

Corrigé 2026

Exercice 1.....

1) On peut proposer la fonction suivante :

```
def simulZ:  
    X1=rd.random()  
    X2=rd.random()  
    Z=X1*X2  
    return Z
```

2) Comme $Z = X_1 X_2$ avec X_1 et X_2 indépendantes et ayant une espérance,

$E(Z)$ existe et on a $E(Z) = E(X_1)E(X_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ce qui donne :

$$E(Z) = \frac{1}{4}$$

On a aussi $Z^2 = X_1^2 X_2^2$ et le lemme des coalitions assure que X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes donc, comme plus haut, $E(Z^2)$ existe et $E(Z^2) = E(X_1^2)E(X_2^2)$.

D'après le théorème de Koenig-Huygens, on sait que $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2$, ce qui fournit $\frac{1}{12} = E(X_1^2) - \frac{1}{4}$ et on trouve $E(X_1^2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

On a de même $E(X_2^2) = \frac{1}{3}$.

Tout ceci donne :

$$E(Z^2) = \frac{1}{9}$$

Toujours avec le théorème de Koenig-Huygens, on a $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$, et en remplaçant, on trouve :

$$V(Z) = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}$$

3) a) Pour tout réel x , on a, par définition $F(x) = P(Y_1 \leq x) = P(\ln(X_1) \leq x)$, et comme la fonction exponentielle est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X_1 \leq e^x)$.

Si $x \leq 0$, on a $0 < e^x \leq 1$ et on obtient $F(x) = e^x$.

Si $x > 0$, on a $e^x > 1$ et, comme $X_1(\Omega)]0, 1]$, l'événement $(X_1 \leq x)$ est certain ce qui donne $F(x) = 1$

En résumé :

$$F(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b) Pour trouver une densité f de Y_1 (et donc de Y_2), on dérive F sauf en 0, et en posant $f(0) = 1$, on obtient :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4) a) On sait que X_1 et X_2 prennent leurs valeurs dans $]0, 1]$ donc $Y_1 = \ln(X_1)$ et $Y_2 = \ln(X_2)$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}_-$, ce qui fait que $Y_1 + Y_2$ aussi, donc on peut déjà écrire :

$$\forall x > 0, h(x) = 0$$

De plus, comme X_1 et X_2 sont indépendantes, le lemme des coalitions garantit que Y_1 et Y_2 le sont aussi et comme la densité trouvée plus haut est bornée (car pour $x \leq 0$, on a $0 < e^x \leq 1$), une densité h de $Y_1 + Y_2$ est donnée par :

$$\forall x \leq 0, h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t) dt$$

La fonction intégrée n'est pas la fonction nulle là où $f(t) \neq 0$ et $f(x-t) \neq 0$, c'est-à-dire là où $t \leq 0$ et $x-t \leq 0$ donc en résumé pour $t \in [x, 0]$.

Il reste donc : $\forall x \leq 0, h(x) = \int_x^0 f(t) \times f(x-t) dt = \int_x^0 e^t \times e^{x-t} dt = \int_x^0 e^x dt = -xe^x$

Bilan :

$$h(x) = \begin{cases} -xe^x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b) La fonction de répartition H de $Y_1 + Y_2$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \int_{-\infty}^x h(t) dt$$

- Si $x \leq 0$, on obtient $H(x) = \int_{-\infty}^x -te^t dt$.

On fait une intégration par parties en posant $u'(t) = e^t$ et $v(t) = -t$. On peut choisir $u(t) = e^t$ et on a $v'(t) = -1$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc sur tout intervalle du genre $]-\infty, x]$, ce qui rend l'intégration par parties licite.

On passe par l'intégrale partielle $\int_A^x -te^t dt$ avec $A \leq x$ et on trouve :

$$\forall A \leq x, \int_A^x -te^t dt = \left[-te^t \right]_A^x + \int_A^x e^t dt = -xe^x + Ae^A + e^x - e^A$$

Comme $\lim_{A \rightarrow -\infty} e^A = 0$ et comme $\lim_{A \rightarrow -\infty} Ae^A = 0$ (par croissances comparées), on trouve, après passage à la limite :

$$\forall x \leq 0, H(x) = e^x(1-x)$$

- Si $x > 0$, on obtient $H(x) = \int_{-\infty}^0 -te^t dt + \int_0^x 0 dt = \int_{-\infty}^0 -te^t dt = 1$ (d'après le calcul précédent avec $x = 0$).

En résumé :

$$H(x) = \begin{cases} e^x(1-x) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

c) Comme X_1 et X_2 prennent leurs valeurs dans $]0,1]$ et comme $Z = X_1X_2$, il en va de même pour Z donc on est sûr que $F_Z(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F_Z(x) = 1$ si $x > 1$.

Sinon, pour $x \in]0,1]$, on a $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(X_1X_2 \leq x)$, et comme la fonction logarithme est une bijection croissante de $]0,1]$ sur $\mathbb{R}_-$, on obtient :

$$\forall x \in]0,1], F_Z(x) = P(\ln(X_1) + \ln(X_2) \leq \ln(x)) = P(Y_1 + Y_2 \leq \ln(x)) = H(\ln(x))$$

Comme $\ln(x) \leq 0$, on trouve en remplaçant : $\forall x \in]0,1], F_Z(x) = x(1 - \ln(x))$.

