

Exercice 1 : un exercice sur la trace

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

- On note tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.
 - Montrer que $\text{Im}(\text{tr}) = \mathbb{R}$.
 - En déduire la dimension de $\ker(\text{tr})$.
 - Etablir que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\text{tr}) \oplus \text{Vect}(I)$.
- Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + \text{tr}(M)I$.
 - Montrer que f est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Calculer $f(I)$. En déduire une valeur propre de l'endomorphisme f .
 - Soit $B \in \ker(\text{tr})$. Calculer $f(B)$. En déduire une autre valeur propre de f .
 - Montrer que f est diagonalisable.
 - f est-il un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$?
- Soit J une matrice non nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.
Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + \text{tr}(M)J$.
On admet que g est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Justifier que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme g .
 - Montrer que 1 est la seule valeur propre de g .
 - g est-il diagonalisable ?
 - Soit F un sous-espace vectoriel de $\ker(\text{tr})$. Prouver que F est stable par g .
 - Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $J \in G$. Prouver que G est stable par g .
 - Justifier qu'il existe une matrice B de trace nulle, telle que $B \notin \text{Vect}(J)$.
Soit $H = \text{Vect}(I, B)$. Justifier que H est un plan vectoriel ne contenant pas J , et que H n'est pas stable par g .

Exercice 2 : un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On rappelle que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

A toute fonction f de E , on associe la fonction $T(f)$ où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

- Soit $f \in E$. Prouver que la fonction $T(f)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Déterminer $(T(f))'(x)$ en fonction de f et de x .
 - Soit f l'application telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(2\pi x)$. Déterminer $T(f)$.
- Justifier que T est un endomorphisme de E .
 - T est-il injectif ? surjectif ? Justifier.
- Soit $F = \mathbb{R}_2[x]$. On rappelle que F est un sous-espace vectoriel de E .
 - Justifier que F est stable par T .
 - On note U la restriction de l'application T à F . Cette application U est alors un endomorphisme de F .
Déterminer la matrice de U dans la base canonique $\mathcal{C} = (f_0, f_1, f_2)$ où pour tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, pour tout $x \in \mathbb{R}, f_k(x) = x^k$.
 - U est-il un automorphisme de F ? U est-il diagonalisable ?
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit g_a l'application où $\forall x \in \mathbb{R}, g_a(x) = \exp(ax)$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{B} = (g_0, \dots, g_n)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre.
 - Justifier que g_a est un vecteur propre de T associé à une valeur propre que l'on notera $\lambda(a)$.
Déterminer $\lambda(a)$ en fonction de a .
 - Justifier que le sous-espace vectoriel $H_n = \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)$ est stable par T .
 - Soit h l'application définie sur $\mathbb{R}$, où $h(0) = 1$ et $\forall u \in \mathbb{R}^*, h(u) = \frac{e^u - 1}{u}$.
Vérifier que h est continue sur $\mathbb{R}$, préciser ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
En déduire que tout réel strictement positif est valeur propre de T .