# Les classiques des QSP

# I. Intégrales impropres

**QSP 1**

Soit $f$ une fonction continue sur $[1, +\infty[$, à valeurs réelles telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ converge.

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\ dx$ est convergente.

**QSP 2**

Soit $f$ une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.

Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\ dt$ converge

**Enjeux et piste de réflexion**

• On ne maîtrise pas le signe de $f$ et on ne sait **rien** de son comportement à l'infini ni de son caractère borné (attention aux idées fausses) bref on oublie les critères

• On ne peut utiliser que le fait que $F : A \longmapsto \displaystyle\int_{0\ ou\ 1}^{A} f(t)\ dt$ a une limite finie en $+\infty$

• La solution est donc de faire une IPP dans le seul sens possible en utilisant $F$ comme primitive de $f$.

# II. Un peu d'algèbre

**QSP 3**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, $a$ et $b$ deux réels distincts et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que

$$(f - aId)^2 \circ (f - bId) \neq 0 \quad \text{et} \quad (f - aId)^3 \circ (f - bId) = 0$$

$f$ est-il diagonalisable ?

***Quelques idées :*** thm du polynôme annulateur+raisonnement par l'absurde pour la non diagonalisabilité

**QSP 4** *Matrices semblables*

Soit $A$ une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$.

Montrer que $A$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis déterminer la dimension de l'espace vectoriel

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ ,\ AM = MA\}$$

**Enjeux et piste de réflexion**

HEC 2021 Sujet 5 question sans préparation

Introduire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement asssocié à la matrice $A$. Voir que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, en déduire que $f$ est de rang 1. Construire une base adaptée

# III. Matrices aléatoires

**QSP 5**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$.

On définit la matrice aléatoire $M$ par : pour tout $\omega \in \Omega$, $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$

Déterminer la probabilité que $M$ soit inversible.

(Déterminer la probabilité que $M$ soit diagonalisable)

**QSP 6**

On considère quatre variables aléatoires réelles $X, Y, Z, T$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$ et la matrice aléatoire $A$ définie par $\forall \omega \in \Omega,\ A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Z(\omega) & T(\omega) \end{pmatrix}$

**1.** Déterminer la probabilité que $A$ soit inversible.

**2.** Déterminer la probabilité que $A$ soit diagonalisable.

(Combien y a-t-il de telles matrices ?)

**Enjeux et piste de réflexion**

- On ne se laisse pas déstabiliser par les $\omega$ (on fait comme s'ils n'étaient pas là...)
- C'est bien les matrices $2 \times 2$ : critères d'inversibilité, recherche du spectre
- Tout peut être mobilisé : 2 valeurs propres distinctes, matrice symétrique réelle...

# IV. Loi de Poisson (exercice préparé et QSP)

**Remarques :** être capable de démontrer le théorème de stabilité, série exponentielle, théorème de transfert, conditionnement et binômiales, estimateurs, inégalités probabilistes.

**QSP 7**

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

**1.a** Montrer que, pour tout entier $n > \lambda - 1$, on a : $P(X \geqslant n) \leqslant P(X = n) \times \frac{n+1}{n+1-\lambda}$

**1.b** En déduire que : $P(X \geqslant n) \underset{n \to +\infty}{\sim} P(X = n)$

**2.** Montrer que $P(X > n)$ est négligeable devant $P(X = n)$ lorsque $n \to +\infty$.

**QSP 8**

On considère une variable aléatoire $X$ qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$

**1.** Soit $t$ un réel strictement positif. Montrer que la variable aléatoire $\exp\big(tX\big)$ admet une espérance et la calculer.

**2.** Soit $n \in \mathbb{N}$, prouver que $P(X \geqslant n) \leqslant e^{-tn} E\big(\exp(tX)\big)$

**3.** En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \leqslant e^n \left(\frac{\lambda}{n}\right)^n$

# V. Autour de la notion d'espérance

**QSP 9**

Soit $X$ une variable aléatoire admettant une densité $f$ nulle sur $]-\infty, 0[$ et continue sur $[0, +\infty[$.
On suppose que $X$ possède une espérance.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \int_x^{+\infty} f(t)\, dt = 0$ et que $\displaystyle E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > x)\, dx > 0$

**NB :** c'est quasi-une question de cours, savoir faire la version discrète du même phénomène.

**QSP 10**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $X$ une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

Montrer que $\displaystyle E(X) = \sum_{k=1}^{n} P([X \geqslant k])$

**QSP 10bis**

On considère $X$ une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que si la série de terme général $P([X \geqslant n])$ converge alors $X$ admet une espérance et :

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X \geqslant k])}$$

**QSP 11**

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$n$ souris sont lâchées en direction de 3 cages, chaque cage pouvant contenir toutes les souris et chaque souris allant dans une cage choisie au hasard.

