$C = {}^tMM - M\,{}^tM.$$

1. (a) Montrer que C est diagonalisable.
   (b) Montrer que s'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $C^m = 0$ alors $C = 0$.
   (c) Montrer que si C vérifie $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle X, C\,X\rangle \geqslant 0$ alors $C = 0$.

2. On suppose dans cette question que la matrice M possède n valeurs propres distinctes et que $C = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs qui sont à la fois vecteurs propres de M et de ${}^tM$.
   (b) En déduire que la matrice M est symétrique.

3. Soit $a\,, b,\, c \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on suppose que $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par :

$$m_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ et } j \notin \{i-1, i, i+1\} \\ a & \text{si } i \in [\![2,n]\!] \text{ et } j = i-1 \\ b & \text{si } i \in [\![1,n]\!] \text{ et } j = i \\ c & \text{si } i \in [\![1,n-1]\!] \text{ et } j = i+1 \end{cases}$$

   Déterminer le rang de C en fonction de a, b et c.

Solution du sujet 1.2

1. (a) La matrice C est symétrique (comme différence de deux matrices symétriques).
Elle est donc diagonalisable dans une base orthonormée.

   (b) De plus C n'a que 0 comme valeur propre, car $CX = \lambda X$ entraîne $0 = C^m X = \lambda^m X$.
Ainsi C est semblable à la matrice nulle, donc égale à la matrice nulle.

   (c) On diagonalise C : $C = PDP^{-1}$,
et alors $0 = \mathrm{Tr}(C) = \mathrm{Tr}(D) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_{i,i}$.
Si $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(C) = \{d_{i,i} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, il existe $X \neq 0$ tel que $CX = \lambda X$.
L'hypothèse $\langle X, CX\rangle = \lambda \|X\|^2 \geqslant 0$ entraîne que $\lambda \geqslant 0$. Ainsi, on a $d_{i,i} \geqslant 0, \forall i \in [\![1, n]\!]$.
Et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_{i,i} = 0$ implique alors $d_{i,i} = 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi, $D = 0$ et on conclut que $C = 0$.

2. (a) Comme M possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ elle est diagonalisable et les sous-espaces propres sont de dimension 1.
Donc il existe une base $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs propres tels que $E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(M - \lambda_i \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(X_i)$.
Montrons que cette base diagonalise également ${}^tM$.
Comme $C = 0$, les matrices M et ${}^tM$ commutent. Ainsi, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a :
$$M\, {}^tM X_i = {}^tM M X_i = {}^tM \lambda_i\, X_i = \lambda_i\, {}^tM X_i,$$
i.e. ${}^tM X_i \in E_{\lambda_i} = \mathrm{Vect}(X_i)$. Il existe donc $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tel que ${}^tM X_i = \alpha_i X_i$.

   (b) Avec les notations et le résultat de la question précédente, il suffit de montrer que $\alpha_i = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ pour obtenir que $M = {}^tM$ (elles seront alors semblables à la même matrice diagonale avec une même matrice de passage).
Cela provient de : $\alpha_i \|X_i\|^2 = \langle\, {}^tM\, X_i, X_i\rangle = \langle X_i, M X_i\rangle = \lambda_i \|X_i\|^2$.

3. M est tridiagonale et se décompose en $M = a\, {}^tJ + b\, I_n + c\, J$ où J est la matrice dont les coefficients sont $J_{i,j} = 0$ si $i \neq j+1$ et $J_{i,i+1} = 1$ pour $i = 1, \dots, n-1$. ${}^tM$ s'écrit ${}^tM = a\, J + bI_n + c\, {}^tJ$. On a donc
$$\begin{aligned} C &= (a\, J + bI_n + c\, {}^tJ)\,(a\, {}^tJ + b\, I_n + c\, J) - (a\, {}^tJ + b\, I_n + c\, J)\,(a\, J + bI_n + c\, {}^tJ) \\ &= (a\, J + c\, {}^tJ)(a\, {}^tJ + cJ) - (a\, {}^tJ + cJ)\,(a\, J + c\, {}^tJ) \\ &= a^2(J\, {}^tJ - {}^tJJ) + c^2({}^tJJ - J\, {}^tJ) = \boxed{(a^2 - c^2)(J\, {}^tJ - {}^tJJ).} \end{aligned}$$

Calculons le rang de $J\, {}^tJ - {}^tJJ$.
Soit u et v les endomorphismes canoniquement associés à J et ${}^tJ$ et $(e_i)_{1,\dots,n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On a donc $u(e_1) = 0$, $u(e_i) = e_{i-1}$ pour $i = 2, \dots, n$, $v(e_i) = e_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et $v(e_n) = 0$.
Ainsi, $u \circ v(e_i) - v \circ u(e_i) = 0$ pour $i = 2, \dots n-1$, $u \circ v(e_1) - v \circ u(e_1) = e_1$ et $u \circ v(e_n) - v \circ u(e_n) = -e_n$.
Donc $(J\, {}^tJ - {}^tJJ)$ est donc de rang 2 et ainsi $\boxed{\mathrm{rang}(C) = 0 \text{ si } a = \pm c \text{ et } \mathrm{rang}(C) = 2 \text{ si } a \neq \pm c.}$

Remarque : si nécessaire, cela permet d'expliciter la matrice $C = (a^2 - c^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

CHAPITRE

2 ANALYSE

Sujet 2.1

Soit une fonction continue, $[0,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = (u_n)^n.$$

1. **Dans cette question uniquement,** on suppose que, $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = x$.
   (a) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\ln(v_n) = n\left(-\ln(n) + \frac{1}{n^2} + \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}} - 1\right)\right)$$
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

On revient maintenant au cas général.

2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{e}^t - 1| \leqslant |t|\mathrm{e}^{|t|}$ et $|\mathrm{e}^t - 1 - t| \leqslant \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{|t|}$.
3. (a) Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$,
   $$\left|\exp\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1\right| \leqslant \frac{K}{n}$$
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ puis que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,(u_n - 1)$.
   (c) Établir qu'il existe un réel K' tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\left|n(u_n - 1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{K'}{n}$$
   (d) En déduire la limite de v_n quand $n \to +\infty$. Retrouver le résultat de la question 1.

Solution du sujet 2.1

1. (a) En utilisant la formule de sommation des termes d'une suite géométrique, on a :

$$\ln(v_n) = n\ln(u_n) = n\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{1}{n^2}\right)^k\right) = n\ln\left(\frac{1}{n}\exp\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{\exp(\frac{1}{n})-1}{\exp(\frac{1}{n^2})-1}\right)$$
$$= n\left(-\ln(n) + \frac{1}{n^2} + \ln\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) - \ln\left(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)\right).$$

(b) **Indication possible :** montrer que $\ln(\mathrm{e}^u - 1) = \ln(u) + \frac{u}{2} + \mathrm{o}\,(u)$ (en 0).

$\ln(v_n) = n\left(-\ln(n) + \frac{1}{n^2} + \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n}) - \ln(\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) = n\left(\frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\right) = \frac{1}{2} + o(1)$
donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{\mathrm{e}}.}$

2. Par $\boxed{\text{inégalité de Taylor Lagrange}}$ entre 0 et t pour la fonction $\varphi : u \mapsto \mathrm{e}^u$:
   - à l'ordre 0 (accroiss. finis), avec la majoration $|\varphi'(u)| \leqslant \mathrm{e}^{|t|}$ (entre 0 et t) ;
   - à l'ordre 1 , avec la majoration $|\varphi''(u)| \leqslant \mathrm{e}^{|t|}$ (entre 0 et t).

3. (a) D'après la question précédente, $\left|\exp\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1\right| \leqslant \left|\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\exp\left(\left|\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right)$.

Soit M un majorant de $|f|$ continue sur $[0,1]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\exp\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1\right| \leqslant \frac{1}{n}M\exp\left(\frac{1}{n}M\right) \leqslant \frac{1}{n}M\exp(M)\,;\ \text{ainsi } \boxed{K = M\exp(M)} \text{ convient.}$$

(b) Ainsi $|u_n - 1| = \dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\exp(\frac{k}{n}) - 1)\right| \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left|\exp(\frac{k}{n}) - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{K}{n} = \frac{K}{n}$,
donc, par encadrement, on $\boxed{\lim u_n = 1.}$
On a $\ln(v_n) = n\ln(u_n)$; or $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'où $\ln(u_n) \sim u_n - 1$, d'où $\boxed{\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,(u_n - 1).}$

(c) $n(u_n - 1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\exp\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1\right)$, d'où

$$\left|n(u_n - 1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\exp\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1 - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\exp\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - 1 - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2\exp\left(\left|\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\right) \leqslant \frac{M^2}{2n}\exp(M)$$

(d) Le théorème sur les sommes de Riemann donne : $\lim \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$,

d'où $\lim n(u_n - 1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ et ainsi $\lim\ln(v_n) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ d'où $\lim v_n = \exp\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right)$.

Dans la question 1, on obtiendrai : $\lim v_n = \exp\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right) = \exp\left(\displaystyle\int_0^1 tdt\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\right)$.

Sujet 2.2

On se propose de déterminer l'ensemble E des triplets de réels (a,b,c) tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, a\cos(ax) + b\cos(bx) + c\cos(cx) \geqslant 0.$$

Dans les questions 1 à 3, on admet le résultat suivant $\mathcal{R}$: « pour tout entier $n \geqslant 1$, si une fonction $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ est la somme de n fonctions périodiques (de périodes éventuellement distinctes) et si f converge en $+\infty$, alors f est constante ».
Ce résultat $\mathcal{R}$ sera démontré dans la question 4.

