

# Corrigé du Sujet EM Lyon 2026

## Problème 1

1. La matrice  $A$  est symétrique, elle est donc orthodiagonalisable. On constate que :

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc  $2 \in Sp(A)$ . De plus

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

donc  $0 \in Sp(A)$ . Comme  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $A$  a au plus deux valeurs propres distinctes donc  $Sp(A) = \{0, 2\}$ . En normant les vecteurs propres trouvés ci-dessus, on voit que les matrices

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

orthodiagonalisent  $A$  : on a bien  $A = QD^tQ$

2. (a) Notons  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Pour tout  $(x, y) \in D$ ,

$$\varphi(x, y) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot \left( \frac{x+y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \frac{x-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2} = 1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Les fonctions  $f : (x, y) \mapsto 2xy$  et  $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$  sont polynômiales donc de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . De plus la fonction  $g$  ne s'annule pas sur cet ouvert. Par quotient de fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ , puis par somme par une constante, la fonction  $\varphi$  est bien de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

(b) Pour tout  $(x, y) \in D$ ,

$$\partial_1 \varphi(x, y) = \frac{2y(x^2 + y^2) - 2xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\partial_2 \varphi(x, y) = \frac{2x(x^2 + y^2) - 2xy \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Donc  $(x, y) \in D$  est un point critique de  $\varphi$  si et seulement si

$$\begin{cases} y(y^2 - x^2) = 0 \\ x(x^2 - y^2) = 0 \end{cases}$$

Supposons  $y = 0$ . Alors avec la deuxième ligne  $x = 0$ , ce qui est absurde puisque  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Par conséquent,  $y \neq 0$  et  $x^2 = y^2$ . Finalement, l'ensemble des points critiques de  $\varphi$  est :

$$\mathcal{C} = \{(x, x); x \in \mathbb{R}^*\} \cup \{(x, -x); x \in \mathbb{R}^*\}$$

et  $\varphi$  a bien une infinité de points critiques

(c) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  et  $(x, y) \in D$ . Alors

$$\varphi(\alpha x, \alpha y) = 1 + \frac{2\alpha^2 xy}{\alpha^2 x + \alpha^2 y} = \varphi(x, y)$$

(d) Un maximum ne peut être atteint qu'en un point critique. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\varphi(x, x) = \varphi(1, 1) = 2 \text{ et } \varphi(x, -x) = \varphi(1, -1) = 0$$

De plus, pour tout  $(x, y) \in D$ ,

$$(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{2xy}{x^2 + y^2} \leq 1 \Leftrightarrow \varphi(x, y) \leq 2$$

**Bilan :**  $\varphi$  a pour maximum global 2 et ce maximum global est atteint en tout  $(x, x)$  où  $x \in \mathbb{R}^*$

Remarque : l'idée de l'énoncé était plutôt de se ramener au fermé borné  $S_1$ . Mais cela me paraît bien plus compliqué pour cette question !!!

3. (a) Soit  $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ . Alors  ${}^tB.B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  et pour tout  $(i, j) \in [[1, m]]^2$ ,

$$\begin{aligned} ({}^tB.B)_{i,j} &= \sum_{k=1}^n ({}^tB)_{i,k} \cdot (B)_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n (B)_{k,i} \cdot (B)_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n b_{k,i} \cdot b_{k,j} \end{aligned}$$

On a par ailleurs  $B \cdot {}^tB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $(i, j) \in [[1, n]]^2$ ,

$$\begin{aligned} (B \cdot {}^tB)_{i,j} &= \sum_{k=1}^m (B)_{i,k} \cdot ({}^tB)_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^m (B)_{i,k} \cdot (B)_{j,k} \\ &= \sum_{k=1}^m b_{i,k} \cdot b_{j,k} \end{aligned}$$

(b) D'une part,

$$\begin{aligned} Tr({}^tB.B) &= \sum_{i=1}^m ({}^tB.B)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n b_{i,k} \cdot b_{k,i} \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} Tr(B \cdot {}^tB) &= \sum_{i=1}^n (B \cdot {}^tB)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m b_{i,k}^2 \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n b_{i,k}^2 \text{ par interversion de sommes finies} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n b_{k,i}^2 \text{ en changeant le nom des indices} \\ &= Tr({}^tB.B) \end{aligned}$$

4.  $D$  est un carré,  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont deux droites.