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note $X_i$ la variable aléatoire égale à 1 si la cage numéro $i$ est vide et à 0 sinon.

Calculer la probabilité pour qu'une cage au moins soit vide.

Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de cages restées vides, calculer l'espérance et la variance de $X$.

**NB :** *énoncé soft, penser à mette en place de façon autonome des "petites Bernoulli"*

**QSP 12**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes, de même loi à valeurs strictement positives et ayant une espérance.

Montrer que : $E\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \frac{E(X)}{E(X+Y)}$

**NB :** même loi $\Longrightarrow$ même espérance

**QSP 13**

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $]0, +\infty[$, admettant pour densité une fonction $f$ telle que la variable aléatoire $X + \dfrac{1}{X}$ possède une espérance mathématique.

**1.** Etablir l'inégalité $E\left(X + \dfrac{1}{X}\right) \geqslant 2$.

**2.** Montrer que l'inégalité précédente n'est jamais une égalité mais que $E\left(X + \dfrac{1}{X}\right)$ peut prendre des valeurs arbitrairement proche de 2.

**QSP 14** *Le collectionneur*

On tire avec remise une boule d'une urne contenant $n$ boules numérotées.
On note $X$ la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois, chaque boule a été tirée au moins une fois.

Calculer l'espérance de $X$ et en trouver un équivalent quand $n$ tend vers $+\infty$.
***HEC 2021 Sujet 3 voir correction***

# VI. Vrac en probabilité

## 1. Convergence en loi / en probabilités / estimateurs

- Bien revoir le cours et les classiques
- Pour HEC reprendre interprétation en `scilab`, graphiques

**QSP 15 (revient tout le temps)**

**1.** Montrer que $F : x \longmapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$ est une fonction de répartition.

**2.** Simuler en `scilab` une variable aléatoire ayant $F$ comme fonction de répartition.

**3.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition de la borne supérieure $M_n$ de $n$ variables aléatoires indépendantes ayant toutes $F$ comme fonction de répartition.

Etudier la convergence en loi de la suite $(M_n - \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

**QSP 16**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de même loi uniforme sur $[0,1]$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \prod_{i=1}^{n} U_i^{1/n}$ et $Y_n = (eX_n)^{\sqrt{n}}$

Montrer que la suite $\big(\ln(Y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

**QSP 17**

**EXERCICE SANS PRÉPARATION S 215**

*Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $X$ une variable aléatoire et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que $X$ et les $X_n$ admettent une espérance et qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $|X| \leqslant K$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $|X_n| \leqslant K$.

1. Dans cette question, on suppose que $\lim_{n\to+\infty} E\big(|X_n - X|\big) = 0$. Montrer que la suite $(X_n - X)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

2. On suppose que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $X$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} E\big(|X_n - X|\big) = 0$.

### CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 215

1. D'après l'inégalité de Markov, on a : $\forall \varepsilon > 0,\ P\big(|X_n - X| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \dfrac{E\big(|X_n - X|\big)}{\varepsilon} \to 0$ quand $n$ tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la suite $(X_n - X)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

2. Soit $\varepsilon > 0$ et le système complet d'événements $\big(|X_n - X| > \varepsilon, |X_n - X| \leqslant \varepsilon\big)$. On a l'égalité :
$|X_n - X| = |X_n - X| \times \mathbf{1}_{[|X_n - X| > \varepsilon]} + |X_n - X| \times \mathbf{1}_{[|X_n - X| \leqslant \varepsilon]}$. Par suite,
$E\big(|X_n - X|\big) = E\big(|X_n - X| \times \mathbf{1}_{[|X_n - X| > \varepsilon]}\big) + E\big(|X_n - X| \times \mathbf{1}_{[|X_n - X| \leqslant \varepsilon]}\big)$, d'où,
$E\big(|X_n - X|\big) \leqslant E\big(2K\,\mathbf{1}_{[|X_n - X| > \varepsilon]}\big) + E\big(\varepsilon\,\mathbf{1}_{[|X_n - X| \leqslant \varepsilon]}\big) \leqslant 2K\,P\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) + \varepsilon\,P\big(|X_n - X| \leqslant \varepsilon\big)$, soit encore,
$E\big(|X_n - X|\big) \leqslant 2K\,P\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) + \varepsilon$. Puisque la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $X$, il existe un entier $n_0$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $2K\,P\big(|X_n - X| > \varepsilon\big) \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, on a $E\big(|X_n - X|\big) \leqslant 2\varepsilon$ et comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big(|X_n - X|\big) = 0$.