1. Justifier que l'ensemble E n'est pas vide.
2. On considère un triplet (a,b,c) de E ainsi que la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sin(ax) + \sin(bx) + \sin(cx)$$

   (a) En étudiant la fonction g, montrer que g possède une limite finie en $+\infty$, puis que g est la fonction nulle.
   (b) Montrer que l'on a : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^3+b^3+c^3=0 \end{cases}$
3. On admet la relation suivante :

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R},\ (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3ab^2+3a^2b+3ac^2+3a^2c+3bc^2+3b^2c+6abc$$

   Exprimer E comme réunion de trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ (à préciser).
4. *Preuve de la relation $\mathcal{R}$.*
   (a) Montrer que, si $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ est une fonction périodique, qui converge en $+\infty$, alors f est constante.
   (b) Montrer le résultat $\mathcal{R}$.

Solution du sujet 2.2

1. E contient le triplet $(0,0,0)$ donc E n'est pas vide.
2. (a) On a $g'(x) = a\cos(ax) + b\cos(bx) + c\cos(cx) \geqslant 0$, ce qui prouve que g est croissante.

   Comme g est majorée par 3 , on en déduit que g possède une limite finie en $+\infty$.

   Si a, b, c sont tous non nuls, alors g est somme de trois fonctions périodiques, respectivement de période $\frac{2\pi}{|a|}, \frac{2\pi}{|b|}, \frac{2\pi}{|c|}$, et sinon, g est somme de deux fonctions périodiques (par exemple si $a = 0$) ou encore g est périodique (par exemple si $a = b = 0$) ou bien nulle (si $a = b = c = 0$) : on en déduit, par $\mathcal{R}$, que g est constante.

   De plus, on a $g(0) = 0$ donc on peut conclure que g est nulle.

   (b) Comme g est nulle, g' et $g^{(3)}$ sont nulles et, en évaluant en 0 , on obtient le système :

$$\text{(S)} : \begin{cases} a+b+c=0 \\ a^3+b^3+c^3=0 \end{cases}$$

3. D'après le développement de $(a+b)^3$ fourni et la question précédente, si $(a,b,c) \in E$, alors :

$$0^3 = 0 + 3ab^2 + 3a^2b + 3ac^2 + 3a^2c + 3bc^2 + 3b^2c + 6abc = 3ab(a+b) + 3ac(a+c) + 3bc(b+c) + 6abc.$$

   Comme on a toujours $a+b=-c$, $a+c=-b$ et $b+c=-a$, cela s'écrit aussi : $\boxed{0 = -3abc.}$

   Ainsi $E \subset \boxed{\{(0,b,-b) | b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,0,-a) | a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,-a,0) | a \in \mathbb{R}\}.}$

   Réciproquement, on voit facilement que si (a,b,c) appartient à cette réunion, alors (par parité de cos) on a :

$$a\cos(ax) + b\cos(bx) + c\cos(cx) = 0.$$

   Donc $(a,b,c) \in E$.

4. (a) Si f est T-périodique (avec $T > 0$), on a pour tout entier naturel p et pour tout réel x :

$$f(x+pT) = f(x)$$

   On en déduit, en faisant tendre p vers $+\infty$: $\forall x \in \mathbb{R}, \ell = f(x)$. Ceci prouve que f est constante.

   (b) Comme f_{n+1} est de période T_{n+1}, pour tout x, on a :

$$g(x) = f\left(x + T_{n+1}\right) - f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} f_k\left(x + T_{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n+1} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(f_k\left(x + T_{n+1}\right) - f_k(x)\right),$$

   donc g est la somme de n fonctions périodiques (de périodes respectives $T_1, \ldots, T_n$).

   On peut donc raisonner par récurrence sur $n \geqslant 1$.

   - Pour $n = 1$, la réponse est fournie par la question précédente (a).
   - Soit n dans $\mathbb{N}^*$ tel que, si la somme de n fonctions périodiques possède une limite finie en $+\infty$, alors elle est constante.

     Soit maintenant $n+1$ fonctions $f_1, \ldots, f_{n+1}$ périodiques telles que $f = \sum_{k=1}^{n+1} f_k$ possède une limite finie en $+\infty$. La fonction g est somme de n fonctions périodiques et on a $\lim_{n \to +\infty} g(x) = 0$ (limite finie) donc, par hypothèse de récurrence, g est constante donc nulle (grâce à sa limite en $+\infty$).

     On a donc $f\left(x + T_{n+1}\right) - f(x) = g(x) = 0$, ceci prouve que f est de période T_{n+1}. Par hypothèse, f possède une limite finie en $+\infty$ donc elle est constante, ce qui achève l'hérédité et la récurrence.

Sujet 2.3

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de réels strictement positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{u_k}{S_k}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\exp\left(-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_{k+1}}\right) \geqslant v_n$
3. (a) On suppose dans cette question que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{S_n}{S_{n+1}}$ diverge. Montrer que $\ell = 0$.

   (b) On suppose dans cette question que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{S_n}{S_{n+1}}$ converge.

   Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{S_{n+1}}\right)$ converge. En déduire que $\ell \neq 0$ et que $\ell \leqslant \exp\left(-\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{S_k}{S_{k+1}}\right)$.
4. Soit q un réel tel que $q > 1$. On suppose dans cette question que $u_n = q^{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Pour $q = \frac{4}{3}$, compléter le script suivant pour qu'il affiche le tableau de 20 premières sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{S_n}{S_{n+1}}$:

```
import numpy as np
q = 4/3 ; X = np.zeros(20) ; S = 1+q
X[0] = 1/(1+q)

for k in range(1,20):
    tmp = S
    S += ...
    X[k] = X[k-1]+...

print(...)
```

   (b) À l'exécution de ce script on obtient `[0.42857143 0.85329053 1.14532708 1.30396313 1.38589318 1.42987414 1.45412178 1.46763229 1.47519457 1.47943699 1.48181984 1.4831591 1.48391208 1.48433553 1.48457368 1.48470763 1.48478298 1.48482536 1.48484919 1.4848626 ]`.
   Confirmer théoriquement pour toute valeur de $q > 1$ ce que le résultat précédent semble montrer pour $q = \frac{4}{3}$.

Solution du sujet 2.3

1. La suite (v_n) est à termes strictement positifs et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1}}{S_{n+1}} \leqslant 1$, d'où la décroissance de (v_n). De plus elle est minorée par 0 donc elle converge.
2. On a $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x, \forall x \in \mathbb{R}$. D'où pour tout $k \in [\![0, n-1]\!], \exp\left(-\dfrac{S_k}{S_{k+1}}\right) \geqslant 1 - \dfrac{S_k}{S_{k+1}} = \dfrac{u_{k+1}}{S_{k+1}}$.
   Ainsi, par produit (tout est positif) : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(-\frac{S_k}{S_{k+1}}\right) \geqslant \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{S_{k+1}} = v_n$ car $\dfrac{u_0}{S_0} = 1$.
3. (a) Puisque la série $\sum \dfrac{S_n}{S_{n+1}}$ est divergente et à termes positifs, $\displaystyle\lim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_{k+1}} = +\infty$.
   D'où $\displaystyle\lim \exp\left(-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_{k+1}}\right) = 0$ et par majoration,(v_n) étant positive, $\lim v_n = 0$.
   (b) Puisque la série $\sum \dfrac{S_n}{S_{n+1}}$ converge, son terme général tend vers 0.
   Comme $\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = 1 - \dfrac{u_{n+1}}{S_{n+1}}$, on a donc $\lim \dfrac{u_{n+1}}{S_{n+1}} = 1$, et donc $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{S_{n+1}}\right) \sim \dfrac{u_{n+1}}{S_{n+1}} - 1 = -\dfrac{S_n}{S_{n+1}}$.
   D'où par équivalence de séries à termes négatifs, $\boxed{\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{S_{n+1}}\right) \text{ converge.}}$
   On a $\displaystyle\ln(v_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_k}{S_k}\right)$, donc d'après le résultat précédent $\displaystyle\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(\frac{u_k}{S_k}\right)$.
   D'où $\displaystyle v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(\frac{u_k}{S_k}\right)\right) \neq 0$ *i.e.* $\boxed{\ell \neq 0.}$
   Pour obtenir l'inégalité demandée, on passer à la limite dans l'inégalité établie dans la question 3.
   On a donc établi que la suite (v_n) ne tend pas vers 0 si et seulement si la série $\sum \dfrac{S_n}{S_{n+1}}$ converge.
4. (a) on complète par : `q**((k+1)**2)` `tmp/S` `X`.
   (b) Si $u_n = q^{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} q^{k^2}$ et on a $S_n \leqslant (n+1)q^{n^2}$ et $S_{n+1} \geqslant q^{(n+1)^2}$,
   d'où $\dfrac{S_n}{S_{n+1}} \leqslant (n+1)q^{-(2n+1)}$ i.e. $\dfrac{S_n}{S_{n+1}} \leqslant (n+1)(\dfrac{1}{q})^{2n+1}$ qui est le terme général d'une série convergente d'après les résultats du cours sur les séries dérivées des séries géométriques.
   Donc la limite de (v_n) est non nulle comme semble le montrer le résultat de l'exécution du script.

Sujet 2.4

1. Pour quelles valeurs de x réel, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ est-elle convergente ?

2. (a) Soient $k, t \in \mathbb{R}$. Utiliser la formule du cours concernant $\sin(a+b)$ pour simplifier :

$$\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)$$

   (b) En déduire qu'il existe une constante réelle M (à déterminer) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0, 2\pi[,\ \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + M.$$

3. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt)\ \mathrm{d}t = 0.$

4. On admet qu'il existe α_0 et β_0 tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^{\pi} (\alpha_0 t + \beta_0 t^2)\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.$

   Trouver une expression de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ en fonction des nombres α_0, β_0, M.

