
Algèbre linéaire - exercices pour aller plus loin

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Ker}(A^k) \subset \text{Ker}(A^{k+1})$.
2. En déduire qu'il existe $k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\text{Ker}(A^{k_0}) = \text{Ker}(A^{k_0+1})$.
3. Montrer alors que $\text{Im}(A^{k_0}) = \text{Im}(A^{k_0+1})$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 2$ une matrice de rang 1.

Justifier qu'il existe deux matrices colonnes U et V appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U \cdot {}^tV$.

Exercice 3

Soit E un e.v. de dimension $n > 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ où $\text{rg}(f) = 1$.

1. En prenant une base de $\text{Ker}(f)$, en utilisant le théorème de la base incomplète, et en considérant la matrice de f dans la base que vous avez construit, montrer qu'il existe un unique réel m tel que $f^2 = mf$.
2. Justifier que $m \neq 0$ si et seulement si $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
Prouver que dans ce cas il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $c.f$ est un projecteur de E .

Exercice 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que $\dim(E) = 3$, $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Justifier que $\dim(\text{Im}(f)) = 1$.

Exercice 5

Soit E un e.v. de dimension 4, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{Id}_E$, et a un vecteur non nul.

1. Justifier que f est un automorphisme et préciser f^{-1} . f est-il diagonalisable ?
2. Justifier que $F_a = \text{Vect}(a, f(a))$ est un plan vectoriel stable par f .
3. Soit G un s.e.v. de E stable par f . Montrer que $F_a \cap G = \{0_E\}$ si et seulement si $a \notin G$.
4. Soit $b \in E$ où $b \notin \text{Vect}(a, f(a))$. Justifier que $E = F_a \oplus F_b$ et que $(a, f(a), b, f(b)) = \mathcal{C}$ est une base de E . Préciser la matrice de f dans cette base.

Exercice 6

Soit E un e.v. de dimension 3.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \text{Id}_E$ et $f - \text{Id}_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^2 + f + \text{Id}_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, et on note $g = f - \text{Id}_E$ et $h = f^2 + f + \text{Id}_E$.

1. (a) Justifier que $\text{Im}(h) \subset \text{Ker}(g)$. En déduire que $\dim(\text{Ker}(g)) \neq 0$.
(b) Justifier que $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(h)$.
(c) Justifier alors que $\text{Im}(g) \cap \text{Ker}(g) = \{0_E\}$ puis que $\text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(g) = E$.
2. (a) Justifier qu'il existe un vecteur $u \neq 0_E$ tel que $u \in \text{Im}(g)$.
(b) Soit u un tel vecteur. Montrer que $f(u) \in \text{Im}(g)$.
En raisonnant par l'absurde, montrer que la famille $(u, f(u))$ est libre.
3. Déterminer alors la dimension de $\text{Im}(g)$ et la dimension de $\text{Ker}(g)$.
4. Soit v un vecteur non nul de $\text{Ker}(g)$. Prouver que $\mathcal{C} = (u, f(u), v)$ est une base de E . Déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 7

QSP oral ESCP

Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(M) = {}^tM$.

Déterminer la trace d'une matrice représentative de φ .