Conclusion :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x(1 - \ln(x)) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En dérivant sauf en 0 et en 1, on obtient :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ -\ln(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On complète f_Z en posant par exemple $f_Z(0) = 0$ et $f_Z(1) = 0$, ce qui donne :

$$f_Z(x) = \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5) a) L'intégrale $\int_0^1 x^n \ln(x) dx$ est impropre en 0 donc on travaille avec l'intégrale $\int_a^1 x^n \ln(x) dx$ avec $0 < a < 1$, sur laquelle on procède par intégration par parties en posant $u'(x) = x^n$ et $v(x) = \ln(x)$.

On peut alors choisir $u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et on a $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Puisque $a > 0$, les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur l'intervalle $[a, 1]$ donc l'intégration par parties est licite et on obtient :

$$\int_a^1 x^n \ln(x) dx = \frac{1}{n+1} [x^{n+1} \ln(x)]_a^1 - \frac{1}{n+1} \int_a^1 x^{n+1} \times \frac{1}{x} dx$$

En simplifiant dans la deuxième intégrale et après calcul du crochet, il reste :

$$\int_a^1 x^n \ln(x) dx = -\frac{1}{n+1} a^{n+1} \ln(a) - \frac{1}{n+1} \int_a^1 x^n dx = -\frac{1}{n+1} a^{n+1} \ln(a) - \frac{1}{n+1} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^1$$

Le calcul du crochet restant donne :

$$\int_a^1 x^n \ln(x) dx = -\frac{1}{n+1} a^{n+1} \ln(a) - \frac{1}{(n+1)^2} (1 - a^{n+1})$$

Comme $0 < a < 1$, on a $\lim_{a \rightarrow 0^+} a^{n+1} = 0$, et par croissances comparées,

$\lim_{a \rightarrow 0^+} a^{n+1} \ln(a) = 0$, d'où, après passage à la limite :

$$\int_0^1 x^n \ln(x) dx = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

b) Avec $n = 1$, on a $\int_0^1 x \ln(x) dx = -\frac{1}{4}$, d'où $\int_0^1 x f_Z(x) dx = -\int_0^1 x \ln(x) dx = \frac{1}{4}$

et on retrouve bien $E(Z) = \frac{1}{4}$.

Avec $n = 2$, on a $\int_0^1 x^2 \ln(x) dx = -\frac{1}{9}$, d'où $\int_0^1 x^2 f_Z(x) dx = -\int_0^1 x^2 \ln(x) dx = \frac{1}{9}$

et on retrouve bien $E(Z^2) = \frac{1}{9}$, ce qui permet bien sûr de récupérer la même variance que celle trouvée à la question 2), à savoir :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}$$

Exercice 2.....

1) → On va montrer par récurrence que chaque terme des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien défini et positif.

- Pour $n = 1$, u_1 et v_1 sont bien définis et positifs ($u_1 = 0$, $v_1 = 2$).
- Soit $n \geq 1$ tel que u_n et v_n soient bien définis et positifs.

On a alors $\frac{1+u_n}{2} \geq \frac{1}{2} \geq 0$ donc u_{n+1} est bien défini, et en prenant la racine carrée

(fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$) : $u_{n+1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ (on a, a fortiori, $u_{n+1} \geq 0$).

Comme $u_{n+1} > 0$, v_{n+1} est bien défini (quotient à dénominateur non nul) et $v_{n+1} \geq 0$ (quotient de deux réels positifs).

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n et v_n sont bien définis et positifs.

→ Bilan : les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont bien définies.

2) À chaque passage de boucle, on va calculer u_k et v_k , ce qui fait qu'à la fin, on aura bien v_n . Il faut noter qu'au $k^{\text{ième}}$ passage dans la boucle, après l'instruction « $u = \dots$ », la valeur contenue dans u est u_k donc pas besoin d'instruction supplémentaire pour calculer $v_k = \frac{v_{k-1}}{u_k}$.

On peut donc proposer ceci :

```
def suite_v(n):
    u=0
    v=2
    for k in range(2,n+1):
        u=np.sqrt((1+u)/2)
        v=v/u
    return v
```

3) a) On va prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0,1]$.

- Pour $n = 1$, on a $u_1 = 0 \in [0,1]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n \in [0,1]$.

On a alors $\frac{1}{2} \leq \frac{1+u_n}{2} \leq 1$, d'où $\frac{1+u_n}{2} \in [0,1]$, et par croissance de la fonction

racine carrée sur $[0,1]$: $\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \in [0,1]$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in [0,1]$.

- En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0,1]$.

La fonction cosinus est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$ donc il existe un unique réel α_n de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $u_n = \cos(\alpha_n)$.

b) On a alors, grâce à la formule $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$:

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha_n)}{2}} = \sqrt{\frac{2\cos^2(\alpha_n/2)}{2}} = \sqrt{\cos^2(\alpha_n/2)} = |\cos(\alpha_n/2)|$$

Comme $\alpha_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\frac{\alpha_n}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ donc $\cos(\alpha_n/2) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$ et on peut conclure que $u_{n+1} = \cos\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)$, et comme $u_{n+1} = \cos(\alpha_{n+1})$, on a par unicité :

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2}$$

La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\pi}{2^n}$$

c) Encore une petite récurrence !

