

Exercice 10: sommes de Riemann

$$(1) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\text{à } f: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}} \\ [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction continue f sur $[0;1]$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t}} dt = \left[2\sqrt{1+t} \right]_0^1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\sqrt{2} - 2$$

$$(2) v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\text{à } f: t \mapsto t \sin(t\pi) \\ [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$$

REVISIONS ANALYSE (13)

f est continue sur $[0;1]$ et v_n est une somme de Riemann associée à f sur $[0;1]$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 t \sin(t\pi) dt = I$$

$$\text{posons } \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \sin(t\pi) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{\cos(t\pi)}{\pi} \end{cases}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. Par I.P.P.,

$$I = \left[-\frac{t \cos(t\pi)}{\pi} \right]_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(t\pi) dt$$

$$= -\frac{\cos(\pi)}{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(t\pi)}{\pi} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} (0 - 0)$$

$$= \frac{1}{\pi} \quad \text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{\pi}$$

$$(3) \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$w_n = \sum_{k=1}^n \frac{n \cdot \frac{k}{n}}{n \cdot (2 + 3\frac{k}{n})} = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{2 + 3\frac{k}{n}} \\ = n \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ai. $f: t \mapsto \frac{t}{2+3t}$
 $[0;1] \rightarrow \mathbb{R}$

Comme f est continue sur $[0;1]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \frac{t}{2+3t} dt = J$$

↑
Somme de Riemann.

$$J = \int_0^1 \frac{t}{2+3t} dt.$$

La fonction $t \mapsto \frac{3t}{2+3t}$ est positive et différente de
la fonction nulle sur $[0;1]$. Donc $J > 0$

Comme $w_n = n \times \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} J > 0}$

par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

Remarque: nous aurions pu calculer J via

$$J = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{2+3t-2}{2+3t} dt = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1}{2+3t} dt = \dots$$

mais cela n'est pas utile pour calculer $\lim w_n$.

Exercice 11

CLASSIQUE

ITERATIONS

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$I_{p,0} = \int_0^1 x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

2. $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$I_{q,p} = \int_0^1 x^q (1-x)^p dx = \int_0^1 (1-x)^p x^q dx$$

(1) Posons $u = 1-x$ (2) $x \mapsto 1-x$ est sur $[0;1]$

(3) Borne $\begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u=0 \\ u=1 \end{cases}$ (4) $du = -dx$

(5) $(1-x)^p x^q dx = -u^p (1-u)^q du$ (6) $u \mapsto -u^p (1-u)^q$
continue sur $[0;1]$.

Par LDU,

$$\underline{I_{q,p}} = - \int_1^0 u^p (1-u)^q du = \underline{I_{p,q}}$$

3. $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$,

$$I_{p+1,q} = \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^q dx$$

Posons

$$\begin{cases} u(x) = x^{p+1} \\ v'(x) = (1-x)^q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = (p+1)x^p \\ v(x) = -\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1} \end{cases}$$

u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(0;1)$, on peut intégrer par parties.

$$I_{p+1,q} = \left[-x^{p+1} \frac{(1-x)^{q+1}}{q+1} \right]_0^1 + \frac{p+1}{q+1} \int_0^1 x^p (1-x)^{q+1} dx$$

$$I_{p+1,q} = \frac{p+1}{q+1} I_{p,q+1}$$

Autrement dit: $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}$,

$$I_{p,q} = \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}$$

4. On procède par itérations successives (familiales):

$\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}$,

$$I_{p,q} = \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}$$

$$= \frac{p}{q+1} \cdot \frac{p-1}{q+2} I_{p-2,q+2}$$

= ...