Solution du sujet 2.4

1. On sait que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$ *i.e.* $\boxed{\mathcal{D}_\zeta =]1, +\infty[.}$

2. (a) Comme $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, on trouve :

$$\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(kt).$$

(b) Ainsi par télescopage, on a : $\underbrace{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}_{\neq 0}\sum_{k=1}^{n}\cos kt = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right).$

Ainsi $\boxed{M = -\frac{1}{2}}$ convient.

3. Par intégration par parties puis inégalités triangulaires, il vient :

$$\left|\int_0^\pi \varphi(t)\sin(xt)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\left[\ \frac{-\cos(xt)\varphi(t)}{x}\ \right]_0^\pi\right| + \left|\int_0^\pi \frac{-\cos(xt)\varphi'(t)}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}\left(|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \int_0^\pi |\varphi'(t)|\ \mathrm{d}t\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où le résultat voulu, par $\boxed{\text{théorème d'encadrement.}}$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \underset{\text{admis}}{=} \sum_{k=1}^{n} I_k(\alpha_0,\beta_0) \quad &= \int_0^\pi (\alpha_0 t + \beta_0 t^2)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\ \mathrm{d}t \qquad \text{(linéarité de l'intégration)}\\
&= \int_0^\pi \left((\alpha_0 t + \beta_0 t^2)\left(M + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\right)\ \mathrm{d}t \qquad \text{d'après Q2b}\\
&= M\alpha_0\int_0^\pi t\ \mathrm{d}t + M\beta_0\int_0^\pi t^2\ \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\ \mathrm{d}t\\
&\quad \text{où } \varphi \text{ est le prolongement } \mathcal{C}^1 \text{ de } u : t \mapsto \frac{\alpha t + \beta t^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M\alpha_0\frac{\pi^2}{2} + M\beta_0\frac{\pi^3}{3} + 0, \qquad \text{d'apres Q4.}
\end{aligned}$$

Par définition de la convergence et de la somme d'une série cela montre que : $\boxed{\zeta(2) = M\alpha_0\frac{\pi^2}{2} + M\beta_0\frac{\pi^3}{3}.}$

Sous réserve de prouver que u admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

La fonction $\boxed{u \text{ se prolonge par continuité en } 0}$:

$u(t) = \frac{\alpha t + \beta t^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t\to0}{\sim} \frac{\alpha t + \beta t^2}{\frac{t}{2}} \underset{t\to0}{\longrightarrow} 2\alpha.$

De plus $\boxed{u \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,\pi]}$ (quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ dont dénominateur ne s'annule pas) ; or :

$$\begin{aligned}
u'(t) &= \frac{(\alpha+2\beta t)\sin\left(\frac{t}{2}\right) - (\alpha t + \beta t^2)\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t\to0}{=} \frac{(\alpha+2\beta t)(\frac{t}{2} + \mathrm{o}\left(t^2\right)) - (\alpha+\beta t)\frac{t}{2}(1-\mathrm{o}\left(t\right))}{(\frac{t}{2}(1+\mathrm{o}\left(1\right)))^2}\\
&= \frac{(\beta - \frac{\beta}{2})t^2 + \mathrm{o}\left(t^2\right)}{\frac{t^2}{2}(1+\mathrm{o}\left(1\right))^2} \underset{t\to0}{\longrightarrow} 2\beta.
\end{aligned}$$

Donc, d'après le $\boxed{\text{th. du prolongement de la dérivée,}}$ le prolongement continu de u est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

Sujet 2.5

Dans tout l'exercice on admettra le théorème suivant (TSA) :
si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels décroissante dont la limite est nulle alors :

- la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$ converge ;
- pour tout entier $n \geqslant 0$, le reste d'ordre n défini par $R_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p u_p$ vérifie : $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Dans toute la suite de l'exercice $\mathbb{R}_+^* \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+$ désigne une fonction convexe, de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et de limite nulle en $+\infty$.

1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $x_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p f(p)$.

   Justifier l'existence de la suite (x_n) et donner sa limite.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 2x_n = (-1)^{n+1}f(n+1) + \sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\big(f(p)-f(p+1)\big)$$
3. Montrer que la suite réelle $(f(p)-f(p+1))_{p\geqslant 1}$ est décroissante.
4. En déduire la convergence de la série de terme général x_n
5. On suppose que $f(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} f(p+1)$. Déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \to +\infty$

Solution du sujet 2.5

1. Le TSA entraîne la convergence de la série $\sum(-1)^p f(p)$. Alors, x_n est bien définie en tant que reste d'ordre n d'une série numérique convergente, et l'on a : $(x_n) \to 0$.

2. Par décalage d'indice, on a : $x_n = \displaystyle\sum_{p=n}^{+\infty}(-1)^{p+1}f(p+1) = (-1)^{n+1}f(n+1) - \sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p f(p+1)$

   d'où : $2x_n = x_n + \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p f(p) = (-1)^{n+1}f(n+1) + \sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p(f(p) - f(p+1))$.

3. Comme f est convexe, on a : $f(p+1) = f\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}(p+2)\right) \leqslant \frac{1}{2}f(p) + \frac{1}{2}f(p+2)$,
   ce qui équivaut à la décroissance de la suite $(f(p) - f(p+1))_{p\geqslant 1}$.
   Autre rédaction : comme f est convexe, son graphe est au dessus de la sécante aux points d'abscisse p et $p+1$ en dehors de l'intervalle $[p, p+1]$: $\forall x \notin [p, p+1],\ f(x) \geqslant f(p+1) + (x-(p+1)) \times \frac{f(p+1)-f(p)}{(p+1)-p}$.
   En particulier, pour $x = p+2$, on a : $\boxed{f(p+2) - f(p+1) \geqslant f(p+1) - f(p).}$
   Autre idée : avec l'égalité des accroissements finis sur $[p, p+1]$ et $[p+1, p+2]$, et comme f' est croissante :

   $$\exists \alpha \in]p+1, p+2[, \exists \beta \in]p, p+1[, f(p+2) - f(p+1) = f'(\alpha) \geqslant f'(\beta) = f(p+1) - f(p).$$

4. D'après Q2, il suffit de montrer les convergences de $\sum(-1)^{n+1}f(n+1)$ et $\displaystyle\sum \sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p(f(p) - f(p+1))$.

   Le TSA entraine la convergence de la première série.
   De plus, comme f tend vers 0 en $+\infty$, la suite $(f(p) - f(p+1))_{p\geqslant 1}$ tend aussi vers 0.
   Or (Q3) la suite $(f(p) - f(p+1))$ décroît.
   Donc , d'après le TSA, on majore le reste : $\left|\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p[(f(p) - f(p+1)]\right| \leqslant f(n+1) - f(n+2)$.

   Or, comme $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, la série téléscopique $\sum f(n+1) - f(n+2)$ converge, donc par théorème de comparaison la série $\displaystyle\sum \sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p(f(p) - f(p+1))$ converge absolument, donc converge.

5. La relation $f(n+1) \sim f(n+2)$ s'écrit $f(n+1) - f(n+2) = o(f(n+1))$.

   Or, on a déjà établi que : $|\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p[(f(p) - f(p+1)]| \leqslant f(n+1) - f(n+2)$.

   D'où $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p[(f(p) - f(p+1)] = o\big(f(n+1)\big)$ ce qui entraîne $2x_n = (-1)^{n+1}f(n+1) + o(f(n+1))$,

   soit $\boxed{x_n \sim \frac{1}{2}(-1)^{n+1}f(n+1).}$

CHAPITRE

3

PROBABILITÉS

Sujet 3.1

Soit un entier $d \geqslant 1$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Pour tout vecteur aléatoire $\Omega \xrightarrow{X} \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, on note :

$$\mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_d) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X_1, X_1) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1, X_d) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_d, X_1) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_d, X_d) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),$$

où $X_1, \dots, X_d$ sont les variables aléatoires réelles telles que : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_d(\omega) \end{pmatrix}$.

Soit X un tel vecteur aléatoire.

1. La matrice $\mathbb{V}(X)$ est-elle diagonalisable ?
2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul. Soit $A \in \mathcal{M}_{r,d}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\mathbb{E}(AX) = A\mathbb{E}(X)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{V}(AX) = A\mathbb{V}(X)\,{}^tA$.

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

3. On suppose que $\mathbb{E}(X) = 0$. Montrer que $\mathbb{P}\left(X \in (\mathrm{Ker}\,\mathbb{V}(X))^{\perp}\right) = 1$,
   où l'on a noté $\mathrm{Ker}\,\mathbb{V}(X)$ le noyau de l'endomorphisme $Y \mapsto \mathbb{V}(X) \times Y$ de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$.

Solution du sujet 3.1

1. La matrice $\mathbb{V}(X)$ est symétrique car la covariance est symétrique.
   D'après le théorème spectral, elle est donc diagonalisable (en base orthonormée).

2. (a) On calcule $\mathbb{E}[AX]_i = \mathbb{E}[(AX)_i] = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{d} A_{i,k}X_k\right) = \sum_{k=1}^{d} A_{i,k}\mathbb{E}[X_k] = (A\mathbb{E}[X])_i$.