5. La fonction  $f_\Lambda$  est polynomiale donc continue sur le fermé borné  $D \cap C_k$ . Par conséquent, elle admet un maximum global sur  $D \cap C_k$ , c'est-à-dire qu'elle admet un maximum global sur  $D$  sous la contrainte  $C_k$ . Ce maximum devrait être atteint au point  $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  (avec  $k$  fois 1). En effet, ce point appartient bien à  $D \cap C_k$  et

$$f_\Lambda(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$$

On voit bien que cela va être le maximum mais pas facile à rédiger !!!

6. (a) On suppose que  $\pi$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ . On a alors  $\mathbb{R}^n = F \oplus G$ . Soit  $\mathcal{B}_F$  une base de  $F$ ,  $\mathcal{B}_G$  une base de  $G$  et  $\mathcal{B}$  la concaténation de ces deux bases : il s'agit d'une base de  $\mathbb{R}^n$  d'après le cours. Dans cette base, la matrice de  $\pi$  est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\pi) = \text{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

En particulier,  $\text{rg}(\pi) = \dim(F) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\pi))$  et  $\text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\pi)) = \dim(F)$ .

Comme  $P$  est la matrice de  $\pi$  dans la base canonique,  $\text{rg}(P) = \text{rg}(\pi) = \dim(F)$  et comme deux matrices semblables ont la même trace (classique car  $\text{Tr}(P.D.P^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}.P.D) = \text{Tr}(D)$ ), on a aussi  $\text{rg}(P) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\pi)) = \dim(F)$ .

On a donc bien  $\boxed{\text{rg}(P) = \text{Tr}(P)}$

- (b) Supposons que la projection  $\pi$  est orthogonale. Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$x = \pi(x) + x - \pi(x)$$

avec  $\pi(x)$  et  $x - \pi(x)$  qui sont orthogonaux. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|\pi(x)\|^2 + \|x - \pi(x)\|^2$$

donc  $\|x\|^2 \geq \|\pi(x)\|^2$  et  $\boxed{\|\pi(x)\| \leq \|x\|}$

- (c) Pour tout  $i$ ,

$$P_{i,i} = \langle \pi(e_i), e_i \rangle = \langle \pi \circ \pi(e_i), e_i \rangle = \langle \pi(e_i), \pi(e_i) \rangle = \|\pi(e_i)\|^2 \geq 0$$

donc  $p_{i,i} \geq 0$ . De plus,  $\|\pi(e_i)\| \leq \|e_i\| = 1$ , donc  $p_{i,i} \in [0, 1]$ .

7. La matrice  $A$  est symétrique, donc orthodiagonalisable : il existe bien une matrice orthogonale  $Q$  et une matrice diagonale  $D$  telles que

$$A = Q.D.^tQ$$

où  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . On peut bien choisir de placer les coefficients diagonaux dans l'ordre décroissant (quitte à modifier l'ordre des colonnes de  $Q$ ) :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

8. Notons  $M = (C_1|C_2|\dots|C_k)$ . Alors  ${}^tM.M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour tout  $(i, j) \in [[1, n]]^2$ ,

$$({}^tM.M)_{i,j} = {}^tC_i.C_j = \langle C_i, C_j \rangle$$

Comme la famille  $(C_1, \dots, C_k)$  est orthonormale, on en déduit que  $\boxed{{}^tM.M = I_k}$

9. On a  $A = Q.\lambda_1.I_k.^tQ = \lambda_1.I_k$ . D'où  ${}^tM.A.M = \lambda_1.^tM.M = \lambda_1.I_k$ . On en déduit que  $\text{Tr}({}^tM.A.M) = k.\lambda_1$ .

