

Exercice 1 : Edhec 2017

Analyse de 1ère année uniquement

1. (a)

```
def f(n,x):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        s=s+x**k
    return s
```

(b) Pour $x \neq 1$, on a : $f_n(x) = x \cdot \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et pour $x = 1$, $f_n(x) = n$. Le programme peut alors s'écrire :

```
def f(n,x):
    if x==1 :
        y=n
    else :
        y=x*(1-x**(n+1))/(1-x)
    return y
```

2. f est continue et dérivable sur $[0, 1]$ comme fonction polynomiale.

La dérivée $f'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$, est strictement positive sur $[0, 1]$. f réalise donc une bijection strictement croissante de $[0, 1]$ sur $[f(0), f(1)] = [0, n]$. Le nombre $1 \in [0, n]$ possède donc un unique antécédent dans $[0, 1]$ par f .

Conclusion : l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution $\alpha_n \in [0, 1]$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_n^k = f_n(\alpha_n) + \alpha_n^{n+1} = 1 + \alpha_n^{n+1}$$

Or, $\alpha_n \in [0, 1]$, donc $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 1$$

et comme f_{n+1} est strictement croissante, on peut alors conclure que $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$.

Bilan : La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(b) La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0.

Bilan : La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$.

4. (a) Par définition, α_2 est l'unique solution de l'équation $x + x^2 = 1$ dans $[0, 1]$. Un simple calcul de discriminant donne alors $\alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. De plus $1 \leq \sqrt{5} < 3$ donne directement les inégalités demandées.

Bilan : $\alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et on a bien $0 \leq \alpha_2 < 1$.

(b) $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant décroissante, on a pour tout entier $n \geq 2$:

$$0 \leq \alpha_n \leq \alpha_2 < 1 \quad \text{et donc} \quad 0 \leq \alpha_n^{n+1} \leq \alpha_2^{n+1}$$

Or, puisque $\alpha_2 \in [0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_2^{n+1} = 0$ et par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.

Bilan : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.

(c) D'après 1.(b), α_n est l'unique solution, dans $[0, 1]$, de l'équation $x \cdot \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\alpha_n - \alpha_n^{n+1} = 1 - \alpha_n, \quad \text{ou encore} \quad : \quad 2\alpha_n = 1 + \alpha_n^{n+1}$$

Or, d'après les questions précédentes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n^{n+1} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \ell$$

La limite ℓ de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie donc : $2\ell = 1$ et donc $\ell = \frac{1}{2}$.

Bilan : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$.

5. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On sait déjà que f_n est croissante sur $[0, 1]$ et $f_n(0) = 0$. Le programme va alors tester toutes les valeurs de $f_n(x)$ à partir de $x = 0$ et avec un pas de 0,001 tant que $f_n(x) < 1$. La valeur affichée par le programme est alors le premier de ces nombres x pour lequel $f_n(x) \geq 1$. Le résultat affiché est donc le plus petit nombre du type $k \times 0,001$ ($k \in \mathbb{N}$) supérieur ou égal à α_n .

Bilan : Le résultat affiché est une valeur approchée par excès à 0,001 près de α_n .

Il s'agit de la méthode dite "de balayage" pour calculer la valeur approchée d'une solution d'équation.

6. On sait que

$$\alpha_n - (\alpha_n)^{n+1} = 1 - \alpha_n \Leftrightarrow \alpha_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\alpha_n)^{n+1}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_n - \frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^{n+2}} &= (2\alpha_n)^{n+1} \\ &= \exp((n+1) \ln(2\alpha_n)) \\ &= \exp((n+1) \ln(1 + (\alpha_n)^{n+1})) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^{n+1} = 0$, on a alors

$$(n+1) \ln(1 + (\alpha_n)^{n+1}) \sim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \cdot (\alpha_n)^{n+1}$$

Mais $0 \leq (n+1)(\alpha_n)^{n+1} \leq (n+1)(\alpha_2)^{n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)(\alpha_2)^{n+1} = 0$ par croissances comparées. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)(\alpha_n)^{n+1} = 0$ et enfin,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp((n+1) \ln(1 + (\alpha_n)^{n+1})) = 1$$