   (b) On a : $(\mathbb{V}(AX))_{i,j} = \mathrm{Cov}((AX)_i,(AX)_j) = \mathrm{Cov}(\sum_{k=1}^{d} A_{i,k}X_k, \sum_{k'=1}^{d} A_{j,k'}X_{k'})$.
   Par bilinéarité de la covariance, on a donc :
   $$(\mathbb{V}(AX))_{i,j} = \sum_{k=1}^{d}\sum_{k'=1}^{d} A_{i,k}A_{j,k'}\mathrm{Cov}(X_k,X_{k'}) = \sum_{k=1}^{d}\sum_{k'=1}^{d} A_{i,k}\mathbb{V}(X)_{k,k'}\,{}^t(A)_{k',j} = (A\mathbb{V}(X){}^tA)_{i,j}$$
   où la dernière égalité provient de la formule du produit de trois matrices :
   $$(ABC)_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} A_{i,k}(BC)_{k,j} = \sum_{k=1}^{d}\sum_{k'=1}^{d} A_{i,k}B_{k,k'}C_{k',j}.$$

3. On remarque d'abord que : $\langle u, X\rangle = {}^tuX$.
   Ainsi, d'après Q2 : $\mathbb{E}[\langle u,X\rangle] = \mathbb{E}[{}^tuX] = {}^tu\mathbb{E}[X] = {}^tu0 = 0$.
   De même $\mathbb{V}(\langle u,X\rangle) = \mathbb{V}({}^tuX) = {}^tu\mathbb{V}(X)u = {}^tu0 = 0$, pour tout $u \in \mathrm{Ker}\,\mathbb{V}(X)$
   Ainsi, pour tout $u \in \mathrm{Ker}\,\mathbb{V}(X)$ la variable aléatoire réelle $\langle u,X\rangle$ est de variance nulle, donc elle est constante presque sûrement ; mais son espérance est nulle, donc $\mathbb{P}(\langle u,X\rangle = 0) = 1$.

   C'est vrai pour tout vecteur u dans le noyau de $\mathbb{V}(X)$, donc pour chacun des vecteurs $u_1,\cdots,u_s$ d'une base de $\mathrm{Ker}\,\mathbb{V}(X)$.
   Donc : $\mathbb{P}\left(X \in (\mathrm{Ker}\,\mathbb{V}(X))^{\perp}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{s}(\langle u_i,X\rangle = 0)\right) = \boxed{1,}$
   car une intersection finie d'événements presque sûrs l'est aussi ; ceci se montre par exemple en passant au complémentaire puisque, par sous-additivité de P (à montrer par récurrence sur $s \geqslant 0$), on a :
   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{s}(\langle u_i,X\rangle \neq 0)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{s}\mathbb{P}(\langle u_i,X\rangle \neq 0) = 0.$$

Sujet 3.2

Soit p un réel de $]0,1[$. On réalise une expérience aléatoire à l'aide de n pièces truquées, chacune amenant Pile avec la probabilité p, indépendamment du résultat des autres pièces.

Cette expérience aléatoire consiste en une succession d'*étapes* :

- Chaque étape se déroule en deux temps : On lance d'abord les n pièces : celles qui donnent « Pile » sont retirées du jeu ; ensuite, celles qui donnent « Face » sont relancées ; parmi celles-là, celles qui donnent alors à nouveau « Face » sont retirées du jeu.
- On répète les étapes jusqu'à ce que toutes les pièces aient été retirées du jeu ; on admet que cela se produit avec la probabilité 1.

Soit N la variable aléatoire égale au nombre d'étapes effectuées pour retirer les n pièces du jeu.

1. Préciser l'ensemble des valeurs prises par N et calculer $\mathbb{P}(N=1)$
2. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note N_i la variable aléatoire égale au numéro de l'étape au cours de laquelle la i-ème pièce i est retirée du jeu.

   (a) Pour tout entier $k \geqslant 1$, calculer $\mathbb{P}(N_i > k)$.

   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(N > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   (c) Étudier la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(N > k)$

3. Montrer l'existence de $\mathbb{E}(N)$ et en donner une expression en fonction de p, q et n.

Solution du sujet 3.2

1. On a $\boxed{N(\Omega) = \mathbb{N}^*}$ car une succession de lancers FP donnerait lieu à un nombre d'étapes infini, ce qui ne se produit pas (presque sûrement) d'après l'énoncé.
   Lors d'une étape, une pièce donnée a la probabilité $p + q^2$ d'être éjectée.
   Chaque pièce a la même probabilité d'être éjectée.
   Comme les résultats des lancers de pièces sont indépendants, il vient $\mathbb{P}(N = 1) = (p+q^2)^n = \boxed{(1-pq)^n.}$
2. (a) Pour la i-ème pièce, notons F_j (resp. F'_j) l'événement [le premier (resp. le deuxième) lancer le l'étape j donne « Face »] ($j \in \mathbb{N}^*$).
   Alors :
   $$(N_i > k) = \bigcap_{j=1}^{k} \left(F_j \cap \overline{F'_j}\right),$$
   donc par indépendance des étapes et des lancers lors d'un étape, on a :
   $$P(N_i > k) = \bigcap_{j=1}^{k} P\left(\overline{F'_j}\right) P(F_j) = \bigcap_{j=1}^{k} pq = (pq)^k.$$
   (b) On a $N = \max\{N_i | 1 \leqslant i \leqslant n\}$, donc, par indépendance des N_i, on a :
   $$\mathbb{P}(N > k) = 1 - \mathbb{P}(N \leqslant k) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (N_i \leqslant k)\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(N_i > k)) = 1 - \left(1 - (pq)^k\right)^n.$$
   (c) Comme $(pq)^k \to 0$ (car $|pq| < 1$) , et $1 - (1+x)^n \underset{x \to 0}{\sim} -nx$ on a :
   $$u_k = 1 - (1 - (pq)^k)^n \underset{k \to +\infty}{\sim} n(pq)^k \geqslant 0$$
   qui est le terme général d'une série convergente d'où la convergence de $\sum u_k$.
3. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N = k) \underset{\star}{=} \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(N > k) - m\mathbb{P}(N > m) \leqslant \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(N > k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N > k).$$
   Comme ses sommes partielles sont majorées la série à termes positifs $\sum_k k\mathbb{P}(N = k)$ converge, donc l'espérance existe.

   De plus $m\mathbb{P}(N > m) \leqslant \sum_{k \geqslant m+1} k\mathbb{P}(N = k) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (reste d'une série convergente),

   donc par passage à la limite dans l'égalité $\star$, on a $\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N > k)$.

   Ici on a donc $\boxed{E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - (1 - (pq)^k)^n).}$

Sujet 3.3

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad X_n(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(X_n = 1) = \frac{1}{\lambda+1}.$$

1. Soit $U = X_0X_3 - X_1X_2$. Calculer l'espérance et la variance de U.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = \displaystyle\prod_{i=0}^{n} X_i$.
   (a) Déterminer la loi de Y_n.
   (b) Étudier la convergence en loi de la suite (Y_n).

Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T, $X_0, \ldots, X_n$ sont indépendantes. Soit $V = \displaystyle\prod_{i=0}^{T} X_i$. On admet que V est une variable aléatoire.

3. Après avoir prouvé son existence, calculer l'espérance de V.

Solution du sujet 3.3

1. Par linéarité de l'espérance et indépendance des X_k, on a : $\mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(X_0)\mathrm{E}(X_3) - \mathrm{E}(X_1)\mathrm{E}(X_2) = \boxed{0.}$

$$\begin{aligned} V(U) &= E(U^2) - E(U)^2 = E(U^2) \qquad (\text{Koenig-Huygens}) \\ &= E\big(X_0^2X_3^2\big) - 2E(X_0X_1X_2X_3) + E\big(X_1^2X_2^2\big) \qquad (\text{linéarité de l'espérance}) \\ &= 2E\big(X_0^2\big)^2 - 2E\big(X_0\big)^4 \qquad (\text{variables IID}) \\ &= \boxed{2\left(1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^4\right).} \end{aligned}$$

car $\mathrm{E}(X_0) = \mathrm{P}(X_0 = 1) - \mathrm{P}(X_0 = -1) = 2\mathrm{P}(X_0 = 1) - 1 = \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$,
et $E\big(X_0^2\big) = 1$ — puisque $X_0^2 = 1$ (presque sûrement).
Remarque : le resultat de cette question ne sert pas dans la suite.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $Y_n(\Omega) = \{-1, 1\}$. Notons $\boxed{a_n = \mathrm{P}(Y_n = 1). \text{ D'où, } 1 - a_n = \mathrm{P}(Y_n = -1).}$
Par indépendance des X_k,
$$\mathrm{E}(Y_n) = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{E}(X_k) = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}$$
mais on a aussi $\mathrm{E}(Y_n) = a_n - (1 - a_n) = 2a_n - 1$. On en tire $\boxed{a_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \left(\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1}\right).}$

   (b) On montre que
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y_n = 1) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2}.$$
Ainsi, la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

3. $V(\Omega) = \{-1, 1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Alors,
$$\mathrm{P}(V = \varepsilon \mid T = n) = \frac{\mathrm{P}(T = n \cap V = \varepsilon)}{\mathrm{P}(T = n)} = \frac{\mathrm{P}(T = n)\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n} X_k = \varepsilon\right)}{\mathrm{P}(T = n)} = \mathrm{P}(Y_n = \varepsilon).$$
Donc, la loi conditionnelle de V sachant $[T = n]$ est la loi de Y_n.
On applique la $\boxed{\text{formule de l'espérance totale}}$ avec le système complet d'événements $([T = n])_{n\in\mathbb{N}}$.
Après avoir vérifié la convergence de la série de terme général $\mathrm{E}(V \mid T = n)\mathrm{P}(T_n)$, on obtient l'existence de l'espérance de V avec
$$\mathrm{E}(V) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{E}(V \mid T = n)\mathrm{P}(T_n) = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) \mathrm{e}^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!}\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^n\right) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \exp\left(\frac{-2\lambda}{1+\lambda}\right).$$