10. Notons que  ${}^tQ \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $M \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ , donc  $X \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ . Par conséquent  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- (a) Tout d'abord, par les propriétés de la transposition,

$${}^tP = {}^tX.^tX = {}^t({}^tX.^tX) = X.^tX$$

donc  $P$  est symétrique. Ensuite,

$$P^2 = X.^tX.X.^tX = X.^tM.Q.^tQ.M.^tX = X.^tM.M.^tX = X.I_n.^tX = X.^tX = P$$

donc  $P$  est un projecteur.

Finalement,  $\boxed{P \text{ est la matrice d'une projection orthogonale.}}$

- (b) Soit  $Y \in \text{Ker}({}^tX)$ . Alors  ${}^tX.Y = 0$ , donc  $PY = X.^tXY = X.0 = 0$ .

Ainsi  $\text{Ker}({}^tX) \subset \text{Ker}(P)$ . Soit  $Y \in \text{Ker}(P)$ . Alors

$$PY = 0 \Leftrightarrow X.^tXY = 0 \Leftrightarrow {}^tY.X.^tX.Y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\|{}^tX.Y\|} = 0 \Leftrightarrow {}^tX.Y = 0$$

donc  $\text{Ker}(P) \subset \text{Ker}({}^tX)$ .

Finalement par double inclusion,  $\text{Ker}(P) = \text{Ker}({}^tX)$ .

Cette question est plutôt classique

Comme  $Q$  est inversible,  $\text{rg}(X) = \text{rg}({}^tQ.M) = \text{rg}(M) = k$  (mais HP : à prouver en passant par les applications linéaires associées).

On en déduit par le théorème du rang que

$$\text{rg}(P) = n - \dim(\text{Ker}(P)) = n - \dim(\text{Ker}({}^tX)) = \text{rg}({}^tX) = \text{rg}(X) = k$$

- (c)

$$\text{Tr}({}^tM.A.M) = \text{Tr}({}^tM.Q.D.^tQ.M) = \text{Tr}({}^tQ.M.^tM.Q.D) = \text{Tr}(PD)$$

On remarque que

$$PD = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{1,1} & \dots & \lambda_n p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n,1} & \dots & \lambda_n p_{n,n} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\text{Tr}(PD) = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_{i,i} = f_\Lambda(p_{1,1}, \dots, p_{n,n})$$

De plus, on a vu que  $\forall i \in [[1, n]]$ ,  $p_{i,i} \in [0, 1]$  donc  $(p_{1,1}, \dots, p_{n,n}) \in D$ . Par ailleurs, comme  $P$  est un projecteur orthogonal,  $\text{Tr}(P) = \text{rg}(P) = k$  donc  $\sum_{i=1}^n p_{i,i} = k$ . Par conséquent  $(p_{1,1}, \dots, p_{n,n}) \in D \cap C_k$ . On en déduit bien que

$$\text{Tr}({}^tM.A.M) \leq \max\{f_\Lambda(x_1, \dots, x_n); (x_1, \dots, x_n) \in D \cap C_k\}$$

- (d) D'après le 5., ce maximum est atteint au point  $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ , c'est-à-dire lorsque  $p_{1,1} = \dots = p_{k,k} = 1$  et  $p_{k+1,k+1} = \dots = p_{n,n} = 0$ . Supposons que pour tout  $i \in [[1, k]]$  on a  $C_i = V_i$ . Alors

$$X = {}^tQ.M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \dots & & \\ 0 & \vdots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ETC...