Bilan : $\alpha_n - \frac{1}{2} \sim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2})^{n+2}$

Exercice 2 : Edhec 2016

Polynômes d'endomorphismes (cours de 1ère année ++)

1. (a)

$$(f - Id)^2 + f \circ (2Id - f) = f^2 - 2f + Id + 2f - f^2 = Id$$

(b) D'après la première question, $Id = (f - Id)^2 + f \circ (2Id - f)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$Id(x) = (f - Id)^2(x) + (f \circ (2Id - f))(x)$$

soit :

$$x = (f - Id)^2(x) + (f \circ (2Id - f))(x)$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f((f - Id)^2(x)) = f \circ (f - Id)^2(x) = 0$ donc $(f - Id)^2(x) \in Ker(f)$. De plus, $(f \circ (2Id - f))(x) \in Im(f)$. Donc, avec (b), tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme somme d'un vecteur de $Ker(f)$ et d'un vecteur de $Im(f)$, on a alors $\mathbb{R}^n = Ker(f) + Im(f)$.De plus, d'après le théorème du rang, $\dim Ker(f) + \dim Im(f) = n = \dim \mathbb{R}^n$, donc on a bien $\mathbb{R}^n = Ker(f) \oplus Im(f)$ **Bilan :** $\mathbb{R}^n = Ker(f) \oplus Im(f)$ 2. (a) On cherche deux réels a et b tels que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(X-1)(X-4) + aX^2 + bX = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(X^2 - 5X + 4) + aX^2 + bX - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} - a\right)X^2 + \left(-\frac{5}{4} + b\right)X = 0 \end{aligned}$$

Un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls, on trouve donc que $a = -\frac{1}{4}$ et $b = \frac{5}{4}$ conviennent.**Bilan :** $a = -\frac{1}{4}$ et $b = \frac{5}{4}$ (b) Comme dans 1., on a cette fois-ci à partir de $\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + \frac{1}{4}X^2 - \frac{5}{4}X = 1$:

$$\frac{1}{4}(f - Id) \circ (f - 4Id) + f \circ \left(\frac{1}{4}f - \frac{5}{4}Id\right) = Id$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x = \left(\frac{1}{4}(f - Id) \circ (f - 4Id)\right)(x) + f \circ \left(\frac{1}{4}f - \frac{5}{4}Id\right)(x)$$

Or l'énoncé nous dit que : $f \circ (f - Id) \circ (f - 4Id) = 0$, donc $\left(\frac{1}{4}(f - Id) \circ (f - 4Id)\right)(x) \in Ker(f)$ de plus $f \circ \left(\frac{1}{4}f - \frac{5}{4}Id\right)(x) = f\left(\frac{1}{4}f(x) - \frac{5}{4}x\right) \in Im(f)$.Donc $\mathbb{R}^n = Ker(f) + Im(f)$.Toujours d'après le théorème du rang, $\dim Ker(f) + \dim Im(f) = n = \dim \mathbb{R}^n$, donc on a bien $\mathbb{R}^n = Ker(f) \oplus Im(f)$ **Bilan :** $\mathbb{R}^n = Ker(f) \oplus Im(f)$ 3. (a) $P \in \mathbb{R}_p[X]$, il existe donc $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$. De plus $P(0) = a_0$ et $P'(0) = a_1$. Donc d'après l'énoncé, $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$.(b) Soit $x \in Ker(f) \cap Im(f)$. Alors il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f(y)$, et de plus $f(x) = 0$. On a donc $f^2(y) = 0$, et pour tout $k \geq 2$, $f^k(y) = f^{k-2}(f^2(y)) = f^{k-2}(0) = 0$. P étant annulateur de f , on a $(P(f))(y) = 0$, soit : $a_1f(y) + a_2f^2(y) + \dots + a_pf^p(y) = 0$. Comme $f^2(y) = \dots = f^p(y) = 0$, on obtient $a_1f(y) = 0$, c'est-à-dire que $a_1x = 0$. Comme $a_1 \neq 0$, $x = 0$.**Bilan :** $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$.Une fois de plus, par le théorème du rang, $\dim Ker(f) + \dim Im(f) = \dim \mathbb{R}^n$, donc $\mathbb{R}^n = Ker(f) \oplus Im(f)$.**Bilan :** $\mathbb{R}^n = Ker(f) \oplus Im(f)$ (c) Dans la question 1., $P = X(X-1)^2$, et dans la question 2., $P = X(X-1)(X-4)$, vérifient tous les deux $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$ (c'est-à-dire que 0 est racine simple de ces polynômes). Le résultat que l'on vient d'obtenir est bien une généralisation des deux questions précédentes.**Exercice 3 : Edhec 2016**Soit n un entier naturel, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t) dt$.1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.La fonction $t \rightarrow \tan(t)$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, donc sur $[0; \frac{\pi}{4}]$.Par produit, la fonction $t \rightarrow (\tan(t))^{2n+2}$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{4}]$.Ainsi l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t) dt$ existe. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, J_n existe.Bilan : La suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.2. (a) La fonction $t \rightarrow \tan(t)$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et

