

---

Mathématiques - Devoir de vacances été 2026  
Saint Just - ECG2 Maths Approfondies

---

**Exercice 1 : algèbre linéaire dans  $\mathbb{R}^2$**

**Partie 1 : étude d'un exemple**

(1) On remarque que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

donc  $Mat_B(f^2) = -Mat_B(Id)$  et  $f^2 = -Id$

(2)  $B \neq I$  donc  $Mat_B(g) \neq Mat_B(I)$  et  $g \neq Id$

(3)

$$Mat_B((g - Id)^2) = (B - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_2(\mathbb{R})}$$

donc  $(g - Id)^2 = 0$

(4) *Première méthode.* On a

$$Mat_B(f + g - Id) = A + B - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  Alors

$$u \in \text{Ker}(f + g - Id) \Leftrightarrow (f + g - Id)(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0$$

donc  $\text{Ker}(f + g - Id) = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(e_2)$  et  $\text{Ker}(f + g - Id) \neq \{0\}$

*Seconde méthode.* Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  on a  $f(x, y) = (-y, x)$  et  $g(x, y) = (x + y, y)$  donc

$$(f + g - Id)(x, y) = (-y, x) + (x + y, y) - (x, y) = (0, x)$$

d'où

$$(x, y) \in \text{Ker}(f + g - Id) \iff x = 0$$

c'est-à-dire  $\text{Ker}(f + g - Id) = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(e_2)$  et en particulier  $\text{Ker}(f + g - Id) \neq \{0\}$ .

Conclusion: le couple  $(f, g)$  vérifie bien les relations (1), (2), (3), (4)

**Partie 2 : cas général**

1. Comme  $f^2 = -Id$ , on a  $f \circ (-f) = Id$  et  $(-f) \circ f = Id$ . Donc  $f$  est bijective et  $f^{-1} = -f$ .  
Comme de plus  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ , il s'agit bien d'un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .  
Par ailleurs,  $(g - Id)^2 = 0$ , c'est-à-dire que  $g^2 - 2g + Id = 0$  et donc  $-g^2 + 2g = Id$  et

$$g \circ (-g + 2Id) = (-g + 2Id) \circ g = Id$$

Donc  $g$  est bijective et  $g^{-1} = -g + 2Id$

Comme de plus  $g$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ , il s'agit bien d'un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

2. Première méthode:

D'après la relation ci-dessus,  $g^2 = 2g - Id$ . En composant par  $g$  on obtient :

$$g^3 = 2g^2 - g = 4g - 2Id - g = 3g - 2Id$$

$$g^4 = 3g^2 - 2g = 6g - 3Id - 2g = 4g - 3Id$$

Notons pour tout  $n \geq 2$ ,  $\mathcal{H}(n) : "g^n = ng - (n-1)Id"$  et montrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout  $n \geq 2$ .

Initialisation: si  $n = 2$ ,  $g^2 = 2g - Id$  donc  $\mathcal{H}(2)$  est vraie.

Hérédité: soit  $n$  un entier fixé,  $n \geq 2$ , tel que  $\mathcal{H}(n)$  est vraie. Par H.R.,

$$g^n = ng - (n-1)Id \Rightarrow g^{n+1} = ng^2 - (n-1)g = 2ng - nId - (n-1)g = (n+1)g - nId$$

donc  $\mathcal{H}(n+1)$  est vraie.

Conclusion: pour tout  $n \geq 2$ ,  $g^n = ng - (n-1)Id$

Si  $n = 0$  et  $n = 1$ , cette formule reste vraie. Finalement on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g^n = ng - (n-1)Id$$

Deuxième méthode:

On écrit  $g = (g - Id) + Id$ . Comme  $g - Id$  et  $Id$  commutent, d'après la formule du binôme, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} g^n &= ((g - Id) + Id)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (g - Id)^k \circ Id^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} (g - Id)^k \circ Id^{n-k} \quad \text{car } (g - Id)^k = 0 \text{ si } k \geq 2 \\ &= Id + n(g - Id) = ng - (n-1)Id \end{aligned}$$

et l'on retrouve bien le résultat précédent, de façon plus rapide, mais plus astucieuse !