- (e) La matrice  $A$  de la Partie 1. est symétrique de rang 1. On considère  $M = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$ , qui

représente n'importe quelle matrice colonne normée, et  $\varphi(x, y) = {}^tM.A.M$  est un réel. Par conséquent  $\text{Tr}({}^tM.A.M) = \varphi(x, y)$ . Le maximum de cette trace vaut 2 et est atteint lorsque

$$x = y \in \mathbb{R}^*, \text{ et en particulier est bien atteint pour } C_1 = V_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

## Problème 2

1. (a) Soit  $t \in [0, 1]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq P(W = n).t^n \leq P(W = n)$$

Comme la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(W = n)$  converge (et vaut 1), par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(W = n).t^n$  converge. Par conséquent  $G_W$  est bien définie sur  $[0, 1]$

- (b) Soit  $(s, t) \in [0, 1]^2$  avec  $s \leq t$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $x \mapsto x^n$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $s^n \leq t^n$ . Par produit avec  $P(W = n) \geq 0$  puis sommation, on a bien  $G_W(s) \leq G_W(t)$  :

la fonction  $G_W$  est croissante sur  $[0, 1]$

- (c) Pour tout  $t \in [0, 1]$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t^n \leq 1$  donc

$$G_W(t) \leq G_W(1) = 1$$

La fonction  $G_W$  étant croissante et majorée par 1, par théorème de limite monotone pour les fonctions, il existe un réel  $l$  tel que  $\lim_{t \rightarrow 1^-} G_W(t) = l$ .

- (d) La série  $\sum P(W = n).t^n$  étant à termes positifs, on a bien d'après ce qui précède :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], \sum_{n=0}^m P(W = n).t^n \leq G_W(t) \leq G_W(1)$$

En passant à la limite lorsque  $t$  tend vers  $1^-$  dans ces inégalités larges, on a alors :

$$\sum_{n=0}^m P(W = n) \leq l \leq G_W(1) = 1$$

- (e) Enfin, en faisant tendre  $m$  vers  $+\infty$ , on a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^m P(W = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(W = n) = 1$$

donc  $l = 1$ . Par conséquent,  $\lim_{t \rightarrow 1^-} G_W(t) = 1 = G_W(1)$  : la fonction  $G_W$  est continue en 1

- (f) Pour tout  $t \in [0, 1]$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$0 \leq n.P(W = n).t^{n-1} \leq n.t^{n-1}$$

Comme la série  $\sum_{n \geq 1} n.t^{n-1}$  est une série géométrique dérivée convergente (car  $|t| < 1$ ), par critère de majoration pour les séries à termes positifs la série  $\sum_{n \geq 1} n.P(W = n).t^{n-1}$  est convergente.

2. (a) Etude de fonction !

- (b) Pour tous  $m, n$  entiers avec  $1 \leq n \leq m$ ,

$$\begin{aligned} P(\cup_{k=n}^m A_k) &= 1 - P(\overline{\cup_{k=n}^m A_k}) \\ &= 1 - P(\cap_{k=n}^m \overline{A_k}) \\ &= 1 - \prod_{k=n}^m P(\overline{A_k}) \text{ par indépendance des événements } A_k \\ &= 1 - \prod_{k=n}^m (1 - P(A_k)) \end{aligned}$$

D'après la question précédente,  $1 - P(A_k) \leq \exp(-P(A_k))$  donc

$$\prod_{k=n}^m (1 - P(A_k)) \leq \prod_{k=n}^m \exp(-P(A_k))$$

puis

$$P(\cup_{k=n}^m A_k) \geq 1 - \prod_{k=n}^m \exp(-P(A_k))$$

donc

$$P(\cup_{k=n}^m A_k) \geq 1 - \exp(-\sum_{k=n}^m P(A_k))$$

*Cette question est extrêmement astucieuse... Sans doute résolue par personne ou presque.*

- (c) La suite d'événements  $(\cup_{k \geq n} A_k)$  est décroissante. Par théorème de limite monotone en probabilités,

$$P(\cap_{n \geq 1} \cup_{k \geq n} A_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\cup_{k \geq n} A_k)$$

Comme la série  $\sum_{n \geq 1} P(A_n)$  diverge, étant à termes positifs on a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^m P(A_k) = +\infty$$