Sujet 3.4

Un pion se déplace sur un axe gradué par les par les éléments de $\mathbb{Z}$.
À l'instant $n = 0$ il se trouve en l'origine. À chaque instant n il se déplace d'une unité à droite ou à gauche avec équiprobabilité, les déplacements étant indépendants les uns des autres.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la position du pion à l'instant n.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer S_n à l'aide d'une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de même loi (à préciser) bien choisies.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le probabilité l'événement $(S_n = 0)$,
   c'est-à-dire que la probabilité le pion se trouve à l'origine à l'instant $t = n$.
   (c) *On admet que* $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.
   Donner un équivalent de $P(S_{2n} = 0)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. On note R_n le nombre de fois où le pion est passé par la position 0 au cours des n premiers déplacements (sans compter celle à l'instant $n = 0$).
   Exprimer de l'espérance $E(R_n)$ à l'aide des lois des S_k $(k \in \mathbb{N}^*)$.
3. (a) On admet le résultat suivant : si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles positives équivalentes telles que la série $\sum\limits_n u_n$ diverge, alors les suites $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)_n$ et $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} v_k\right)_n$ sont équivalentes.
   Déterminer un équivalent de $E(R_n)$ lorsque $n \to +\infty$.
   (b) Démontrer le résultat admis.

Solution du sujet 3.4

1. (a) On a $\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k,}$ où chaque X_k modélise le k-ième déplacement.
   Ainsi les $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes, de même loi (de Rademacher) donnée par
   $$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$$
   (b) Le pion ne peut se retrouver en 0 qu'après un nombre pair de déplacements, d'où $\boxed{P(S_{2n+1} = 0) = 0.}$
   Il est en 0 après $2n$ saut si et seulement si, il à fait n sauts vers la droite et n sauts vers la gauche; il y a $\binom{2n}{n}$ possibilités pour cela.
   Par incompatibilité des possiblités et indépendances de sauts, et d'après la loi des X_i, il vient :
   $$\boxed{P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.}$$
   (c) En utilisant la formule admise (de Stirling), on a :
   $$\frac{(2n)!}{n!^2} \sim \sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \times \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^{2n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$
   D'où : $\boxed{P(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.}$
2. Notons $\mathbb{1}_{[S_k=0]}$ la fonction indicatrice de l'événement $[S_k = 0]$.
   Alors $R_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[S_k=0]}$. Donc $\boxed{E(R_n) = \sum_{k=1}^{n} P(S_k = 0).}$
3. (a) Comme la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, d'après **Q1c** et le résultat admis, on a :
   $$\sum_{k=1}^{2n} P(S_k = 0) = \sum_{k=1}^{n} P(S_{2k} = 0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{n}-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}},$$
   où l'équivalence somme partielle de série/intégrale s'obtient classiquement par comparaison car la fonction $t \to \frac{1}{\sqrt{t}}$ est positive, décroissante sur $[1, +\infty[$ et d'intégrale divergente.
   Comme $E(R_{2n+1}) = E(R_{2n})$, on en déduit que $\boxed{E(R_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{n}{2\pi}} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}}$
   (b) Écrivons la définition de l'équivalence :
   $$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \text{ tel que } n \geqslant n_0 \Rightarrow |v_n - u_n| < \varepsilon u_n$$
   Posons $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Alors, pour $n \geqslant n_0$
   $$|U_n - V_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - v_k| + \sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k - v_k| \leqslant C_{n_0} + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{n} \leqslant C_{n_0} + \varepsilon U_n$$
   Comme $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $C_{n_0} < \varepsilon U_n$.
   Ainsi pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $|U_n - V_n| < 2\varepsilon U_n$.

Sujet 3.5

1. Soit $x > 0$.
   Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$:
$$\mathrm{e}^{-x^2/2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \leqslant \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x^2/2}\frac{1}{x}.$$
   (b) Déterminer un équivalent simple de $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi normale centrée réduite.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$. Montrer que $\left(\dfrac{Y_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

Solution du sujet 3.5

1. Soit $x > 0$. On reconnaît la dérivée de $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t^2/2}$:
$$\int_x^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty}\left[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_x^b = \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

2. (a) • Majoration : Pour $t \geqslant x$, on a $1 \leqslant \frac{t}{x}$, donc $\mathrm{e}^{-t^2/2} \leqslant \frac{1}{x}t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$. D'où par croissance de l'intégrale :
$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x^2/2}\frac{1}{x}.$$
• Minoration : On intègre par parties sur un segment $[x,b]$, puis on passe à la limite, avec $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{-t^2/2}$, on a $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$ (de classe $\mathcal{C}^1$) et $v'(t) = t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$. Comme $\lim\limits_{b\to+\infty} u(b)v(b) = 0$, on obtient :
$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-x^2/2} - \int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$
Puis $0 \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x^3}\int_x^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

   (b) En reconnaissant la densité de la loi normale centrée réduite, on a :
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\right) &= \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \ln(1+u)\underset{u\to0}{\sim} u \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = 0\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \boxed{-\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2},}\end{aligned}$$
d'après l'encadrement précédent.

3. • Soit $\varepsilon > 0$. On a :
$$\begin{aligned}P\left(\left|\frac{Y_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) &= P(|Y_n| \geqslant n\varepsilon)\\ &= P\big((Y_n \geqslant n\varepsilon)\cup(Y_n \leqslant -n\varepsilon)\big)\\ &= P(Y_n \geqslant n\varepsilon) + P(Y_n \leqslant -n\varepsilon) \qquad \text{par incompatibilité}\end{aligned}$$
• Or, classiquement, on a
$$P(Y_n \leqslant -n\varepsilon) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leqslant -n\varepsilon)\right) = \big(P(X_1 \leqslant -n\varepsilon)\big)^n,$$
car les X_i sont IID. Et de même :
$$P(Y_n \geqslant n\varepsilon) = 1 - P(Y_n < n\varepsilon) = 1 - \big(P(X_1 < n\varepsilon)\big)^n.$$
• Donc d'une part $P(Y_n \leqslant -n\varepsilon) = P(X_1 \leqslant -n\varepsilon)^n \leqslant P(X_1 \leqslant 0)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
• Et d'autre part avec **Q2b** :
$$n\ln\big(P(X_1 < n\varepsilon)\big) = n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{n\varepsilon}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\left(-\frac{1}{n\varepsilon\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-n^2\varepsilon^2/2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
D'où : $\big(P(X_1 < n\varepsilon)\big)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$, d'où $P(Y_n \geqslant n\varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
• Conclusion : $\boxed{P\left(\left|\frac{Y_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$ pour tout $\varepsilon > 0$ *i.e.* $\dfrac{Y_n}{n} \overset{P}{\longrightarrow} 0$.

Sujet 3.6

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution x_n.

   (b) Étudier la monotonie de la suite (x_n).

2. Soit $\lambda > 0$.
   Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
   On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} P(S_n \leqslant n) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } \lambda = 1 \\ 0 & \text{si } \lambda > 1 \\ 1 & \text{si } \lambda < 1 \end{cases}$$

3. En utilisant la question 2, déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \to +\infty$.

Solution du sujet 3.6

1. (a) La fonction f_n est dérivable et $f_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\dfrac{x^n}{n!} < 0$ (sauf en 0).
   Donc f_n est strictement décroissante de $\mathbb{R}^+$; et continue par ailleurs.
   Or $f_n(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n = 0$ par croissances comparées.
   Donc, avec le $\boxed{\text{théorème de la bijection,}}$ f_n est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $]0,1]$.

   (b) On a $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \mathrm{e}^{-x}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} > f_n(x)$ si $x > 0$.
   Donc $f_{n+1}(x_n) > f_n(x_n) = 0$. La décroissance de $x \to f_{n+1}(x)$ entraîne donc $x_n < x_{n+1}$.
   Ainsi $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est croissante.}}$

2. Par thoréorème de stabilité, on a : $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$. Donc :
   - Si $\lambda = 1$, le $\boxed{\text{théorème central limite}}$ permet d'écrire

   $$P(S_n \leqslant n) = P(S_n^* \leqslant 0) \underset{n\to+\infty}{\to} \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

   - Si $\lambda < 1$, $\boxed{\text{l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff}}$ permet d'écrire

   $$P(S_n > n) = P(S_n - n\lambda > n(1-\lambda)) \leqslant P(|S_n - n\lambda| > n(1-\lambda)) \leqslant \frac{V(S_n)}{n^2(1-\lambda)^2} = \frac{\lambda}{n(1-\lambda)^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

   - Si $\lambda > 1$, l'inégalité de Bienaymé Tchebicheff permet d'écrire

   $$P(S_n \leqslant n) = P(S_n - n\lambda \leqslant n(1-\lambda)) \leqslant P(|S_n - n\lambda| > n(\lambda-1)) \leqslant \frac{V(S_n)}{n^2(\lambda-1)^2} = \frac{\lambda}{n(\lambda-1)^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

3. **Indication : exprimer $P(S_n \leqslant n)$ à l'aide de f_n.**
   D'après la loi de S_n, on a $P(S_n \leqslant n) = f_n(n\lambda)$.

