

Planche Oral Probas 8 - ESCP 2025

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \geq 0, f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution x_n .
- (b) Etudier la monotonie de la suite (x_n) .

2. Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \lambda = 1 \\ 0 & \text{si } \lambda > 1 \\ 1 & \text{si } \lambda < 1 \end{cases}$$

3. En utilisant la question 2., déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Planche Oral Probas 8 - ESCP 2025

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \geq 0, f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution x_n .
- (b) Etudier la monotonie de la suite (x_n) .

2. Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \lambda = 1 \\ 0 & \text{si } \lambda > 1 \\ 1 & \text{si } \lambda < 1 \end{cases}$$

3. En utilisant la question 2., déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Question sans préparation :

Soit n un entier, $n \geq 2$ et E un espace vectoriel de dimension n . Soit u et v deux endomorphismes de E .

On dit que u et v sont codiagonalisables s'il existe une base de E dont les vecteurs sont à la fois des vecteurs propres de u et des vecteurs propres de v .

1. On suppose que u admet n valeurs propres distinctes. Montrer que u et v commutent si et seulement si ils sont codiagonalisables.
2. Supposons maintenant que u est diagonalisable.
A-t-on encore la propriété : u et v commutent si et seulement si ils sont codiagonalisables ?

Question sans préparation :

Soit n un entier, $n \geq 2$ et E un espace vectoriel de dimension n . Soit u et v deux endomorphismes de E .

On dit que u et v sont codiagonalisables s'il existe une base de E dont les vecteurs sont à la fois des vecteurs propres de u et des vecteurs propres de v .

1. On suppose que u admet n valeurs propres distinctes. Montrer que u et v commutent si et seulement si ils sont codiagonalisables.
2. Supposons maintenant que u est diagonalisable.
A-t-on encore la propriété : u et v commutent si et seulement si ils sont codiagonalisables ?

Question sans préparation :

Soit n un entier, $n \geq 2$ et E un espace vectoriel de dimension n . Soit u et v deux endomorphismes de E .

On dit que u et v sont codiagonalisables s'il existe une base de E dont les vecteurs sont à la fois des vecteurs propres de u et des vecteurs propres de v .

1. On suppose que u admet n valeurs propres distinctes. Montrer que u et v commutent si et seulement si ils sont codiagonalisables.
2. Supposons maintenant que u est diagonalisable.
A-t-on encore la propriété : u et v commutent si et seulement si ils sont codiagonalisables ?