

Corrigé des Exercices - Rappels d'analyse

Exercice 1

Sur la fonction Arctan : quelques classiques

1. La fonction Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{puis} \quad \text{Arctan}''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Par conséquent, Arctan'' s'annule et change de signe en 0.

Bilan : $\boxed{\text{Arctan admet un point d'inflexion en } O(0,0)}$

2. D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 :

$$\text{Arctan}(x) = \text{Arctan}(0) + \text{Arctan}'(0) \cdot x + o_{x \rightarrow 0}(x) = x + o(x)$$

Donc $\boxed{\text{Arctan}(x) \sim_{x \rightarrow 0} x}$

Autre méthode :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0)}{x - 0} = \text{Arctan}'(0) = 1$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{x} = 1$, ce qui prouve le résultat.

3. Pour tout réel x , $\text{Arctan}(x) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Par conséquent, comme Arctan est la bijection réciproque de la fonction tan restreinte à $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$.
On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\text{Arctan}(x))}{\cos(\text{Arctan}(x))} = x &\Rightarrow \frac{\sin^2(\text{Arctan}(x))}{\cos^2(\text{Arctan}(x))} = x^2 \\ &\Rightarrow \frac{1 - \cos^2(\text{Arctan}(x))}{\cos^2(\text{Arctan}(x))} = x^2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{\cos^2(\text{Arctan}(x))} = 1 + x^2 \Rightarrow \cos^2(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+x^2} \\ &\Rightarrow |\cos(\text{Arctan}(x))| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

De plus $\text{Arctan}(x) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos(\text{Arctan}(x)) > 0$.

Bilan : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\exp(2x^2) - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- La fonction $x \mapsto \exp(2x^2) - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ mais s'annule en 0, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
- Comme $\exp(u) - 1 \sim_{u \rightarrow 0} u$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 = 0$, on a $\exp(2x^2) - 1 \sim_{x \rightarrow 0} 2x^2$, donc $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} 2x$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Par conséquent f est continue en 0.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{4x \exp(2x^2) \cdot x - (\exp(2x^2) - 1)}{x^2} = \frac{(4x^2 - 1) \cdot \exp(2x^2) + 1}{x^2}$$

De plus, le DL en 0 à l'ordre 1 de $\exp(u)$ est $\exp(u) = u + o(u)$ d'où

$$f'(x) = \frac{(4x^2 - 1) \cdot (1 + 2x^2 + o(x^2)) + 1}{x^2} = \frac{4x^2 - 1 - 2x^2 + o(x^2) + 1}{x^2} = 2 + o(1)$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 2$.

- Ainsi : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, continue en 0, avec $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 2$.

D'après le théorème de prolongement de la dérivée, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = 2}$

Exercice 3

Calcul intégral

- a. La fonction $t \mapsto \frac{t}{t^2+1}$ est continue sur $[0,1]$, donc $\int_0^1 \frac{t}{t^2+1} dt$ est bien définie. On montre de même l'existence de toutes les autres intégrales.

$$\int_0^1 \frac{t}{t^2+1} dt = \left[\frac{1}{2} \ln(t^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2)$$

- b.

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}$$

- c.

$$\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1} dt = \int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \int_0^1 1 dt - \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

- d.

$$\int_0^1 t\sqrt{t^2+1} dt = \int_0^1 t \cdot (t^2+1)^{1/2} dt = \left[\frac{1}{3} (t^2+1)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} (2^{3/2} - 1) = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

- e. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_4^{e+3} \frac{1}{(3-x)^n} dx = \int_4^{e+3} (3-x)^{-n} dx$$

Si $n = 1$,

$$I_1 = \int_4^{e+3} (3-x)^{-1} dx = [-\ln(|3-x|)]_4^{e+3} = -\ln(e) + \ln(1) = -\ln(e)$$

Si $n \neq 1$,

$$I_n = \left[-\frac{(3-x)^{-n+1}}{-n+1} \right]_4^{e+3} = -\frac{(-e)^{-n+1}}{-n+1} + \frac{(-1)^{-n+1}}{-n+1}$$

- f.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = [-\ln(|\cos(x)|)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln(1) = \ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

- g.

$$\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x} dx = \left[\frac{1}{n+1} \ln^{n+1}(x) \right]_1^e = \frac{1}{n+1}$$