   Soit $\varepsilon \in]0,1[$.
   - En prenant $\lambda = 1+\varepsilon$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(n\lambda) = 0$. Donc pour n assez grand :

   $$f_n(n\lambda) < \frac{1}{2} = f_n(x_n) \Longrightarrow n\lambda > x_n \iff n(1+\varepsilon) > x_n$$

   - En prenant $\lambda = 1-\varepsilon$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(n\lambda) = 1$. Donc pour n assez grand :

   $$f_n(n\lambda) > \frac{1}{2} = f_n(x_n) \Longrightarrow n(1-\varepsilon) < x_n \iff n(1+\varepsilon) < x_n$$

   Ainsi, pour n assez grand, on a $n(1-\varepsilon) < x_n < n(1+\varepsilon)$.
   Par $\boxed{\text{définition de la limite,}}$ ceci montre que $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.}$

Sujet 3.7

Soient E un espace vectoriel euclidien, dont la norme est notée $\|\cdot\|$.
Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit une famille $(v_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de vecteurs unitaires de E.

1. On suppose que les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont deux à deux orthogonaux.
   Démontrer que pour tout n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ on a :

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}.$$

On lance une pièce de monnaie équilibrée n fois de suite et de manière indépendante.
Pour $j \in [\![1, n]\!]$ soit X_j la variable aléatoire qui vaut -1 si le j-ème lancer donne « face », et qui vaut 1 sinon.
Soit la variable aléatoire suivante :

$$U = \|X_1 v_1 + X_2 v_2 + \cdots + X_n v_n\|^2$$

2. Déterminer $E(U)$.
3. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

   (i) Pour tout n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, $\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}$.
   (ii) La famille $(v_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est orthonormale.

4. En utilisant U, montrer que si les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ ne sont pas orthogonaux deux à deux alors il existe un n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que :

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| > \sqrt{n}.$$

Solution du sujet 3.7

1. Il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore.
2. $$E(U) = E\left(\langle\sum_{i=1}^{n} X_i v_i, \sum_{j=1}^{n} X_j v_j\rangle\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \|v_i\|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_i X_j \langle v_i, v_j\rangle\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)\underbrace{\|v_i\|^2}_{=1} + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} E(X_iX_j)\langle v_i, v_j\rangle \qquad \text{par linéarité de } E(\cdot)$$
$$= n. \qquad \text{car } E(X_i^2) = 1\,;\text{ et } E(X_iX_j) = E(X_i)E(X_j) = 0 \text{ par indépendance.}$$
3. • $(ii) \Rightarrow (i)$ a été démontré.en **Q1**.
   • Montrons $\boxed{\text{par récurrence sur } p \geqslant 1}$ que : » *pour toute famille* $(u_1, \ldots, u_p)$ *normée dans* E*, la propriété* (i) *implique que* $(u_1, \ldots, u_p)$ *est orthogonale* » $(\mathcal{E}_p)$. Pour $p = 1$ c'est évident.
   Si $(\mathcal{E}_p)$ vraie pour un certain rang $p \geqslant 1$. Soient $u_1, \ldots, u_{p+1}$ dans E^{p+1}, normés tels que :
   $$\forall, (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p+1}) \in \{-1, 1\}^{p+1},\ \left\|\sum_{i=1}^{p+1} \varepsilon_i u_i\right\|^2 = p + 1.$$
   On pose $x = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i u_i$. On a alors : $\|x + u_{p+1}\|^2 = \|x - u_{p+1}\|^2$ donc x et u_{p+1} sont orthogonaux.
   Alors, en choisissant $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) = (1, \ldots, 1)$ puis $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) = (-1, \ldots, -1, 1, -1, \ldots, -1)$ (1 est en j-ème position) par somme on obtient que $\boxed{u_{p+1} \text{ est orthogonal à } 2u_j, \text{ pour tout } j \in [\![1, n]\!].}$
   De plus, par Pythagore : $p + 1 = \left\|\sum_{i=1}^{p+1} \varepsilon_i u_i\right\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i u_i\right\|^2 + \underbrace{\|\varepsilon_{p+1}u_{p+1}\|^2}_{=1}$.
   Ainsi, pour tout $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) \in \{-1, 1\}^p$, on a : $\left\|\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i u_i\right\|^2 = p$.
   Donc par HR, $u_1, \ldots, u_p$ sont orthogonaux.
   Ainsi $u_1, \ldots, u_{p+1}$ sont orthogonaux.
4. **Indication : commencer par traduire ce qu'on a et ce qu'on veut à l'aide de U.**

   • $\boxed{\text{Il suffit de montrer que } P(U > n) > 0,}$
   car alors, en prenant $\omega \in (U > n)$ le n-uplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \big(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big)$ conviendra.
   • Et si $(u_1, \ldots, u_p)$ ne sont pas orthogonaux, en contraposant **Q3**, il existe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ tels que $\|\cdots\|^2 \neq n$, donc $B = (X_1 = \varepsilon_1) \cap (X_n = \varepsilon_n) \subset (U \neq n)$. Comme $P(B) = \dfrac{1}{2^n}$, on a $\boxed{P(U = n) \neq 1,}$
   • Par l'absurde, si $P(U > n) = 0$,
   par la $\boxed{\text{formule de l'espérance totale avec le système complet } (U > n), (U = n), (U < n),}$ on aurait :
   $$n = E(U) = \underbrace{E(U|U > n)P(U > n)}_{=0} + \underbrace{E(U|U = n)P(U = n)}_{=nP(U=n)} + E(U|U < n)P(U < n),$$
   soit : $n(1 - P(U = n)) = E(U|U < n)P(U < n)$, soit $n(1 - P(U = n)) = E(U|U < n)(1 - P(U = n))$,
   soit $(1 - P(U = n))(n - E(U|U < n) = 0$,
   soit $E(U|U < n) = n$ car $P(U = n) \neq 1$, soit $E(n - U|U < n) = 0$.
   C'est absurde car $n - U$ est presque sûrement positive sachant $(U > n)$, donc si son espérance est nulle c'est qu'elle est presque sûrement nulle.
   Remarque : on doit pouvoir remplacer la formule de l'espérance totale par la formule de transfert pour un n*-uplet, mais elle n'est au programme que pour* $n = 2$.

Sujet 3.8

Soit la fonction $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité.

Soit X une variable aléatoire de densité f.
Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = E(X^n)$.

2. (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
   (c) En déduire que la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers cette limite.
3. (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.
   (b) Montrer qu'il existe a, b réels tels que, lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Solution du sujet 3.8

1. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. De plus, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}\,\mathrm{e}^{-x}dx = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}[-\mathrm{e}^{-x}]_0^1 = 1.$$

2. (a) Comme la variable X est à valeurs dans $[0, 1]$, c'est aussi le cas de la variable X^n ; donc X^n admet une espérance. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie.

   (b) Pour tout entier n, on a : $\forall x \in [0, 1],\quad 0 \leqslant x^n\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n$,
   donc en intégrant on obtient

$$0 \leqslant u_n = \int_0^1 \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}\,x^n\mathrm{e}^{-x}dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}\,x^n dx = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} \times \frac{1}{n+1}.$$

   Par encadrement on en déduit que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$

   (c) Comme X^n est positive, on peut appliquer $\boxed{\text{l'inégalité de Markov,}}$ qui donne, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\big(|X^n - 0| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{E(X^n)}{\varepsilon} = \frac{u_n}{\varepsilon} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   i.e. $\boxed{\text{la suite } (X^n) \text{ converge en probabilité vers } 0.}$
   Autre idée :

$$P(|X| \geqslant \varepsilon) = P(X \geqslant \varepsilon^{\frac{1}{n}}) + P(X \leqslant -\varepsilon^{\frac{1}{n}}) = \int_{-\infty}^{-\varepsilon^{\frac{1}{n}}} f + \int_{\varepsilon^{\frac{1}{n}}}^{+\infty} f \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{-1} f + \int_1^{+\infty} f = 0.$$

3. (a) Par $\boxed{\text{intégration par parties,}}$ et on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_0^1 \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}\,x^{n+1} \times \mathrm{e}^{-x}dx = \left[\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}\,x^{n+1}(-\mathrm{e}^{-x})\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}\,x^n(-\mathrm{e}^{-x})dx \\ &= \boxed{\frac{-\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}} + (n+1)u_n.} \end{aligned}$$

   On en déduit que :

$$nu_n = \frac{n}{n+1}\left(u_{n+1} + \frac{\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1} + \frac{\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{\frac{\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}} = a.}$$

   (b) D'après le calcul de nu_n dans **Q3a**, on a :

$$\begin{aligned} n^2\left(u_n - \frac{a}{n}\right) &= n\,(nu_n - a) \underset{\textbf{Q3a}}{=} n\left(\frac{n}{n+1}(u_{n+1} + a) - a\right) = \frac{n^2}{n+1}u_{n+1} - \frac{n}{n+1} \times a \\ &= \frac{n^2}{(n+1)^2}(n+1)u_{n+1} - \frac{n}{n+1} \times a \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times a - 1 \times a = 0. \end{aligned}$$

   Ainsi $n^2\left(u_n - \frac{a}{n}\right) = \mathrm{o}\,(1)$, soit : $\boxed{u_n = \frac{a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ (*i.e.* $b = 0$ convient).

CHAPITRE

4

OPTION B/L

Sujet 4.1

On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont *semblables* lorsqu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

1. (a) Montrer que si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont semblables, alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

   (b) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Trouver une constante réelle λ telle que

$$A^2 = \mathrm{Tr}(A)A + \lambda \det(A)\mathrm{I}_2.$$

2. Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On suppose qu'il existe une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AM - MA = A$.

