

Corrigé des exercices sur la réduction

Exercice 1 :

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned}\phi(\alpha P + Q) &= \alpha P + Q + (\alpha P + Q)' \\ &= \alpha(P + P') + (Q + Q') \\ &= \alpha\phi(P) + \phi(Q).\end{aligned}$$

Donc ϕ est linéaire. De plus, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P' \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi

$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X]).$$

2. On a $\phi(1) = 1$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\varphi(X^k) = X^k + kX^{k-1}$$

Dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$,

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice est triangulaire (même diagonale), donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

- 3.

$$\text{Sp}(\phi) = \{1\}.$$

4. Supposons ϕ diagonalisable. Il existe alors une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = I_{n+1}.$$

Donc $\phi = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$, ce qui est faux puisque, par exemple, $\varphi(X) = X + 1$. Ainsi ϕ n'est pas diagonalisable.

5. $0 \notin \text{Sp}(\phi)$, donc ϕ est injective et, étant un endomorphisme d'un espace de dimension finie, elle est bijective.

φ est donc un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 2

1. (a)

$$f(u) = f(e_1 + \cdots + e_n) = f(e_1) + \cdots + f(e_n) = nu$$

en utilisant la linéarité de f , et $u \neq 0$. Donc u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre n .

- (b)

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{Vect}(u, \dots, u) = \text{Vect}(u)$$

Montrons que $\text{Ker}(f - n\text{Id}_E) = \text{Im}(f)$

— $\supset$: $f(u) = nu$ donc $u \in \text{Ker}(f - n\text{Id}_E)$. Ainsi $\text{Vect}(u) \subset \text{Ker}(f - n\text{Id}_E)$ et $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f - n\text{Id}_E)$.

— $\subset$: soit $x \in \text{Ker}(f - n\text{Id}_E)$. Alors

$$f(x) = nx \Rightarrow x = f\left(\frac{1}{n}x\right)$$

donc $x \in \text{Im}(f)$. D'où $\text{Ker}(f - n\text{Id}_E) \subset \text{Im}(f)$.

— Par double inclusion, on a bien $\text{Ker}(f - n\text{Id}_E) = \text{Im}(f)$

2. (a) Dans la base canonique,

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) On a

$$A^2 = nA \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = n \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \iff f^2 = nf.$$

Le polynôme $P = X^2 - nX$ est donc annulateur de f , d'où

$$\text{Sp}(f) \subset \{0, n\}.$$

- (c) $\text{rg}(A) = 1$, donc $\text{rg}(f) = 1$ et

$$\dim \text{Ker}(f) = n - 1.$$

On remarque que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

et ainsi de suite. Pour $k \in \{2, \dots, n\}$,

$$v_k = e_1 - e_k \in \text{Ker}(f).$$

On montre facilement que la famille $(v_2, \dots, v_n)$ est libre, et comme elle possède $n - 1$ vecteurs : c'est donc une base de $\text{Ker}(f)$.

3. Comme $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$, on a $0 \in \text{Sp}(f)$. Comme $f(u) = nu$, on a aussi $n \in \text{Sp}(f)$. Ainsi $\{0, n\} \subset \text{Ker}(f)$. D'après (b),

$$\text{Sp}(f) = \{0, n\}.$$

- 4.

$$\dim \text{Ker}(f - n \text{Id}) + \dim \text{Ker}(f) = \dim \text{Vect}(u) + n - 1 = 1 + n - 1 = n = \dim(E)$$

Donc f est diagonalisable.