Troisième méthode:

Le polynôme  $(X - 1)^2$  est un polynôme annulateur de  $g$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on écrit la division euclidienne de  $X^n$  par  $(X - 1)^2$ : il existe  $Q, R \in \mathbb{R}[X]$  uniques tels que

$$X^n \stackrel{(*)}{=} (X - 1)^2 Q + R \quad \text{avec } \deg(R) < 2.$$

Le polynôme  $R$  est donc de la forme  $R = aX + b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . On évalue la relation  $(*)$  en 1, ce qui donne  $1 = a + b$  puis on la dérive et on évalue à nouveau en 1 ce qui donne  $a = a$ . Il en résulte que  $a = n$  et  $b = 1 - n$  c'est-à-dire

$$X^n = (X - 1)^2 Q + (nX + (1 - n)).$$

On a donc

$$g^n = (g - Id)^2 \circ Q(g) + (ng + (1 - n)Id)$$

et comme  $(g - Id)^2 = 0$  on a  $\boxed{g^n = ng + (1 - n)Id}$ .

3. Soit  $u \in Im(g - Id)$ . Alors il existe  $w \in \mathbb{R}^2$  tel que  $u = (g - Id)(w)$ . D'où  $(g - Id)(u) = (g - Id)^2(w) = 0$  puisque  $(g - Id)^2 = 0$ . On en déduit que  $u \in Ker(g - Id)$ . Ceci montre bien que  $\boxed{Im(g - Id) \subset Ker(g - Id)}$ .
4. D'après le théorème du rang,  $\dim(Ker(g - Id)) + \dim(Im(g - Id)) = 2$ . Comme  $g \neq Id$ ,  $g - Id \neq 0$  donc  $Im(g - Id) \neq \{0\}$  et  $\dim(Im(g - Id)) \geq 1$ . Comme  $Im(g - Id) \subset Ker(g - Id)$ , on a aussi  $\dim(Ker(g - Id)) \geq 1$ . La seule possibilité est alors d'avoir  $\dim(Ker(g - Id)) = \dim(Im(g - Id)) = 1$ . Enfin, comme on a l'inclusion  $Im(g - Id) \subset Ker(g - Id)$  et que ces deux espaces sont de même dimension, on en déduit que  $\boxed{Im(g - Id) = Ker(g - Id)}$ .
5. Comme  $Ker(f + g - Id) \neq \{0\}$ , on sait déjà que  $\dim Ker(f + g - Id) \geq 1$ . Supposons que  $\dim(Ker(f + g - Id)) = 2$ . Alors on aurait  $f + g - Id = 0$  soit  $f = -(g - Id)$ . D'où  $f^2 = (g - Id)^2$  ce qui donnerait  $-Id = 0$  : absurde !  
Donc  $\boxed{\dim(Ker(f + g - Id)) = 1}$ .

6. (a) Soit  $(c_2)$  une base de  $Ker(f + g - Id)$ ; on pose:  $c_1 = -f(c_2)$ . Montrons que la famille  $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$  est libre. Soit  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 = 0$ . Alors  $-\alpha_1 f(c_2) + \alpha_2 c_2 = 0$ . D'où en appliquant  $f$ , et avec la relation  $f^2 = -Id$ ,

$$-\alpha_1 f^2(c_2) + \alpha_2 f(c_2) = 0 \implies \alpha_1 c_2 - \alpha_2 c_1 = 0$$

On a ainsi le système :

$$\begin{cases} \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 = 0 & L_1 \\ -\alpha_2 c_1 + \alpha_1 c_2 = 0 & L_2 \end{cases}$$

Alors en calculant  $\alpha_2 L_1 + \alpha_1 L_2$ , on obtient :  $(\alpha_2^2 + \alpha_1^2)c_2 = 0$ . D'où, comme  $c_2 \neq 0$  (puisque la famille  $(c_2)$  est libre),  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0$ . La somme de deux nombres positifs est nulle si et seulement si les deux nombres sont nuls, donc  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  et  $\boxed{\text{la famille } (c_1, c_2) \text{ est libre}}$ .

- (b) Comme  $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$  et  $Card(\mathcal{C}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ ,  $\mathcal{C}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
- (c) Par définition,  $f(c_2) = -c_1$ . On a aussi  $f(c_1) = -f^2(c_2) = Id(c_2) = c_2$ . On en déduit que

$$Mat_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve la matrice  $A$  de la Partie 1 !

