Planche Oral Analyse 5 - ESCP

EXERCICE PRINCIPAL

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit L l'application définie sur E par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $L(f)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt$.
On admet que L est un endomorphisme de E.

1. <u>Question de cours</u> : soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.
   Donner la définition de "$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$".

2. Montrer que, si $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to+\infty} L(f)(x) = l \in \mathbb{R}$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. En considérant la fonction $h_\alpha : x \mapsto e^{\alpha.x}$, montrer que tout réel strictement positif est valeur propre de L.

4. On suppose dans cette question seulement que f est une densité de probabilité et X une variable aléatoire de densité f. On considère une variable aléatoire Y suivant la loi uniforme sur $[-1, 0]$ et on suppose X et Y indépendantes.
   Que représente $L(f)$ pour la variable aléatoire $Z = X + Y$?

5. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge.
   Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(t)dt$

QUESTION SANS PREPARATION

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une poignée de boules dans cette urne, toutes les poignées, y compris la poignée vide, étant équiprobables.
On note S la somme des numéros obtenus dans la poignée.

- Calculer l'espérance de S.
- Simuler S à l'aide de Python

QUESTION SANS PREPARATION

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une poignée de boules dans cette urne, toutes les poignées, y compris la poignée vide, étant équiprobables.
On note S la somme des numéros obtenus dans la poignée.

- Calculer l'espérance de S.
- Simuler S à l'aide de Python

QUESTION SANS PREPARATION

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une poignée de boules dans cette urne, toutes les poignées, y compris la poignée vide, étant équiprobables.
On note S la somme des numéros obtenus dans la poignée.

- Calculer l'espérance de S.
- Simuler S à l'aide de Python