- Pour $n = 1$, on a $v_1 = 2 = 2^1 \sin\left(\frac{\pi}{2^1}\right)$, ce qui initialise la proposition.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

On a alors, grâce à la formule $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$:

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{u_{n+1}} = \frac{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{2^n \times 2 \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

Ceci prouve l'hérédité et on peut conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2^n} = 0$, on a $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2^n}$ donc $v_n \underset{+\infty}{\sim} 2^n \times \frac{\pi}{2^n}$, d'où l'on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \pi$$

4) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2^n} = 0$, on peut utiliser le développement limité de $\sin(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0, ce qui donne :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\pi}{2^n} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^5 + o\left(\left(\frac{1}{2^n}\right)^5\right)$$

En multipliant par 2^n et en arrangeant un peu, on obtient :

$$v_n = \pi - \frac{\pi^3}{6} \times \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 + \frac{\pi^5}{120} \times \left(\frac{1}{2^n}\right)^4 + o\left(\left(\frac{1}{2^n}\right)^4\right)$$

Comme $(2^n)^2 = 4^n$ et $(2^n)^4 = (4^n)^2 = 4^{2n}$, on trouve :

$$v_n = \pi - \frac{\pi^3}{6 \times 4^n} + \frac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

On a donc : $a = \pi$, $b = -\frac{\pi^3}{6}$ et $c = \frac{\pi^5}{120}$.

5) a) On peut proposer :

```
def suite_w(n):
    w = (4 * suite_v(n+1) - suite_v(n)) / 3
    return w
```

b) Comme $w_n = \frac{4v_{n+1} - v_n}{3}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \pi$, on a tout de suite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \pi$$

c) On a déjà $v_n = \pi - \frac{\pi^3}{6 \times 4^n} + \frac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$ donc il reste à chercher le développement limité de w_n .

En remplaçant n par $n+1$, on trouve :

$$v_{n+1} = \pi - \frac{\pi^3}{6 \times 4^{n+1}} + \frac{\pi^5}{120 \times 4^{2n+2}} + o\left(\frac{1}{4^{2n+2}}\right)$$

On a donc : $4v_{n+1} = 4\pi - \frac{\pi^3}{6 \times 4^n} + \frac{\pi^5}{120 \times 4^{2n+1}} + o\left(\frac{1}{4^{2n+1}}\right)$.

Comme $o\left(\frac{1}{4^{2n+1}}\right) = \frac{1}{4} \times o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right) = o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$, on en déduit :

$$4v_{n+1} = 4\pi - \frac{\pi^3}{6 \times 4^n} + \frac{\pi^5}{480 \times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

On obtient alors : $4v_{n+1} - v_n = 3\pi - \frac{3\pi^3}{480 \times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$.

Finalement, en divisant par 3, il reste :

$$w_n = \pi - \frac{\pi^5}{480 \times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

On a maintenant $\frac{w_n - \pi}{v_n - \pi} = \frac{-\frac{\pi^5}{480 \times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)}{-\frac{\pi^3}{6 \times 4^n} + \frac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)} \sim \frac{-\frac{\pi^5}{480 \times 4^{2n}}}{-\frac{\pi^3}{6 \times 4^n}}$, soit :

$$\frac{w_n - \pi}{v_n - \pi} \sim \frac{\pi^2}{80 \times 4^n}$$

d) L'équivalent précédent montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_n - \pi}{v_n - \pi} = 0$ et on en déduit que

$w_n - \pi = o(v_n - \pi)$, ce qui prouve que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge plus rapidement vers π que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

6) a) On a $x_n = a + bq^n + cr^n + o(r^n)$ donc $x_{n+1} = a + bq^{n+1} + cr^{n+1} + o(r^{n+1})$, mais comme on veut se « débarrasser » des termes en q^n , on forme la quantité $x_{n+1} - qx_n$, et comme $o(r^{n+1}) = o(r^n)$, on obtient :

$$x_{n+1} - qx_n = a(1-q) + cr \times r^n - cq \times r^n + o(r^n)$$

En simplifiant, on obtient :

$$x_{n+1} - qx_n = a(1-q) + c(r-q)r^n + o(r^n)$$

En divisant par $1-q \neq 0$, on a :

$$\frac{x_{n+1} - qx_n}{1-q} = a + \frac{c(r-q)}{1-q} r^n + o(r^n)$$

Il reste à poser $y_n = \frac{x_{n+1} - qx_n}{1-q}$ et $d = \frac{c(r-q)}{1-q}$ pour obtenir :

$$y_n = a + d r^n + o(r^n)$$

b) Comme $q > r \geq 0$, on a $0 \leq \frac{r}{q} < 1$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^n}{q^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{r}{q}\right)^n = 0$.