- (d) Comme  $c_2 \in Ker(f + g - Id)$ , on a  $g(c_2) = c_2 - f(c_2) = c_2 + c_1$ . D'où  $g^2(c_2) = g(c_2) + g(c_1)$ . Comme  $g^2 = 2g - Id$ , on obtient  $2g(c_2) - c_2 = g(c_2) + g(c_1)$  et enfin  $g(c_1) = g(c_2) - c_2 = c_2 + c_1 - c_2 = c_1$ . On en déduit que

$$Mat_{\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on retrouve la matrice  $B$  de la Partie 1 !

Dans toute la suite on note  $A$  et  $B$  les deux matrices définies dans la Partie 1.

7. On déduit de la Partie 2 que si  $f$  et  $g$  vérifient les quatre relations, alors il existe une base  $\mathcal{C}$  dans laquelle  $Mat_{\mathcal{C}}(f) = A$  et  $Mat_{\mathcal{C}}(g) = B$ . Réciproquement les calculs de la Partie 1 montrent que s'il existe une base  $\mathcal{C}$  dans lesquelles  $Mat_{\mathcal{C}}(f) = A$  et  $Mat_{\mathcal{C}}(g) = B$ , alors  $f$  et  $g$  vérifient les relations.

Conclusion:

$f$  et  $g$  vérifient les relations (1), (2), (3), (4) si et seulement si il existe une base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^2$  dans laquelle  $Mat_{\mathcal{C}}(f) = A$  et  $Mat_{\mathcal{C}}(g) = B$ .

## Exercice 2 : probabilités

Partie I : obtention de la première boule blanche

1. 

```
import numpy.random as rd
def Y(a,b):
    N=a+b
    tirage=rd.randint(1,N+1)
    Y=1    # on tire une première boule
    while tirage<=a:    # tant que l'on tire une boule noire
        Y=Y+1    # on fait un tirage de plus
        a=a-1    # le nombre de boules noires diminue de 1
        tirage=rd.randint(1,N+1) # on passe au tirage suivant
    return Y
```
2.  $Y(\Omega) = [1, a + 1]$ .
3. Comme  $[Y = 1] = B_1$ , on a  $P([Y = 1]) = P(B_1) = \frac{b}{N}$ . Soit  $k \in [2, a + 1]$ . On remarque que  $[Y = k] = \bar{N}_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k$ , d'où d'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P([Y = k]) &= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times \dots \times P_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-2}}(N_{k-1}) \times P_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}}(B_k) \\ &= \frac{a}{N} \times \frac{a-1}{N} \times \dots \times \frac{a-k+2}{N} \times \frac{b+k-1}{N} \\ &= \frac{a! (b+k-1)}{(a-k+1)! N^k} \end{aligned}$$

puisque l'on remplace chaque boule noire tirée par une boule blanche. Cette formule reste vraie si  $k = 1$ .

4. D'après la formule ci-dessus, si  $k = a + 1$ ,  $P([Y = a + 1]) = \frac{a!(a+b)}{0!N^{a+1}} = \frac{a!}{N^a}$  car  $a + b = N$   
: on obtient bien le résultat souhaité.  
Si  $k \in \llbracket 1, a \rrbracket$ , d'une part, d'après la question précédente,  $P(Y = k) = \frac{a!(b+k-1)}{(a-k+1)!N^k}$ .  
D'autre part,

$$\frac{a!}{(a-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{a!}{(a-k)!N^k} = \frac{Na! - (a-k+1)a!}{(a-k+1)!N^k} = \frac{(N-a+k-1)a!}{(a-k+1)!N^k} = \frac{a!(b+k-1)}{(a-k+1)!N^k}$$

car  $N = a + b$ . On obtient donc bien le résultat demandé.

5. Soit  $M$  un entier naturel et  $a_0, a_1, \dots, a_M$  une famille de réels.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) &= \sum_{k=1}^M ka_{k-1} - \sum_{k=1}^M ka_k \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} (k+1)a_k - \sum_{k=1}^M ka_k \text{ par changement d'indice} \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} ka_k + \sum_{k=0}^{M-1} a_k - \sum_{k=1}^M ka_k \\ &= \left( \sum_{k=0}^{M-1} a_k \right) - Ma_M \text{ par télescopage} \end{aligned}$$

6. On a

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{a+1} kP(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^a k \left( \frac{a!}{(a-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{a!}{(a-k)!N^k} \right) + (a+1) \frac{a!}{N^a} \text{ d'après le 4.} \\ &= \left[ \sum_{k=0}^{a-1} \frac{a!}{(a-k)!N^k} \right] - a \frac{a!}{(a-a)!N^a} + (a+1) \frac{a!}{N^a} \text{ d'après le 5.} \\ &= \sum_{k=0}^{a-1} \frac{a!}{(a-k)!N^k} + \frac{a!}{N^a} = \sum_{k=0}^a \frac{a!}{(a-k)!N^k} \end{aligned}$$