$$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \quad \tan'(t) = 1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}.$$

$$\begin{aligned} (b) \quad J_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{0+2}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + \tan^2(t) - 1 dt \\ J_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan'(t) - 1 dt = [\tan(t) - t]_0^{\frac{\pi}{4}}. \quad \text{Ainsi } J_0 = 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+4}(t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+4}(t) - \tan^{2n+2}(t) dt \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t) (\tan^2(t) - 1) dt \end{aligned}$$

Soit $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ fixé. $y \rightarrow \tan(y)$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ donc $\tan(0) \leq \tan(t) \leq \tan(\frac{\pi}{4})$.Donc $0 \leq \tan(t) \leq 1$. $y \rightarrow y^2$ est croissante sur $[0, 1]$ donc $0 \leq \tan^2(t) \leq 1$. Ainsi, $\tan^2(t) - 1 \leq 0$. $\tan(t) \geq 0$ donc $\tan^{2n+2}(t) (\tan^2(t) - 1) \leq 0$.

$$\text{Bilan } \forall t \in [0, \frac{\pi}{4}], \tan^{2n+2}(t) (\tan^2(t) - 1) \leq 0$$

En intégrant membre à membre cette inégalité, les bornes étant dans le bon sens $0 \leq \frac{\pi}{4}$,on obtient : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t) (\tan^2(t) - 1) dt \leq 0$ ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} - J_n \leq 0$. Bilan : la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \tan^{2n+2}(t) \geq 0$$

En intégrant membre à membre cette inégalité, les bornes étant dans le bon sens $0 \leq \frac{\pi}{4}$,

$$\text{on obtient : } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t) dt \geq 0$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, J_n \geq 0$. Ainsi la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.

Par ailleurs, elle est décroissante.

Grâce au théorème de limite monotone, la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

On note ℓ sa limite. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell \leq J_{n+1} \leq J_n \leq J_0$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned} J_{n+1} + J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+4}(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+4}(t) + \tan^{2n+2}(t) dt \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t) (\tan^2(t) + 1) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan'(t) \tan^{2n+2}(t) dt \\ &= \left[\frac{1}{2n+3} \tan^{2n+3}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2n+3} \tan^{2n+3}\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0 \end{aligned}$$

$$\text{Bilan : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+1} + J_n = \frac{1}{2n+3}}.$$

(b) def J(n):

```
J=1-np.pi/4
for k in range(1,n+1):
    J=-J+1/(2*k+1)
return J
```

(c) La suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Ainsi $n-1 \in \mathbb{N}$ donc $J_{n+1} \leq J_n \leq J_{n-1}$

Ainsi $J_{n+1} + J_n \leq J_n + J_n \leq J_{n-1} + J_n$. Par ailleurs, $n-1 \in \mathbb{N}$ donc la formule établie en 4.a. est valable en particulier pour $n-1$ et pour n , ainsi

$$\frac{1}{2n+3} \leq 2J_n \leq \frac{1}{2(n-1)+3}.$$

$$2 > 0 \text{ donc : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2(2n+3)} \leq J_n \leq \frac{1}{2(2n+1)}}$$