Par encadrement, on a donc  $\lim_{m \rightarrow +\infty} P(\cup_{k=n}^m A_k) = 1$ . Puisque  $1 \geq P(\cup_{k \geq n} A_k) \geq P(\cup_{k=n}^m A_k)$ , on a encore par encadrement  $P(\cup_{k \geq n} A_k) = 1$  et donc enfin  $P(\cap_{n \geq 1} \cup_{k \geq n} A_k) = 1$

3. Bof... On va dire que c'est évident étant donné que les variables sont toutes de même loi et indépendantes...  $W_1$  est de même loi que  $W_k$ ,  $W_1 + W_2$  est de même loi que  $W_k + W_{k+1}$  etc...  
Je ne vois pas trop ce qu'on peut attendre d'autre.

4. (a)

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{j=0}^n b_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \sum_{i+j=k} a_i b_j \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \sum_{i=1}^n a_i b_{n-i} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} c_k \end{aligned}$$

Comme les termes  $c_k$  sont positifs, on a bien

$$\sum_{k=1}^n c_k \leq (\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{j=0}^n b_j) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k$$

- (b) La suite  $(\sum_{k=1}^n c_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante et majorée par  $(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i)(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j)$ . Cette suite est donc convergente, c'est à dire que la série  $\sum_{k \geq 1} c_k$  converge. En passant à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  dans l'encadrement du a., on a donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = (\sum_{i=1}^{+\infty} a_i)(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j)$$

5. (a)  $E(X_n) = 0$  et

$$E(X_n^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

donc  $V(X_n) = \frac{1}{4}$ .

- (b) Par linéarité de l'espérance, on a donc  $E(S_n) = 0$ . Les variables  $X_k$  étant indépendantes, on a aussi:

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{n}{4}$$

6. Les variables  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes, de même espérance et variance. D'après la loi faible des grands nombres, la moyenne empirique  $(\frac{S_n}{n})$  converge en probabilité vers 0.

7. (a) 

```
def simul_X():
    X=rd.randint(1,3)
    if X==2:
        X=-1
    return X
```

  
 (b) 

```
def simul_S(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+X()
    return S
```

8. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{X_k + 1}{2} - n = S_n + n - n = S_n$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la variable  $\frac{X_k + 1}{2}$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ .

9. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $i \in [-n, n]$ .

- (a)  $S_n$  représente la position du marcheur après  $n$  déplacements. Le marcheur démarre de l'origine à l'instant 0 et se déplace d'une unité à chaque fois. En un nombre pair de déplacements il peut donc être uniquement sur une abscisse paire. De même, en un nombre impair de déplacements il doit être sur une abscisse paire. Par conséquent : si  $i$  et  $n$  ne sont pas de même parité alors  $P(S_n = i) = 0$ .
- (b) Les variables  $\frac{X_k + 1}{2}$  suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre  $p$  et sont indépendantes par coalition. Par conséquent leur somme  $\sum_{k=1}^n \frac{X_k + 1}{2}$  suit la loi binomiale de paramètres  $(n, p)$ . On en déduit que si  $i$  est de même parité que  $n$ ,

$$P(S_n = i) = P\left(\sum_{k=1}^n \frac{X_k + 1}{2} = \frac{n+i}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n+i}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

10. (a)

$$\begin{aligned} P(S_{2n} = 0) &= \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\ &\sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{4\pi n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{2\pi n} \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\ &\sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot 2^{2n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\ &\sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

- (b) La série de terme général  $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$  est une série de Riemann de paramètre  $\frac{1}{2}$ , qui diverge puisque  $\frac{1}{2} \leq 1$ . Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(S_{2n} = 0)$  est divergente. D'après la remarque de la fin du 2.c., la probabilité qu'une infinité d'événements de la forme  $[S_{2n} = 0]$  se réalisent simultanément est égale à 1. Ceci signifie que la marche aléatoire passe une infinité de fois par 0.  
 Problème : pas clair du tout que les événements  $[S_{2n} = 0]$  soient indépendants !!!