## 7. Informatique:

```
(a) def factorial(n):
    P=1
    for k in range(1,n+1):
        P=P*k
    return P

(b) def EspY(a,b):
    N=a+b
    S=0
    for k in range(0,a+1):
        S=S+np.factorial(a)/(np.factorial(a-k)*N**(k))
    return S
```

## Partie II : nombre de boules noires obtenues en $n$ tirages

```
1. def X(n,a,b):
    N=a+b
    X=0
    for k in range(1,n+1):
        tirage=rd.randint(1,N+1)
        if tirage<=a:
            X=X+1
            a=a-1
    return X
```

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} P(X_n = 0) &= P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) \\ &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \dots \times P_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n) \\ &= \frac{b}{N} \times \frac{b}{N} \times \dots \times \frac{b}{N} \\ &= \left( \frac{b}{N} \right)^n \end{aligned}$$

Calculons  $P(X_n = n)$ . On remarque tout d'abord que si  $n > a$  alors l'événement  $[X_n = n]$  est impossible et donc  $P(X_n = n) = 0$ .  
Si  $n \leq a$  alors

$$\begin{aligned} P(X_n = n) &= P(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n) \\ &= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times \dots \times P_{N_1 \cap \dots \cap N_{n-1}}(N_n) = \frac{a}{N} \times \frac{a-1}{N} \times \dots \times \frac{a-n+1}{N} \\ &= \frac{a!}{N^n (a-n)!} \end{aligned}$$

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ . Si l'on a obtenu  $k$  boules noires au cours des  $n$  premiers tirages, c'est qu'au cours des  $(n-1)$  premiers tirages, on avait obtenu soit  $k$ , soit  $k-1$  boules noires. On en déduit que

$$[X_n = k] = ([X_{n-1} = k-1] \cap [X_n = k]) \cup ([X_{n-1} = k] \cap [X_n = k])$$

d'où, les événements étant incompatibles,

$$\begin{aligned} P([X_n = k]) &= P([X_{n-1} = k-1] \cap [X_n = k]) + P([X_{n-1} = k] \cap [X_n = k]) \\ &= P([X_{n-1} = k-1]) \times P_{[X_{n-1}=k-1]}([X_n = k]) + P([X_{n-1} = k]) \times P_{[X_{n-1}=k]}([X_n = k]) \\ &= P([X_{n-1} = k-1]) \times P_{[X_{n-1}=k-1]}(N_n) + P([X_{n-1} = k]) \times P_{[X_{n-1}=k]}(B_n) \end{aligned}$$

Sachant que  $[X_{n-1} = k-1]$  est réalisé, l'urne contient  $a - (k-1) = a - k + 1$  boules noires avant le  $n$ -ième tirage. Donc  $P_{[X_{n-1}=k-1]}(N_n) = \frac{a-k+1}{N}$ .  
Sachant que  $[X_{n-1} = k]$  est réalisé, l'urne contient  $a - k$  boules noires et  $b + k$  boules blanches avant le  $n$ -ième tirage. Donc  $P_{[X_{n-1}=k]}(B_n) = \frac{b+k}{N}$ .  
On en déduit bien que

$$P(X_n = k) = \frac{b+k}{N} P(X_{n-1} = k) + \frac{a+1-k}{N} P(X_{n-1} = k-1)$$

4. Calcul de l'espérance de  $X_n$

(a) Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
 E(X_n) &= \sum_{k=0}^n kP([X_n = k]) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{bk + k^2}{N} P([X_{n-1} = k]) + \sum_{k=0}^n \frac{k(a+1) - k^2}{N} P([X_{n-1} = k-1]) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{bk + k^2}{N} P([X_{n-1} = k]) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(j+1)(a+1) - (j+1)^2}{N} P([X_{n-1} = j]) \\
 &\quad \text{en posant } j = k-1 \text{ et en enlevant les probabilités nulles} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{bk + k^2 + ak + k + a + 1 - k^2 - 2k - 1}{N} P([X_{n-1} = k]) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{bk + ak + k + a - 2k}{N} P([X_{n-1} = k]) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Nk - k + a}{N} P([X_{n-1} = k])
 \end{aligned}$$

et on obtient bien

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a + k(N-1)}{N} P(X_{n-1} = k)$$

Par suite

$$\begin{aligned}
 E(X_n) &= \frac{a}{N} \sum_{k=0}^{n-1} P([X_{n-1} = k]) + \frac{N-1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} kP([X_{n-1} = k]) \\
 &= (1 - \frac{1}{N})E(X_{n-1}) + \frac{a}{N}
 \end{aligned}$$

(b) Le résultat nous étant fourni dans l'énoncé, on procède par récurrence !