   (a) Calculer $\mathrm{Tr}(A)$.

   (b) La matrice A est-elle inversible ?

   (c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est semblable à sa transposée.
   Indication : si A n'est pas un multiple de la matrice identité, on pourra montrer l'existence d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, u(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

Solution du sujet 4.1

1. Le programme officiel de BL contient seulement la mention suivante "trace d'une matrice, trace d'un produit". On peut donc supposer connue l'égalité $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$.
   (a) Si les matrices A et B sont semblables, il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$. On a alors : $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}BP) = \mathrm{Tr}(PP^{-1}B) = \mathrm{Tr}(B)$.
   (b) En notant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :
$$\mathrm{Tr}(A)A - \det(A)\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} (a+d)a-(ad-bc) & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d-(ad-bc) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = A^2$$
   Le réel λ cherché est $\boxed{\lambda = -1.}$
2. (a) Par linéarité de la trace, $\mathrm{Tr}(AM) - \mathrm{Tr}(MA) = \mathrm{Tr}(A)$. Or, $\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(MA)$, donc $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = 0}$.
   (b) Si la matrice A était inversible, alors on aurait : $AMA^{-1} - MAA^{-1} = AA^{-1}$ i.e. $AMA^{-1} - M = \mathrm{I}_2$. Par linéarité de Tr, on aurait alors $\mathrm{Tr}(AMA^{-1}) - \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_2)$. Or, $\mathrm{Tr}(AMA^{-1}) = \mathrm{Tr}(M)$, on aurait donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{I}_2) = 0$, d'où une contradiction. Ainsi, $\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$
   (c) On pourra suggérer au candidat de calculer A^2.
   • On a vu que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. En outre, la matrice A n'est pas inversible, donc $\det(A) = 0$. En reportant dans l'égalité de la question 1, il vient alors $\boxed{A^2 = 0_2.}$
   • La seule valeur propre possible de A est alors 0 (et elle l'est effectivement puisque A n'est pas inversible). Si la matrice A était diagonalisable, il existerait une matrice inversible P de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = 0_2$. Par suite, on aurait $A = 0_2$, ce qui est absurde.
   Ainsi, $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$
3. • Si la matrice A est scalaire, alors elle est égale à sa transposée et donc elle lui est semblable.
   • Supposons A non scalaire. On montre qu'il existe un vecteur x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, u(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$. Supposons que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^2$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Pour tout vecteur x non nul, il existe donc un réel λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Il existe un réel λ_1 tel que $u(e_1) = \lambda_1 e_1$, un réel λ_2 tel que $u(e_2) = \lambda_2 e_2$ et un réel μ tel que $u(e_1+e_2) = \mu(e_1+e_2)$. On a alors :
$$\mu e_1 + \mu e_2 = \mu(e_1+e_2) = u(e_1+e_2) = u(e_1) + u(e_2) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$
   En identifiant, on obtient alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$ et ainsi les endomorphismes u et $\mu\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ coïncident sur la base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$, ils sont donc égaux. On en déduit que $A = \mu\mathrm{I}_2$, ce qui est absurde. Il existe donc bien un vecteur x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $\mathcal{B}' = (x, u(x))$ est libre, ce qui en fait une base de $\mathbb{R}^2$. En utilisant le résultat de la question 1, $u(u(x)) = u^2(x) = \mathrm{Tr}(A)u(x) - \det(A)x$, donc la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \mathrm{Tr}(A) \end{pmatrix}$.
   En procédant de même, on montre que A^T est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -\det(A^T) \\ 1 & \mathrm{Tr}(A^T) \end{pmatrix}$, matrice dont on montre qu'elle est égale à M. Finalement, $\boxed{A \text{ et } A^T \text{ sont semblables à une même matrice, elles sont donc semblables.}}$

Sujet 4.2

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.
   Montrer qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = Q\Delta Q^{-1}$.
2. Soit $p \in]0,1[$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.
   Pour tout ω de Ω, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$.
   Calculer la probabilité de l'événement $E = \{\omega \in \Omega\ ;\ M(\omega) \text{ est inversible}\}$.
3. On note $S(\omega)$ (resp. $D(\omega)$) la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$.
   (a) Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.
   (b) Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

Solution du sujet 4.2

1. En résolvant les équations $AX = (a+b)X$ et $AX = (a-b)X$, on montre que les deux valeurs propres (distinctes) de A sont $a+b$ et $a-b$.

   De plus, les sous-espaces propres associés sont $E_{a+b} = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $E_{a-b} = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

   En posant $\boxed{Q = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}}$, on obtient $A = Q\Delta Q^{-1}$

2. Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, la matrice $M(\omega)$ est de la forme de la matrice A étudiée dans la question 1. Or, A est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A, donc si et seulement si $a \neq b$. Il suit que $\mathbb{P}(E) = P(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y)$ avec

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2(i-1)}p^2 = p^2\sum_{j=0}^{+\infty}(q^2)^j = p^2\frac{1}{1-q^2} = \frac{p}{1+q} = \frac{p}{2-p}$$

   On conclut que $\boxed{\mathbb{P}(E) = \frac{2-2p}{2-p}.}$

3. (a) Les valeurs propres de $M(\omega)$ sont $X(\omega)+Y(\omega)$ et $X(\omega)-Y(\omega)$. Comme $Y(\omega) > 0$ (loi géométrique), la plus grande des valeurs propres est $S(\omega) = X(\omega)+Y(\omega)$ et la plus petite des valeurs propres est $D(\omega) = X(\omega) - Y(\omega)$. Ainsi,

$$\text{cov}(S, D) = \text{cov}(X+Y, X-Y) = \text{cov}(X, X) + \text{cov}(X, -Y) + \text{cov}(Y, X) + \text{cov}(Y, -Y)$$

$$\text{cov}(S, D) = \text{cov}(X, X) - \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X, Y) - \text{cov}(Y, Y) = \text{V}(X) - \text{V}(Y) = \boxed{0}.$$

   (b) Par indépendance de X et de Y, on a

$$\mathbb{P}(S = 2) = \mathbb{P}\Big((X = 1)\cap(Y = 1)\Big) = P(X = 1)P(Y = 1) = p^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(D = 0) = \mathbb{P}(X = Y) = \frac{p}{2-p}.$$

   Or,

$$\mathbb{P}\Big((S = 2)\cap(D = 0)\Big) = P\Big((X = 1)\cap(Y = 1)\Big) = P(X = 1)P(Y = 1) = p^2$$

   On peut montrer que $\frac{p}{2-p} \neq 1$. Ainsi, $\mathbb{P}([S = 2]\cap[D = 0]) \neq \mathbb{P}(S = 2)\cdot\mathbb{P}(D = 0)$.

   $\boxed{\text{Les variables aléatoires } S \text{ et } D \text{ ne sont pas indépendantes}}$, alors que leurs covariance est nulle.

Sujet 4.3

1. On note F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall\, x \geqslant 0, \qquad F(x) = \left(1+\sqrt{x}\right) \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}.$$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et exprimer $F'(x)$ en tout point x de $\mathbb{R}_+$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que g est une densité de probabilité.

3. On note désormais X une variable aléatoire réelle admettant g comme densité.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que X admet un moment d'ordre n et donner sa valeur.

Solution du sujet 4.3

1. La fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec

$$\forall x > 0, \qquad F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} - (1+\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = \boxed{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}$$

Le théorème de prolongement de la fonction dérivée ne figure pas au programme de BL : les candidats ne peuvent donc pas l'utiliser. Il faut donc calculer la limite du taux d'accroissement de F en 0. Un développement limité au voisinage de 0 donne :

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} + \frac{x}{2} + o(x)$$

On en déduit que, toujours lorsque x tend vers 0 :

$$\frac{(1+\sqrt{x})\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} - 1}{x} = \frac{(1+\sqrt{x})\left(1-\sqrt{x}+\frac{x}{2}+o(x)\right)-1}{x} = \frac{-\frac{x}{2}+o(x)}{x} = -\frac{1}{2} + o(1)$$

Ainsi, $\boxed{F \text{ est dérivable en 0, avec } F'(0) = -\frac{1}{2}.}$

2. La fonction g est définie et positive sur $\mathbb{R}$.
La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.
Pour tout réel $A > 0$,

$$I(A) = \int_0^A \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t = [-2F(t)]_0^A = 2F(0) - 2F(A) = 2 - 2\left(1+\sqrt{A}\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{A}} \quad \text{donc} \quad \lim_{A\to+\infty} I(A) = 2$$

Il suit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = 1$. On en déduit que $\boxed{g \text{ est une densité de probabilité.}}$

3. La variable X admet un moment d'ordre n si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^n e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge.
Dans le programme de BL, les changements de variable ne concernent que les intégrales sur un segment.
Pour tout $A > 0$, on pose donc $I(A) = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^A t^n e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ donne $I(A) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{A}} u^{2n+1}e^{-u}\mathrm{d}u$. La fonction Gamma ne figure pas au programme de BL.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n)$ converge et que $\Gamma(n) = (n-1)!$ L'hérédité repose sur une intégration par parties.
On conclut que $\boxed{X \text{ admet un moment d'ordre } n \text{ et } E(X^n) = \Gamma(2n+2) = (2n+1)!}$

Sujet 4.4

Soit $(x, b, r) \in (\mathbb{N}^*)^3$.
Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule de la façon suivante : à chaque tirage, on remet dans l'urne la boule tirée puis on y ajoute x boules de la couleur de celle qui vient d'être piochée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'on obtient une boule blanche au $n^{\text{ième}}$ tirage et qui prend la valeur 0 si l'on obtient une boule rouge au $n^{\text{ième}}$ tirage.

