
Corrigé du DM n° 1 - pour le mardi 15 septembre 2026

Problème d'analyse

On rappelle que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour tout réel $x \in [0, +\infty[$ et tout entier naturel n , on note :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+x+1} \quad \text{et} \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$$

PARTIE I : Etude des variations et des limites de f

Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $t \in [0, 1]$, on note $g_x(t) = \frac{t^x}{1+t}$

1. Soit $x \in [0; +\infty[$. La fonction $g_x : t \mapsto \frac{t^x}{1+t}$ est continue sur $[0, 1]$ et donc $f(x) = \int_0^1 g_x(t) dt$ est bien définie.

Donc f est définie sur $[0; +\infty[$

2.

$$f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$$
$$f(1) = \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{1+t-1}{1+t} dt = 1 - \ln(2)$$

3. Soit $(x, y) \in [0; +\infty]^2$ avec $x \leq y$. Alors pour tout $t \in [0, 1]$, $t^x \geq t^y$. D'où $\frac{t^x}{1+t} \geq \frac{t^y}{1+t}$, puis en intégrant (bornes dans le bon sens $0 < 1$), $f(x) \geq f(y)$.

Bilan : f est décroissante sur $[0; +\infty[$

4. $\forall x \geq 0$,

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x + t^{x+1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^x(1+t)}{1+t} dt = \int_0^1 t^x dt = \left[\frac{1}{x+1} t^{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+1}$$

Bilan : $\forall x \geq 0, f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$

5. (a) Pour tout $x \geq 1$, comme f est décroissante,

$$\begin{aligned} f(x+1) &\leq f(x) \leq f(x-1) \\ \Rightarrow f(x) + f(x+1) &\leq 2f(x) \leq f(x-1) + f(x) \\ \Rightarrow \frac{1}{x+1} &\leq 2f(x) \leq \frac{1}{x} \end{aligned}$$

- (b) On en déduit que pour $x \geq 1$,

$$\frac{x}{x+1} \leq 2x.f(x) \leq 1$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$, par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x.f(x) = 1$ soit aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{2x}} = 1$.

Bilan : $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x}$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

6. Obtention de valeurs approchées de $f(x)$

Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_x\left(\frac{k}{n}\right)$.

- (a) Soit $x \in [0; +\infty[$. Nous avons déjà dit que la fonction g_x est continue sur $[0, 1]$. On reconnaît alors que $T_n(x)$ est une somme de Riemann associée à la fonction g_x , et d'après le cours :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = \int_0^1 g_x(t) dt = f(x)$$

- (b) def g(x,t):

```
    return (t**x)/(1+t)
```

```
    n=int(input("Entrer un entier n>0 : "))
```

```
    x=float(input("Entrer un réel x positif : "))
```

```
    T=0
```

```
    for k in range(1,n+1):
```

```
        T=T+g(x,k/n)
```

```
    T=(1/n)*T
```

```
    print("T_n=",T)
```

PARTIE II : f comme somme d'une série convergente

1. Soit x un réel positif fixé.

- (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k+x} &= t^x \cdot \sum_{k=0}^n (-t)^k \\ &= t^x \cdot \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} \quad \text{car } 1+t \neq 0 \\ &= \frac{t^x}{1+t} + (-1)^n \frac{t^{n+1+x}}{1+t} \end{aligned}$$

- (b) En intégrant avec t entre 0 et 1 dans cette égalité, les fonctions étant toutes continues :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \int_0^1 t^{k+x} dt &= \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt + (-1)^n \cdot \int_0^1 \frac{t^{n+1+x}}{1+t} dt \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{1}{k+x+1} &= f(x) + (-1)^n \cdot f(x+n+1) \\ \Leftrightarrow S_n(x) &= f(x) + (-1)^n f(n+1+x) \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{S_n(x) = f(x) + (-1)^n f(n+1+x)}$

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|(-1)^n \cdot f(n+1+x)| = f(n+1+x)$, et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1+x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n f(n+1+x) = 0$. D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = f(x)$.