- h.

$$\int_{e^{-1}}^{e^{-2}} \frac{1}{t \ln(t)} dt = [\ln(|\ln(t)|)]_{e^{-1}}^{e^{-2}} = \ln(|\ln(e^{-2})|) - \ln(|\ln(e^{-1})|) = \ln(2)$$

- i.

$$\int_0^{2\sqrt{3}} x\sqrt{1+3x^2} dx = \left[\frac{1}{9} (1+3x^2)^{3/2} \right]_0^{2\sqrt{3}} = \frac{1}{9} (25^{3/2} - 1)$$

Exercice 4

Intégrations par parties

- La fonction $x \mapsto x^2 \sin(x)$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par produit, donc l'intégrale I est bien définie. On montre de même que les deux autres intégrales sont bien définies.

Posons

$$\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on peut donc intégrer par parties :

$$I = [-x^2 \cdot \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(x) dx$$

Posons ensuite

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \cos(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \sin(x) \end{cases}$$

Ces fonctions u et v étant de nouveau de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, par IPP

$$I = 2.[x \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = \pi - 2.[-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$$

Bilan : $I = \pi - 2$

• Posons

$$\begin{cases} u(t) = \ln^2(t) \\ v'(t) = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(t) = 2 \ln(t). \frac{1}{t} \\ v(t) = t^2/2 \end{cases}$$

Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$, on peut intégrer par parties :

$$J = [\frac{t^2}{2} \cdot \ln^2(t)]_1^e - \int_1^e t \cdot \ln(t) dt = \frac{e^2}{2} - \int_1^e t \cdot \ln(t) dt$$

et on doit à nouveau intégrer par parties pour calculer la seconde intégrale. Posons

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = t^2/2 \end{cases}$$

avec encore deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$.

$$\begin{aligned} J &= \frac{e^2}{2} - ([\frac{t^2}{2} \ln(t)]_1^e - \int_1^e \frac{t}{2} dt) \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} [\frac{t^2}{2}]_1^e \\ &= \frac{1}{2} (\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{e^2 - 1}{4} \end{aligned}$$

Bilan : $J = \frac{e^2 - 1}{4}$

• Posons

$$\begin{cases} u(x) = \cos(\ln(x)) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = -\sin(\ln(x)). \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; e^\pi]$. Par IPP

$$\begin{aligned} K &= [x \cos(\ln(x))]_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x)) dx \\ &= -e^\pi - 1 + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x)) dx \end{aligned}$$

et on procède à une seconde IPP, en posant :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(\ln(x)) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = \cos(\ln(x)). \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

avec encore des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned} K &= -e^{-\pi} - 1 + [x \sin(\ln(x))]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x)) dx \\ &= -e^\pi - 1 - K \end{aligned}$$

et on obtient ainsi une équation en K !!

D'où $2K = -(e^\pi + 1)$ puis

Bilan : $K = -\frac{e^\pi + 1}{2}$ Retenir : s'il n'y a pas de produit dans l'intégrale, on peut essayer de poser $v'(x) = 1...$

Exercice 5

Calcul de limite

1. Pour tout $t \in]0; +\infty[$,

$$t^2 + 1 \geq t^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \leq \frac{1}{t}$$

De plus, $t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1$, d'où

$$t^2 + 1 \leq (t + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{t^2 + 1} \leq \sqrt{(t + 1)^2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \geq \frac{1}{t + 1}$$

Bilan : $\forall t \in]0; +\infty[, \frac{1}{t + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \leq \frac{1}{t}$

2. Soit $x \in]0; +\infty[$. Alors $x < 2x$. Par croissance de l'intégrale (bornes dans le bon sens), les fonctions en question étant bien continues sur $[x, 2x]$,

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{1}{t + 1} dt &\leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dx \\ \Rightarrow [\ln(t + 1)]_x^{2x} &\leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \leq [\ln(t)]_x^{2x} \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{2x + 1}{x + 1}\right) &\leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \leq \ln(2) \text{ après simplifications} \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x + 1} = 2$, et par continuité de la fonction $\ln$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x + 1}{x + 1}\right) = \ln(2)$.
Finalement, par le théorème des gendarmes,

Bilan : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \right) = \ln(2)$

Exercice 6

Fonctions qui dépendent d'une intégrale

1. Fonction des bornes d'une intégrale

(a) Notons $g : t \mapsto e^{t^2}$. g est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_x^{2x} g(t) dt$ est bien définie. Notons G une primitive de g sur $\mathbb{R}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = G(2x) - G(x)$.

