

Chapitre 4 - Intégrales impropres

I. Nature et valeur d'une intégrale impropre

I.1) Intégrale impropre à droite

Dans cette partie, a désigne un réel fixé et b désigne soit un réel strictement supérieur à a , soit $+\infty$.

Définition I.1

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a, b[$ mais pas en b .

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est alors dite **impropre en b** .

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **converge** si la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow b$.

On note alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt$$

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ ne converge pas, on dit qu'elle **diverge** (ou aussi que cette intégrale n'existe pas).

Remarque

Déterminer la **nature** d'une intégrale impropre, c'est dire si elle est convergente ou divergente.

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes et calculer leur valeur si elles sont convergentes.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt; \quad I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)} dt; \quad I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt; \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt; \quad I_5 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$$

I.2) Intégrale impropre à gauche

Dans cette partie, b désigne un réel fixé et a désigne soit un réel strictement inférieur à a , soit $-\infty$.

Définition I.2

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $]a, b]$ mais pas en a .

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est alors dite **impropre en a** .

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **converge** si la fonction $F : x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow a$.

On note alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t)dt$$

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ ne converge pas, on dit qu'elle **diverge** (ou aussi que cette intégrale n'existe pas).

Exercice 2

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes et calculer leur valeur si elles sont convergentes.

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)} dt, \quad J_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt, \quad J_3 = \int_0^1 t^3 \ln(t) dt$$

I.3) Intégrale doublement impropre

Cette fois, a désigne un réel ou $-\infty$ et b désigne un réel strictement plus grand que a ou $+\infty$.

Définition I.3

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $]a, b[$ mais pas en a ni en b .

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est alors dite **doublement impropre en a et en b** .

On dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge s'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent. On note alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Avec les mêmes notations, on a le résultat suivant :

Proposition I.1

Si $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors pour tout $c \in]a, b[$, les intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes et

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Exercice 3

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes et préciser leur valeur éventuelle

$$K_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt, \quad K_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt, \quad K_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

Remarque

- Choisir judicieusement c pour simplifier les calculs.
- La divergence de l'une des deux intégrales $\int_a^c f(t)dt$ ou $\int_c^b f(t)dt$ suffit à conclure à la divergence de $\int_a^b f(t)dt$.

I.4) Intégrale multiplement impropre

Définition I.4

Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tels que $-\infty \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n \leq +\infty$. Soit f une fonction définie et continue sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$ ($k \in [[1, n-1]]$). On dit que l'intégrale $\int_{a_1}^{a_n} f(t)dt$ converge si pour tout $k \in [[1, n-1]]$ l'intégrale $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$ converge. En cas de convergence, on pose

$$\int_{a_1}^{a_n} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$$

Remarque

Pour démontrer la convergence d'une telle intégrale, on va "couper" l'intégrale en un certain nombre d'intégrales simplement impropres.

I.5) Intégrales faussement impropres

Proposition I.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b[$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Si f est prolongeable par continuité en une fonction continue $\tilde{f}$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$. Dans ce cas on dit que l'intégrale est **faussement impropre en b** .

Remarque

Bien sûr, on a le résultat analogue pour une intégrale faussement impropre en a .

Exercice 4

- Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$ est convergente.
- Montrer que l'intégrale $\int_0^1 e^{-\frac{1}{x}} dx$ est convergente.

I.6) Divergence triviale en $+\infty$ ou en $-\infty$

Proposition I.3

Soit a un réel et f continue sur $[a; +\infty[$. Si la fonction f tend vers un réel $l \neq 0$, vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

I.7) Intégrale des fonctions continues par morceaux

Définition I.5

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction définie sur $[a, b]$.

On dit que la fonction f est **continue par morceaux** sur l'intervalle $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ notée $f_{|a_i, a_{i+1}[}$ admet un prolongement continu sur l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.

Proposition I.4

Avec les notations ci-dessus, l'intégrale $\int_{a_0}^{a_n} f(t)dt$ converge et

$$\int_{a_0}^{a_n} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)dt$$

I.8) Reste d'une intégrale impropre convergente

Soient a un réel. Soit b un réel supérieur ou égal à a ou $b = +\infty$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ mais pas en b .

Proposition I.5

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$, impropre en b est **convergente** alors

$$\lim_{x \rightarrow b} \left(\int_x^b f(t)dt \right) = 0.$$

Autrement dit : le **reste d'une intégrale impropre convergente** tend vers 0.

Soient b désignant un réel et a désignant un réel inférieur ou égal à b ou $-\infty$.

Proposition I.6

Si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$, impropre en a est **convergente** alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = 0.$$

Exercice 5

Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \right) = 0$.

II. Intégrales usuelles

II.1) Fonction exponentielle

Théorème II.1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Dans le cas où $\alpha > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$$

II.2) Intégrales de Riemann

Théorème II.2

Intégrales de Riemann "simples"

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Théorème II.3

Intégrales de Riemann "simples" (variante)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et c un réel strictement positif.

