

Preuve de la Prop. 1.5 :

Comme l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge, pour tout $x \in [a, b[$ on a par la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt$$

donc

$$\int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

et en passant à la limite quand x tend vers b :

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f(t)dt = 0$$

Exercice Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \right) = 0$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann convergente (voir plus loin). Par conséquent son reste tend vers 0.

Preuve du Th. II.1:

La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ est impropre en $+\infty$. Soit $A > 0$ et

$$I_A = \int_0^A e^{-\alpha t} dt.$$

- ▶ Si $\alpha = 0$ alors $I_A = \int_0^A 1 dt = A \rightarrow_{A \rightarrow +\infty} +\infty$: l'intégrale I diverge.
- ▶ Si $\alpha \neq 0$ alors

$$I_A = \left[-\frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha t} \right]_0^A = -\frac{1}{\alpha} \cdot (e^{-\alpha A} - 1) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha A}$$

- ▶ Si $\alpha > 0$, alors $\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-\alpha A} = 0$ donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} I_A = \frac{1}{\alpha}$. Dans ce cas l'intégrale I converge et $I = \frac{1}{\alpha}$.
- ▶ Si $\alpha < 0$ alors $\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-\alpha A} = +\infty$ donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} I_A = +\infty$: l'intégrale I diverge.

Exemple :

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt, \quad I_2 = \int_{-1}^0 \frac{1}{(t+1)\sqrt{t+1}} dt$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

- ▶ $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}} dt$ est une intégrale de Riemann impropre en 1, qui converge car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.
- ▶ $I_2 = \int_{-1}^0 \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} dt$ est une intégrale de Riemann impropre en -1 , qui diverge car $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.

$$I_3 = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Attention cette intégrale est doublement impropre en -1 et en 1 .
Elle converge ssi les deux intégrales

$$I'_3 = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad \text{et} \quad I''_3 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

convergent.

On remarque que

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t}}$$

- ▶ d'où en -1 : $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sim_{t \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(1+t)^{1/2}}$. Comme l'intégrale $\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+t)^{1/2}} dt$ converge (Riemann en -1 , $\alpha = 1/2 < 1$), par critère d'équivalence (fonctions positives), I_3' converge.
- ▶ En 1 : $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ Comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{1/2}} dt$ converge (Riemann en 1 , $\alpha = 1/2 < 1$), par critère d'équivalence (fonctions positives), I_3'' converge.
- ▶ Finalement I_3 converge.

Intégrale du Th. II.6

$$I = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Posons $x = \frac{t-m}{\sigma}$. La fonction $t \mapsto \frac{t-m}{\sigma}$ est affine non constante donc autorisée.

$dx = \frac{1}{\sigma} dt$ donc $dt = \sigma dx$. Par CDV,

$$I = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \sigma dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

car on retombe sur l'intégrale de Gauss.

L'intégrale $I = \int_0^1 \ln(t) dt$ est impropre en 1. Posons $\epsilon \in]0, 1]$.
Alors

$$I_\epsilon = \int_\epsilon^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_\epsilon^1 = -1 - \epsilon \ln(\epsilon) + \epsilon$$

et par CC, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon = -1$.

L'intégrale I converge et vaut -1 .

Calculons $I_1 = \int_0^1 t \ln(t) dt$.

Tout d'abord cette intégrale est convergente car faussement impropre.

Posons $\epsilon \in]0, 1]$ et $I_{1,\epsilon} = \int_\epsilon^1 t \ln(t) dt$.

Posons

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\epsilon, 1]$ donc l'IPP est autorisée.

$$I_{1,\epsilon} = \left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_{\epsilon}^1 - \frac{1}{2} \int_{\epsilon}^1 t dt$$

$$I_{1,\epsilon} = -\frac{\epsilon^2}{2} \ln(\epsilon) - \frac{1}{4} + \frac{\epsilon^2}{4} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{4}$$

Donc $I_1 = -\frac{1}{4}$.