On a ainsi $r^n = o(q^n)$, et comme $x_n = a + bq^n + cr^n + o(r^n)$, on peut tronquer ce développement, ce qui donne :

$$x_n = a + bq^n + o(q^n)$$

c) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - a}{x_n - a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d r^n + o(r^n)}{b q^n + o(q^n)}$ donc, en prenant un équivalent au numérateur et au dénominateur ($b \neq 0$ et $d \neq 0$), $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - a}{x_n - a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d r^n}{b q^n} = 0$, et ainsi, comme pour la question 5d), la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers a plus rapidement que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 3.....

Partie 1

1) a) D'après la règle de déplacement du mobile, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$X_k(\Omega) = \llbracket 0, k \rrbracket$$

Par équiprobabilité (comme précisé dans l'énoncé), pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, k \rrbracket$.

Remarque. Ce n'est pas demandé mais ça reste valable pour $k = 0$.

b) La variable aléatoire X_k est finie donc elle possède une espérance qui est

$$\text{donnée par : } E(X_k) = \sum_{i=0}^k i P(X_k = i) = \sum_{i=0}^k i \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^k i = \frac{1}{k+1} \times \frac{k(k+1)}{2}.$$

En simplifiant par $k+1$, on obtient :

$$E(X_k) = \frac{k}{2}$$

Pour la même raison, X_k possède un moment d'ordre 2 donné par :

$$E(X_k^2) = \sum_{i=0}^k i^2 P(X_k = i) = \sum_{i=0}^k i^2 \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{1}{k+1} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

$$\text{En simplifiant par } k+1, \text{ on obtient : } E(X_k^2) = \frac{k(2k+1)}{6}.$$

Avec le théorème de Koenig-Huygens, on a :

$$V(X_k) = E(X_k^2) - E(X_k)^2 = \frac{k(2k+1)}{6} - \frac{k^2}{4} = \frac{2k(2k+1) - 3k^2}{12}$$

Après simplification et factorisation, on trouve :

$$V(X_k) = \frac{k(k+2)}{12}$$

Remarque. On pouvait considérer la variable $X'_k = X_k + 1$, vérifier rapidement que X'_k suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, k+1 \rrbracket$ dont on connaît l'espérance et la variance.

On a en effet d'après le cours : $E(X'_k) = \frac{k+2}{2}$ et $V(X'_k) = \frac{(k+1)^2 - 1}{2} = \frac{k(k+2)}{2}$.

Pour finir, on trouve $E(X_k)$ et $V(X_k)$ avec $E(X_k) = E(X'_k) - 1 = \frac{k}{2}$ et

$$V(X_k) = V(X'_k - 1) = V(X'_k) = \frac{k(k+2)}{2}.$$

2) a) On a bien sûr :

$$(Y = 1) = (X_1 = 0)$$

Sinon, si $n \geq 2$, le mobile revient au point d'abscisse 0 pour la première fois à l'instant n si, et seulement si, il ne s'y trouve pas après chacun des $n-1$ premiers déplacements puis s'il se déplace sur l'origine lors de son $n^{\text{ième}}$ déplacement.

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, (Y = n) = (X_1 \neq 0) \cap (X_2 \neq 0) \cap \dots \cap (X_{n-1} \neq 0) \cap (X_n = 0)$$

b) On a $P(Y = 1) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$, puis, comme l'énoncé indique gentiment que les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes (c'est normal puisque la position du mobile à un instant quelconque ne dépend pas de sa position aux instants précédents), on a :

$$P(Y = n) = P(X_1 \neq 0)P(X_2 \neq 0) \dots P(X_{n-2} \neq 0)P(X_{n-1} \neq 0)P(X_n = 0)$$

Il ne reste qu'à remplacer en se souvenant que X_k suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, k \rrbracket$,

ce qui fait que $P(X_k \neq 0) = 1 - P(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$ et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, P(Y = n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1}$$

En simplifiant, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Ceci est valable pour $n = 1$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Pour finir, on a $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$ d'où l'on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

c) On a, pour tout N de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N P(Y=n) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} = 0$, on a bien, après passage à la limite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n) = 1$$

Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on a :

$$P(Y=0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n) = 1 - 1 = 0$$

d) Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$n P(Y=n) = \frac{1}{n+1}$$

On en déduit $n P(Y=n) \sim \frac{1}{n}$, et comme la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge

(série de Riemann de paramètre 1), le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs permet de conclure que Y n'a pas d'espérance.

Partie 2

3) Pour les deux lignes manquantes, on peut proposer :

```
U=rd.randint(n)
Z=rd.geometric(1-U/n)
```

4) a) La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(U_n = k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ s'écrit, pour tout i de $\mathbb{N}^*$:

$$P(Z_n = i) = \sum_{k=0}^{n-1} P(U_n = k) P_{(U_n=k)}(Z_n = i)$$

Comme la loi conditionnelle de Z_n sachant $(U_n = k)$ est la loi géométrique de paramètre $1 - \frac{k}{n}$, on a $P_{(U_n=k)}(Z_n = i) = \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$ et comme $P(U_n = k) = \frac{1}{n}$, on obtient :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, P(Z_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

En développant, on trouve :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, P(Z_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^i \right)$$

Finalement, en scindant la somme en deux, on a :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, P(Z_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i$$

b) On reconnaît deux sommes de Riemann attachées aux fonctions $x \mapsto x^{i-1}$ et $x \mapsto x^i$ qui sont bien continues sur $[0, 1]$ (la première l'est bien car $i \geq 1$) donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} = \int_0^1 x^{i-1} dx = \frac{1}{i} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i = \int_0^1 x^i dx = \frac{1}{i+1}$$

On trouve ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = i) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$, ce qui s'écrit aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = i) = \frac{1}{i(i+1)}$$

c) Ceci prouve que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y présentée dans la partie 1.