Comme G est dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \rightarrow G(2x)$ l'est aussi. Ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\ &= 2g(2x) - g(x) \\ &= 2e^{4x^2} - e^{x^2} \end{aligned}$$

(b) $\forall x \geq 0$, $e^{t^2} \geq 1$ donc $F(x) \geq \int_x^{2x} 1 dt$ (croissance de l'intégrale, bornes dans le bon sens).

$$\begin{aligned} F(x) &\geq 2x - x \\ F(x) &\geq x. \end{aligned}$$

Par entraînement $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{t^2} dt$$

(2) Posons $u = -t$

(2) $t \mapsto -t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

(3) Bornes $\begin{cases} -2x \\ -x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x \\ x \end{cases}$

- (4) $du = -dt$
 (5) $e^{t^2} dt = e^{(-u)^2} (-du) = -e^{u^2} du$
 (6) $u \mapsto e^{u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par changement de variables,

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{t^2} dt = - \int_x^{2x} e^{u^2} du = -F(x)$$

donc la fonction F est impaire.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x)) = -\infty$.

2. Intégrale à paramètre

On note $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $F(x) = \int_0^1 e^{xt^2} dt$

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel fixé. $t \mapsto e^{xt^2}$ est continue sur $[0; 1]$, donc l'intégrale $F(x) = \int_0^1 e^{xt^2} dt$ est définie. F est donc définie sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $x \leq y$.

Alors $\forall t \in [0, 1]$, $xt^2 \leq yt^2$

$\Rightarrow e^{xt^2} \leq e^{yt^2}$ (croissance de la fonction exp)

$\rightarrow \int_0^1 e^{xt^2} dt \leq \int_0^1 e^{yt^2} dt$ (bomes bon sens)

$\Rightarrow F(x) \leq F(y)$

Bilan : F est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

- (b) $\forall t \in [\frac{1}{2}; 1]$, $t^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow e^{xt^2} \geq e^{x/4}$

$$F(x) = \int_0^1 e^{xt^2} dt = \int_0^{1/2} e^{xt^2} dt + \int_{1/2}^1 e^{xt^2} dt \quad (\text{Chasles})$$

Or $\int_0^{1/2} e^{xt^2} dt \geq 0$ et $\int_{1/2}^1 e^{xt^2} dt \geq \int_{1/2}^1 e^{x/4} dt = \frac{1}{2} e^{x/4}$. D'où $F(x) \geq \frac{1}{2} e^{x/4}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} e^{x/4} = +\infty$ par entraînement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

Exercice 7

Le lemme de Lebesgue

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a, b]$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x > 0$.

$$\left| \frac{\sin(\lambda x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\lambda x)}{x} = 0$

2. Posons

$$\begin{cases} u(t) = f(t) \\ v'(t) = \cos(xt) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(t) = f'(t) \\ v(t) = \frac{\sin(xt)}{x} \end{cases}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$. Par IPP,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \cos(xt) dt &= \left[f(t) \cdot \frac{\sin(xt)}{x} \right]_a^b - \frac{1}{x} \int_a^b f'(t) \sin(xt) dt \\ &= f(b) \cdot \frac{\sin(xb)}{x} - f(a) \cdot \frac{\sin(xa)}{x} - \frac{1}{x} \int_a^b f'(t) \sin(xt) dt \end{aligned}$$

D'après le 1.,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(xb)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(xa)}{x} = 0$$

De plus, $\forall x > 0$,

$$\left| \frac{1}{x} \int_a^b f'(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_a^b |f'(t) \sin(xt)| dt$$

(inégalité triangulaire pour les intégrales, $a < b$)

$$\leq \frac{1}{x} \int_a^b |f'(t)| \cdot |\sin(xt)| dt$$

$$\leq \frac{1}{x} \int_a^b |f'(t)| dt \text{ car } |\sin(xt)| \leq 1$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_a^b |f'(t)| dt = 0$ (l'intégrale est une constante ici)

donc par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_a^b f'(t) \cdot \sin(xt) dt = 0$.

