Corrigé Planche Oral Probas 5 - ESCP 2023 - ex. 3.13 (version 2025)

1. D'après le cours : $\mathbb{P}(X_1 \geq k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = i) = \sum_{i=k}^{+\infty} q^{i-1}p = \dfrac{q^{k-1}}{1-q} \times p$.
   D'où $\mathbb{P}(X_1 \geq k) = q^{k-1}$.

2. Par indépendance de X_1 et X_2 :
$$\mathbb{P}((X_2 \geq X_1) \cap (X_1 = k)) = \mathbb{P}(X_2 \geq k) \cdot \mathbb{P}(X_1 = k) = q^{k-1} \cdot q^{k-1}p = (q^2)^{k-1}p.$$
   D'où par la FPT dans le SCE associé à X_1 :
$$\mathbb{P}(C \geq 2) = \mathbb{P}(X_2 \geq X_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X_2 \geq X_1) \cap (X_1 = k)) = p \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = \frac{1-q}{1-q^2} = \frac{1}{1+q}$$

3. On a $\mathbb{P}(C = 1) + \mathbb{P}(C \geq 2) = 1$. Donc $\mathbb{P}(C = 1) = \dfrac{q}{1+q}$.

4. Récurrence sur n : Pour $n = 1$, il vient $u_1(q) = \frac{1-q}{1-q} = 1$ et $\mathbb{P}(X_1 \geq k) = q^{k-1}$.
   Supposons la propriété vraie au rang n. Alors, par indépendance de X_1 avec $(X_{n+1}, \dots, X_2)$:
$$\mathbb{P}(X_{n+1} \dots \geq X_1 \geq k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} \geq \dots \geq X_2 \geq i) \cdot \mathbb{P}(X_1 = i) \text{ FPT avec le SCE } (X_1 = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$$
$$= \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n \geq \dots \geq X_1 \geq i) \cdot \mathbb{P}(X_1 = i) \quad \text{car } (X_{n+1}, \dots, X_2) \text{ et } (X_n, \dots, X_1) \text{ sont id. distribués}$$
$$= \sum_{i=k}^{+\infty} u_n(q) \times (q^n)^{i-1} \times q^{i-1}p \text{ (par HR)}$$
$$= p \times u_n(q) \times \sum_{i=k}^{+\infty} (q^{n+1})^{i-1} = u_n(q) \times \frac{1-q}{1-q^{n+1}} \times \left(q^{n+1}\right)^{k-1} = u_{n+1}(q) \times \left(q^{n+1}\right)^{k-1} \text{ (CQFD)}.$$

5. Par conditionnement avec le SCE $(X_i = i)_{i \in \mathbb{N}*}$ puis par indépendance :
$$\mathbb{P}(C \geq n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n \geq \dots \geq X_2 \geq k) \times \mathbb{P}(X_1 = k) = u_{n-1}(q) \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^{n-1}\right)^{k-1} \times q^{k-1}p = u_n(q)$$

6. Car $\frac{1-q}{1-q^k} = \dfrac{1}{1+q+\dots+q^{k-1}} \leq \dfrac{1}{1+q}$ si $k \geq 2$ (et le quotient vaut 1 pour $k = 1$). La convergence de la série se prouve par comparaison avec une série géométrique convergente.

7. On travaille sur les sommes partielles : pour tout $N \geq 1$,
$$S_N = \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(C = n) = \sum_{n=1}^{N} n \left(\mathbb{P}(C \geqslant n) - \mathbb{P}(C \geqslant n+1)\right) = \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(C \geqslant n) - \sum_{n=2}^{N+1} (n-1)\mathbb{P}(C \geqslant n)$$
$$= \sum_{n=2}^{N+1} \mathbb{P}(C \geqslant n) + \mathbb{P}(C \geqslant 1) - \mathbb{P}(C \geqslant N+1) = \sum_{n=1}^{N} u_n(q) - u_{N+1}(q) \to_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(q)$$
   Donc $E(C)$ existe et $E(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(q)$.

QSP

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0,+\infty[$.
Pour tout $x > 0$, $[x, 3x] \subset]0;+\infty[$ donc $F(x)$ existe. De même, pour tout $x < 0$, $[3x, x] \subset]-\infty, 0[$ donc $F(x)$ existe. Ainsi F est définie sur $D = \mathbb{R}^*$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $I_x = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt$. Par IPP (attention au sens...), on obtient

$$\begin{aligned} I_x &= \cos(3x)\ln(3x) - \cos(x)\ln(x) + \int_x^{3x} \sin(t).\ln(t)dt \\ &= \cos(3x)\ln(3) + \ln(x).(\cos(3x) - \cos(x)) + \int_x^{3x} \sin(t).\ln(t)dt \\ &= \cos(3x).\ln(3) + \ln(x).(-4x^2 + o(x^2)) + \int_x^{3x} \sin(t).\ln(t)dt \end{aligned}$$

après utilisation du DL de $\cos(t)$ en 0. L'intégrale $\int_0^1 \sin(t).\ln(t)dt$ est absolument convergente donc convergente (classique...) donc $\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \sin(t).\ln(t)dt = 0$. Comme par CC, $\lim_{x\to 0} \ln(x).(-4x^2 + o(x^2)) = 0$, on obtient finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{\cos(x)}{x} dx = \ln(3)}$$

Autre méthode : majorer $|\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt - \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt|$(via IAF par ex.) et montrer que cela tend vers 0. Comme $\int_x^{3x} \frac{1}{t} dt = \ln(3)$, on obtient le résultat.