

Corrigé de la Planche Oral Probas 8 - ESCP 2025

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \geq 0, f_n(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on montre sans problème que

$$f'_n(x) = -e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = -e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

Donc si $x > 0, f'_n(x) < 0$ et on en déduit que f_n est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ . De plus, $f_n(0) = 1$ et par CC, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. Par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur $]0, 1]$.

Comme $\frac{1}{2} \in]0, 1]$, il existe bien une unique solution x_n à l'équation $f_n(x) = \frac{1}{2}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + e^{-x_n} \cdot \frac{(x_n)^{n+1}}{(n+1)!} \geq f_n(x_n) = \frac{1}{2} = f_{n+1}(x_{n+1})$$

Donc $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$ et par stricte décroissance de $f_{n+1} : x_n < x_{n+1}$: la suite (x_n) est donc croissante.

2. Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrons que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \lambda = 1 \\ 0 & \text{si } \lambda > 1 \\ 1 & \text{si } \lambda < 1 \end{cases}$$

Tout d'abord, d'après le cours $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$. Donc $E(S_n) = V(S_n) = n\lambda$

- Si $\lambda = 1$, d'après le théorème central limite, on a

$$P(S_n \leq n) = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

- Si $\lambda < 1$, on utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout $\epsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| > \epsilon\right) \geq \frac{\lambda}{n\epsilon}$$

Or

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| > \epsilon\right) = P(|S_n - n\lambda| > n\epsilon) \geq P(S_n > n(\lambda + \epsilon)) \geq P(S_n > n)$$

en prenant ϵ assez petit pour que $\lambda + \epsilon < 1$. Par encadrement, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n > n) = 0$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq n) = 1$.

- Si $\lambda > 1$, on utilise encore l'IBT avec pour tout $\epsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| \geq \epsilon\right) \geq \frac{\lambda}{n\epsilon}$$

Et cette fois ci :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| \geq \epsilon\right) = P\left(\frac{S_n}{n} - \lambda \leq -\epsilon\right) = P(S_n \leq n(\lambda - \epsilon)) \geq P(S_n \leq n)$$

en prenant ϵ assez petit pour que $\lambda - \epsilon > 1$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq n) = 0$.

3. On remarque que $P(S_n \leq n\lambda) = \sum_{k=0}^n P(S_n = k) = f_n(\lambda.n)$.

On sait que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n((1 + \epsilon).n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n((1 - \epsilon).n) = 1, \quad \text{et } f_n(x_n) = \frac{1}{2}$$

donc APCR, $f_n((1 + \epsilon).n) \leq f_n(x_n) \leq f_n((1 - \epsilon).n)$ et par stricte décroissance de f_n ,

$$(1 - \epsilon).n \leq x_n \leq (1 + \epsilon).n \Leftrightarrow \left| \frac{x_n}{n} - 1 \right| < \epsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, par définition de la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$ donc $\boxed{x_n \sim_{n \rightarrow +\infty} n}$

QSP

1. GROS CLASSIQUE !!!

Comme u possède n valeurs propres distinctes, u est diagonalisable et tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Si u et v sont codiagonalisables alors il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle les matrices $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $D' = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ sont diagonales. Comme deux matrices diagonales commutent, on a $DD' = D'D$, et donc $u \circ v = v \circ u$.

Réciproquement, supposons que u et v commutent. Soit x un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ . Comme

$$u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda.v(x)$$

on a $v(x) \in \text{Ker}(u - \lambda.Id)$. Comme $\text{Ker}(u - \lambda.Id)$ est un sous-espace propre de dimension 1, il existe un réel α tel que $v(x) = \alpha.x$, donc x est un vecteur propre de v . Finalement, en considérant une base \mathcal{B} de vecteurs propres de u , il s'agit aussi d'une base de vecteurs propres de v , donc u et v sont codiagonalisables.

2. Clairement si u et v sont codiagonalisables, ils commutent toujours.

La preuve ci-dessus ne fonctionne plus sans l'hypothèse sur les sev de dimension 1. Si on prend $u = Id$ et v non diagonalisable, on voit que cela ne marche plus !