$$= \frac{p}{q+1} \cdot \frac{p-1}{q+2} \cdot \frac{p-2}{q+3} \cdots \frac{1}{q+p} \cdot I_{0,q+p}$$

$$I_{p,q} = \frac{p!}{(q+1)(q+2)\cdots(q+p)} \cdot I_{0,q+p}$$

$$= \frac{p! \cdot 1 \cdot 2 \cdots q}{1 \cdot 2 \cdots q \cdot (q+1) \cdots (q+p)} \cdot I_{0,q+p}$$

$$= \frac{p! q!}{(q+p)!} \cdot \frac{1}{q+p+1} = I_{q+p,0} = \frac{1}{q+p+1}$$

Enfin:

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, I_{p,q} = \frac{p! q!}{(q+p+1)!}$$

Exercice 12

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$$

(1) On pose $t = \tan(x)$ (2) $x \mapsto \tan(x)$ $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{4}]$

(3) bornes $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$ (4) $dt = (1 + \tan^2(x)) dx$

$$(5) \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{(1+\tan^2(x))^2} \cdot (1+\tan^2(x)) dx = \frac{1}{1+\tan^2(x)} dx$$

⑥ $x \mapsto \frac{1}{1+\tan^2(x)}$ continue sur $[0; \frac{\pi}{4}]$.

Par CDV,

$$J = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^2(x)} dx.$$

Or $1+\tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$$J = \int_0^{\pi/4} \cos^2(x) dx.$$

⚠ Il faut linéariser $\cos^2(x)$.

Méthode: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

① $1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$

$$\cos(2x) + 1 = 2\cos^2(x)$$

D'où

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\cos(2x) + 1) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4}$$

$$J = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

{ OV complexe
un peu plus
long. }

$$K = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$



① On pose $t = \sin(x)$ ② $x \mapsto \sin(x)$ est sur

③ Borne $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1/2 \\ t = 0 \end{cases}$ ④ $dt = \cos(x) dx$

$$\textcircled{5} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} \cdot \cos(x) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos^2(x)}} \cdot \cos(x) dx$$

$$= 1 dx \quad \text{car } \cos(x) \geq 0 \text{ sur } [0; \frac{\pi}{6}]$$

d'où $\sqrt{\cos^2(x)} = |\cos(x)| = \cos(x)$

⑥ $x \mapsto 1$ continue sur $[0; \frac{\pi}{6}]$!

Par CDV,

$$K = \int_0^{\pi/6} 1 dx = \frac{\pi}{6}$$

Exercice 13: suites et séries.

1. (a) Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $H(n): u_n \in]0; 1[$.

Initialisation: $u_0 \in]0; 1[$ donc $H(0)$ vraie.

Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ vraie.

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n(1 - u_n).$$

$$\text{Car comme } 0 < u_n < 1, \quad u_n(1 - u_n) \in]0; 1[$$

donc $H(n+1)$ vraie.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; 1[$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Étant décroissante et minorée, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in [0; 1]$.

En passant à la limite dans la relation

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2 \text{ on obtient } l = l - l^2$$

d'où $l^2 = 0$ et $l = 0$.

Finalement $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

2. Notons $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2.$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k - u_{k+1} \xrightarrow{\text{téléscopage}} u_0 - u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_0$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Donc la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k^2$ est convergente.

$$\text{De plus } \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2 = u_0.$$

3. (a) Notons $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=0}^n \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$.

$$T_n = \sum_{k=0}^n \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0) \quad (\text{téléscopage})$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0$$

la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$ est divergente.

$$(b) \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \ln\left(\frac{u_k - u_k^2}{u_k}\right) = \ln(1 - u_k) \sim -u_k \quad \text{car } \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0.$$

$$\text{D'où } \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} -u_k = -\infty.$$

Par critère d'équivalence (séries à termes positifs), les
 séries $\sum u_n$ et $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ sont de même nature.

D'après le 3(a) la série $\sum u_n$ est donc divergente.

