

## Informatique : programmation en langage Python

Révision des instructions sur les matrices : définition d'une matrice, matrices usuelles, opérations usuelles sur les matrices.

Calcul d'une somme ou d'un produit : par boucle `for` ou en utilisant les matrices du type `np.arange(1,n+1,1)` et les instructions `np.sum`, `np.prod`. Tracé d'une courbe en Python, calcul des termes d'une suite. Définition d'une fonction en Python.

## Chapitre 4. Intégrales impropres (tout)

### I. Nature et valeur d'une intégrale impropre

- Définition. Intégrale impropre à gauche, à droite. Lien avec l'aire sous la courbe dans le cas des fonctions positives.
- Intégrale doublement impropre : on coupe l'intégrale en deux.
- Intégrale multiplement impropre : on coupe en autant de morceaux que nécessaire.
- Intégrale faussement impropre : attention **uniquement** pour des intégrales impropres **en un réel  $b$**
- Intégrale grossièrement divergente en  $+\infty$  (ou en  $-\infty$ ) :  
si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ , ou bien  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \neq 0$  alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  est (grossièrement) divergente.  
Attention si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  on ne peut rien en déduire sur la nature de  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ .  
Si  $f$  n'a pas de limite en  $+\infty$  on ne peut rien en déduire non plus.
- Intégrale des fonctions continues par morceaux.
- Reste d'une intégrale impropre convergente.

### II. Intégrales usuelles

- Soit  $a \in \mathbb{R}$ . L'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$  converge si et seulement si  $a > 0$  (\*).  
Dans le cas où  $a > 0$ ,  $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a}$  (\*)
- Intégrales de Riemann "simples" :  
L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .  
L'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$ .  
**Valeurs des intégrales HP : à savoir recalculer si nécessaire**

- Intégrales de Riemann "simples" (variante)  
Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $c$  un réel strictement positif.  
L'intégrale  $\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .  
L'intégrale  $\int_0^c \frac{1}{t^\alpha} dt$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$ .

- Intégrale de Riemann impropre en un réel : cas général.  
Soit  $a$  et  $b$  deux réels,  $a < b$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
L'intégrale  $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$ .  
L'intégrale  $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$  converge si et seulement si  $\alpha < 1$ .

- Intégrale de Gauss :  
 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  existe et  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2} \pi$   
ADMIS. Valeur à connaître par coeur.

### Exercice à savoir refaire :

Montrer que l'intégrale  $\int_0^1 \ln(t) dt$  converge et la calculer.

**HP mais sert souvent !! Connaître la primitive de la fonction  $\ln$**

### III. Propriétés et méthodes de calcul

- Permutation des bornes.
- Linéarité (si intégrales convergentes !).
- Relation de Chasles (si intégrales convergentes !)
- Positivité, croissance, stricte positivité (idem). Fonction continue positive d'intégrale nulle.

### IV. Techniques de calcul

Que deux techniques classiques : être réactif lors des exercices !!

- Intégration par parties : sur bornes propres uniquement. Commencer par fixer des bornes.
- Changement de variables. On peut faire le changement sur bornes impropres.  
**Ne pas oublier les hypothèses : la fonction  $\varphi$  est de  $\mathcal{C}^1$  et strictement monotones sur ... donc bijective de ... sur ... Conclusion : les deux intégrales sont de même nature. En cas de convergence elles sont égales.**
- Fonctions paires et impaires.

## V. Critères de convergence pour les fonctions positives

Critères de majoration, d'équivalence, de négligeabilité pour les fonctions positives (fonctions négatives marche aussi).

## VI. Convergence absolue

Définition et théorème.

## VII. La fonction Gamma

Cette fonction est au programme, les résultats doivent être connus.

La fonction Gamma, notée  $\Gamma$ , est la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

- Pour tout  $x > 0$ , l'intégrale  $\Gamma(x)$  est bien convergente (\*).
- $\Gamma(1) = 1$  et pour tout  $x > 0$ ,  $\Gamma(x) > 0$  (\*).
- Pour tout  $x > 0$ ,  $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$  (\*).
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$  (\*)

Avoir le réflexe de reconnaître / se ramener à  $\Gamma$  en exercice

### Exercice à savoir refaire :

1. A l'aide du changement de variables  $t = u^2/2$ , montrer que  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .  
**HP classique**
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}$$

Bien décortiquer ces calculs classiques

## Chapitre 5. Révisions de probabilités

Révisions de 1ère année. Pas encore de variables aléatoires.

**Révision autonome des formules et méthodes sur les suites usuelles : suites arithmétiques, suites géométriques, suites arithmético-géométriques, suites récurrentes linéaires d'ordre 2.**

- Espace probabilisable.
- Système complet d'événements.
- Définition d'une probabilité. Propriétés, formule du crible  $P(A \cup B \cup C)$  (trois événements uniquement).  
Événement négligeable, événement réalisé presque sûrement.
- **Exercice à savoir refaire :** inégalité de Boole : montrer que quels que soient les événements  $E_1, \dots, E_n$ ,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i).$$

- Propriétés de limite monotone en probabilités : pour des familles croissantes/décroissantes d'événements, dans le cas général.
- Probabilité conditionnelle.
- **Les deux formules principales : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales : ENONCES PRECIS !!**
- Indépendance de deux événements, de  $n$  événements.

(\*) : preuve exigible