

DM en auto-correction.

La correction de ce sujet sera postée sur Cahier de Prépa le lundi 21/09/2026.

Exercice 1 - Algèbre linéaire

Partie I : Etude d'un cas particulier

On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

- (a) Calculer A^2 et A^3 et donner une relation entre ces deux matrices.
- (b) En déduire un polynôme annulateur P de f que l'on donnera sous forme factorisée.
- (c) Pour tout entier naturel k , expliciter la matrice A^k .
- (a) L'endomorphisme f est-il un automorphisme de E ?
- (b) Déterminer, le cas échéant, une base de l'image de f et une base de noyau de f .
- (c) Les sous espaces vectoriels $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
- Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2Id)$.

Partie II : Cas général

On suppose dans cette partie que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit a un réel non nul et g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $g^n = a g^{n-1}$.

On cherche à démontrer que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(g^{n-1}) \oplus \text{Ker}(g - aId)$.

On note $p = \dim(\text{Ker}(g^{n-1})) + \dim(\text{Ker}(g - aId))$.

- Expliciter un polynôme annulateur de g .
- (a) Montrer que : $\text{Ker}(g^{n-1}) \cap \text{Ker}(g - aId) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
- (b) En déduire que $p \leq n$.
- (a) Montrer que : $\text{Im}(g^{n-1}) \subset \text{Ker}(g - aId)$.
- (b) En déduire que $n \leq p$
- Montrer que les sous-espaces $\text{Ker}(g^{n-1})$ et $\text{Ker}(g - aId)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 - Ecricome

Dans tout cet exercice, on fixe a un réel strictement supérieur à 1. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction polynomiale f_n par

$$f_n : x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

- (a) En notant pour tout réel x et pour tout entier naturel k , $t_k(x) = \frac{x^k}{k!}$, exprimer pour k un entier naturel non nul, $t_k(x)$ en fonction de $t_{k-1}(x)$, x et k .
- (b) Recopier et compléter la fonction Python suivante qui, prenant en entrée les valeurs de l'entier n et du réel x , renvoie la valeur de $f_n(x)$.

```
def f(n,x):
    t= 1      #t=t_0(x)
    S= 1      #S=f(0,x)
    for k in range(1,n+1):
        t = t * x
        S= S + t
    return S
```

- Justifier que, pour tout entier n strictement positif, l'équation $f_n(x) = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, que l'on note u_n .
- (a) Soit x un réel positif.
Montrer que la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante et déterminer sa limite.
- (b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$
- (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.
- (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\ln(a) \leq u_n$.
- (b) Soit K un réel positif et minorant la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. Montrer que $e^K \leq a$.
- (c) Déduire des questions précédentes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(a)$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$R_n(x) = \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

- (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée.
On considère dorénavant un réel M strictement positif vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \leq M$$

- (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|R_n(u_n)| \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$$

- (c) En déduire que

$$R_n(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

6. (a) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = f_n(x) + R_n(x)$$

- (b) En se rappelant que $f_n(u_n) = a$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déduire des deux questions précédentes que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

7. (a) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x e^t \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

- (b) En déduire que :

$$e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

- (c) Justifier que $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

- (d) En déduire finalement que : $u_n - \ln(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}$