1. L'intégrale $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. L'intégrale $\int_0^c \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Théorème II.4

Intégrales de Riemann impropres en un point

Soit a et b deux réels, $a < b$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. L'intégrale $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
2. L'intégrale $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Exemple

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt, \quad I_2 = \int_{-1}^0 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t+1}} dt \quad I_3 = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

II.3) L'intégrale de Gauss

Théorème II.5

Intégrale de Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ existe et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 \quad \text{ou aussi} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

Théorème II.6

Soit m un réel et σ un réel strictement positif.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt \text{ existe et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt = 1$$

Remarque

On note $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}$

On verra dans le cours des variables à densités que f est une densité.

II.4) Un exercice : Logarithme (HP)

Exercice 6

L'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et $\int_0^1 \ln(t) dt = -1$.

Remarque

Pas au programme mais sert souvent !!!

III. Propriétés et méthodes de calcul

III.1) Propriétés

Proposition III.1

Permutation des bornes

Soit a désignant un réel et soit b désignant un réel strictement supérieur à a , ou bien $+\infty$.

Soit f une application continue sur l'intervalle $[a, b[$

- Les deux intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_b^a f(t) dt$ sont de même nature.
- Si $\int_a^b f(t) dt$ existe alors $\int_b^a f(t) dt$ existe aussi et $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$

Proposition III.2

Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$, telles que les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ soient convergentes. Soit λ un réel. Alors : $\int_a^b \lambda.f(t) + g(t) dt$ est convergente et

$$\int_a^b \lambda.f(t) + g(t) dt = \lambda. \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

Proposition III.3

Relation de Chasles

Soit f une application continue sur un intervalle $[a, b[$, telle que $\int_a^b f(t) dt$ soit convergente. Alors pour tout $c \in [a, b[$, $\int_c^b f(t) dt$ est convergente et

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Proposition III.4

Positivité

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. Si :

1. $\int_a^b f(t) dt$ converge,
2. f est à valeurs positives,
3. les bornes sont dans le bon sens $a < b$

alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Proposition III.5

Croissance de l'intégrale

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b[$. Si :

1. les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ soient convergentes,
2. pour tout $t \in [a, b[$, $f(t) \leq g(t)$,
3. les bornes sont dans le bon sens $a < b$

alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Proposition III.6

Stricte positivité

Soit f une application continue sur un intervalle $[a, b[$. Si :

1. $\int_a^b f(t) dt$ est convergente,
2. f est à valeurs positives,
3. f est différent de la fonction nulle sur l'intervalle $[a, b[$,

alors $\int_a^b f(t) dt > 0$.

Théorème III.1

Fonction continue positive d'intégrale nulle

Soit f une application continue sur un intervalle $[a, b[$. Si :

1. $\int_a^b f(t) dt$ est convergente,
2. pour tout $t \in [a, b[$, $f(t) \geq 0$,
3. $\int_a^b f(t) dt = 0$,

alors f est la fonction nulle sur $[a, b[$: $\forall t \in [a, b[$, $f(t) = 0$.

Remarque

Toutes ces propriétés se généralisent au cas des intégrales impropres en a .

III.2) Techniques de calcul

III.2.1 Intégration par parties

Les intégrations par parties sont autorisées uniquement pour des intégrales bien définies sur un segment $[a, b]$. Il est **interdit de réaliser des intégrations par parties "sur bornes impropres"** (se méfier en particulier des bornes finies mais impropres) !

Lorsque vous souhaitez faire une IPP, il faut **revenir à des bornes propres** puis faire un ou deux passages (ou deux passages successifs) à la limite soigneusement en justifiant tout (limites et puissances, croissances comparées, existence d'intégrales...)

Exercice 7

Justifier que les intégrales suivantes convergent et déterminer leur valeur :

$$I_1 = \int_0^1 t \ln(t) dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

III.2.2 Changement de variable

Un changement de variable par l'intermédiaire d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone (donc d'une bijection $\mathcal{C}^1$) ne change pas la nature d'une intégrale improprie.

Théorème III.2

Soient a et b tels que $a < b$ (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$).

Soient α et β tels que $\alpha < \beta$ (idem).

Soient f une fonction continue sur $]a, b[$. Soit φ une fonction définie sur $]\alpha, \beta[$

- Si $\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) = a$ et $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = b$
et si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et **strictement croissante** sur $]\alpha, \beta[$ d'ensemble image $]a, b[$, **alors** les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ **sont de même nature**.
Si elles sont convergentes alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- Si $\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) = b$ et $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = a$
et si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et **strictement décroissante** sur $]\alpha, \beta[$ d'ensemble image $]a, b[$.
alors les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ **sont de même nature**.
Si elles sont convergentes alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Rédaction type

Le changement de variables $u = \varphi(t)$ est donné par une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur ..., bijective de ... sur ...