Par encadrement, on trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$

(d) def Premiern(eps):

```
J=1-np.pi/4
k=0
while J>eps:
    k=k+1
    J=-J+1/(2*k+1)
return k
```

(e) Idée : on remarque que : $\frac{1}{2(2n+3)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n}$ et que $\frac{1}{2(2n+1)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n}$

On va essayer de montrer que $J_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n}$,

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$$4n > 0 \text{ donc } \frac{4n}{2(2n+3)} \leq 4nJ_n \leq \frac{4n}{2(2n+1)}$$

Par quotient, $\frac{4n}{2(2n+3)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{4n} \sim_{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4n}{2(2n+3)} \right) = 1$

De même : $\frac{4n}{2(2n+1)} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n}{4n} \sim_{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4n}{2(2n+3)} \right) = 1$

Grâce au théorème des encadrements, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4nJ_n) = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{J_n}{\frac{1}{4n}} \right) = 1$.

$$\text{Ainsi : } \boxed{J_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n}}.$$

5. (a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n J_n$ par récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}$, On note $\mathcal{H}(n)$ la proposition : " $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n J_n$."

$$\bullet S_0 = \sum_{k=0}^0 \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1.$$

Par ailleurs, $\frac{\pi}{4} + (-1)^0 J_0 = \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} = 1$, grâce à la question 2b.

Donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

• Supposons que $\mathcal{H}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) + \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)+1} \\ &= S_n + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} \\ &= \frac{\pi}{4} + (-1)^n J_n + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+3} \text{ car } \mathcal{H}(n) \text{ est supposée vraie.} \\ &= \frac{\pi}{4} + (-1)^n J_n + (-1)^{n+1} (J_n + J_{n+1}) \text{ grâce à 2} \\ &= \frac{\pi}{4} + (-1)^n (J_n - J_n) + (-1)^{n+1} J_{n+1} \\ &= \frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} J_{n+1} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

$$\bullet \text{ Par récurrence : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n J_n}$$

(b) soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| = |(-1)^n J_n| = |(-1)^n| \times |J_n| = J_n. \text{ car } J_n \geq 0.$$

On a montré que $J_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n) = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| \right) = 0$

$\frac{\pi}{4}$ est indépendant de n donc la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa limite vaut : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n) = \frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n) = \frac{\pi}{4}}$$

(c) On a montré que $J_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n}$. Par produit : $(-1)^n J_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{4n}$

$$\text{Bilan : } \boxed{S_n - \frac{\pi}{4} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{4n}}$$

Problème

Partie A.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le cours,

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

- (b) On en déduit que :

$$u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2x) dx$$

Posons

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin(2x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{\cos(2x)}{2} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on peut donc intégrer par parties.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \left(\left[-x \frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx \right) \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{8} \quad \text{car} \quad \sin(0) = \sin(\pi) = 0 \end{aligned}$$

Bilan : $u_1 = \frac{\pi}{8}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{1 - (1-t)^n}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^*, \\ n & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que fonction rationnelle définie sur cet ensemble. Ensuite, comme $\lim_{t \rightarrow 0} -t = 0$, par équivalence classique,

$$(1-t)^n - 1 \sim_{t \rightarrow 0} n \cdot (-t) \quad \text{et donc} \quad 1 - (1-t)^n \sim_{t \rightarrow 0} nt$$

Par conséquent, $\lim_{t \rightarrow 0} f_n(t) = n = f(0)$ donc f est continue en 0.

Bilan : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à la limite quand t tend vers 0 du taux d'accroissement

$$\frac{f_n(t) - f_n(0)}{t - 0} = \frac{\frac{1 - (1-t)^n}{t} - n}{t} = \frac{1 - (1-t)^n - nt}{t^2}$$

Rappelons que le DL de $(1+u)^n$ en 0 à l'ordre 2 est :

$$(1+u)^n = 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2} u^2 + o_{u \rightarrow 0}(u^2)$$

donc ici avec $\lim_{t \rightarrow 0} -t = 0$:

$$(1-t)^n = 1 - nt + \frac{n(n-1)}{2} t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$$

et ainsi

$$\frac{f_n(t) - f_n(0)}{t - 0} = \frac{1 - 1 + nt - \frac{n(n-1)}{2} t^2 + o(t^2) - nt}{t^2} = -\frac{n(n-1)}{2} + o_{t \rightarrow 0}(1)$$

donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_n(t) - f_n(0)}{t - 0} = -\frac{n(n-1)}{2}$

Bilan : la fonction f_n est dérivable en 0 et $f'_n(0) = -\frac{n(n-1)}{2}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) dt.$$

- (a) D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t} \cdot \left(1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-t)^k \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t} \cdot \left(- \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-t)^k \right) dt \quad \text{car} \quad \binom{0}{n} (-t)^0 = 1 \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \cdot t^{k-1} dt \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \int_0^1 t^{k-1} dt \quad \text{car} \quad (-1)^{k+1} = (-1)^{k-1} \\ &\quad \text{et par linéarité de l'intégrale} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{car} \quad \int_0^1 t^{k-1} dt = \left[\frac{t^k}{k} \right]_0^1 = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$

- (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 (1-t)^{k-1} dt = \left[-\frac{(1-t)^k}{k} \right]_0^1 = \frac{1}{k}$$

- (c) En pensant à utiliser la somme des termes d'une suite géométrique, on part du membre de droite :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 (1-t)^{k-1} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n (1-t)^{k-1} dt \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} (1-t)^i dt \quad \text{en posant } i = k-1 \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{1 - (1-t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} dt = I_n \end{aligned}$$

On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

En reconnaissant la série harmonique (série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$) qui diverge, on a enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$

4. (a) Posons

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin(2px) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{\cos(2px)}{2p} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on peut donc intégrer par parties.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2px) dx \\ &= \left[-x \frac{\cos(2px)}{2p} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2px) dx \\ &= -\frac{\pi}{4p} \cos(p\pi) + \frac{1}{2p} \left[\frac{\sin(2px)}{2p} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= (-1)^{p+1} \frac{\pi}{4p} \text{ car } \sin(0) = \sin(\pi) = 0 \text{ et } \cos(p\pi) = (-1)^p \end{aligned}$$

Bilan : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2px) dx = \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p}$

(b) On admet que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \sin(2px) = 2^n \sin(nx) (\cos(x))^n.$$

A l'aide de ce résultat, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(nx) (\cos(x))^n dx \\ &= \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \sin(2px) dx \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2px) dx \\ &\quad \text{en remarquant que le terme en } p=0 \text{ est nul, et par linéarité de l'intégrale} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p} \text{ d'après la question précédente} \\ &= \frac{\pi}{2^{n+2}} \cdot \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \\ &= \frac{\pi}{2^{n+2}} \cdot I_n \text{ d'après 3.(a)} \end{aligned}$$

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} I_n$

Partie B.

5. Soit $x \in [0, 1[$. Soit φ_x la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t}.$$

(a) Soit $x \in [0, 1[$. La fonction φ est dérivable sur $[0, 1[$ et pour tout $t \in [0, 1[$,

$$\varphi'(t) = \frac{-(1-t) + (x-t)}{(1-t)^2} = \frac{x-1}{(1-t)^2} \leq 0$$

car $x < 1$, donc φ est décroissante sur $[0, x]$. Ainsi, pour tout $t \in [0, x]$,

$$\varphi(x) \leq \varphi(t) \leq \varphi(0) \Leftrightarrow 0 \leq \varphi(t) \leq x$$

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\frac{x-1}{(1-t)^2} + \frac{a}{1-t} = \frac{x-1+a(1-t)}{(1-t)^2} = \frac{x+(a-1)-at}{(1-t)^2}$$

donc si $a = 1$, on a bien

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \forall t \in [0, x], \quad \frac{\varphi_x(t)}{1-t} = \frac{x-1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t}.$$

6. Soit h la fonction définie sur $[0, 1[$ par :

$$h(x) = -\ln(1-x).$$

(a) La fonction $x \mapsto 1-x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$, à valeurs dans $]0, 1]$. Comme la fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1]$, par composition la fonction h est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$. Calculons ses dérivées successives : $\forall x \in [0, 1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} \quad f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} \quad f^{(3)}(x) = 2(1-x)^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = 6(1-x)^{-4} \quad f^{(5)}(x) = 24(1-x)^{-5}$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}(n) : \forall x \in [0, 1[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n},$$

et montrons ce résultat par récurrence sur n .

- Initialisation : si $n = 1$, $f'(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{0!}{(1-x)^1}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\ &= (n-1)! \cdot (-1) \cdot (-n) \cdot (1-x)^{-n-1} \\ &= n! \cdot (1-x)^{-(n+1)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction h , à l'ordre n , entre 0 et x :

$$h(x) = \sum_{i=0}^n \frac{h^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} h^{(n+1)}(t) dt$$

De plus, $h(0) = 0$ et pour tout $i \in [[1, n]]$, $h^{(i)}(0) = (i-1)!$ d'après ce qui précède, donc

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{i} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{n!}{(1-t)^{n+1}} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{x^i}{i} + \int_0^x \frac{(\varphi_x(t))^n}{1-t} dt \end{aligned}$$

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1[$,

$$h(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + R_n(x) \text{ avec } R_n(x) = \int_0^x \frac{(\varphi_x(t))^n}{1-t} dt.$$

(c) Pour tout $t \in [0, x]$, $0 \leq \varphi(t) \leq x$, donc par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\varphi(t))^n \leq x^n \\ \Rightarrow 0 &\leq \frac{(\varphi(t))^n}{1-t} \leq \frac{x^n}{1-t} \text{ car } 1-t > 0 \end{aligned}$$

D'où par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon ordre :

$$0 \leq R_n(x) \leq x^n \cdot \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = x^n \cdot [-\ln(1-t)]_0^x = -x^n \cdot \ln(1-x)$$

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1[, \quad 0 \leq R_n(x) \leq -x^n \ln(1-x)$

(d) Soit $x \in [0, 1[$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -x^n \cdot \ln(1-x) = 0$. Par encadrement, on déduit de la question précédente que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = h(x) = -\ln(1-x)$$

. Bilan : pour tout $x \in [0, 1[$, la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

Par croissances comparées avec $|x| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx^{n+1} = 0$, donc par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \cdot x^{n+1} = 0$. Finalement, on passant à la limite dans la relation précédente, on trouve que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n I_k x^k = \frac{h(x)}{1-x}$$

Bilan: pour tout $x \in [0, 1[$, la série de terme général $I_k x^k$ converge et

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} I_k x^k = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

(c) On sait que $u_k = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot I_k$. En prenant $x = \frac{1}{2} \in [0, 1[$ dans le résultat précédent, la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot I_k$ converge et par conséquent la série de terme général u_k converge, et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{-\ln(1-\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} \cdot 2 \ln(2) = \frac{\pi \ln(2)}{2}$$

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{k=1}^n I_k x^k &= \sum_{k=1}^n I_k x^k - \sum_{k=1}^n I_k x^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n I_k x^k - \sum_{j=2}^{n+1} I_{j-1} x^j \text{ en posant } j = k+1 \\ &= I_1 \cdot x + \sum_{k=2}^n (I_k - I_{k-1}) x^k - I_n \cdot x^{n+1} \\ &= x + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \cdot x^k - I_n x^{n+1} \text{ d'après le 3.(c)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} - I_n x^{n+1} \text{ car } I_1 = 1 \\ &= h(x) - R_n(x) - I_n x^{n+1} \text{ d'après le 6.(b)} \end{aligned}$$

Bilan : $\forall x \in [0, 1[, \quad (1-x) \sum_{k=1}^n I_k x^k = h(x) - R_n(x) - I_n x^{n+1}$

(b) Soit $x \in [0, 1[$. On a déjà vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$. Ensuite, on a

$$0 \leq I_n \cdot x^{n+1} = xn + 1 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot x^{n+1} \leq x^n \cdot \sum_{k=1}^n 1 = nx^{n+1}$$