
DM n° 4 - pour le mardi 13 octobre 2026

Dans ce problème, n est un entier naturel non nul et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$: on rappelle que $e_0 = 1$ et que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_k = X^k$.

Partie 1 : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère l'application φ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P , avec la convention $P^{(0)} = P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (a) Calculer $\varphi(e_0)$ et en déduire une valeur propre de φ .
(b) Montrer que : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi(e_j) - e_j \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.
(c) En déduire que la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire et que la seule valeur propre de φ est celle trouvée à la question précédente.
(d) Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. (a) Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer $\varphi(P - P')$.
(b) Déterminer φ^{-1} , puis écrire la matrice de φ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
(c) On donne le script Python suivant :

```
n=int(input("Entrer la valeur de n : "))
M=np.eye(n+1)
for k in range(0,n):
    M[k,k+1]=-(k+1)
A=.....
print(A)
```

Compléter la cinquième ligne de ce script pour qu'il affiche la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$ lorsque la valeur de n est entrée par l'utilisateur.

Partie 2 : étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

La fonction Γ est définie sur $]0; +\infty[$ par : $\forall x \in]0; +\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$.
On rappelle également l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

On désigne par x un réel quelconque.

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k , l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ est convergente.
(b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors l'intégrale $\int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} dt$ est convergente.

5. (a) Donner la valeur de l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t} dt$.
(b) Etablir par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k! \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} e^{-x}$

6. Informatique

- (a) Ecrire une fonction Python intitulée **def facto(n)** : qui calcule $n!$.
(b) Ecrire ensuite une fonction Python utilisant la fonction **facto**, intitulée **def Integrale(k,x)** : qui calcule et renvoie la valeur de l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

On considère maintenant l'application Ψ qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe la fonction $F = \Psi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(P)(x) = F(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t) e^{-t} dt$$

7. (a) Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et montrer que $F' = F - P$.
(c) Montrer que Ψ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
8. On considère un polynôme P non nul, vecteur propre de Ψ pour une valeur propre λ non nulle.
(a) Utiliser la relation obtenue à la question 7.(b) pour établir que $P' = \frac{\lambda-1}{\lambda} P$.
(b) En déduire, en considérant les degrés, que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre possible de Ψ .
(c) Montrer enfin que $\lambda = 1$ est bien la seule valeur propre de Ψ . (On ne demande pas le sous-espace propre associé).

9. (a) Montrer que les endomorphismes φ et Ψ sont égaux.
(b) En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et s'il existe un réel a tel que pour tout réel x supérieur ou égal à a , on a $P(x) \geq 0$, alors : $\forall x \geq a$, $\sum_{i=0}^n P^{(i)}(x) \geq 0$.