

Informatique : programmation en langage Python

Révision des instructions sur les matrices : définition d'une matrice, matrices usuelles, opérations usuelles sur les matrices.

Chapitre 1. Révisions d'analyse (tout sauf formules de Taylor)

Seules les preuves indiquées doivent être connues.

Les énoncés doivent être sûs avec précision !!!

FORMULES PAR COEUR !!!

A. Fonctions usuelles

Fonctions puissances, $\ln$, $\exp$, $\cos$, $\sin$, $\tan$, Arctan , partie entière.

Exercice à savoir refaire

Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$. Interprétation graphique.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geq x + 1$. Interprétation graphique.

Exercice à savoir refaire

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x})$.

Montrer que g est constante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Vous préciserez les constantes.

B. Polynômes

Exercice à savoir refaire

Soit P un polynôme et Q le polynôme défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = x^2 P(x)$$

Calculer la dérivée n -ème du polynôme Q à l'aide de la formule de Leibniz.

C. Théorèmes classiques

Tous les théorèmes classiques et les définitions sont à connaître !!!

Théorème d'encadrement, théorème de limite monotone pour les fonctions.

Théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection.

Nombre dérivé. Dérivée d'une bijection réciproque.

Savoir dériver une fonction composée.

Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, inégalité des accroissements finis.

Théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Convexité : définition, lien avec la dérivée seconde. Propriété vis à vis des tangentes, des cordes. Inégalité de Jensen à connaître (+ preuve par récurrence à comprendre, non exigible en colle mais utile pour les sujets type parisiennes).

Exercice à savoir refaire

Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Equivalents classiques, négligeabilité. Révisions autonomes sur les suites (AG, SRL2...)

D. Dérivées n -èmes

Savoir retrouver rapidement les dérivées successives des fonctions $x \mapsto x^n$, des fonctions : inverse, $\ln$, $\exp$, $\cos$, $\sin$ et savoir démontrer ces formules par une récurrence (proprement rédigée). Formule de Leibniz.

E. Intégrales

Intégrales sur un segment uniquement. Savoir calculer une intégrale "simple" en primitivant directement !!

Tous les théorèmes classiques sur les intégrales (linéarité, Chasles...).

Les deux grandes techniques : intégration par parties, changement de variables.

Exercice à savoir refaire

Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin(x)$.

Sommes de Riemann : connaître le cours par coeur. Savoir reconnaître une somme de Riemann (avec $a = 0$, $b = 1$ le plus souvent).

F. Séries

Définitions. Reste d'une série convergente.

Exercice à savoir refaire

Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)}$ converge et calculer sa somme.

Séries de référence : séries de Riemann, séries géométriques et dérivées, série exponentielle.

Critères de convergence d'une série à termes positifs (équivalence, majoration, négligeabilité).

Convergence absolue.