Exercice 14

1. le DL de e^u en 0 à l'ordre 3 est:

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3!} + o(u^3).$$

Comme $\lim_{t \rightarrow 0} -2t = 0$, on en déduit que

$$e^{-2t} = 1 + (-2t) + \frac{(-2t)^2}{2} + \frac{(-2t)^3}{3!} + o(t^3)$$

$$e^{-2t} = 1 - 2t + \frac{2^2 t^2}{2} - \frac{2^3 t^3}{6} + o(t^3)$$

2. le DL de $\sin(u)$ en 0 à l'ordre 5 est:

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + o(u^5)$$

Comme $\lim_{t \rightarrow 0} 2t = 0$, on en déduit que

$$\sin(2t) = 2t - \frac{2^3 t^3}{3!} + \frac{2^5 t^5}{5!} + o(t^5)$$

3. le DL de $\cos(u)$ à l'ordre 4 en 0 est:

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + o(u^4)$$

Comme $\lim_{t \rightarrow 0} t^2 = 0$, on en déduit que

$$\cos(t^2) = 1 - \frac{t^4}{2!} + \frac{t^8}{4!} + o(t^4)$$

$$\cos(t^2) = 1 - \frac{t^4}{2!} + o(t^4)$$

On obtient le DL à l'ordre 5 de $\cos(t^2)$ en 0 en
 transposant le DL à l'ordre 8 obtenu au-dessus.

Exercice 15: Formules de Taylor et séries

1. $t \mapsto 1-t$ est de

CLASSIQUE

classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty; +\infty[$, à valeurs dans $]0; +\infty[$.

Comme lu est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$, par

composition $f: t \mapsto lu(1-t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

sur $] -\infty; +\infty[$.

Ex-15 (suite)

$$\forall t \in]-\infty; 1[,$$

$$f'(t) = -\frac{1}{1-t} \quad f''(t) = -\frac{1}{(1-t)^2} = -(1-t)^{-2}$$

$$f^{(3)}(t) = 2 \times (1-t)^{-3} \times (-1) = -\frac{2}{(1-t)^3} = -2(1-t)^{-3}$$

$$f^{(4)}(t) = -6(1-t)^{-4} = -\frac{6}{(1-t)^4} \text{ puis } f^{(5)}(t) = -\frac{24}{(1-t)^5} \text{ etc...}$$

Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$H(k): \forall t \in]-\infty; 1[, f^{(k)}(t) = -\frac{(k-1)!}{(1-t)^k}$$

• Initialisation: si $k=1$, $\forall t \in]-\infty; 1[,$

$$f'(t) = -\frac{1}{1-t} = -\frac{0!}{(1-t)^1} \text{ donc } H(1) \text{ vraie.}$$

⚠ Relation fautive pour $k=0$ bien sûr!!

• Hérédité: soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(k)$ vraie.

$$\forall t \in]-\infty; 1[, f^{(k)}(t) = -\frac{(k-1)!}{(1-t)^k}$$

$$f^{(k+1)}(t) = -(k-1)! \cdot (1-t)^{-k} \times (-1)$$

D'où en dérivant:

$$f^{(k+1)}(t) = -(k-1)! \times (-k) \times (1-t)^{-k-1} \times (-1)$$

REVISIONS D'ANALYSE (13)

$$f^{(k+1)}(t) = -k! \cdot (1-t)^{-k-1} = -\frac{k!}{(1-t)^{k+1}}$$

et $H(k+1)$ vraie.

• Conclusion: $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]-\infty; 1[,$

$$f^{(k)}(t) = -\frac{(k-1)!}{(1-t)^k}$$

2. Soit $x \in [0; \frac{1}{2}]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

• La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0; x]$.