Bilan : $\boxed{\text{la s\u00e9rie de terme g\u00e9n\u00e9ral } \frac{(-1)^n}{n+x+1} \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x+1} = f(x)}$

2. Cas particuliers

- (a) On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$$

$S_n(0)$ est donc une somme partielle de la s\u00e9rie harmonique altern\u00e9e. On d\u00e9duit alors du r\u00e9sultat du II.2. que la s\u00e9rie harmonique altern\u00e9e est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = f(0) = \ln(2)$$

- (b) $f(\frac{1}{2}) = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$.

Posons $t = u^2$. La fonction $u \mapsto u^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, strictement croissante et bijective de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$. Ce changement de variables est donc autoris\u00e9.

Bornes : $\begin{cases} u = 1 \\ u = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \end{cases}, \quad dt = 2u \cdot du$

Par changement de variables,

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2}) &= \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2} du = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1+u^2-1}{1+u^2} du \\ &= 2 \cdot \int_0^1 1 du - 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du = 2 - 2 \cdot [\text{Arctan}(u)]_0^1 \\ &= 2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{f(\frac{1}{2}) = 2 - \frac{\pi}{2}}$

3. Etude de la continuit\u00e9 de f sur $[0, +\infty[$

- (a) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| &= \left| \frac{k+1+y - (k+1+x)}{(k+1+x)(k+1+y)} \right| \\ &= \frac{|x-y|}{(k+1+x)(k+1+y)} \\ &\leq \frac{|x-y|}{k^2} \end{aligned}$$

car $(k+1+x)(k+1+y) \geq k^2$.

- (b) Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x+1} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+y+1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \left(\frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k+y+1} \right) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \left(\frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k+y+1} \right) \end{aligned}$$

en sortant le terme en $k=0$ de la somme. Par in\u00e9galit\u00e9 triangulaire, on a alors :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} \right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k+y+1} \right| \\ &\leq \frac{|x-y|}{(x+1)(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} |x-y| \cdot \frac{1}{k^2} \text{ d'apr\u00e8s la question pr\u00e9c\u00e9dente} \\ &\quad \text{Ceci est autoris\u00e9 car les s\u00e9ries sont convergentes} \\ &\leq |x-y| \cdot \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right) \\ &\leq |x-y| \cdot \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right) \end{aligned}$$

d'apr\u00e8s le r\u00e9sultat rappel\u00e9 au d\u00e9but du probl\u00e8me.

Bilan : $\boxed{\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |f(x) - f(y)| \leq |x-y| \left(\frac{1}{(1+x)(1+y)} + \frac{\pi^2}{6} \right)}$

- (c) Soit $x_0 \in [0; +\infty[$. D'apr\u00e8s le r\u00e9sultat pr\u00e9c\u00e9dent, pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \left(\frac{1}{(1+x_0)(1+x)} + \frac{\pi^2}{6} \right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| \left(\frac{1}{(1+x_0)(1+x)} + \frac{\pi^2}{6} \right) = 0$, par encadrement $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Par cons\u00e9quent, f est continue en x_0 .

Ceci \u00e9tant vrai pour tout $x_0 \in [0; +\infty[$, $\boxed{f \text{ est continue sur } [0; +\infty[}$

4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on consid\u00e8re la fonction $\theta_k : u \mapsto \frac{(-1)^k}{k+1+u}$