5. Des matrices P et D qui conviennent sont :

$$D = \text{Diag}(n, 0, \dots, 0)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1. Le polynôme

$$P = X^2 + 2X = X(X + 2)$$

est annulateur de f . Comme $\text{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } P\}$, on a

$$\text{Sp}(f) \subset \{-2, 0\}.$$

2. D'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = p = \dim E.$$

Montrons que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$. L'inclusion $\{0_E\} \subset \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ est évidente. Soit $u \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Comme $u \in \text{Im}(f)$, il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$. Alors

$$0 = f(u) = f^2(v).$$

Or $f^2 = -2f$, donc

$$-2f(v) = 0,$$

c'est-à-dire $u = 0$. Ainsi

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \subset \{0_E\}.$$

Par double inclusion, $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

On en déduit que

$$\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E.$$

3. Montrons que $Im(f) = Ker(f + 2Id_E)$
Si $x \in Ker(f + 2Id_E)$, alors

$$f(x) = -2x \implies x = f\left(-\frac{1}{2}x\right),$$

donc $x \in Im(f)$. Réciproquement, si $x \in Im(f)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$, et

$$(f + 2Id_E)(x) = f^2(y) + 2f(y) = 0$$

car $f^2 = -2f$. Par double inclusion, on a donc

$$Im(f) = Ker(f + 2Id_E).$$

On a donc

$$E = Ker(f) \oplus Ker(f + 2Id_E) \Leftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} Ker(f - \lambda Id_E)$$

d'où f est diagonalisable.

En concaténant une base $\mathcal{B}_1$ de $Ker(f)$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $Ker(f + 2Id_E)$, on obtient une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \text{Diag}(0, \dots, 0, -2, \dots, -2)$$

Exercice 4

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\text{rg}(A) = 1$, donc $\dim Ker(A) = 2$. De plus,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $4 \in Sp(A)$.

On a

$$A^2 = 4A,$$

donc $X^2 - 4X$ est annulateur de A et

$$Sp(A) \subset \{0, 4\}.$$

Comme $0 \in Sp(A)$ (la matrice n'est pas inversible), on obtient

$$Sp(A) = \{0, 4\}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sont deux vecteurs non colinéaires de $Ker(A)$ et forment donc une base de $Ker(A)$.

Ainsi A est diagonalisable. Une diagonalisation est de la forme

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \text{Diag}(0, 0, 4), \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On étudie ensuite } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B est symétrique, donc diagonalisable. On vérifie par le calcul que $B^2 = 4B$, le polynôme $P = X^2 - 4X$ est donc annulateur de B . Donc $Sp(B) \subset \{0, 4\}$.

Ensuite, $\text{rg}(B) = 1$ donc $\dim Ker(B) = 3$ et $0 \in Sp(B)$. Les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

appartiennent à $Ker(B)$ et forment une famille libre (facile). Ils forment donc une base de $Ker(B)$.

On remarque ensuite que

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc $\dim(Ker(B - 4I)) \geq 1$ et $4 \in Sp(B)$.

On a alors $Sp(B) = \{0, 4\}$, et comme B est diagonalisable,

$$\dim Ker(B) + \dim Ker(B - 4I) = 4$$

donc $\dim Ker(B - 4I) = 1$ et le vecteur propre trouvé ci-dessous forme une base de $Ker(B - 4I)$. Finalement,

$$B = PDP^{-1} \text{ avec } D = \text{Diag}(0, 0, 0, 4) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère maintenant $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice C est symétrique, donc diagonalisable.

Le spectre est plus délicat à trouver cette fois-ci, nous allons utiliser la méthode des réduites de Gauss.

$$\begin{aligned} C - \lambda I_3 &\sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 1-\lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &\sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & -4(1-\lambda) & 8+2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow 3L_3 - (1-\lambda)L_1 \\ &\sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 24+2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \end{aligned}$$

Une matrice est inversible si et seulement si ses réduites le sont. Donc

$$C - \lambda I_3 \text{ inversible} \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } -\lambda^2 + 2\lambda + 24 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-4, 1, 6\}$$

Ainsi $\boxed{Sp(C) = \{-4, 1, 6\}}$

On montre ensuite par le calcul, en résolvant les systèmes linéaires correspondants, que

$$Ker(C - I_3) = Vect\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad Ker(C + 4I_3) = Vect\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}\right), \quad Ker(C - 6I_3) = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$

et on obtient alors $C = PDP^{-1}$ en posant :

$$D = \text{Diag}(-4, 1, 6) \text{ et } P = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & 10 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

1.

$$(A - I_3)^2 = 0.$$

2. Donc

$$A^2 - 2A + I_3 = 0 \iff A(2I_3 - A) = I_3.$$

Ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = 2I_3 - A.$$

3. Le polynôme

$$P = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$$

est annulateur de A . Donc

$$\text{Sp}(A) \subset \{1\}.$$

On remarque que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc $1 \in \text{Sp}(A)$ et

$$\text{Sp}(A) = \{1\}.$$

4. Si A était diagonalisable, on aurait

$$A = P I_3 P^{-1} = I_3,$$

ce qui est faux. Donc A n'est pas diagonalisable.

