
Rappels d'analyse - exercices pour aller plus loin

Exercice 1

Soit f continue sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^{2/n} f(x) dx = 0$
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^{2/n} \frac{1}{x^2} dx$. Différence avec le cas précédent ?
3. Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_{1/n}^{2/n} f(x) dx = f(0)$
4. Justifier que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt = 0$ (extrait oral ESCP)
5. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n x e^{-n x^2} dx$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n x \cdot e^{-n x^2}$.
Morale de cette question : on a pas le droit de

Exercice 2

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt = \ln(2)$

Exercice 3

1. Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$ est monotone et converge vers 0.
2. Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n} dx$$

Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n en fonction de n et de u_n .

En déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

QSP oral ESCP 2024 Estimation de l'écart entre intégrale et somme de RIEMANN

On considère une fonction f qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $I = [0, 1]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence d'une constante $M \in \mathbb{R}^2$ telle que

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2.$$

pour tout couple $(k, t) \in [[0, n]] \times I$.

2. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[\int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$