

Informatique : programmation en langage Python

Révision des instructions sur les matrices : définition d'une matrice, matrices usuelles, opérations usuelles sur les matrices.

Calcul d'une somme ou d'un produit : par boucle `for` ou en utilisant les matrices du type `np.arange(1,n+1,1)` et les instructions `np.sum`, `np.prod`

Chapitre 2. Révisions d'algèbre linéaire (suite et fin)

- Application linéaire f , noyau et image de f , **théorème du rang**.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, matrice $Mat_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f) = Mat_{\mathcal{B}_F}(f(\mathcal{B}_E))$. Attention à l'ordre des bases.
- Relation $Mat_{\mathcal{B}_F}(f(u)) = Mat_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f) \cdot Mat_{\mathcal{B}_E}(u)$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$,

$$Mat_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_E}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(g) \cdot Mat_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$$

- **Formules de changement de bases PAR COEUR**

$$X = P \cdot X'$$

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

où $X = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, $X' = Mat_{\mathcal{B}'}(u)$, $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$, $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

- Polynôme d'endomorphisme, polynôme de matrice.
- **Polynôme annulateur**.
- Rang d'une matrice : définition, méthode de calcul.
- Rang d'un endomorphisme, lien avec le rang de la matrice.
- Noyau d'une matrice.
- **Matrices semblables** : définition. Deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.
- Deux matrices semblables ont le même rang.
- **Trace d'une matrice carrée** :

1. Définition

2. Tr est linéaire.
 3. $Tr(AB) = Tr(BA)$ (*) : **A SAVOIR DEMONTRER**, on est obligé de revenir à la définition du produit matriciel
 4. Deux matrices semblables ont la même trace (*)
- Sous-espace stable : définition.

Chapitre 3. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (tout)

I. Valeurs propres et vecteurs propres

1. Cas des matrices

- **Valeur propre d'une matrice, vecteur propre d'une matrice, spectre d'une matrice : DEFINITIONS A CONNAITRE.**
Sous-espace propre associé à la valeur propre λ :

$$E_{\lambda}(A) = Ker(A - \lambda \cdot I)$$

- λ est valeur propre de A ssi $A - \lambda \cdot I$ n'est pas inversible.
- $0 \in Spec(A)$ ssi A n'est pas inversible.
- Si A est une matrice triangulaire, $Spec(A) = \{ \text{coeff. diagonaux de } A \}$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = \lambda \cdot X$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \cdot X = \lambda^k \cdot X$ (*)
Pour tout polynôme Q , on obtient $Q(A) \cdot X = Q(\lambda) \cdot X$.
- Soit P un polynôme annulateur de A . Alors

$$Spec(A) \subset \{ \text{racines de } P \}$$

- Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède au plus n valeurs propres.

2. Cas des endomorphismes.

Soit E un e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- **Valeur propre d'un endomorphisme, vecteur propre d'un endomorphisme**
($u \in E$ non nul tel que...), **spectre d'un endomorphisme**.
Sous-espace propre associé à la valeur propre λ :

$$E_{\lambda}(f) = Ker(f - \lambda \cdot Id_E)$$

- λ est valeur propre de f ssi $f - \lambda \cdot Id_E$ n'est pas bijective.
- $0 \in Spec(f)$ ssi f n'est pas bijective.

- Si $u_1, \dots, u_p$ sont p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, alors la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre (**PREUVE PAR RECURRENCE A SAVOIR REFAIRE** (*)).
- Les sous-espaces propres de f sont en somme directe.
- Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de E .
- Pour tout endomorphisme f de E , si $\text{Spec}(f) \neq \emptyset$ alors :

$$\text{Card}(\text{Spec}(f)) \leq \sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} \dim(\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)) \leq \dim(E)$$

- Si $f(x) = \lambda x$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$.
Si Q est un polynôme alors $Q(f)(x) = Q(\lambda)x$.
- Soit P un polynôme annulateur de f . Alors

$$\text{Spec}(f) \subset \{\text{racines de } P\}$$

II. Diagonalisation

1. Cas des endomorphismes

- f est **diagonalisable** lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
- f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .
- f est diagonalisable si et seulement si

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(f)} \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$$

- f est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} \dim(\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)) = \dim(E)$$

• Condition suffisante de diagonalisabilité

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim(E) = n$. Si f admet n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable et tout sous-espace propre de f est de dimension 1.

2. Cas des matrices

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si elle est semblable à une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(K)$, i.e. s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$ soit diagonale.

- A est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{C}' = (U_1, \dots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A (respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$). Dans ce cas, la matrice $P = (U_1 | U_2 | \dots | U_n)$ (obtenue en concaténant les colonnes $U_1, \dots, U_n$) diagonalise A :

$$P^{-1}.A.P = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

- A est diagonalisable si et seulement si

$$\bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(A)} \text{Ker}(A - \lambda.I) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

- A est diagonalisable si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} \dim(\text{Ker}(A - \lambda.I)) = n$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Spec}(A) \neq \emptyset$. Alors :

$$\text{Card}(\text{Spec}(A)) \leq \sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} \dim(\text{Ker}(A - \lambda I)) \leq n$$

• condition suffisante de diagonalisabilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A admet n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

• cas des matrices symétriques

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

- 1. Deux matrices semblables A et B ont le même spectre. (*)
- 2. Les matrices A et tA ont le même spectre. (*)

• Exercice à savoir refaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice admettant une unique valeur propre λ . A quelle condition A est-elle diagonalisable ?

3. Lien endomorphismes - matrices

Soit E un e.v. de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$, f un endomorphisme de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. $\text{Spec}(f) = \text{Spec}(A)$
2. u est un vecteur propre de $f \Leftrightarrow X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un vecteur propre de A
3. f est diagonalisable $\Leftrightarrow A$ est diagonalisable.
4. Si $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de vecteurs propres de f , alors $A = PDP^{-1}$, où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ et D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont associés aux vecteurs propres $u_1, \dots, u_n$.
5. P est un polynôme annulateur de $f \Leftrightarrow P$ est un polynôme annulateur de A .

Exercice à savoir refaire rapidement :

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le spectre de J , montrer que J est diagonalisable, déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $J = P.D.P^{-1}$.
(*) : **preuve exigible**