Finalement, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(xt) dt = 0$

Remarque : ce résultat s'interprète bien graphiquement : cf illustration Python.

Exercice 8

Fonction dépendant d'une intégrale

Soit $f : x \rightarrow f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln(t)}{t^2 + 1} dt$.

On souhaite montrer que f est une application constante.

1. Soit $x \in]0; +\infty[$. La fonction $g : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2 + 1}$ est continue sur $]0; +\infty[$. Par conséquent, comme $]x, \frac{1}{x}[\subset]0; +\infty[$, $f(x) = \int_{1/x}^x \frac{\ln(t)}{t^2 + 1} dt$ existe bien.

Donc f est bien définie sur $]0; +\infty[$

2. **Méthode 1 :** Notons G une primitive de g sur $]0; +\infty[$.

Alors $\forall x > 0$,

$$f(x) = G(x) - G(1/x)$$

Etant une primitive, G est dérivable sur $]0; +\infty[$.

De plus $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et à valeurs dans $]0; +\infty[$. Par composition, puis différence, f est dérivable sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= G'(x) - \left(-\frac{1}{x^2} \right) G' \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= g(x) + \frac{1}{x^2} g \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2} \times \frac{\ln \left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x^2} + 1} \\ &= \frac{\ln(x)}{x^2 + y} - \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} \quad \text{car } \ln \left(\frac{1}{x} \right) = -\ln(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc f est constante sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x > 0, \quad f(x) = f(1) = \int_1^1 \frac{\ln(t)}{t^2 + 1} dt = 0$$

3. **Méthode 2 :**

(1) Posons $u = \frac{1}{t}$

(2) $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

(3) Bomes $\begin{cases} t = x \\ t = \frac{1}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ u = x \end{cases}$

(4) $dt = -\frac{1}{u^2} du$

(5) $\frac{\ln(t)}{t^2 + 1} dt = \frac{\ln(\frac{1}{u})}{\frac{1}{u^2} + 1} \times \left(-\frac{1}{u^2} du \right) = \frac{\ln(u)}{u^2 + 1} du$

(6) $u \mapsto \frac{\ln(u)}{u^2 + 1}$ est continue sur $]0; +\infty[$.

Par CDV,

$$f(x) = \int_x^{1/x} \frac{\ln(u)}{u^2 + 1} du = -f(x)$$

d'où $2f(x) = 0$ et $f(x) = 0$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) = 0$

4. En prenant $x = \frac{1}{3}$, on a donc $\int_3^{1/3} \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt = 0$.

Exercice 9

Petit exercice - produit de convolution : cf cours de probas plus tard !

Soit f et g continues sur $\mathbb{R}$. On définit l'application $f \star g$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \star g(x) = \int_0^x f(t).g(x-t)dt$$

1. *Etude d'un cas particulier* : déterminer $f \star g$ lorsque $f = g = \exp$.

On suppose que $f = g = \exp$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \star g(x) = \int_0^x e^t \cdot e^{x-t} dt = \int_0^x e^x dt = xe^x$$

2. Prouvons que $f \star g = g \star f$.

$$g \star f(x) = \int_0^x g(t)f(x-t)dt = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

(1) Posons $u = x - t$

(2) $t \mapsto x - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$(3) \text{ Bornes } \begin{cases} t = x \\ t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = x \end{cases}$$

$$(4) du = -dt$$

$$(5) f(x-t)g(t)dt = f(u)g(x-u)(-du)$$

(6) $u \mapsto -f(u)g(x-u)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par CDV, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g \star f(x) = - \int_x^0 f(u)g(x-u)du = \int_0^x f(u)g(x-u)du = f \star g(x)$$

Donc $g \star f = f \star g$

3. Soit f et g paires. Déterminons la parité de $f \star g$.

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f \star g(-x) = \int_0^{-x} f(t)g(-x-t)dt$$