**QSP 18**

Soit $X$ une variable aléatoire ayant pour densité $f$ où $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{1+x} \times \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$
Montrer que $Y = \frac{1}{X} - \lfloor \frac{1}{X} \rfloor$ a même loi que $X$.

**QSP 19**

*Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Dans cet exercice, $X$ est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Soit $N$ la variable aléatoire prenant pour valeur le plus petit entier $n$ tel que $[X \leqslant n]$ est réalisé, c'est-à-dire que : $\forall \omega \in \Omega,\ N(\omega) = \min\{n \in \mathbf{N},\ X(\omega) \leqslant n\}$. Déterminer la loi de $N$.

2. Soit $M$ la variable aléatoire prenant pour valeur le plus grand entier $n$ tel que $[X \geqslant n]$ est réalisé.
Montrer que $N$ et $M + 1$ sont de même loi.

3. Donner une simulation en *Scilab* de la variable aléatoire $M$ pour une valeur de $\lambda$ entrée par l'utilisateur.

### CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 212

1. $N(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ [N = n] = [n - 1 < X \leqslant n] \Longrightarrow P(N = n) = \mathrm{e}^{-\lambda(n-1)}\big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\big)$.

2. $\forall n \in \mathbf{N},\ [M = n] = [n \leqslant X < n + 1] \Longrightarrow P(M = n) = \mathrm{e}^{-\lambda n}\big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\big) \Longrightarrow P(M + 1 = n) = P(M = n - 1)$ c'est-à-dire que $P(M + 1 = n) = P(N = n)$.

3. On peut proposer :

```
lambda=input('entrez la valeur de lambda :')
M=grand(1,1,'geom',1-exp(-lambda))+1
```

# VI. Polynômes

**Savoir mobiliser tous les aspects**

- Degré, racines, racines multiples, dérivation et formule de Taylor (version formelle)
- Espace vectoriels de polynômes
- Fonction polynômiale associée et anlyse (Rolle...)
- Familles de polynômes liées à l'algèbre bilinaire (Tchebychev, Legendre, Hermite)

- Polynômes de Lagrange
- Polynômes annulateurs

**QSP 20**

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles.

**1.** L'ensemble $\mathcal{S}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ ?

**2.** Montrer que, si $P \in \mathcal{S}$ alors $P' \in \mathcal{S}$.

**QSP 21**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A$ une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On note $P$ un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$.

Etablir l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = A$

**QSP 22**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $N$ l'application définie sur $E$ par, pour tout $P \in E$

$$N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$$

1. Montrer que $N(P)$ est bien défini.

2. Montrer que $N(P) = 0$ entraîne $P = 0$.

3. Soit $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P) = P(1)$.
Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $P \in E$, $|\Phi(P)| \leqslant C \times N(P)$

**Enjeux et piste de réflexion**

- Revoir la définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme et ses caractérisations par les dérivées
- Revoir la formule de Taylor pour les polynômes
- Bien mesure que ces sommes sont finies...

# VII. Algèbre linéaire et bilinéaire

**Savoir reconnaître le contexte**

- Il est parfois utile d'introduire un produit scalaire et de faire appel spontanément à l'algèbre bilinéaire (présence d'une transposée, reconnaissance de l'orthogonal d'une droite vectorielle, indication de symétrie ou antisymétrie d'une matrice)
- Polynômes annulateurs et tout ce qui va avec
- Matrices ou endomorphismes de rang 1 / matrices nilpotentes
- Projecteurs / projecteurs orthogonaux
- Sous-espaces stables (en particulier droites vectorielles)

**QSP 23**

Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n$. On suppose que $u$ est de rang 1.