On pourrait aussi reconnaître une suite arithmético-géométrique et faire les calculs correspondants...

Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la propriété :

$\mathcal{H}(n) : "E(X_n) = a(1 - (1 - \frac{1}{N})^n)"$

Initialisation: comme  $X_0 = 0$ ,  $E(X_0) = 0$ . D'autre part,  $a(1 - (1 - \frac{1}{N})^0) = a \times 0 = 0$  donc  $\mathcal{H}(0)$  est vraie.

Hérédité: soit  $n \in \mathbb{N}$  un entier fixé tel que  $\mathcal{H}(n)$  est vraie. Montrons que  $\mathcal{H}(n+1)$

est vraie. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
 E(X_{n+1}) &= (1 - \frac{1}{N})E(X_n) + \frac{a}{N} \\
 &= (1 - \frac{1}{N})a(1 - (1 - \frac{1}{N})^n) + \frac{a}{N} \\
 &= a - \frac{a}{N} - a(1 - \frac{1}{N})^{n+1} + \frac{a}{N} \\
 &= a - a(1 - \frac{1}{N})^{n+1} \\
 &= a(1 - (1 - \frac{1}{N})^{n+1})
 \end{aligned}$$

donc  $\mathcal{H}(n+1)$  est vraie.

Conclusion: pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E(X_n) = a(1 - (1 - \frac{1}{N})^n)$

(c) On obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = a$ .

Si l'on fait un grand nombre de tirages, on finira par obtenir toutes les boules noires.

5. Probabilité de tirer une boule noire

(a) D'après la formule des probabilités totales dans le système complet  $([X_n = 0], \dots, [X_n = n])$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 P(N_{n+1}) &= \sum_{k=0}^n P(X_n = k) \times P_{X_n=k}(N_{n+1}) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{a-k}{N} P(X_n = k)
 \end{aligned}$$

puisque si l'on a déjà tiré  $k$  boules noires, il n'en reste plus que  $a-k$  dans l'urne.

(b) On en déduit que

$$\begin{aligned}
 P(N_{n+1}) &= \frac{a}{N} \sum_{k=0}^n P(X_n = k) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^n kP(X_n = k) \\
 &= \frac{a}{N} - \frac{1}{N} E(X_n) \\
 &= \frac{a}{N} - \frac{a}{N} (1 - (1 - \frac{1}{N})^n) \\
 &= \frac{a}{N} (1 - \frac{1}{N})^n
 \end{aligned}$$

### Exercice 3 : étude d'une suite d'intégrales

#### 1. Propriétés de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$  un entier fixé. La fonction  $\sin$  est continue sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Comme la fonction  $t \mapsto t^n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , par composition la fonction  $t \mapsto (\sin(t))^n$  est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , donc l'intégrale  $W_n$  est bien définie.
- (b) On obtient sans problème :  $W_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $W_1 = 1$ .  
Rappelons que  $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$  et  $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ , donc  $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$ . On en déduit que

$$W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2t)) dt = \frac{\pi}{4}$$

- (c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin(t) \in [0, 1]$  donc  $\sin^n(t) \geq \sin^{n+1}(t)$ , d'où par croissance de l'intégrale, en intégrant avec les bornes dans le bon ordre,  $W_n \geq W_{n+1}$ . La suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante.
- (d) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Comme pour tout  $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin(t) \geq 0$ , en intégrant avec les bornes dans le bon ordre, on obtient  $W_n \geq 0$ .  
La suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant décroissante et minorée par 0, elle est convergente. On note  $l$  sa limite.

