

Exercices - Intégrales impropres

Exercice 1

1. **Une intégrale impropre en $+\infty$**

On note : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$

- (a) Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de la courbe de f .
- (b) Soit $A > 1$. On note $I_A = \int_1^A f(x)dx$. Justifier l'existence de I_A et hachurer l'aire correspondante.
- (c) Déterminer $\lim_{A \rightarrow +\infty} (I_A)$ et interpréter ce résultat.

2. **Une intégrale impropre en un réel x_0**

On note : $\forall t \in \mathbb{R}^{+*} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}$

- (a) Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de la courbe de f .
- (b) Soit $\epsilon \in]0, 1]$. On note $I_\epsilon = \int_\epsilon^1 f(t)dt$. Justifier l'existence de I_ϵ et hachurer l'aire correspondante.
- (c) A l'aide du changement de variables $u = \sqrt{t}$, justifier l'existence de $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (I_\epsilon)$ et interpréter ce résultat.

Exercice 2

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t^3} dt & J_2 &= \int_0^1 x^3 (\ln(x))^2 dx & J_3 &= \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1} dx \\ J_4 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+t^2} dt & I_\alpha &= \int_1^{+\infty} \ln(1+t^\alpha) dt & & \text{discussion suivant les valeurs de } \alpha \end{aligned}$$

Exercice 3

Une suite d'intégrales impropres

Pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n , on pose $I_n(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at}(1-e^{-t})^n dt$

- 1. Justifier la convergence de l'intégrale $I_n(a)$.
- 2. (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n(1) = \frac{1}{n+1}$.
(b) En déduire que pour tout réel $a \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n(a)) = 0$.
- 3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)(I_n(a) - I_{n+1}(a)) = aI_{n+1}(a)$$

- (b) En déduire $I_n(a)$ en fonction de n et de a .
- (c) Ecrire une fonction Python, d'intitulé `def I(n,a)` : de paramètres n et a , qui calcule $I_n(a)$

Exercice 4

Intégrale de Dirichlet

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente.

On admet que l'on montrerait de même que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x} dx$ est convergente.

2. (a) Montrer que: $\forall x \geq 1, |\sin(x)| \geq \sin^2(x)$, puis que $\left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \geq \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{2x}$.

- (b) En déduire que: $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$ diverge.

Bilan : L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente mais pas absolument convergente.

Exercice 5

Des changements de variables

Montrer que les intégrales suivantes convergent et préciser leur valeur.

1. $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$ à l'aide du changement de variables $u = \sin(t)$.

2. $J = \int_0^{+\infty} \frac{t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt$ à l'aide du changement de variables $u = \frac{1}{t}$

Exercice 6

Les moments d'une Gaussienne

On note :

$$\forall k \in \mathbb{N}, I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad J_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$$

- 1. Justifier que la suite $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie
- 2. Justifier que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $J_{2r+1} = 0$.
- 3. **Les moments d'ordre pair :** On note : $\forall n \in \mathbb{N}, K_n = I_{2n} = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$.
(a) Calculer K_0 .
(b) Calculer K_n en fonction de n .
(c) En déduire la valeur de J_{2n} pour tout entier naturel n .

Exercice 7

On définit pour $x > 0$, $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$

- 1. Montrer que f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
- 2. Montrer que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.
- 3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 8**Une série et une suite**

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t^2} dt$ est convergente.
2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \int_0^1 t^{2n} \ln^2(t) dt$.
3. Montrer que pour tout $t \in [0; 1]$:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$$

4. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ est convergente et exprimer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ en fonction de I .

Exercice 9**Reste d'une intégrale convergente**

On considère l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

1. A l'aide du cours, préciser la valeur de J .
2. Pour tout réel x , on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$.
Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x .
3. (a) Montrer la convergence et déterminer la valeur pour tout réel x positif, de l'intégrale $\int_x^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2}} du$.
(b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq x f(x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$.
(c) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et calculer I .

Exercice 10**Une suite d'intégrales impropres**

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$ et $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$

1. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale I_n converge. Calculer I_1 .
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis justifier qu'elle est convergente.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, établir une relation entre I_{n+1} et I_n .
4. En déduire l'expression de I_n en fonction de n .

Exercice 11**Utilisation de la fonction Gamma**

Il s'agit à chaque fois de se ramener à la fonction Gamma.

1. Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} t \sqrt{t} e^{-t} dt$
2. Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} (t+1)^3 e^{-t} dt$
3. Montrer que $I_n(a) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-at} dt$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et calculer sa valeur.
4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_0^1 t.(\ln(t))^n .dt$.
A l'aide du changement de variables $x = -\ln(t)$, justifier la convergence de J_n et calculer sa valeur.

Exercice 12**Fonctions de carré intégrable**

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues, où

$$\int_0^{+\infty} (f(t))^2 .dt \text{ et } \int_0^{+\infty} (g(t))^2 .dt$$

convergent. Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t).g(t).dt$ converge absolument.

2. Soit

$$E = \{f \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[) \text{ où } \int_0^{+\infty} (f(t))^2 .dt \text{ converge}\}$$

Justifier que E est un sev de $\mathcal{C}^0([0; +\infty[)$.