5. Par division euclidienne, pour tout n ,

$$X^n = (X - 1)^2 Q + aX + b.$$

En évaluant en $x = 1$,

$$a + b = 1,$$

et en dérivant puis en évaluant en $x = 1$,

$$a = n.$$

Ainsi

$$b = 1 - n,$$

et

$$X^n = (X - 1)^2 Q + nX + (1 - n).$$

Comme $(A - \text{Id}_3)^2 = 0$,

$$\boxed{A^n = nA + (1 - n)\text{Id}_3}.$$

Exercice 7

1. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = A - I_3 = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\text{rg}(B) = 1$, donc $\dim \text{Ker}(B) = 2$. De plus

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $9 \in \text{Sp}(B)$.

Comme

$$3 \leq \dim \text{Ker}(B) + \dim \text{Ker}(B - 9\text{Id}_3) \leq 3,$$

on obtient

$$\text{Sp}(B) = \{0, 9\}.$$

2. On travaille par équivalences :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A) &\Leftrightarrow A - \lambda I_3 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow A - I_3 - (\lambda - 1)I_3 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow B - (\lambda - 1)I_3 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \lambda - 1 \in \text{Sp}(B) \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 10 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\text{Sp}(A) = \{1, 10\}.$$

$$3. A. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 10. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} A. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} A. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$\Delta = \text{Diag}(10, 1, 1). \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

conviennent : $A = P.\Delta.P^{-1}$.

Exercice 8

On considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. A est triangulaire supérieure, donc

$$\text{Sp}(A) = \{2, 0, 1\}.$$

Ces trois valeurs propres sont distinctes et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc A est diagonalisable. Il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que

$$A = PDP^{-1}.$$

Ainsi A et D sont semblables.

2.

$$D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$D^3 = \alpha D + \beta D^2.$$

On obtient

$$2\alpha + 4\beta = 8, \quad \alpha + \beta = 1,$$

d'où

$$\alpha = -2, \quad \beta = 3.$$

Ainsi

$$D^3 = -2D + 3D^2,$$

et le polynôme S défini par

$$S(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$$

est annulateur de D .

Comme A et D sont deux matrices semblables, elles représentent le même endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans deux bases différentes : il existe un endomorphisme f de E , deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E telles que

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ et } D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$$

Comme S est un polynôme annulateur de D , c'est un polynôme annulateur de f et donc aussi de A .

Exercice 9

1. — Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Comme $\deg(f(P)) \leq 2$, l'application f va bien de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
- Pour $(P_1, P_2) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on écrit

$$(1 - X + X^2)P_i = (1 + X^3)Q_i + f(P_i), \quad i = 1, 2.$$

En prenant la combinaison linéaire adéquate,

$$(1 - X + X^2)(\alpha P_1 + P_2) = (1 + X^3)(\alpha Q_1 + Q_2) + \alpha f(P_1) + f(P_2).$$

Comme $\deg(\alpha f(P_1) + f(P_2)) \leq \max(\deg(f(P_1)), \deg(f(P_2))) \leq 2$, $\alpha f(P_1) + f(P_2)$ est égal au reste dans la division euclidienne de $(1 - X + X^2)(\alpha P_1 + P_2)$ par $(1 + X^3)$. Donc par unicité de la division euclidienne,

$$f(\alpha P_1 + P_2) = \alpha f(P_1) + f(P_2).$$

Donc f est linéaire.