• $\forall t \in [0; x],$

$$|f^{(n+1)}(t)| = \left| -\frac{n!}{(1-t)^{n+1}} \right| = \frac{n!}{(1-t)^{n+1}}$$

Comme $t \in [0; \frac{1}{2}],$

$$\frac{1}{2} \leq 1-t \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq (1-t)^{n+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow (1-t)^{n+1} \leq 2^{n+1}$$

en 0, à l'échelle,

appliquée à f

• D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k \right| \leq 2^{n+1} \cdot \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

D'ici

$$\left| \ln(1-x) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{2^{n+1} \cdot x^{n+2}}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \left| \ln(1-x) - \sum_{k=1}^n \frac{-(k-1)!}{k!} x^k \right| \leq \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \left| \ln(1-x) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

3. En prenant $x = \frac{1}{2}$, d'après le 2. :

$$\left| \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$ donc par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$ d'ici $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \ln(2)}$

Exercice 16

REVISIONS D'ANALYSE (20)

$$a. \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{\sin(x) \times \ln(1+x)}$$

• $\sin(x) \times \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$ (équivalents classiques)

$$\begin{aligned} \ln(1+x) - \sin(x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (x + o(x^2)) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Par quotient d'équivalents

$$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

b.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)}$$

• $x \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$

$$\sin(x) - x = x - \frac{x^3}{3!} - x + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$$

D'ici

$$\frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$c. \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x - (e^x-1)}{(e^x-1)xx}$$

$$\bullet (e^x-1)xx \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \text{ (équivalents classiques)}$$

$$\begin{aligned} \bullet x - e^x + 1 &= x + 1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_{\text{au}} \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

d.

$$\frac{\ln(1-x)}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \ln(1-x)+x &= (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) + x \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_{\text{au}} \frac{\ln(1-x)+x}{x^2} &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

e.

$$\bullet (e^x-1)^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \text{ (eq. classique)}$$

$$\begin{aligned} \bullet e^x - 1 - xe^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 \\ &\quad - x(1 + x + o(x)) \\ &= x + \frac{x^2}{2} - x - x^2 + o(x^2) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$\mathcal{D}'_{\text{au}}$

$$\frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

Exercice 17

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

On considère l'intervalle $I_x = [-|x|, |x|]$.

La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in I, |\exp'(t)| = e^t \leq e^{|x|}$$

Comme $x \in I$, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, appliquée à la fonction exp en 0, à l'ordre 2 :

$$|e^x - e^0 - e^{0'} \cdot x| \leq e^{|x|} \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow |e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2} \cdot e^{|x|}$$

Remarque: $I = [-|x|, |x|]$ est un intervalle contenant à la fois 0 et x , sur lequel il est facile de majorer $e^{|x|}$.

2. Soit $f: t \mapsto (1+t)^{1/3}$
 $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$f(t) = (1+t)^{1/3} \quad f'(t) = \frac{1}{3} (1+t)^{-2/3}$$

$$f''(t) = -\frac{2}{9} (1+t)^{-5/3} \quad f^{(3)}(t) = \frac{10}{27} (1+t)^{-7/3}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\forall t \in [0, x]$,

$$1 \leq 1+t \leq 1+x \Rightarrow 1 \leq (1+t)^{7/3} \leq (1+x)^{7/3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+t)^{7/3}} \leq 1 \Rightarrow |f^{(3)}(t)| \leq \frac{10}{27}$$

D'après la formule de Taylor-Young, appliquée à f sur $[0; x]$, à l'ordre 2:

$$|f(x) - f(0) - f'(0) \cdot x - f''(0) \cdot \frac{x^2}{2}| \leq \frac{10}{27} \cdot \frac{|x-0|^3}{3!}$$

$$\Rightarrow \left| \sqrt[3]{1+x} - 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 \right| \leq \frac{5}{81} x^3$$

Exercice 18: EDHEC 2013

1. fonction $y = \text{fact}(n)$

$p = 1$
 for $k = 1:n$

$p = p \times k$

end

$y = p$

endfunction

ou plus compact:

function $y = \text{fact}(n)$

$y = \text{prod}(1:n)$

endfunction

2. $n = \text{input}('Entrez n:')$

$S = 0$

for $k = 1:n$

$S = S + \text{fact}(k)$

end

$U = n/S$

$\text{disp}(U, 'Valeur de U_n:')$

$$3. \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n!}$$

la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1^n}{n!}$ est une série exponentielle convergente ($\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$).

$$4. u_n = \frac{n}{1+2!+3!+\dots+(n-1)!+n!} \leq \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

5. la série de t.g. $\frac{1}{(n-1)!}$ étant convergente (3.) par critère de comparaison de séries à termes positifs, la série de t.g. u_n converge. De plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Exercice 19

CLASSIQUE

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, \infty$.