Bornes :, $du = \varphi'(t)dt$.

Les intégrales ... et ... sont de même nature.

Rédaction type rapide pour changement de variables affines

Le changement de variables $u = at + b$ est affine non constant, donc autorisé.

Exemple

On considère l'intégrale improprie

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{-x} + e^x} dx$$

A l'aide du changement de variables $t = e^{-x}$, montrons que l'intégrale I converge et déterminons sa valeur.

Posons $t = e^{-x}$. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante sur $] -\infty; +\infty[$. Elle réalise une bijection de $] -\infty; +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. Le changement de variables est donc autorisé.

Bornes

$$\begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow +\infty \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$dt = -e^{-x} dx.$$

A l'aide de ce changement de variables,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{-x} + e^x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x(1 + e^{-2x})} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + e^{-2x}} \cdot e^{-x} dx$$

est de même nature que

$$J = - \int_{+\infty}^0 \frac{1}{1 + t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt$$

Si ces intégrales convergent, elles sont égales.

Posons $A \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\int_0^A \frac{1}{1 + t^2} dt = [\text{Arctan}(t)]_0^A = \text{Arctan}(A) - \text{Arctan}(0) \rightarrow_{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Donc finalement l'intégrale I converge et

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 8

Déterminer la nature de l'intégrale suivante : $I_1 = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$.

III.2.3 Fonctions paires et impaires

Théorème III.3

Soit b désignant un réel strictement positif ou $+\infty$. Soit f une fonction définie sur $] -b, b[$

- Si f est paire alors $\int_0^b f(t)dt$ et $\int_{-b}^b f(t)dt$ sont de même nature.
- Si f est paire et si $\int_0^b f(t)dt$ existe **alors** $\int_{-b}^b f(t)dt$ existe et $\int_{-b}^b f(t)dt = 2 \int_0^b f(t)dt$
- Si f est impaire alors $\int_0^b f(t)dt$ et $\int_{-b}^b f(t)dt$ sont de même nature.
- Si f est impaire et si $\int_0^b f(t)dt$ existe **alors** $\int_{-b}^b f(t)dt$ existe et $\int_{-b}^b f(t)dt = 0$

Exercice 9

Justifier l'existence et préciser la valeur de $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 e^{-t^2} dt$

Justifier l'existence de $J_k = \int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

IV. Critères de convergence pour les fonctions positives

Proposition IV.1

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs positives. Alors $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a, b]$.

Théorème IV.1

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$

1. Critère de comparaison

Si f et g sont positives, et pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq g(t)$ alors :

- si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge;
- si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

2. Critère d'équivalence

Si g est positive sur un voisinage de b et si $f(t) \sim_{t \rightarrow b} g(t)$ alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature : toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

3. Critère de négligeabilité

Si g est positive sur un voisinage de b et si $f(t) = o_{t \rightarrow b}(g(t))$. Alors :

- si l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge.
- si l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Exercice 10

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t^2}} dt & I_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+2} dt & I_3 &= \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t^2} dt \text{ où } P \in \mathbb{R}[X] \\ I_4 &= \int_1^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}) dt & I_5 &= \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt & I_6 &= \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)} dt \\ I_7 &= \int_0^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1-t}} dt \text{ où } P \in \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

Remarque

Les critères ci-dessus peuvent aussi s'utiliser pour des **fonctions à valeurs négatives**.

Exercice 11

On note $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$, et pour tout $x \in I$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x} dt$.

Montrer que la fonction F est bien définie sur I .

Remarque

Montrer qu'une intégrale impropre est "**bien définie**" signifie montrer qu'elle est convergente !!

V. Convergence absolue

Définition V.1

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

Théorème V.1

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente et de plus

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt \quad (\text{bornes dans le bon sens : } a \leq b)$$

Exercice 12

montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ converge.

Remarque

Il ne s'agit pas d'une équivalence. Par exemple, on peut montrer que l'intégrale de Dirichlet $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente mais n'est pas absolument convergente (voir le TD).

VI. La fonction Gamma

Exercice 13

Soit x un réel et

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

On souhaite déterminer les valeurs de x pour lesquelles cette intégrale $\Gamma(x)$ est convergente.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ si $x \geq 1$, et est continue sur $]0, +\infty[$ si $x < 1$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente quel que soit le réel x .
3. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$ converge si et seulement si $x > 0$.
4. Conclusion. Quel est le domaine de définition de la fonction $\Gamma : x \mapsto \Gamma(x)$?

Théorème VI.1

La fonction Gamma, notée Γ , est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

- $\Gamma(1) = 1$ et pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.
- Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$

Exercice 14

1. A l'aide du changement de variables $t = u^2/2$, montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}$$