11. (a)  $P(T = 1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$   
 (b) Le terme de droite signifie que lors des  $n - 1$  premiers déplacements l'abscisse est négative ou nulle, puis qu'elle est strictement positive après le  $n$ -ième déplacement. Cela signifie bien que l'événement  $[T = n]$  est réalisé.

(c) Si  $n$  est pair, l'événement  $[S_n = 1]$  ne peut pas être réalisé d'après la question 9.a., donc  $P(T = n) = 0$ .

12. (a)  $R_k$  est réalisé si le premier retour à l'origine du marcheur a lieu à l'instant  $k + 1$

(b) Beurk...

Disons:

$$P(R_k) = P(S_1 = -1) \cdot P_{[S_1 = -1]}(\cap_{j=2}^k [S_j \leq -1] \cap [S_{k+1} = 0])$$

Sachant que  $[S_1 = -1]$  est réalisé, dire que  $\cap_{j=2}^k [S_j \leq -1] \cap [S_{k+1} = 0]$  est réalisé revient à dire que l'on arrive pour la première fois à l'abscisse 1 en partant de 0 au bout de  $k$  déplacements. Donc on a bien  $P(R_k) = \frac{1}{2} P(T = k)$ .

(c) On revient en 0 pour la 1ère fois à l'instant  $k$ , puis on repart dans les négatifs jusqu'à ce qu'enfin on revienne en 1.

(d) Il doit y avoir un lien avec le 12.b. ... C'est quand même bien bien moche. Qui va faire ça ? personne...

13. (a) La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(T = n) \cdot t^n$  où  $t \in [0, 1]$  est convergente. On a alors d'après le 4.b.,

$$G_T(t)^2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n) \cdot t^n\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n P(T = k) P(T = n - k)\right) t^n$$

(b) D'après le 12.d., pour tout  $t \in ]0, 1[$ ,

$$G_T(t)^2 = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n + 1) \cdot t^n = 2 \cdot \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{+\infty} P(T = n) \cdot t^n = \frac{2}{t} \cdot (G_T(t) - P(T = 1) \cdot t) = \frac{2}{t} \cdot G_T(t) - 1$$

donc  $\boxed{t G_T(t)^2 = 2 G_T(t) - t}$ . Si  $t = 0$ , cette égalité reste vraie car  $G_T(0) = 0$ .

(c) On en déduit que  $G_T(1)^2 = 2 G_T(1) - 1$  donc  $(G_T(1) - 1)^2 = 0$  d'où  $G_T(1) = 1$ . Par conséquent,

$$P(T = -1) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n) = 1 - G_T(1) = 0$$

(d) On dérive la relation précédente : pour tout  $t \in [0, 1[$ ,

$$G_T(t)^2 + 2t \cdot G'_T(t) \cdot G_T(t) = 2G'_T(t) - 1 \Leftrightarrow G'_T(t) = \frac{-1 - G_T(t)^2}{2t G_T(t) - 2}$$

qui tend donc vers  $+\infty$  quand  $t$  tend vers 1.

14. Simulations sur Python

(a) 

```
def simul_T():
    S=0
    n=0
    while S<=0:
        S=S+simul_X()
    return n
```

(b) La fonction `mystere(N)` renvoie la moyenne empirique (de  $N$  simulations) de  $T$ . Au vu des valeurs renvoyées lorsque l'on simule 7 fois cette moyenne empirique, il semblerait que  $T$  n'admette pas d'espérance !

(c) Il semblerait que  $T$  n'admette pas d'espérance. On peut remarquer avec la fin de la question 1. que si  $W$  admet une espérance alors  $E(W) = G'_W(1)$ . Comme ici  $\lim_{t \rightarrow 1} G'_T(t) = +\infty$ , la fonction  $G_T$  n'est sans doute pas dérivable en 1. On conjecture que  $G_W$  est dérivable en 1 si et seulement si la variable  $W$  admet une espérance.