1. a. Très classique.

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x! (n-x)!}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{1}{x!} \times n(n-1) \dots (n-x+1).$$

$$(n) \begin{cases} n \sim n \\ n-1 \sim n \\ \dots \\ n-x+1 \sim n \end{cases} \quad \begin{matrix} n \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow +\infty \\ n \rightarrow +\infty \end{matrix} \quad \begin{matrix} n \\ n \\ n \end{matrix} \quad \begin{matrix} d'après produit d'équivalents \\ (x \text{ termes}) : \\ n(n-1) \dots (n-x+1) \sim n^x \end{matrix}$$

D'ailleurs, $\frac{1}{x!}$ étant constant,

$$\binom{n}{x} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x}{x!}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad n^{x+2} x^n &= e^{(x+2)\ln(n)} \cdot e^{n \ln(x)} \\ &= e^{n \ln(x) + (x+2)\ln(n)} = e^{n \cdot [\ln(x) + (x+2)\frac{\ln(n)}{n}]} \end{aligned}$$

Par C.C., $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ d'ailleurs

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x) + (x+2)\frac{\ln(n)}{n} = \ln(x) < 0 \quad \text{car } x \in]0, \infty.$$

$$\text{D'ailleurs } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot [\ln(x) + (x+2)\frac{\ln(n)}{n}] = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \cdot [\ln(x) + (x+2)\frac{\ln(n)}{n}]} = 0$$

$$\text{d'ailleurs } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{x+2} x^n = 0$$

$$(c) \frac{\binom{n}{2} x^n}{\frac{1}{n^2}} = n^2 \binom{n}{2} x^n$$

$$\sim \frac{1}{n!} n^{n+2} x^n \text{ d'après le (a)}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ d'après le (b)}$$

$$\text{Ainsi } \binom{n}{2} x^n = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$)
par critère de négligeabilité (séries à termes positifs),
la série de terme général $\binom{n}{2} x^n$ converge.

$$2.(a) S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

série géométrique avec $|x| < 1$.

(b)

$$(1-x)S_{n+1} = (1-x) \cdot \sum_{n=n+1}^{+\infty} \binom{n}{n+1} x^n$$

$$= \sum_{n=n+1}^{+\infty} \binom{n}{n+1} x^n - \sum_{n=n+1}^{+\infty} \binom{n}{n+1} x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=n+1}^{+\infty} \binom{n}{n+1} x^n - \sum_{n=n+2}^{+\infty} \binom{n-1}{n+1} x^n \text{ après changement d'indice}$$

$$(1-x)S_{n+1} = \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} + \sum_{n=n+2}^{+\infty} \left[\binom{n}{n+1} - \binom{n-1}{n+1} \right] x^n$$

D'après le triangle de Pascal,

$$\binom{n-1}{n+1} + \binom{n-1}{n} = \binom{n}{n+1}$$

$$\text{d'où } \binom{n}{n+1} - \binom{n-1}{n+1} = \binom{n-1}{n} \text{ et}$$

$$\begin{aligned} (1-x)S_{n+1} &= x^{n+1} + \sum_{n=n+2}^{+\infty} \binom{n-1}{n} x^n \\ &= x^{n+1} + \sum_{n=n+1}^{+\infty} \binom{n}{n} x^{n+1} \text{ en changeant d'indice} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=n+1}^{+\infty} \binom{n}{n} x^{n+1} \text{ car } \binom{n}{n} x^{n+1} = x^{n+1}$$