1. Déterminer la loi de X_1 puis en déduire $E(X_1)$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (a) Dire ce que représente la variable Y_n.
   (b) Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la probabilité $P_{(Y_n=k)}(X_{n+1} = 1)$.
   (c) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{b + xE(Y_n)}{b + r + nx}$$

3. Montrer que les variables X_n suivent toutes la même loi de Bernoulli.

SOLUTION DU SUJET 4.4

1. $\boxed{X_1 \text{ suit la loi de BERNOULLI de paramètre } \left(\frac{b}{b+r}\right)}$ et $\boxed{E(X_1) = \frac{b}{b+r}}$.

2. (a) $\boxed{Y_n \text{ est le nombre de boules blanches obtenues lors des } n \text{ premiers tirages.}}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Si $(Y_n = k)$ est réalisé, les n premiers tirages ont donné k boules blanches. Comme, à chaque tirage, on remet la boule tirée en ajoutant x boules de la même couleur, il y a kx boules blanches de plus dans l'urne et nx boules de plus en tout.

   On a donc $\boxed{P_{(Y_n=k)}(X_{n+1} = 1) = \frac{b + kx}{b + r + nx}}$.

   (c) On a $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$.
   La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(Y_n = k)_{k\in[\![0,n]\!]}$, s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} P(Y_n = k) P_{(Y_n=k)}(X_{n+1} = 1)$$

   On a donc

$$\boxed{P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b + kx}{b + r + nx} P(Y_n = k) = \frac{b + xE(Y_n)}{b + r + nx}}.$$

3. On fait une récurrence forte, dont l'initialisation est déjà faite, puis on suppose que jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, toutes les variables X_k suivent la loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{b}{b+r}$. Ceci permet d'obtenir l'espérance de Y_n par linéarité de l'espérance, puisque $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et on a alors :

$$E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{b+r} = n \times \frac{b}{b+r}$$

   On remplace ensuite dans l'expression de $P(X_{n+1} = 1)$ et on trouve :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{b}{b+r}$$

   On conclut que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\boxed{X_n \text{ suit la loi de BERNOULLI de paramètre } \frac{b}{b+r}}$.

Sujet 4.5

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

1. (a) Calculer I_1 et I_2.
   (b) Étudier la monotonie de la suite (I_n).
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre I_{n+2} et I_n.
   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)$.
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$. Comparer u_{n+1} et u_n.
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n}I_n)$.

Solution du sujet 4.5

On rappelle que la notion d'équivalent n'est pas au programme de B/L.

1. (a) $\boxed{I_1 = 1.}$ En utilisant la formule $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$, on trouve $\boxed{I_2 = \dfrac{\pi}{4}.}$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(\sin(t) - 1)dt \leqslant 0$. La suite $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante}}$.

2. (a) Par intégration par parties,

$$I_{n+2} = \left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)\,dt.$$

   On en déduit que $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$, ce qui donne $\boxed{I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n}$.

   (b) Par décroissance de la suite (I_n), $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.
   Par la question 2(a), $\dfrac{n+1}{n+2} I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, ce qui donne $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$ (on pourra demander au candidat de justifier rapidement que $I_n > 0$.) Par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right) = 1.}$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+2)\dfrac{n+1}{n+2} I_n I_{n+1} = u_n$. Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est constante.}}$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\pi}{2} = u_{n-1} = nI_nI_{n-1} = (\sqrt{n}I_n)^2\,\frac{I_{n-1}}{I_n}.$$

   En utilisant la question 2(b), on trouve $\lim\limits_{n \to +\infty}(nI_n^2) = \dfrac{\pi}{2}$. Comme $I_n > 0$, on conclut

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty}(\sqrt{n}I_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

CHAPITRE

5

EXEMPLES DE QUESTIONS COURTES

Question sans préparation 1

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $P_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1}(x-i)$ et $P_0(x) = 1$.

1. Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Soit $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $E(P_n(X))$ et en déduire que $E(X^n) \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \lambda^n$.

Solution de la QSP.

1. $\forall k \in \mathbb{N}$, degré(P_k)= k. Ainsi $(P_0, ..., P_n)$ est une famille de $n+1$ polynômes de degrés échelonnés, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Par le th. de transfert, $E(P_n(X))$ existe si et seulement si la série $\sum_{k \geqslant 0} P_n(k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ converge (absolument),

   c'est à dire si et seulement si la série $\sum_{k \geqslant n} \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$ converge,

   c'est à dire encore

   si et seulement si la série $\sum_{k \geqslant n} \frac{\lambda^k}{(k-n)!}e^{-\lambda}$ converge.

   Or il y a convergence et la somme vaut λ^n.

   De plus, en utilisant la base définie dans **Q1**, on a $x^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,n} P_k(x)$ pour tout x, avec $\alpha_{n,n} = 1$.

   Donc $E(X^n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,n}\lambda^k$ par linéarité, qui est équivalente à $\alpha_{n,n}\lambda^n = \lambda^n$, quand $\lambda \to +\infty$.

Question sans préparation 2

Soit un entier $n \geqslant 2$. On muni $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique, notée $||\cdot||$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On suppose que l'application f n'est pas bijective et qu'on a : $\mathbb{R}^n = \text{Im}(f) \oplus^{\perp} \text{Ker}(f)$.
Soit l'application $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par : $\varphi(x) = \inf\{||x - f(y)|| \mid y \in \mathbb{R}^n\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique couple $(y, z) \in \text{Im}(f) \times \text{Ker}(f)$ tel que :

$$z = x - y \text{ et } \varphi(x) = ||z||$$

2. Pour n pair, en déduire la valeur de : $A = \inf\left\{ \sqrt{(a_n + a_1 + 1)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(a_i + a_{i+1} - 1)^2} \;\middle|\; (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$.

Solution de la QSP.

1. On reconnaît que $\varphi(x)$ est la distance x au sous-espace vectoriel $\text{Im}(f)$.
D'après le théorème de projection sur un SEV, on sait donc que $\varphi(x) = d(x, \text{Im}(f)) = ||x - u||$, en notant y le projeté orthogonal du vecteur x sur $\text{Im}(f)$.
Du fait de l'orthogonalité de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$, on a alors : $z = y - u \in \text{Ker}(f)$.
2. On considère le vecteur de $\mathbb{R}^n$, $x = (1,\ 1, \ldots,\ 1,\ -1)$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par :

$$f(y_1, \ldots, y_n) = (y_1 + y_2, y_2 + y_3, \cdots, y_{n-1} + y_n, y_n + y_1)$$

On établit facilement que $\text{Ker}(f)$ est engendré par le vecteur $v_0 = (1,\ -1,\ \cdots, 1,\ -1)$.
Si $v = (y_1 + y_2, y_2 + y_3, \cdots, y_{n-1} + y_n, y_n + y_1) \in \text{Im}(f)$, on constate que $v \perp v_0$. Donc $\text{Im}(f) \perp \text{Ker}(f)$.
Donc la question 1 s'applique, et donne $A = \|z\|$ où z est le projeté orthononal de x sur $\text{Ker}\, f$.
Le vecteur $v_1 = \frac{v_0}{||v_0||}$ est une base orthonormée de $\text{Ker}(f)$,
donc la formule de la projection orthogonale dans une base orthonormée donne : $z = (x|v_1)v_1$.
Ainsi : $\boxed{A = (x|v_1) = \sqrt{\frac{4}{n}}.}$

Question sans préparation 3

Soit un entier $n \geqslant 2$ et E un espace vectoriel de dimension n. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

On que u et v sont codiagonalisables s'il existe une base de E dont les vecteurs sont à la fois vecteurs propres de u et de v.

1. Supposons que u admet n valeurs propres distinctes.
   Montrer que u et v commutent si et seulement si ils sont codiagonalisables.
2. Supposons maintenant que u est diagonalisable.
   A-t-on encore la propriété : u et v commutent si et seulement s'ils sont codiagonalisables ?

Solution de la QSP.

1. Si u et v sont codiagonalisables. Il existe $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ une base de vecteurs propres commune à u et v telle que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ et $v(e_i) = \mu_i\, e_i$ avec λ_i, $\mu_i \in \mathbb{R}$. On a $u \circ v(e_i) = \lambda_i \mu_i e_i = v \circ u(e_i)$.
   Les endomorphismes $u \circ v$ et $v \circ u$ coincident sur une base, ils sont donc égaux *i.e.* u et v commutent.

   Montrons la réciproque. L'endomorphisme u possède $n = \dim E$ valeurs propres distinctes, donc il est diagonalisable et les sous-espaces propres sont de dimension 1.
   Notons E_i le sev propre associé à λ_i.
   Il existe donc une base de vecteurs propres de u : $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ telle que $E_i = \mathrm{Vect}(e_i)$ et $u(e_i) = \lambda_i e_i$.
   Comme, u et v commutent, il vient : $u \circ v(e_i) = v \circ u(e_i) = \lambda_i v(e_i)$ et donc $v(e_i) \in E_i = \mathrm{Vect}(e_i)$.
   Il existe alors $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $v(e_i) = \mu_i e_i$.
   Ainsi $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de vecteurs propres commune à u et v et donc ils sont codiagonalisables.
2. Si u et v sont codiagonalisables, ils commutent d'après la preuve de la question 1).
   La réciproque n'est pas toujours vraie en prenant $u = \mathrm{Id}$ et v non diagonalisable (cela existe si $n \geqslant 2$; on pourra demander pourquoi au candidat).