5) Le système complet d'événements $(U_n = k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ est fini donc il n'y a pas de problème de convergence de série, et comme de plus l'espérance conditionnelle $E(Z_n / [U_n = k])$ existe (elle vaut $\frac{1}{1 - \frac{k}{n}} = \frac{n}{n-k}$ en tant qu'espérance d'une

variable aléatoire dont la loi conditionnelle est la loi géométrique de paramètre $1 - \frac{k}{n}$), on peut écrire la formule de l'espérance totale, ce qui donne :

$$E(Z_n) = \sum_{k=0}^{n-1} E(Z_n / [U_n = k]) P(U_n = k)$$

En remplaçant $P(U_n = k)$ par $\frac{1}{n}$ et $E(Z_n / [U_n = k])$ par $\frac{n}{n-k}$, on trouve :

$$E(Z_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} \times \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k}$$

Le changement d'indice $i = n - k$ donne le résultat annoncé :

$$E(Z_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

6) a) On sait que, pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, et comme $k \geq 1 > 0$, on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

En intégrant ces fonctions continues, bornes dans l'ordre croissant, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$$

Ceci s'écrit aussi $\frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} 1 dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \int_k^{k+1} 1 dt$, et comme les intégrales de droite et de gauche valent 1, on a bien :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}}$$

Remarque. On pouvait aussi appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction logarithme népérien entre k et $k+1$.

b) En sommant l'inégalité précédente pour k allant de 1 à $n-1$ (on peut car $n \geq 2$), on trouve, après simplification de la somme du milieu (télescopage) :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n) - \ln(1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Le changement d'indice $i = k+1$ dans la première somme donne :

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Pour faire apparaître $E(Z_n)$, on complète les sommes précédentes :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - 1 \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$$

L'inégalité de gauche fournit $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \ln(n) + 1$, c'est-à-dire : $E(Z_n) \leq \ln(n) + 1$.

L'inégalité de droite fournit $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n) + \frac{1}{n}$, c'est-à-dire : $E(Z_n) \geq \ln(n) + \frac{1}{n}$.

Bilan :

$$\boxed{\forall n \geq 2, \ln(n) + \frac{1}{n} \leq E(Z_n) \leq \ln(n) + 1}$$

c) Comme $n \geq 2$, on peut diviser par $\ln(n) > 0$, ce qui fournit :

$$1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{E(Z_n)}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

On a sans problème d'indétermination, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \ln(n)} = 0$ donc,

par encadrement, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(Z_n)}{\ln(n)} = 1$ et on peut conclure :

$$E(Z_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Problème

Partie 1

1) a) Soit λ une valeur propre de A .

Il existe un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$.

On en déduit ${}^tXAX = \lambda {}^tXX$, et comme $X \neq 0$, en notant $\| \cdot \|$ la norme euclidienne

canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXX = \|X\|^2 > 0$ donc on peut écrire $\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$

b) Comme $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a ${}^tXAX \geq 0$, et avec $\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$, on trouve $\lambda \geq 0$.

2) a) A est une matrice symétrique donc, d'après le « théorème spectral » dans sa version matricielle, il existe une matrice orthogonale P telle que $A = PD^tP$, avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \lambda_2 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

b) D'après ce qui précède, pour tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXAX = {}^tXPD^tPX = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = {}^tYDY$, en ayant posé $Y = {}^tPX$.

c) En notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a ${}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ donc ${}^tYDY \geq 0$ puisque les

valeurs propres de A sont supposées positives. On en déduit que, pour tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXAX \geq 0$, et ainsi, A est bien élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

3) Finalement, on a montré que A est élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, ses valeurs propres sont positives.

Partie 2

4) a) Comme $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positifs leurs racines carrées sont bien définies et la matrice Δ est donc correctement définie.

b) Comme plus haut, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A donc, en notant

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \lambda_2 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ il existe une matrice orthogonale } P \text{ telle que } A = PD^tP.$$

• En posant $B = P\Delta^tP$, on a :

$$B^2 = (P\Delta^tP)(P\Delta^tP) = P\Delta(^tPP)\Delta^tP = P\Delta I_n \Delta^tP = P\Delta^2{}^tP$$

• Comme $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ (0) & & \ddots \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$, on a $\Delta^2 = D$, d'où $B^2 = PD^tP = A$.

• Comme ${}^t\Delta = \Delta$, on a ${}^tB = {}^t(P\Delta^tP) = {}^t(^tP){}^t\Delta^tP = P\Delta^tP = B$ donc B est symétrique, et pour finir, les valeurs propres de B sont $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ qui sont des réels positifs.

On peut conclure que $B = P\Delta^tP$ est une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

5) Avec $x = \mu_i$, on trouve $L_i(\mu_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p \frac{\mu_i - \mu_k}{\mu_i - \mu_k}$.