— **Bilan :** $f \in \mathcal{L}(E)$

2. (a) — Si $P = 1$:

$$(1 - X + X^2).1 = 0.(1 + X^3) + (1 - X + X^2)$$

et comme $\deg(1 - X + X^2) \leq 2$, on a $f(1) = 1 - X + X^2$.

— Si $P = X$:

$$\begin{aligned} (1 - X + X^2).X &= X - X^2 + X^3 \\ &= (1 + X^3).1 - X^2 + X - 1 \end{aligned}$$

et donc $f(X) = -X^2 + X - 1$

—

$$(1 - X + X^2)X^2 = (X^3 + 1)(X - 1) + (1 - X + X^2),$$

d'où $f(X^2) = 1 - X + X^2$ Ainsi $f(1) = f(X^2) = -f(X)$

— On en déduit que $Im(f) = \text{Vect}(1 - X + X^2)$.

La famille $(1 - X + X^2)$ est génératrice de $Im(f)$ et libre car formée d'un unique polynôme non nul : c'est une base de $Im(f)$.

— D'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(Im(f)) = 3 - 1 = 2$$

De plus,

$$f(1 + X) = f(1) + f(X) = 0, \quad f(X^2 - 1) = f(X^2) - f(1) = 0.$$

La famille

$$(1 + X, X^2 - 1)$$

est libre car formée de deux polynômes non nuls de degrés distincts et constituée de deux vecteurs de $\text{Ker}(f)$ avec $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$: c'est donc une base de $\text{Ker}(f)$.

3. — Soit $P \in Im(f)$: il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P = \alpha(1 - X + X^2)$. Alors

$$f(P) = \alpha.(f(1) - f(X) + f(X^2)) = 3\alpha.(1 - X + X^2) = 3P$$

On en déduit que 3 est une valeur propre de f .

— On sait que $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(f - 3Id)) \leq 3$. De plus $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$ et $\dim(\text{Ker}(f - 3Id)) \geq 1$. Finalement, $\dim(\text{Ker}(f - 3Id)) = 1$.

Comme

$$\begin{cases} Im(f) \subset \text{Ker}(f - 3Id) \\ \dim(Im(f)) = 1 = \dim(\text{Ker}(f - 3Id)) \end{cases}$$

on a bien $Im(f) = \text{Ker}(f - 3Id)$.

4. Enfin, $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(f - 3Id)) = 3$ donc f est diagonalisable

Exercice 10

1. Facile.

2. On trouve par le calcul que

$$f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^2 - 2A - 3I_4 = 0.$$

Le polynôme

$$P = X^2 - 2X - 3 = (X + 1)(X - 3)$$

est annulateur de A et donc de f . Comme $\text{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } P\}$, on a

$$\text{Sp}(f) \subset \{-1, 3\}.$$

On a

$$f(E_{21}) = -E_{21},$$

donc -1 est valeur propre de f .

Calculons $\text{Ker}(f - 3Id)$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} A \in \text{Ker}(f - 3Id) &\Leftrightarrow f(A) = 3A \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \dots \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \\ c = -b \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Ker}(f - 3Id) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(E_{2,1} - E_{1,2})$$

donc 3 est également valeur propre. Ainsi

$$\text{Sp}(f) = \{-1, 3\}.$$

4. La matrice A est symétrique réelle ; elle est donc diagonalisable. Par conséquent f est diagonalisable.

Exercice 11

Soit

$$\Pi = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Par réduction de Gauss, on obtient

$$\Pi - \lambda.I \text{ non inversible} \iff \lambda \in \{0, 1, 2\}.$$

Ainsi

$$\text{Sp}(\Pi) = \{0, 1, 2\}.$$

Comme $\Pi \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ possède trois valeurs propres distinctes, Π est diagonalisable : il existe une matrice inversible P telle que $\Pi = PDP^{-1}$ avec $D = \text{Diag}(0, 1, 2)$. Autrement dit, il existe une base $\mathcal{B}'$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour l'autre matrice, la réduction de Gauss de

$$\Pi' - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 3 - \lambda & -2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

donne

$$-\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0,$$

d'où

$$\text{Sp}(\Pi') = \{0, 1, 2\}.$$

Il existe donc une matrice inversible Q telle que $\Pi' = QDQ^{-1}$, avec encore $D = \text{Diag}(0, 1, 2)$.

