
Mathématiques - Devoir de vacances été 2026

Saint Just - ECG2 Maths Approfondies

Exercice 1 : algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^2$

Notations:

- Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^2$;
- on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$;
- si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, on note $f^0 = Id$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ (k fois).

Le but de cet exercice est de trouver les couples (f, g) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les quatre relations suivantes:

- (1) $f^2 = -Id$;
- (2) $g \neq Id$;
- (3) $(g - Id)^2 = 0$;
- (4) $\text{Ker}(f + g - Id) \neq \{0\}$.

Partie 1: étude d'un exemple

Vérifier que les endomorphismes f et g dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont solutions du problème posé.

Partie 2: cas général

On revient au cas général et on considère un couple (f, g) vérifiant les relations (1), (2), (3), (4).

1. Montrer que f et g sont des automorphismes de $\mathbb{R}^2$, puis donner f^{-1} et g^{-1} en fonction de f , g et Id .
2. Pour tout entier naturel n , exprimer g^n comme combinaison linéaire de g et Id .
3. Établir que : $\text{Im}(g - Id) \subset \text{Ker}(g - Id)$.
4. En déduire, en raisonnant sur les dimensions, que: $\text{Im}(g - Id) = \text{Ker}(g - Id)$.
5. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que : $\dim(\text{Ker}(f + g - Id)) = 1$.
6. (a) Soit (c_2) une base de $\text{Ker}(f + g - Id)$ et $c_1 = -f(c_2)$.
Montrer que la famille $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.
(b) En déduire que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
(c) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.
(d) Justifier que $g(c_2) = c_1 + c_2$ et que $g(c_1) = c_1$ puis donner la matrice de g dans la base $\mathcal{C}$.
7. Donner la conclusion de cet exercice.

Exercice 2 : tirages et remplacements de boules

Dans tout le problème, a et b désignent des entiers naturels non nuls, et on note $N = a + b$.

On considère une urne contenant initialement a boules noires et b boules blanches, dans laquelle on effectue des tirages successifs au hasard, en procédant de la manière suivante:

- lorsque la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne;
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée dans cette urne par une boule blanche.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k l'événement "la k -ième boule tirée est noire" et B_k l'événement "la k -ième boule tirée est blanche".

Partie I : obtention de la première boule blanche

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et Y la variable aléatoire définie sur cet espace, égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Simulation informatique:

Recopier et compléter la fonction Python suivante, afin qu'elle simule la variable Y .

```
import numpy.random as rd
def Y(a,b):
    N=a+b
    tirage=rd.randint(1,N+1)
    Y=.....
    while .....:
        Y=.....
        a=.....
        tirage=rd.randint(1,N+1)
    return Y
```

2. Préciser l'ensemble des valeurs prises par la variable Y .

3. Pour tout $k \in Y(\Omega)$, calculer la valeur de la probabilité $P(Y = k)$.

4. Vérifier que $P(Y = a + 1) = \frac{a!}{N^a}$ et que pour tout $k \in [[1, a]]$,

$$P(Y = k) = \frac{a!}{(a - (k - 1))!N^{k-1}} - \frac{a!}{(a - k)!N^k}.$$

5. Soit M un entier naturel et $a_0, a_1, \dots, a_M$ une famille de réels. Établir que :

$$\sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k \right) - M a_M.$$

6. En déduire que $E(Y) = \sum_{k=0}^a \frac{a!}{(a - k)!N^k}$.

7. Informatique:

(a) Ecrire une fonction Python intitulée `def factorial(n):` qui calcule $n!$

(b) A l'aide de cette fonction, écrire une fonction Python intitulée `def EspY(a,b):` qui calcule $E(Y)$ en utilisant la formule de la question précédente.

Partie II : nombre de boules noires obtenues en n tirages

Dans cette partie, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages. Par convention, $X_0 = 0$.

1. Simulation informatique :

Écrire une fonction Python, intitulée `def X(n,a,b)` : qui simule la variable X_n .

2. Calculer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_n = k) = \frac{b+k}{N}P(X_{n-1} = k) + \frac{a+1-k}{N}P(X_{n-1} = k-1).$$

4. Calcul de l'espérance de X_n

(a) Montrer à l'aide de la question précédente que pour tout $n \geq 1$,

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a+k(N-1)}{N} P(X_{n-1} = k).$$

et en déduire que

$$E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_{n-1}) + \frac{a}{N}.$$

(b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E(X_n) = a \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).$$

(c) Quelle est la limite de $E(X_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$? Comment expliquer ce résultat ?

5. Probabilité de tirer une boule noire

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(N_{n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{a-k}{N} P(X_n = k).$$

(b) En déduire l'expression de $P(N_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$ et en déduire l'expression de $P(N_{n+1})$ en fonction de n , a , N .

Exercice 3 : les intégrales de Wallis

Ce grand classique est à savoir faire et refaire, tombe très souvent aux concours.

Pour tout entier naturel n , on définit l'intégrale

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \quad (\text{intégrale de Wallis})$$

1. Propriétés de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale W_n est bien définie.
- (b) Calculer W_0 , W_1 , W_2 .
- (c) Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- (d) Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note l sa limite.

2. Relation de récurrence

Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$W_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^{n-2}(t) dt$$

et en déduire que

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$$

3. Informatique : écrire une fonction Python, intitulée `def W(n):`, qui renvoie la valeur de W_n (où on suppose $n \geq 2$).

4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \frac{n+1}{n+2} W_n \leq W_{n+1} \leq W_n$$

(b) En déduire que $W_n \sim_{n \rightarrow +\infty} W_{n+1}$.

5. Limite et équivalent de W_n

- (a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $nW_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
- (b) En déduire que $W_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
- (c) Quelle est alors la limite de $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

6. Calcul de W_n

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \text{ et } W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

7. En déduire la formule de Wallis :

$$\sqrt{\pi} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}}$$

8. En déduire que

$$\binom{2n}{n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

9. Lien avec une autre intégrale

Montrer à l'aide du changement de variables $u = \frac{\pi}{2} - t$ que $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.