On a donc :

$$L_i(\mu_i) = 1$$

Avec $x = \mu_j$, on trouve $L_i(\mu_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^p \frac{\mu_j - \mu_k}{\mu_i - \mu_k}$ mais comme $j \neq i$, on est sûr que j

est une valeur prise par l'indice k du produit donc $L_i(\mu_j)$ contient un facteur nul

$\frac{\mu_j - \mu_j}{\mu_i - \mu_j}$, ce qui fait que :

$$\forall j \neq i, L_i(\mu_j) = 0$$

6) a) Par définition, on a $S = \sum_{i=1}^p \sqrt{\mu_i} L_i$ donc $S(\mu_k) = \sum_{i=1}^p \sqrt{\mu_i} L_i(\mu_k)$.

D'après la question précédente les $L_i(\mu_k)$ sont nuls si $k \neq i$ et il ne reste donc que le terme d'indice $i = k$, qui est bien présent dans la somme car $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, et on obtient : $S(\mu_k) = \sqrt{\mu_k} L_k(\mu_k)$. Comme $L_k(\mu_k) = 1$, on a finalement :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, S(\mu_k) = \sqrt{\mu_k}}$$

Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont parmi les réels $\mu_1, \dots, \mu_p$, donc on en déduit :

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, S(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}}$$

b) Montrons la relation demandée par récurrence.

- Elle est vraie pour $k = 0$ car on a $PD^0{}^tP = PI_n{}^tP = P^tP = I_n = A^0$.
- Considérons un entier naturel k fixé tel que $A^k = PD^k{}^tP$.

Comme $A^{k+1} = A^k \times A$, alors d'après l'hypothèse de récurrence et compte tenu du fait que $A = PD^tP$, on obtient $A^{k+1} = (PD^k{}^tP)(PD^tP) = PD^k(P^tP)D^tP$.

Finalement, comme ${}^tPP = I_n$, on a bien : $A^{k+1} = PD^{k+1}{}^tP$.

- On conclut par récurrence :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, A^k = PD^k{}^tP}$$

c) En écrivant le polynôme S sous forme développée, par exemple en posant

$S(x) = \sum_{i=1}^p s_k x^k$, on a $S(D) = \sum_{i=1}^p s_k D^k$ et on obtient :

$$PS(D){}^tP = P\left(\sum_{i=1}^p s_k D^k\right){}^tP = \sum_{i=1}^p s_k PD^k{}^tP = \sum_{i=1}^p s_k A^k$$

On reconnaît $S(A)$ dans le membre de droite donc on a bien montré :

$$\boxed{S(A) = PS(D){}^tP}$$

En reprenant l'écriture $S(D) = \sum_{i=1}^p s_k D^k$, et comme $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \lambda_2^k & \\ (0) & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$ alors :

$$S(D) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^p s_k \lambda_1^k & & (0) \\ & \sum_{k=0}^p s_k \lambda_2^k & \\ (0) & & \ddots \\ & & & \sum_{k=0}^p s_k \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(\lambda_1) & & (0) \\ & S(\lambda_2) & \\ (0) & & \ddots \\ & & & S(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Avec le résultat de la question 6a), on obtient $S(D) = \Delta$.

D'après la question 6c), on a $S(A) = PS(D)'P$ donc $S(A) = P\Delta'P$, ce qui donne :

$$B = S(A)$$

Partie 3

7) a) Avec l'hypothèse $C^2 = A$, on a $AC = C^2 \times C = C^3 = C \times C^2 = CA$.

b) On vient de voir que C et A commutent et on montre par récurrence que, pour tout entier naturel k , C et A^k commutent.

- Pour $k = 0$, $A^0 C = I_n C = C = C I_n = C A^0$.

- Si l'on suppose, pour un k fixé dans $\mathbb{N}$, que $CA^k = A^k C$ alors on peut écrire : $CA^{k+1} = CA^k \times A = A^k C \times A = A^k (CA) = A^k (AC) = (A^k A) C = A^{k+1} C$.

Conclusion :

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k C = CA^k$$

Comme $B = S(A) = \sum_{i=1}^p s_i A^i$, on en déduit :

$$BC = \left(\sum_{i=1}^p s_i A^i \right) C = \sum_{i=1}^p s_i A^i C = \sum_{i=1}^p s_i CA^i = C \sum_{i=1}^p s_i A^i = CB$$

Par conséquent, B et C commutent.

8) a) Comme B et C commutent et sont les matrices respectives de b et c dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors b et c commutent.

b) Comme $E_i = \text{Ker}(b - \sqrt{\mu_i} Id)$, alors, pour tout $x \in E_i$, on a $b(x) = \sqrt{\mu_i} x$.

Comme b et c commutent, alors $b(c(x)) = c(b(x)) = c(\sqrt{\mu_i} x) = \sqrt{\mu_i} c(x)$ donc

$b(c(x)) - \sqrt{\mu_i} c(x) = 0$, soit $(b - \sqrt{\mu_i} Id)(c(x)) = 0$, ce qui signifie que $c(x) \in E_i$.