On a alors

$$\Pi' = QDQ^{-1} = Q(P^{-1}\Pi P)Q^{-1} = S^{-1}\Pi S$$

où $S = PQ^{-1}$. Les deux matrices Π et Π' sont donc semblables.

Exercice 12

Montrons par analyse et synthèse que :

$$\forall u \in E, \exists!(v, w) \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \times \text{Ker}(f + \frac{3}{2}\text{Id}_E) / u = v + w$$

Analyse : soit $u \in E$. Supposons qu'il existe $(v, w) \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \times \text{Ker}(f + \frac{3}{2}\text{Id}_E)$ tel que $u = v + w$. Comme

$$f(v) = v, \quad f(w) = -\frac{3}{2}w,$$

on a

$$f(u) = v - \frac{3}{2}w.$$

Avec

$$u = v + w,$$

on obtient

$$w = \frac{2}{5}(u - f(u)),$$

puis

$$v = \frac{3}{5}u + \frac{2}{5}f(u).$$

D'où l'unicité.

Synthèse : avec les valeurs de v et w ci-dessus, on a bien $v + w = u$ et de plus

$$(f - \text{Id}_E)(v) = f(v) - v = \frac{3}{5}f(u) + \frac{2}{5}f^2(u) - \frac{3}{5}u - \frac{2}{5}f(u) = \frac{1}{5}(2f^2 + f - 3\text{Id}_E)(u) = 0$$

donc $v \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$. On montre de façon analogue que $w \in \text{Ker}(f + \frac{3}{2}\text{Id}_E)$. D'où l'existence de v et w

$$\text{Bilan} : E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}\left(f + \frac{3}{2}\text{Id}_E\right)$$

Exercice 13

1. Soit

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 - \lambda & 12 & \\ 1 & -2 & 5 - \lambda & \end{pmatrix}$$

dans le calcul considéré. La réduction de Gauss conduit à

$$\text{Sp}(A) = \{0, 1, 2\}.$$

Pour les espaces propres, on obtient :

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{Ker}(A - \text{Id}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et

$$\text{Ker}(A - 2\text{Id}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces trois vecteurs propres forment une base de $\mathbb{R}^3$; ainsi A est diagonalisable.

On peut prendre

$$D = \text{Diag}(0, 1, 2), \quad P = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$A = PDP^{-1}.$$

2. (a) Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . Alors

$$AMX = MAX = M.\lambda X = \lambda MX$$

Par conséquent, en notant $Y = MX$, on a $AY = \lambda Y$, c'est-à-dire que $Y \in \text{Ker}(A - \lambda I)$. Comme les sous-espaces propres de A sont tous de dimension 1, on a $\text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Vect}(X)$, donc il existe un réel α tel que $MX = \alpha X$: X est un vecteur propre associé à M .

Question classique et difficile !

Notez que l'on a besoin de l'hypothèse qui dit que tous les sous-espaces propres sont de dimension 1

(b) Par conséquent, la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont des vecteurs propres de A est aussi formée de vecteurs propres de B . Il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$P^{-1}MP = D' = \text{Diag}(\alpha, \beta, \gamma)$$

On a diagonalisé simultanément les matrices A et M , c'est-à-dire que l'on a trouvé une base commune de vecteurs propres de A et M .

(c) Montrons que :

$$M \text{ commute avec } A \Leftrightarrow \text{la matrice } P^{-1}MP \text{ est diagonale}$$

$\Rightarrow$: vrai d'après le (b)

$\Leftarrow$: Supposons que $P^{-1}MP = D'$ est diagonale. Alors

$$\begin{aligned} AM &= PDP^{-1}PD'P^{-1} \\ &= PDD'P^{-1} \\ &= PD'DP^{-1} \text{ car deux matrices diagonales commutent} \\ &= PD'P^{-1}PDP^{-1} \\ &= MA \end{aligned}$$

Bilan : $AM = MA \Leftrightarrow$ la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale.