

Informatique : programmation en langage Python

Révision des instructions sur les matrices : définition d'une matrice, matrices usuelles, opérations usuelles sur les matrices.

Calcul d'une somme ou d'un produit : par boucle `for` ou en utilisant les matrices du type `np.arange(1,n+1,1)` et les instructions `np.sum`, `np.prod`

Calcul du n-ième terme d'une suite par boucle `for`.

Chapitre 1. Révisions d'analyse (fin)

F. Formules de Taylor et DL

Formule de Taylor avec reste intégral (énoncé précis !!).

Formule de Taylor pour les polynômes.

Inégalité de Taylor-Lagrange.

Formule de Taylor-Young.

Développements limités en 0 de e^x , $\ln(1+x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$, $(1+x)^\alpha$

FORMULES PAR COEUR !!

Exercice à savoir refaire

Soit n un entier naturel.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} e^{-t} dt$.

Exercice à savoir refaire

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer ses dérivées successives.

2. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que pour tout réel x positif,

$$|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

3. En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et donner la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice à savoir refaire

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\text{Arctan}(x)$.

Chapitre 2. Révisions d'algèbre linéaire (tout)

Seules les preuves indiquées sont exigibles.

Points abordés :

- Savoir montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel (deux méthodes : stabilité par combinaison linéaire (méthode "en trois points") ou s.e.v. engendré).
- Savoir montrer que deux s.e.v. F et G sont supplémentaires dans E : analyse et synthèse, utilisation de la dimension, concaténation de bases.
- Somme directe de n sous-espaces vectoriels.
- Savoir montrer qu'une famille est libre.
- Trouver une base en dimension finie : on commence par écrire F comme un sev engendré.
- Théorème de caractérisation des bases :
 $\mathcal{B}$ libre et $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$: $\mathcal{B}$ est une base de E .
 $\mathcal{B}$ génératrice et $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$: $\mathcal{B}$ est une base de E .
- Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une famille de vecteurs de E . Cette famille est une base de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est inversible.
- Matrice de passage de $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
- **Inverse d'une matrice 2×2 (*)**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On appelle déterminant de A le réel $\det(A) = ad - bc$.

La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Si c'est le cas alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ce résultat est à savoir démontrer (méthode : multiplier A par $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ puis distinguer deux cas selon la valeur de $\det(A)$)

- Application linéaire f , noyau et image de f , **théorème du rang**.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(\mathcal{B}_E))$. Attention à l'ordre des bases.
- Relation $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(g) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$$

- **Formules de changement de bases PAR COEUR**

$$X = P.X'$$

$$A' = P^{-1}.A.P$$

où $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$, $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

- Polynôme d'endomorphisme, polynôme de matrice.
- **Polynôme annulateur.**
- Rang d'une matrice : définition, méthode de calcul.
- Rang d'un endomorphisme, lien avec le rang de la matrice.
- Noyau d'une matrice.
- **Matrices semblables** : définition. Deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.
- Deux matrices semblables ont le même rang.
- **Trace d'une matrice carrée** :
 1. Définition
 2. Tr est linéaire.
 3. $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ (*) : **à savoir démontrer**, on est obligé de revenir à la définition du produit matriciel.
 4. Deux matrices semblables ont la même trace (*)
- Sous-espace stable : définition.

Chapitre 3. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (début)

Chapitre uniquement en question de cours cette semaine.

I. Valeurs propres et vecteurs propres

1. Cas des matrices

- **Valeur propre d'une matrice, vecteur propre d'une matrice, spectre d'une matrice** : **DEFINITIONS A CONNAITRE.**
Sous-espace propre associé à la valeur propre λ :

$$E_{\lambda}(A) = \text{Ker}(A - \lambda.I)$$

- λ est valeur propre de A ssi $A - \lambda.I$ n'est pas inversible.
- $0 \in \text{Spec}(A)$ ssi A n'est pas inversible.

- Si A est une matrice triangulaire, $\text{Spec}(A) = \{ \text{coeff. diagonaux de } A \}$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = \lambda.X$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k.X = \lambda^k.X$
Pour tout polynôme Q , on obtient $Q(A).X = Q(\lambda).X$.
- Soit P un polynôme annulateur de A . Alors

$$\text{Spec}(A) \subset \{ \text{racines de } P \}$$

- Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède au plus n valeurs propres.

2. Cas des endomorphismes.

Soit E un e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- **Valeur propre d'une matrice, vecteur propre d'un endomorphisme** ($u \in E$ non nul tel que...), **spectre d'un endomorphisme.**
Sous-espace propre associé à la valeur propre λ :

$$E_{\lambda}(f) = \text{Ker}(f - \lambda.Id_E)$$

- λ est valeur propre de f ssi $f - \lambda.Id_E$ n'est pas bijective.
- $0 \in \text{Spec}(f)$ ssi f n'est pas bijective.
- Si $u_1, \dots, u_p$ sont p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, alors la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre (*).
- Les sous-espaces propres de f sont en somme directe.
- Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de E .
- Pour tout endomorphisme f de E , si $\text{Spec}(f) \neq \emptyset$ alors :

$$\text{Card}(\text{Spec}(f)) \leq \sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} \dim(\text{Ker}(f - \lambda Id_E)) \leq \dim(E)$$

- Si $f(x) = \lambda x$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$.
Si Q est un polynôme alors $Q(f)(x) = Q(\lambda).x$.
- Soit P un polynôme annulateur de f . Alors

$$\text{Spec}(f) \subset \{ \text{racines de } P \}$$

(*) : **preuve à connaître**