En conclusion, E_i est stable par c .

c) L'endomorphisme c est symétrique donc pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a $\langle c(x), y \rangle = \langle x, c(y) \rangle$. Ceci est, a fortiori, valable pour tout couple $(x, y) \in E_i \times E_i$, et comme c coïncide avec c_i sur E_i , on obtient :

$$\forall (x, y) \in E_i \times E_i, \langle c_i(x), y \rangle = \langle x, c_i(y) \rangle$$

Ceci prouve que c_i est symétrique.

d) D'après ce qui précède, c_i est symétrique donc diagonalisable, ce qui justifie l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B}_i$ de E_i formée de vecteurs propres de c_i . Comme les vecteurs de E_i sont des vecteurs propres de b (par définition de E_i), alors $\mathcal{B}_i$ est naturellement une base orthonormale de E_i formée de vecteurs propres, à la fois de c_i et de b .

e) Comme b est symétrique, il est diagonalisable dans une base orthonormale donc $\mathbb{R}^n$ est somme directe (orthogonale) des sous-espaces propres de b .

On a donc $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

Par conséquent, on obtient une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E en concaténant les bases $\mathcal{B}_i$ des E_i . Cette base est constituée de vecteurs propres de b et de c d'après la question 8d), donc dans cette base, les matrices de b et c sont diagonales.

f) $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de b et c donc il existe une matrice Q orthogonale et deux matrices diagonales Δ et Δ' telles que $B = Q\Delta'Q$ et $C = Q\Delta Q$.

Comme $B^2 = A$ et $C^2 = A$, on obtient $Q\Delta^2'Q = Q\Delta'^2Q$, puis en multipliant chaque membre, à droite par Q et à gauche par Q' , on trouve $\Delta^2 = \Delta'^2$.

Les éléments diagonaux de Δ et Δ' sont positifs car ce sont les valeurs propres positives de B et C qui sont dans $S_n^+(\mathbb{R})$, donc on obtient $\Delta = \Delta'$ ce qui donne $C = Q\Delta'Q$ et on peut conclure :

$$\boxed{C = B}$$

Ceci montre l'unicité de la « racine carrée » d'une matrice symétrique positive.

Partie 4

9) • On considère une matrice symétrique A élément de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Comme dans

la question 1), si λ est une valeur propre de A , on a : $\lambda = \frac{{}'XAX}{{}'XX}$.

Dans cette expression, X est non nul (X est un vecteur propre) donc $'XX > 0$, et comme A appartient à $S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $'XAX > 0$, d'où $\lambda > 0$.

• Réciproquement, on suppose que les valeurs propres de A sont toutes strictement positives.

Avec les mêmes notations qu'à la question 2b), on aboutit pour tout vecteur X de

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ à : } {}'XAX = {}'YDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0.$$

De plus, on a l'équivalence ${}^tXAX = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = 0$, mais comme les valeurs propres de A sont toutes positives, on est face à une somme nulle de termes tous positifs donc on obtient :

$${}^tXAX = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i y_i^2 = 0$$

Cette fois, les valeurs propres de A sont strictement positives donc $\lambda_i \neq 0$ et on obtient : ${}^tXAX = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_i = 0 \Leftrightarrow Y = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

On a donc : ${}^tXAX = 0 \Leftrightarrow {}^tPX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Comme P est inversible, alors tP aussi et on a finalement :

$${}^tXAX = 0 \Leftrightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

On en déduit que, pour tout vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXAX > 0$.

Ainsi, la matrice symétrique A est bien élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

• Finalement, on a montré que A est élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, les valeurs propres de A sont strictement positives.

10) a) On a $N = M - I_n$ donc, par linéarité de la transposition, on en déduit ${}^tN = {}^tM - {}^tI_n = M - I_n$ (puisque M et I_n sont symétriques).

Par conséquent, N est symétrique.

b) • Si on considère un vecteur propre X quelconque de M associé à une valeur propre λ , on peut écrire $NX = (M - I_n)X = MX - X = \lambda X - X = (\lambda - 1)X$.

Comme X est non nul, ceci montre que $\lambda - 1$ est valeur propre de N qui est, par hypothèse, élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc on a $\lambda - 1 \geq 0$, d'où $\lambda \geq 1$.

On peut conclure :

$$\boxed{\text{Sp}(M) \subset [1, +\infty[}$$

• Aucune valeur propre de M n'est nulle donc M est inversible.

• ${}^t(I_n - M^{-1}) = {}^tI_n - {}^t(M^{-1}) = I_n - ({}^tM)^{-1} = I_n - M^{-1}$ (car M est symétrique) donc $I_n - M^{-1}$ est symétrique.

• Si on considère un vecteur propre X quelconque de $I_n - M^{-1}$ associé à une valeur propre λ , on a $(I_n - M^{-1})X = \lambda X$, soit $M^{-1}X = X - \lambda X = (1 - \lambda)X$ et en multipliant chaque membre à gauche par M , on obtient $X = (1 - \lambda)MX$.

Ici, on remarque que $\lambda \neq 1$ (sinon X serait nul) d'où : $MX = \frac{1}{1 - \lambda}X$.

Le vecteur X étant non nul, ceci montre que $\frac{1}{1-\lambda}$ est une valeur propre de M donc, comme $\text{Sp}(M) \subset [1, +\infty[$, on a $\frac{1}{1-\lambda} \geq 1$.

