

Planche Oral Probas 5 - ESCP 2023 - ex. 3.13 (version 2025)

Soit $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé .
Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace, mutuellement indépendantes, de loi géométrique de paramètre p .

On note C la variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* , définie pour tout $\omega \in \Omega$, par

$$C(\omega) = \max \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \dots \leq X_n(\omega) \right\}$$

(on admet qu'il est quasi certain d'avoir $X_k > X_{k+1}$ pour un certain rang k et donc C est bien défini). Remarquons que si $X_1(\omega) > X_2(\omega)$ alors $C(\omega) = 1$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X_1 \geq k)$.

2. Calculer $\mathbb{P}(C \geq 2)$.

3. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(C = 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(q) = \frac{(1 - q)^n}{(1 - q)(1 - q^2) \times \dots \times (1 - q^n)}$.

4. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : pour tout n et k appartenant à \mathbb{N}^* ,

$$\mathbb{P}(X_n \geq X_{n-1} \geq \dots \geq X_1 \geq k) = u_n(q) \times q^{n(k-1)}$$

5. Montrer que $\mathbb{P}(C \geq n) = u_n(q)$.

6. En simplifiant $\frac{1 - q}{1 - q^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que, pour tout n de \mathbb{N}^* , on a :

$$u_n(q) \leq \frac{1}{(1 + q)^{n-1}}. \text{ Justifier alors la convergence de la série de terme général } u_n(q).$$

7. Montrer que C admet une espérance et exprimer $E(C)$ en fonction des nombres $u_n(q)$.

QSP planche probas 5 (ESCP 2023)

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction F définie par

$$F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dx$$

2. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dx$$

QSP planche probas 5 (ESCP 2023)

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction F définie par

$$F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dx$$

2. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dx$$

QSP planche probas 5 (ESCP 2023)

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction F définie par

$$F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dx$$

2. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dx$$

QSP planche probas 5 (ESCP 2023)

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction F définie par

$$F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dx$$

2. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dx$$