#### 2. Relation de récurrence

Soit  $n \geq 2$ . Alors

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times \sin^{n-1}(t) dt$$

Posons

$$\begin{aligned} u(t) &= \sin^{n-1}(t) & u'(t) &= (n-1) \cos(t) \sin^{n-2}(t) \\ v'(t) &= \sin(t) & v(t) &= -\cos(t) \end{aligned}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ . On obtient alors en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} W_n &= [-\cos(t) \sin^{n-1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(t))(n-1) \cos(t) \sin^{n-2}(t) dt \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^{n-2}(t) dt \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^{n-2}(t) dt \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} W_n &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t)) \sin^{n-2}(t) dt \\ &= (n-1)(W_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

Donc enfin  $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$

#### 3. Programme Python

def W(n):

```
U=np.zeros(n+1) #on crée une matrice ligne nulle à n+1 cases
U[0]=np.pi/2    #on entre W0
U[1]=1           #on entre W1
for k in range(2,n+1):
    U[k]=(k-1)/k*U[k-2]    #on utilise la relation de récurrence
return U[n]
```

4. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant décroissante, on sait déjà que  $W_{n+1} \leq W_n$ . De plus, comme la fonction  $t \mapsto \sin^n(t)$  est continue, positive et différente de la fonction nulle sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt > 0$ . Enfin,  $W_{n+1} \geq W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ , donc enfin,

$$0 < \frac{n+1}{n+2} W_n \leq W_{n+1} \leq W_n$$

- (b) En divisant par  $W_n$  dans la relation ci-dessus (avec  $W_n > 0$ ) :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ , par encadrement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$  donc  $W_n \sim_{n \rightarrow +\infty} W_{n+1}$

#### 5. Limite et équivalent de $W_n$

- (a) Montrons que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{H}(n) : n W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2}$$

- Initialisation : si  $n = 1$ ,  $W_1 \times W_0 = \frac{\pi}{2}$  donc  $\mathcal{H}(1)$  est vraie.

- Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathcal{H}(n)$  est vraie. Alors

$$\begin{aligned} (n+1) W_{n+1} W_n &= (n+1) \cdot \frac{n}{n+1} W_{n-1} W_n \\ &= n W_{n-1} W_n \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

donc  $\mathcal{H}(n+1)$  est vraie.

- Conclusion :  $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1, n W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2}}$

- (b) Comme  $W_{n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} W_n$ , on a aussi  $W_n \sim_{n \rightarrow +\infty} W_{n-1}$ . Donc

$$n(W_n)^2 \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (W_n)^2 \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2n} \Leftrightarrow W_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

- (c) On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = 0$ .

#### 6. Calcul de $W_n$

Les résultats étant fournis dans l'énoncé, nous pouvons les démontrer par récurrence. Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la propriété

$$\mathcal{H}(n) : W_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \text{ et } W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

- Initialisation : pour  $n = 0$ , on sait que  $W_1 = 1$  et  $W_0 = \frac{\pi}{2}$ . On vérifie aisément que pour  $n = 0$  les formules ci-dessus fonctionnent.
- Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}$  un entier fixé tel que  $\mathcal{H}(n)$  est vraie. Alors

$$\begin{aligned} W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2} W_n \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)^2} \cdot \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{4 \cdot (n+1)^2} \cdot \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

et également

$$\begin{aligned} W_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2n+3} W_{n+1} \\ &= \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{(2n+2)^2}{(2n+2)(2n+3)} \cdot \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{4 \cdot (n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \cdot \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{4^{n+2} \cdot ((n+1)!)^2}{(2n+3)!} \end{aligned}$$

donc  $\mathcal{H}(n+1)$  est vraie.

- D'où le résultat par principe de récurrence.

7. D'après la question précédente et le 4.(b),

$$W_{2n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

et

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

D'où

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\sqrt{\pi} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}}}$$

8.  $\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$  donc l'équivalence ci-dessus se réécrit

$$\sqrt{\pi} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

$$\boxed{\binom{2n}{n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}}$$

9. Lien avec une autre intégrale

(1) Posons  $u = \frac{\pi}{2} - t$ .

(2) Bornes :  $\begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = \frac{\pi}{2} \\ u = 0 \end{cases}$

(3) La fonction  $\varphi : t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$  est une fonction affine, donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .

(4)  $du = -dt$

(5)  $\sin^n(t) dt = \sin^n(\frac{\pi}{2} - u)(-1) du$

(6) la fonction  $f : u \mapsto -\sin^n(\frac{\pi}{2} - u)$  est continue sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Donc par changement de variables,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n(\frac{\pi}{2} - u)(-1) du$$

D'où, comme  $\sin(\frac{\pi}{2} - u) = \cos(u)$ ,

$$I_n = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n(u) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u) du$$