! (on rentre le 1^{er} terme dans la somme)

$$= x \cdot \sum_{n=n+1}^{+\infty} \binom{n}{n} x^n \text{ et enfin: (suite géométrique!)} \quad (1-x)S_{n+1} = xS_n \Rightarrow S_{n+1} = \frac{x}{1-x} \cdot S_n$$

$$(1-x)S_{n+1} = xS_n \Rightarrow S_{n+1} = \frac{x}{1-x} \cdot S_n$$

(c) En itérant: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, 1[$,

$$S_n = \frac{x}{1-x} \cdot S_{n-1} = \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 \cdot S_{n-2} = \dots = \left(\frac{x}{1-x} \right)^n \cdot S_0$$

$$\text{et ainsi } S_n = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}} \text{ d'après 2.(a)}$$

Exercice 20

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n.$$

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u_0$: réc. facile.

2. la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge (série géométrique, $|\frac{1}{2}| < 1$).

Par critère de comparaison, la série de t.g. $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge.

Exercice 21 : autour de la série harmonique alternée.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx, \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^2)^2} dx$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}$ et $x \mapsto \frac{x^n}{(1+x^2)^2}$

sont continues sur $[0, 1]$ donc I_n et J_n sont bien définies.

$$2. \quad I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\text{Arctan}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}$$

(b)

$$\text{Posons } \begin{cases} u(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v'(x) = x^n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Par I.P.P.,

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x^2)} \right]_0^1 + \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} dx$$

$$I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+1} J_{n+2}$$

(c) $\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N},$

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} \leq x^{n+2}$$

D'ici en intégrant ($0 < 1$):

$$0 \leq J_{n+2} \leq \int_0^1 x^{n+2} dx = \frac{1}{n+3}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+3} = 0$ par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{n+2} = 0$.

D'ici $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ par sauto.

$$* \quad I_n = \frac{1}{2(n+1)} \times (1 + 4 J_{n+2})$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$, $I_n \sim \frac{1}{2(n+1)}$

Puis $I_n \sim \frac{1}{2n}$.

k.a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (-x)^i \text{ en posant } i=k-1$$

$$= \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} \quad \text{formule } \sum q^k!$$

$$= \frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{1+x}$$

b. En intégrant entre 0 et 1 (fonctions continues):

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^n (-x)^{k-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \int_0^1 (-x)^{k-1} dx = \ln(2) + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \left[-\frac{(-x)^k}{k} \right]_0^1 = \ln(2) + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

(c). Soit $\varepsilon \in]0, 1]$ et

$$J_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad \dots$$

①. Posons $u = \sqrt{x}$. ② $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^1

③ bornes $\left. \begin{array}{l} x=1 \\ x=\varepsilon \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} u=1 \\ u=\sqrt{\varepsilon} \end{array}$ sur $[\varepsilon, 1]$ (Δ et pas sur $[0, 1]$)

④ $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ on a aussi $u^2 = x$ donc $2udu = dx$

$$\textcircled{5} \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{u^{2n}}{1+u^2} \cdot 2udu = 2 \cdot \frac{u^{2n+1}}{1+u^2} du$$

⑥ $u \mapsto \frac{u^{2n+1}}{1+u^2}$ continue sur $[\sqrt{\varepsilon}, 1]$.

Par CDV,

$$J_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 2 \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \frac{u^{2n+1}}{1+u^2} du$$

D'ici, les fonctions intégrées étant continues sur $[0, 1]$, en passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 2 \int_0^1 \frac{u^{2n+1}}{1+u^2} du = 2 I_{2n+1}. \text{ D'ici}$$

$$S_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} \cdot 2 I_{2n+1}$$

(d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$ d'après ce qui précède:

la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$

Rqne: il s'agit de la série harmonique alternée:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln(2)$$

$$(e) S_n - \ln(2) = (-1)^{n+1} \cdot 2 I_{2n+2}$$

$$\text{Car comme } I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n}, \quad I_{2n+2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(2n+2)}$$

$$\text{et } S_n - \ln(2) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

Rqne: ce qui précède la vitesse de convergence
de S_n vers $\ln(2)$.

FIN