

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans la notation. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs. Il est demandé également de numérotter les pages et de numérotter les questions.

Ce sujet est composé de trois exercices et d'un problème.

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction f_n définie par:

$$\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$$

1. (a) Ecrire une fonction Python, intitulée `def f(n,x)` qui calcule $f_n(x)$.
(b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$.
En déduire alors une deuxième façon de définir la fonction f_n , en complétant les instructions suivantes :

```
def f(n,x):  
    if x==1 :  
        return .....  
    else :  
        return .....
```

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x \in [0, 1]$, possède une unique solution α_n dans $[0, 1]$.
3. (a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
(b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
4. (a) Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leq \alpha_2 < 1$.
(b) Etablir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.
(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.
5. On suppose que la fonction f_n a été déclarée (cf question 1). On considère les commandes supplémentaires suivantes :

```
n=int(input("Entrer la valeur de n : "))  
x=0  
while f(n,x)<1 :  
    x=x+0.001  
print(x)
```

Quel est le lien entre le résultat affiché et α_n ?

6. **Question subsidiaire :** uniquement si vous avez fini tout le sujet.
Donner un équivalent de $\alpha_n - \frac{1}{2}$.

Exercice 2

1. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f \circ (f - Id)^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

- (a) Calculer $(f - Id)^2 + f \circ (2Id - f)$.
- (b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^n, x = (f - Id)^2(x) + (f \circ (2Id - f))(x)$.
- (c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n = Ker(f) \oplus Im(f)$.

2. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$f \circ (f - Id) \circ (f - 4Id) = 0$$

- (a) Déterminer deux réels a et b tels que

$$\frac{1}{4}(X - 1)(X - 4) + aX^2 + bX = 1$$

- (b) En déduire que : $\mathbb{R}^n = Ker(f) \oplus Im(f)$.

3. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f , dont le degré est égal à p (avec $p \geq 2$), et tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

- (a) Montrer qu'il existe p réels $a_1, \dots, a_p$ avec $a_1 \neq 0$, tels que $P = a_1X + \dots + a_pX^p$.
- (b) En déduire que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n = Ker(f) \oplus Im(f)$.
- (c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux questions précédentes?

Exercice 3

On note, pour tout entier naturel n , $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t) dt$.

- 1. Justifier que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
- 2.
 - (a) Rappeler la fonction dérivée de la fonction $t \mapsto \tan(t)$ sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$.
 - (b) En déduire la valeur de J_0 .
- 3.
 - (a) Justifier que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - (b) En déduire que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- 4.
 - (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+1} + J_n = \frac{1}{2n+3}$.
 - (b) Compléter la fonction Python suivante, dont le but est de calculer J_n :

```
import numpy as np
def J(n):
    J=.....
    for k in range(... , ....):
        J=.....
    return J
```

- (c) Déduire de la question 4.(a) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2(2n+3)} \leq J_n \leq \frac{1}{2(2n+1)}$$

et préciser la limite de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- (d) Ecrire une fonction Python intitulée `def Premiern(eps)` qui renvoie le premier entier n tel que $J_n \leq \text{eps}$.
(eps sera un petit nombre entré par l'utilisateur, par exemple $\text{eps} = 10^{-2}$).
- (e) Donner un équivalent de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.
5. On note : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
- (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n J_n$.
- (b) En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.
- (c) Justifier que : $S_n - \frac{\pi}{4} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{4n}$

Problème

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx) (\cos x)^n dx.$$

Nous allons étudier la nature de la série de terme général u_n et on calculer sa somme.

Partie A.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.
 (b) En déduire la valeur de u_1 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{1 - (1-t)^n}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^*, \\ n & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

- (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner $f'_n(0)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) dt.$$

- (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

- (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\int_0^1 (1-t)^{k-1} dt.$$

- (c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

puis préciser $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

4. (a) Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2px) dx = \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p}.$$

- (b) On admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \sin(2px) = 2^n \sin(nx) (\cos x)^n.$$

Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} I_n.$$

Partie B.

5. Soit $x \in [0, 1[$. Soit φ_x la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t}.$$

- (a) Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \forall t \in [0, x], \quad 0 \leq \varphi_x(t) \leq x.$$

- (b) Trouver un réel a tel que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \forall t \in [0, x], \quad \frac{\varphi_x(t)}{1-t} = \frac{x-1}{(1-t)^2} + \frac{a}{1-t}.$$

6. Soit h la fonction définie sur $[0, 1[$ par :

$$h(x) = -\ln(1-x).$$

- (a) Calculer les dérivées successives de h (vous démontrerez votre résultat par récurrence).

- (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1[, \quad h(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + R_n(x),$$

avec

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(\varphi_x(t))^n}{1-t} dt.$$

- (c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1[, \quad 0 \leq R_n(x) \leq -x^n \ln(1-x).$$

- (d) Justifier que pour tout $x \in [0, 1[$, la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ converge.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad (1-x) \sum_{k=1}^n I_k x^k = h(x) - R_n(x) - I_n x^{n+1}.$$

- (b) En déduire que, pour tout $x \in [0, 1[$, la série de terme général $I_k x^k$ converge et que

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} I_k x^k = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

- (c) En déduire la convergence de la série de terme général u_k et calculer la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.