

Problème d'analyse

On rappelle que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour tout réel $x \in [0, +\infty[$ et tout entier naturel n , on note :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+x+1} \quad \text{et} \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$$

PARTIE I : Etude des variations et des limites de f

Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $t \in [0, 1]$, on note $g_x(t) = \frac{t^x}{1+t}$

- Justifier que f est définie sur $[0, +\infty[$.
- Préciser les valeurs de $f(0)$ et $f(1)$.
- Justifier que f est décroissante sur $[0, +\infty[$.
- Montrer que $\forall x \geq 0, f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$
- Déduire des deux questions précédentes que $\forall x \geq 1, \frac{1}{x+1} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x}$
 - Donner enfin un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$ ainsi que la limite de f en $+\infty$.
- Obtention de valeurs approchées de $f(x)$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_x\left(\frac{k}{n}\right)$.

- Justifier que, pour tout $x \in [0, +\infty[, \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = f(x)$.
- Ecrire en Python :
 - une première fonction intitulée `def g(x,t)` : qui définit la fonction de deux variables $g : (x, t) \mapsto \frac{t^x}{1+t}$,
 - une deuxième fonction intitulée `def T(n,x)` : qui calcule $T_n(x)$.

PARTIE II : f comme somme d'une série convergente

- Soit x un réel positif fixé.

- Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[, \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k+x} = \frac{t^x}{1+t} + (-1)^n \frac{t^{n+1+x}}{1+t}$
- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) = f(x) + (-1)^n f(n+1+x)$

- Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n+x+1}$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x+1} = f(x)$.

2. Cas particuliers

- On appelle série harmonique alternée la série de terme général $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (où $n \geq 1$). Déduire des résultats précédents la convergence de cette série et préciser la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$
- Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ à l'aide du changement de variable $t = u^2$.

3. Etude de la continuité de f sur $[0, +\infty[$

- Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \forall k \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \leq |x-y| \cdot \frac{1}{k^2}$
- En déduire que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |f(x) - f(y)| \leq |x-y| \left(\frac{1}{(1+x)(1+y)} + \frac{\pi^2}{6} \right)$.
- En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.

4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $\theta_k : u \mapsto \frac{(-1)^k}{k+1+u}$

- Pour $k \in \mathbb{N}$, justifier que θ_k est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ et calculer $\theta'_k(u)$ et $\theta''_k(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall h \geq -x, \forall k \in \mathbb{N}^*, |\theta_k(x+h) - \theta_k(x) - h\theta'_k(x)| \leq \frac{|h|^2}{k^3}$

5. Justifier la convergence des séries $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^3}$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} \theta'_k(u)$ où $u \in \mathbb{R}_+$.

6. Dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$

- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, h \geq -x$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| S_n(x+h) - S_n(x) - h \sum_{k=0}^n \theta'_k(x) \right| \leq |h| \left| \frac{1}{(1+x+h)(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2} \right| + |h|^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$$

- En déduire que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \geq 0, f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}$.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2}$
- En déduire la valeur de $f'(0)$.