Cette inégalité équivaut à $\frac{1}{1-\lambda} - 1 \geq 0$, soit $\frac{\lambda}{1-\lambda} \geq 0$ et avec un tableau de signes, on obtient $0 \leq \lambda < 1$, ce qui garantit que $\lambda \geq 0$.
Finalement, $I_n - M^{-1}$ est positive.

11) a) Soit X un vecteur quelconque non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On peut écrire ${}^tX(S_2 - S_1)X = {}^tXS_2X - {}^tXS_1X$, ce qui donne :

$${}^tXS_2X = {}^tXS_1X + {}^tX(S_2 - S_1)X$$

Comme S_1 est définie positive et $S_2 - S_1$ est positive, on a ${}^tXS_1X > 0$ et ${}^tX(S_2 - S_1)X \geq 0$, ce qui assure que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}, {}^tXS_2X > 0$$

On a donc montré que S_2 est définie positive.

b) • Soit X un vecteur quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $S_1^{1/2}X = 0$.

En multipliant chaque membre à gauche par $S_1^{1/2}$, on en déduit $S_1X = 0$ et comme S_1 est définie positive donc inversible, le système $S_1X = 0$ est de Cramer et ainsi, la seule solution de $S_1^{1/2}X = 0$ est $X = 0$.

Par conséquent, $S_1^{1/2}$ est inversible.

• Par distributivité, on a :

$$S_1^{-1/2}(S_2 - S_1)S_1^{-1/2} = S_1^{-1/2}S_2S_1^{-1/2} - S_1^{-1/2}S_1S_1^{-1/2} = S_1^{-1/2}S_2S_1^{-1/2} - I_n$$

c) • On a ${}^tL = {}^t(S_1^{-1/2}S_2S_1^{-1/2}) = {}^t(S_1^{-1/2}){}^tS_2({}^tS_1^{-1/2}) = ({}^tS_1)^{-1/2}{}^tS_2({}^tS_1)^{-1/2}$, mais S_1 et S_2 sont symétriques donc ${}^tL = S_1^{-1/2}S_2S_1^{-1/2} = L$, ce qui fait que L est symétrique.

• Par linéarité de la transposition, comme à la question 10a), on a ${}^t(L - I_n) = {}^tL - {}^tI_n = L - I_n$ donc $L - I_n$ est symétrique.

• D'après la question 11b), on a $L - I_n = S_1^{-1/2}(S_2 - S_1)S_1^{-1/2}$.

On en déduit :

$${}^tX(L - I_n)X = {}^tXS_1^{-1/2}(S_2 - S_1)S_1^{-1/2}X$$

Comme S_1 est symétrique, on a ${}^tXS_1^{-1/2} = {}^tX({}^tS_1)^{-1/2} = {}^tX({}^tS_1^{-1/2}) = {}^t(S_1^{-1/2}X)$ d'où ${}^tX(L - I_n)X = {}^t(S_1^{-1/2}X)(S_2 - S_1)S_1^{-1/2}X$, et en posant $Y = S_1^{-1/2}X$, on obtient : ${}^tX(L - I_n)X = {}^tY(S_2 - S_1)Y$.

Cette quantité est positive car l'énoncé a supposé que $S_2 - S_1$ était positive donc on a ${}^tX(L - I_n)X \geq 0$, et ainsi $L - I_n$ est positive.

d) D'après le travail fait à la question 10b), on déduit que L est inversible et que $I_n - L^{-1}$ est positive.

e) • S_1 et S_2 sont définies positives donc S_1^{-1} et S_2^{-1} existent et ainsi, $S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1})S_1^{1/2}$ existe.

On a $S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1})S_1^{1/2} = S_1^{1/2}S_1^{-1}S_1^{1/2} - S_1^{1/2}S_2^{-1}S_1^{1/2} = I_n - S_1^{1/2}S_2^{-1}S_1^{1/2}$, mais $L = S_1^{-1/2}S_2S_1^{-1/2}$ donc $L^{-1} = S_1^{1/2}S_2^{-1}S_1^{1/2}$ et ainsi :

$$S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1})S_1^{1/2} = I_n - L^{-1}$$

Pour finir, d'après la question 11d), $S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1})S_1^{1/2}$ est positive.

• Comme $S_1^{1/2}(S_1^{-1} - S_2^{-1})S_1^{1/2} = I_n - L^{-1}$, on a :

$$S_1^{-1} - S_2^{-1} = S_1^{-1/2}(I_n - L^{-1})S_1^{-1/2}$$

Par conséquent, pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on obtient :

$${}^tX(S_1^{-1} - S_2^{-1})X = {}^tXS_1^{-1/2}(I_n - L^{-1})S_1^{-1/2}X$$

On pose $Y = S_1^{-1/2}X$, ce qui donne, comme vu plus haut, ${}^tY = {}^tXS_1^{-1/2}$ (car S_1 est symétrique), et on obtient : ${}^tX(S_1^{-1} - S_2^{-1})X = {}^tY(I_n - L^{-1})Y \geq 0$ car $I_n - L^{-1}$ est positive d'après la question 11d).

Conclusion : $S_1^{-1} - S_2^{-1}$ est positive.