(2) Posons $u = -t$

(2) $t \rightarrow -t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$(3) \text{ Bornes } \begin{cases} t = -x \\ t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = x \\ u = 0 \end{cases}$$

$$(4) du = -dt$$

$$(5) f(t)g(-x-t)dt = f(-u) \cdot g(-x+u)(-du)$$

(6) $u \mapsto -f(-u)g(-x+u)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par CDV,

$$\begin{aligned} f \star g(-x) &= - \int_0^x f(-u)g(-x+u)du \\ &= - \int_0^x f(u)g(x-u)du \text{ par parité de } f \\ &= -f \star g(x) \end{aligned}$$

Donc : si f et g sont paires alors la fonction $f \star g$ est impaire

Exercice 10

On note f la fonction suivante $f : x \rightarrow \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

$t \mapsto 1 + t^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1; +\infty[$. De plus $1 + t^2 = 1 \Leftrightarrow t = 0$. Donc $t \mapsto \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

• Soit $x \in]0; +\infty[$. Alors $2x \in]0; +\infty[$ et l'intégrale $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$ est bien définie.

• Soit $x \in]-\infty; 0[$. Alors $2x \in]-\infty; 0[$ et $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$ est bien définie.

Bilan : f est définie sur $\mathbb{R}^*$

2. Montrons que f est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculons f' .

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$$

(1) Posons $u = -t$

(2) $t \rightarrow -t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$(3) \text{ Bornes } \begin{cases} t = -2x \\ t = -x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = 2x \\ u = x \end{cases}$$

$$(4) du = -dt$$

$$(5) \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt = -\frac{1}{\ln(1+u^2)} du$$

(6) $u \mapsto \frac{1}{\ln(1+u^2)}$ est continue sur $[x; 2x]$ ou $[2x; x]$.

Par CDV,

$$f(-x) = - \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+uu^2)} du = -f(x)$$

Bilan : f est impaire

Notons $g : t \mapsto \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^*$. Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}^*$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = G(2x) - G(x). \quad G \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*.$$

$x \mapsto G(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition.

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\ &= 2g(2x) - g(x) \\ &= \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)} \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\ln(1+4x^2)} \geq \frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+4x^2)}{2} \leq \ln(1+x^2) \Leftrightarrow \ln(\sqrt{1+4x^2}) \leq \ln(1+x^2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+4x^2} \leq 1+x^2 \quad (\text{croissance } \ln)$$

$$\Leftrightarrow 1+4x^2 \leq 1+2x^2+x^4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 2) \geq 0$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
x^2	$+$			$+$	
$x^2 - 2$	$+$	0	$-$	$-$	0
$x^2(x^2 - 2)$	$+$	0	$-$	$-$	0

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$		$+\infty$

4. (a) $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \forall t \in (x; 2x], \quad x^2 \leq t^2 \leq 4x^2 \\ \Rightarrow \ln(1+x^2) \leq \ln(1+t^2) \leq \ln(1+4x^2) \\ \Rightarrow \frac{1}{\ln(1+4x^2)} \leq \frac{1}{\ln(1+t^2)} \leq \frac{1}{\ln(1+x^2)} \text{ par décroissance de la fonction inverse sur }]0; +\infty[\end{aligned}$$

En intégrant (bornes dans le bon sens : $x < 2x$) :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+x^2)} dt$$

D'où puisque l'on intègre des constantes :

$$\boxed{\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln(1+x^2)}}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{x}{\ln(1+4x^2)} &= \frac{x}{\ln(x^2(4+\frac{1}{x^2}))} = \frac{x}{2\ln(x) + \ln(4+\frac{1}{x^2})} \\ &= \frac{x}{\ln(x)} \times \frac{1}{2 + \frac{\ln(4+\frac{1}{x^2})}{\ln(x)}} \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$, et par ailleurs $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \frac{\ln(4+\frac{1}{x^2})}{\ln(x)}} = \frac{1}{2}$.

