Corrigé Planche Oral Analyse 5

EXERCICE PRINCIPAL

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit L l'application définie sur E par : $\forall x \in \mathbb{R},\ L(f)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)dt$

1. Question de cours : soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.
   Donner la définition de "$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$".

   $$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 / \forall x \geq A, |f(x) - l| < \epsilon$$

2. Montrons que, si $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to+\infty} L(f)(x) = l \in \mathbb{R}$.
   Supposons que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l \in \mathbb{R}$.
   Soit $\epsilon > 0$. D'après la question de cours, $\exists A > 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $|f(t)-l| < \epsilon$ donc
   $$l - \epsilon \leq f(t) \leq l + \epsilon$$
   Soit $x \geq A$. Alors pour tout $t \in [x, x+1]$, on a aussi
   $$l - \epsilon \leq f(t) \leq l + \epsilon$$
   En intégrant entre x et $x+1$, on obtient alors facilement
   $$l - \epsilon \leq L(f)(x) \leq l + \epsilon$$
   Finalement,
   $$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 / \forall x \geq A, |L(f)(x) - l| < \epsilon$$
   donc $\lim_{x\to+\infty} L(f)(x) = l$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - Si $\alpha = 0$, alors $L(h_0) = 1 = 1.h_0$
   - Si $\alpha \neq 0$, alors on montre facilement que $L(h_\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha}$.
   - Soit $h : t \mapsto \begin{cases} \frac{e^t-1}{t} \text{ si } t \neq 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$.
     On montre par une étude de variations (attention, il faudra dériver deux fois !) que h est strictement croissante. Elle est ensuite continue sur $\mathbb{R}$ puis grâce à ses limites bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0;\infty[$.
   - Par conséquent pour tout réel strictement positif y, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = h(\alpha)$, donc tout réel strictement positif est une valeur propre de L.

4. X et Y sont indépendantes, à densité et Y a une densité bornée. D'après le cours, $Z = X + Y$ est une variable à densité dont une densité est donnée par le produit de convolution :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).g(x-t)dt$$
   où g est une densité de Y. On montre ensuite par le calcul que $f_Z = L(f)$: $L(f)$ est une densité de $Z = X + Y$!!

5. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge.
   Notons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$. Alors la fonction $\phi : t \mapsto \frac{1}{I}.f(t)$ est une fonction continue, positive, d'intégrale égale à 1 : c'est une densité sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, $L(\phi)$ est aussi une densité donc
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} L(\phi)(t)dt = 1$$
   Mais comme L est linéaire, et par linéarité de l'intégrale, on a
   $$\frac{1}{I}.\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(t)dt = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(t)dt = I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$
   CETTE DERNIERE QUESTION EST ASTUCIEUSE !!!

QUESTION SANS PREPARATION

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une poignée de boules dans cette urne, toutes les poignées, y compris la poignée vide, étant équiprobables.
On note S la somme des numéros obtenus dans la poignée.

1. Soit pour tout $k \in [[1, n]]$, A_k l'événement : "la boule numéro k est dans la poignée choisie".
   Notons 1_{A_k} la variable indicatrice de cet événement : $1_{A_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } A_k \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   Notons Ω l'ensemble de toutes les poignées possibles. Comme une poignée est une partie de $[[1, n]]$, d'après le cours, $Card(\Omega) = 2^n$.
   Pour choisir une poignée contenant la boule numéro k (où k est fixé) : on prend la boule numéro k (1 seul choix), puis on prend une poignée parmi les $n-1$ boules restantes : 2^{n-1} choix. Ainsi $Card(A_k) = 2^{n-1}$. Finalement,
   $$P(A_k) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$
   Donc $1_{A_k} \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$

2. Ensuite, $S = \sum_{k=1}^{n} k.1_{A_k}$, donc
   $$E(S) = \sum_{k=1}^{n} k.E(A_k) = \sum_{k=1}^{n} k.\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$$

3. ```
   A=rd.binomial(1,1/2,n)
   S=0
   for k in range(0,n):
     S=S+k*A[k]
   print(S)
   ```
   ```