- (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction θ_k est une fraction rationnelle d\u00e9finie sur $[0; +\infty[$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0; +\infty[$. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+ :$

$$\theta_k'(u) = (-1)^k \cdot \left(-\frac{1}{(k+1+u)^2} \right) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+u)^2} = (-1)^{k+1} \cdot (k+1+u)^{-2}$$

$$\theta_k''(u) = (-1)^{k+1} \cdot (-2) \cdot (k+1+u)^{-3} = (-1)^{k+2} \cdot \frac{2}{(k+1+u)^3}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$,

$$|\theta_k''(u)| = \frac{2}{(k+1+u)^3} \leq \frac{2}{k^3}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et h tel que $h \geq x$. Alors $x+h \in \mathbb{R}_+$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, appliquée à la fonction θ_k avec $a = x$ et $b = x+h$, qui appartiennent bien à $\mathbb{R}_+$, on a

$$|\theta_k(x+h) - \theta_k(x) - (x+h-x) \cdot \theta_k'(x)| \leq \frac{2}{k^3} \cdot \frac{(x+h-x)^2}{2}$$

et on obtient bien

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \forall h \geq -x, |\theta_k(x+h) - \theta_k(x) - h\theta_k'(x)| \leq \frac{|h|^2}{k^3}$$

5. La série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^3}$ est une série de Riemann qui converge bien car $3 > 1$.

Soit $u \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|\theta_k'(u)| \leq \frac{1}{(k+1+u)^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Par critère de majoration, la série $\sum_{k \geq 0} \theta_k'(u)$ est absolument convergente, elle est donc convergente.

6. Dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $h \geq -x$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |S_n(x+h) - S_n(x) - h \cdot \sum_{k=0}^n \theta_k'(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \theta_k(x+h) - \sum_{k=0}^n \theta_k(x) - h \cdot \sum_{k=0}^n \theta_k'(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n |\theta_k(x+h) - \theta_k(x) - h\theta_k'(x)| \\ &\quad \text{par linéarité de la somme et inégalité triangulaire} \\ &\leq |\theta_0(x+h) - \theta_0(x) - h\theta_0'(x)| + \sum_{k=1}^n \frac{|h|^2}{k^3} \end{aligned}$$

En sortant le terme en $k = 0$ de la somme et en utilisant l'inégalité ci-dessus.

Comme $\theta_0(x) = \frac{1}{1+x}$ et $\theta_0'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$:

$$\begin{aligned} |\theta_0(x+h) - \theta_0(x) - h\theta_0'(x)| &= \left| \frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{h}{(1+x)^2} \right| \\ &= \left| \frac{-h}{(1+x+h)(x+1)} + \frac{h}{(1+x)^2} \right| \\ &= |h| \cdot \left| \frac{1}{(1+x+h)(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2} \right| \end{aligned}$$

en remplaçant dans l'inégalité ci-dessus, on obtient bien : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $h \geq -x$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|S_n(x+h) - S_n(x) - h \sum_{k=0}^n \theta_k'(x)| \leq |h| \left| \frac{1}{(1+x+h)(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2} \right| + |h|^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$$

(b) Les séries étant toutes convergentes, on obtient en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$:

$$|f(x+h) - f(x) - h \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \theta_k'(x)| \leq |h| \left| \frac{1}{(1+x+h)(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2} \right| + |h|^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

puis en divisant par h , avec $h \geq -x$ et $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{k=0}^{+\infty} \theta_k'(x) \leq \left| \frac{1}{(1+x+h)(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2} \right| + |h| \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{(1+x+h)(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2} \right| + |h| \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = 0$, par encadrement on obtient que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{k=0}^{+\infty} \theta_k'(x)$.

Bilan : f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \geq 0$, $f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}$

(c) On revient sur une question moins ardue...

De façon classique, on sépare les termes d'indices pairs et impairs.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{2i+1}}{(2i+1)^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{2i}}{(2i)^2} + \sum_{i=0}^n \frac{1}{(2i+1)^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i)^2} \\ &= -\sum_{i=0}^n \frac{1}{(2i+1)^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i)^2} + \sum_{i=0}^n \frac{1}{(2i+1)^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i)^2} \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \end{aligned}$$

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2}$

(d) En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans cette relation :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}$$

D'où

$$f'(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Bilan : $f'(0) = -\frac{\pi^2}{12}$