**1.** Montrer qu'il existe un nombre réel $\lambda$ tel que $u^2 = \lambda u$ (où $u^2$ désigne $u \circ u$).

**2.** Montrer que, si $\lambda \neq 1$, $u - Id$ est inversible et déterminer son inverse.

**QSP 24**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} > 1$ pour tout $i \in [1, n]$.

**1.** Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul, on a : ${}^tXAX > 0$.

**2.** Justifier que $A$ est diagonalisable et inversible.

**QSP 25**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que : $E = Imf + Img = Kerf + Kerg$. Montrer que ces sommes sont directes.
Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $U, V$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Soit $a$ un réel non nul et $I_n$ la matrice identité d'ordre $n$. On pose

$$M = aI_n + U\,{}^tV.$$

**1.** Déterminer les valeurs propres de $M$.

**2.** La matrice $M$ est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

## Hors ou à la limite du programme mais à connaître + démonstration

**Somme partielle de la série harmonique** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

---

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$Ker(A) = Ker({}^tAA)$ donc $Rg(A) = Rg({}^tA)$

---

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$

---

**Matrice de Gram**

Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de $n$ vecteurs de $E$, on note $G = \big( < u_i, u_j > \big)_{1\leqslant i,j,\leqslant n}$.

Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $E \iff G$ est inversible.

---

**Polynôme annulateur d'un endomorphisme diagonalisable**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f$ un endomorphisme de $E$.

Si $f$ est diagonalisable alors $P = \displaystyle\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f} (X - \lambda)$ est annulateur de $f$.

## A vous de jouer...

Soit $p \in ]0,1[$. Soient $X$ et $Y$ deux variabls aléatoires réelles indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et de même loi géométrique de paramètres $p$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f : (u, v) \longmapsto \big(4Xu - 6Yv, 2Xu - 3Yv\big)$.

Quelle est la probabilité $r$ que $f$ soit un projecteur ?

---

On utilise une pièce de monnaie qui donne Pile avec la probabilité $p \in ]0, 1[$.
On commence par lancer la pièce jusqu'à obtenir une première fois Pile et on note $N$ le nombre de lancers nécessaires. SI le premier Pile a été obtenu au $n$-ième lancer, on lance ensuite cette même pièce $n^2$ fois et on note $X$ le nombre de Pile obtenus au cours de ces $n^2$ lancers.

**1.** Quelle est la loi de $N$ ? Donner son espérance et sa variance.

**2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi conditionnelle de $X$ sachant l'évenement $(N = n)$.

**3.** En déduire l'existence et la valeur de l'espérance de $X$.

---

L'équation $A^2 = A - I$ d'inconnue $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a-t-elle des solutions non diagonalisable ?

Soit $n$ un entier supériuer ou égal à 3, $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $p$ et $q$ deux projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$.
On suppose que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal.

**1.** Montrer que $p \circ q = q \circ p$ .

**2.** Montrer que les valeurs propres possibles de $p+q$ sont 0,1,2.
Donner un exemple où ces trois nombres sont effectivement valeurs propres de $p+q$

---

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et que $P(Y=1)=p$ , $P(Y=-1)=1-p$ où $p \in ]0,1[$.

**1.** On pose $Z=XY$. Déterminer le loi de $Z$.

**2.** On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. Les variables $X$ et $Z$ sont-elles indépendantes ?

---

Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n^2}$, $n^2$ matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que la famille $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si la matrice $G=\Big(Tr(A_iA_j)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n^2} \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ est inversible.

---

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.

Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On tire une poignée de boules dans cette urne, toutes les poignées, y compris la poignée vide, sont équiprobables.

$S$ est la somme des numéros obtenus dans la poignée.

Calculer l'espérance de $S$.

Simuler $S$ à l'aide de `scilab`

---

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$.
On suppose que $u^3=u^2$ , $u \neq Id$ , $u^2 \neq 0$ , $u^2 \neq u$.

**1.** Déterminer les valeurs propres de $u$.

**2.** L'endomorphisme de $u$ est-il diagonalisable ?

---

Vous rentrez en voiture et cherchez une place de parking en faisant le tour du quartier ; au $n$-ième tour, vous avez une probabilité de $\frac{n}{n+1}$ de trouver une place.
On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de tours nécessaires pour se garer.

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X>n)$.

En déduire le nombre moyen de tours nécessaires pour vous garer.

---

Soit $\alpha>0$, on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ et on note $f$ la densité de $X$.

Montrer que $z \longmapsto G(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leqslant zx)f(x)\,dx$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.