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+4x^2)} = +\infty$ et par entraînement $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$

Par imparité, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$

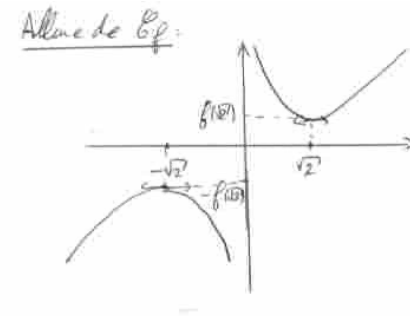
Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} 4x^2 = 0$, $\ln(1+4x^2) \sim_{x \rightarrow 0} 4x^2$ (équivalent classique), donc

$$\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \sim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{4x^2} = \frac{1}{4x}$$

Donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln(1+4x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{4x} = +\infty}$

Par imparité, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

(c) Allure de la courbe représentative de la fonction f :



Exercice 11

Sommes de Riemann

Pour chacune des suites suivantes, démontrer sa convergence et calculer sa limite:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{kn+n^2}}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad w_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n+3k}$$

1.

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{kn+n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+k/n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n)$$

où $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$. On reconnait alors une somme de Riemann, associée à la fonction f qui est continue sur $[0, 1]$. D'après le cours,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt = [2\sqrt{1+t}]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$$

2.

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$$

où $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t \sin(\pi t)$.

v_n est une somme de Riemann associée à la fonction f , qui est continue sur $[0, 1]$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 t \sin(\pi t) dt = I$$

Posons

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = \sin(\pi t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{\cos(\pi t)}{\pi} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Par IPP,

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{t \cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(\pi t) dt \\ &= -\frac{\cos(\pi)}{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}(0-0) = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{\pi}}$

3.

$$w_n = \sum_{k=1}^n \frac{n.k/n}{n(2+3k/n)} = \sum_{k=1}^n \frac{k/n}{2+3k/n} = n \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n)$$

où $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t}{2+3t}$. Comme f est continue sur $[0, 1]$, toujours d'après le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) = \int_0^1 \frac{t}{2+3t} dt = J$$

La fonction $t \mapsto \frac{t}{2+3t}$ étant continue, positive et différente de la fonction nulle sur $[0, 1]$, on a $J > 0$. Comme

$$w_n = n \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n)$$

par produit $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty}$

Remarque : nous aurions pu calculer J via la méthode :

$$J = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{2+3t-2}{2+3t} dt = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{2+3t} dt = \dots$$

etc... mais cela n'est pas utile pour déterminer la limite qui est demandée.

Exercice 12

Des intégrales classiques

On note: $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{p,0} = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

2. $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$I_{q,p} = \int_0^1 x^q (1-x)^p dx = \int_0^1 (1-x)^p x^q dx$$

- Posons $u = 1 - x$
- La fonction $x \mapsto 1 - x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$
- Bornes $\begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = 1 \end{cases}$
- $du = -dx$
- $(1-x)^p x^q dx = -u^p (1-u)^q$
- $u \mapsto -u^p (1-u)^q$ est continue sur $[0, 1]$.

Par changement de variables,

$$I_{q,p} = - \int_1^0 u^p (1-u)^q du = I_{p,q}$$

Bilan : $\boxed{\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I_{q,p} = I_{p,q}}$

3. $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p+1,q} = \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^q dx$

Posons

$$\begin{cases} u(x) = x^{p+1} \\ v(x) = (1-x)^q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = (p+1)x^p \\ v(x) = -\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on peut donc intégrer par parties :

$$\begin{aligned} I_{p+1,q} &= \left[-x^{p+1} \cdot \frac{(1-x)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 + \frac{p+1}{q+1} \cdot \int_0^1 x^p (1-x)^{q+1} dx \\ &= \frac{p+1}{q+1} I_{p,q+1} \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}, I_{p,q} = \frac{p+1}{q+1} I_{p,q+1}$$

4. On procède par itérations successives (pointillés) : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \frac{p}{q+1} \cdot I_{p-1,q+1} = \frac{p}{q+1} \cdot \frac{p-1}{q+2} \cdot I_{p-2,q+2} \\ &= \dots \\ &= \frac{p}{q+1} \cdot \frac{p-1}{q+2} \cdot \frac{p-2}{q+3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{q+p} \cdot I_{0,q+p} \\ &= \frac{p!}{(q+1)(q+2) \dots (q+p)} \cdot I_{0,q+p} \\ &= \frac{p!.1.2 \dots q}{1.2.3 \dots q \cdot (q+1) \cdot \dots \cdot (q+p)} \cdot I_{q+p,0} \\ &= \frac{p!.q!}{(p+q)!} \cdot \frac{1}{p+q+1} \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}}$