

Exercices - Chapitre 3 - Réduction

Exercice 1

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\phi(P) = P + P'$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer les valeurs propres de ϕ .
4. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable?
5. Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = [e_1, e_2, e_3, \dots, e_n]$.

On note $u = e_1 + e_2 + \dots + e_n$.

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ noté f défini par $\forall k \in [[1, n]] \quad f(e_k) = u$.

1. (a) Montrer que u est un vecteur propre de f .
(b) Justifier que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(u)$ puis en déduire que $\text{Ker}(f - n\text{Id}_E) = \text{Im}(f)$.
2. (a) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On la notera A .
(b) Justifier que $f \circ f = nf$, puis en déduire que $\text{Sp}(f) \subset \{0, n\}$.
(c) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$. Donner une base de $\text{Ker}(f)$.
(d) Déterminer le spectre de f .
3. En déduire que f est diagonalisable.
4. Déterminer P inversible et D diagonale vérifiant $A = PDP^{-1}$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = -2f$.

1. Justifier que $\text{Sp}(f) \subset \{-2, 0\}$.
2. Montrer que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.
3. Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f + 2\text{Id}_E)$.
4. En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 4

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

Si la réponse est oui, donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & 10 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A - I_3)^2$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et de I_3 .
3. Montrer que A admet une seule valeur propre 1.
4. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
5. Soit n un entier non nul.
 - (a) Donner le reste de la division euclidienne de X^n par $(X - 1)^2$.
 - (b) En déduire A^n .

Exercice 6

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_c$ est A .

1. Déterminer la dimension et une base du noyau de f .
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit D .
3. Déterminer la matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1} .
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - I_3$

1. Déterminer le rang et les valeurs propres de B .
2. En déduire les valeurs propres de A .
3. Déterminer une matrice diagonale Δ et une matrice inversible P telles que $A = P\Delta P^{-1}$.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Justifier que A et D sont semblables.
2. Déterminer un polynôme S annulateur de A .

Exercice 9

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2.
On rappelle que $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ est la base canonique de E .

On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E , associe le reste de la division par $1 + X^3$ du polynôme $(1 - X + X^2)P$.

Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que :

$$(1 - X + X^2)P = (1 + X^3)Q + f(P), \text{ avec } \deg(f(P)) \leq 2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. (a) Déterminer $f(1), f(X)$ et $f(X^2)$ puis vérifier que $f(1) = -f(X) = f(X^2)$.
(b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$.
(c) Donner la dimension de $\text{Ker}(f)$ ainsi qu'une base de $\text{Ker}(f)$.
3. (a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\text{Im}(f)$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que :
 $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - 3\text{Id})$.
(b) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 10

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $f(A) = A - 2^t A$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer un polynôme annulateur de f .
4. En déduire les valeurs propres de f .
5. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?

Exercice 11

On considère

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M .

1. Prouver que f est diagonalisable. Déterminer la matrice de f dans une base de vecteurs propres.
2. Montrer que M' a les mêmes valeurs propres que M .
3. Prouver qu'il existe une matrice P inversible telle que $M' = PMP^{-1}$.

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E tel que $2f^2 + f - 3\text{Id}_E = 0$.

1. Montrer que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \frac{3}{2}\text{Id}_E)$.
2. En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 13

Recherche de commutant - Diagonalisation simultanée

$$\text{On définit la matrice } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable, et déterminer ses valeurs propres.
Donner alors une matrice P et une matrice diagonale D telle que $P^{-1}AP = D$.

2. Soit M une matrice carrée d'ordre 3 telle que $AM = MA$.

- (a) Montrer que les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de M .
Question classique mais difficile !!
- (b) En déduire la forme de $P^{-1}MP$.
- (c) Déterminer l'ensemble des matrices M qui commutent avec A (i.e telles que $AM = MA$).

Exercice 14

Soit a un réel. On note F l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], F(P)(X) = (X - a)P'(X)$$

1. Justifier que $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Ecrire la matrice de F dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que F est diagonalisable. Quelle est la dimension de chaque sous-espace propre de F ?
4. Déterminer le noyau de F .
5. Soit λ une valeur propre non nulle de F . Soit P un polynôme propre pour F associé à la valeur propre λ .
 - (a) Montrer que a est une racine de P .
Il existe donc un polynôme Q et un entier m non nul tel que $P(X) = (X - a)^m Q(X)$ et $Q(a) \neq 0$.
 - (b) Montrer que $(\lambda - m)Q(X) = (X - a)Q'(X)$.
 - (c) En déduire que Q est un polynôme constant. Donner l'espace propre associé à la valeur propre λ .
6. En déduire une base de $\mathbb{R}_n[X]$ composée de vecteurs propres de F .

Exercice 15

Trigonalisation d'une matrice

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A . Notons $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer $\text{Spec}(A)$, calculer les sous-espaces propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer une base $\mathcal{C}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{C}'}(f) = T$.
3. A l'aide de T , comment calculer A^n ? Expliquer une méthode.

Exercice 16

Endomorphisme et polynôme annulateur

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où $A^2 - 2A = 0$, avec $A \neq 2I$ et $A \neq 0$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

1. Justifier que $\text{Spec}(A) = \{0, 2\}$.
2. Justifier que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.
3. Prouver que f est diagonalisable (et donc A aussi !).

Exercice 17

Très classique - pas facile la 1ère fois qu'on le voit !

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.
On suppose que f admet n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinctes deux à deux.

1. (a) Justifier que $P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n)$ est annulateur de f .
(b) Justifier que si $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ n'est pas nul, alors Q n'est pas un polynôme annulateur de f .
2. (a) Préciser, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\dim(\text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}))$.
(b) Soit u un vecteur propre de f , montrer que u est un vecteur propre de g .
3. Justifier que f et g sont diagonalisables dans une même base de E .