CB1 - Epreuve de Maths n°1 (type Edhec / Ecricome)

Consignes
Il est demandé aux candidats d'indiquer clairement les numéros des questions traitées et de mettre leurs résultats en valeur.

Exercice 1 : algèbre linéaire et matrices

Partie 1

Dans cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
Soit A une matrice fixée inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Φ_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi_A(M) = AM$$

1. Montrer que Φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
(c'est à dire un endomorphisme bijectif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

2. On suppose dans cette question uniquement que $n = 2$ et que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Justifier que A est diagonalisable, et montrer que $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ où λ_1 et λ_2 sont deux réels que vous calculerez.

   (b) On note $B = Mat_{\mathscr{B}}(\Phi_A) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Calculer la matrice B.
En déduire que l'application Φ_A est diagonalisable.

   (c) Montrer que λ_1 et λ_2 sont des valeurs propres de la matrice B et calculer les sous-espaces propres correspondants. Donner alors le spectre de Φ_A.

3. On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 2, et où A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur colonne propre associé. Montrer que la matrice $X.{}^tX$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de Φ_A associé à λ.

   (b) Réciproquement, montrer que si λ est une valeur propre de Φ_A, alors λ est une valeur propre de A. Que peut-on en déduire ?

Partie 2

Dans cette partie n est un entier supérieur ou égal à 2. On rappelle que l'application trace, notée Tr, qui à une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe la somme de ses coefficients diagonaux, est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

4. (a) Rappeler sans démonstration la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Justifier que la dimension de $Im(Tr)$ est égale à 1. En déduire la dimension de $Ker(Tr)$.

5. Soit Ψ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Psi(M) = -M + Tr(M).I_n$$

   (a) Montrer que -1 est valeur propre de Ψ et donner la dimension du sous-espace propre associé.

   (b) Calculer $\Psi(I_n)$.

   (c) Déduire de ces deux questions que l'endomorphisme Ψ est diagonalisable.

Exercice 2 : matrices colonnes symétriques et antisymétriques

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On dit qu'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est symétrique (respectivement antisymétrique) lorsque:

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i = x_{n+1-i} \ \text{ (respectivement } x_i = -x_{n+1-i})$$

On note F l'ensemble des vecteurs symétriques de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et G l'ensemble des vecteurs antisymétriques de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad s_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n+1-j \\ 0 & \text{si } i \neq n+1-j \end{cases}$$

Python

1. Ecrire une fonction Python intitulée `def Sym(X):` qui prend pour paramètre une matrice colonne X, qui renvoie `True` si la matrice colonne X est symétrique et `False` sinon.

Partie A

Dans cette partie et uniquement dans cette partie, on étudie le cas particulier où $n = 3$.
La matrice S est alors la suivante :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calculer S^2.
   Déterminer un polynôme annulateur de S, puis déterminer les valeurs propres de S.

3. Déterminer une base de F et de G.

   Vérifier que F et G sont des sous-espaces propres de S.

4. En déduire que : $F \oplus G = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Partie B

On revient dans la suite clans le cas général où n est un entier supérieur ou égal à 2.

5. (a) Expliciter S et justifier que S est diagonalisable.

   (b) Ecrire une fonction Python `S(n):` qui renvoie la matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (c) Calculer SX lorsque $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

   (d) Pour i et j des entiers de $[[1, n]]$, expliciter le coefficient en ligne i et colonne j de S^2 en fonction des coefficients $s_{k,l}$ de S.
   En déduire que S^2 est la matrice identité d'ordre n.

6. (a) Soit X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer qu'il existe un unique couple (Y, Z) de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$Y \in F, \quad Z \in G \quad \text{et} \quad X = Y + Z$$

   (b) Montrer que F et G sont les sous-espaces propres de S. Préciser les valeurs propres associées.

7. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,n+1-j} = a_{n+1-i,j}$$

   On considère λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

   (a) Vérifier que $AS = SA$.

   (b) Montrer que SX est un vecteur propre de A.

   (c) On pose $Y = X + SX$. Exprimer AY en fonction de Y et λ.

   (d) En déduire que le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ associé à la valeur propre λ de A contient nécessairement un vecteur symétrique non nul ou un vecteur antisymétrique non nul.

Problème : une démonstration de la formule de Stirling

Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling, qui donne un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Questions Préliminaires

1. Rappeler la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

2. En déduire, via un changement de variables, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, puis celle de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

Partie I. Un équivalent de $n!$ dépendant d'un certain réel L

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

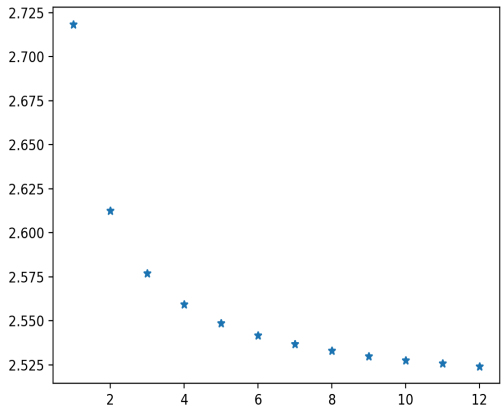
$$u_n = \frac{n!\ e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_n)$$

1. Simulation Python

   (a) Ecrire une fonction Python intitulée `def factorielle(n):` qui renvoie la valeur de $n!$.

   (b) Le programme Python ci-dessous donne la sortie graphique ci-contre.
   Que peut-on conjecturer ?

```
def u(n):
    return factorielle(n)*np.exp(n)/(n**(n+1/2))
n=12
x=np.arange(1,n+1)
y=np.zeros(n)
for k in range(0,n):
    y[k]=u(k+1)
plt.plot(x,y,"*")
plt.show()
```



2. Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont bien définies.

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad v_n - v_{n+1} = (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) - 1$$

4. (a) Rappeler le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3, au voisinage de 0.

   (b) En déduire que

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{12n^2} + o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2})$$

   (c) Préciser alors la nature de la série de terme général $v_n - v_{n+1}$.

5. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel L strictement positif.

6. Justifier que

$$n! \sim_{n\to+\infty} L.\sqrt{n}.(\frac{n}{e})^n$$

Partie II. Le calcul de L

Le but de cette Partie II. est de déterminer la valeur exacte du réel L précédent.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est un réel strictement positif.

2. (a) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x \leq e^{-x}$$

   (b) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt$$

3. (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 e^{-nt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du$$

   (b) Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}.I_n \leq \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+1} = (2n+2).(-I_{n+1} + I_n)$$
   En déduire l'expression de I_{n+1} en fonction de I_n.

   (b) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

   (c) En déduire que
$$\frac{u_{2n}}{(u_n)^2} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2n} I_n}$$

   (d) Justifier alors que la suite $(\sqrt{n}.I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\dfrac{L}{2\sqrt{2}}$.
   Déduire de la question II.3.(b) que $L \leq \sqrt{2\pi}$.

On admet que par changement de variables on obtient le résultat suivant :

$$\sqrt{n}.I_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{x^2}{n})^n dx \qquad \text{(preuve non demandée !)}$$

5. Soit $A \in]0; +\infty[$ et $n > A^2$. Justifier que
$$\sqrt{n}.I_n \geq \int_0^A (1 - \frac{x^2}{n})^n dx \qquad (*)$$

6. Montrer que pour tout $u \in [0, 1[$,
$$\ln(1-u) \geq -\frac{u}{1-u}$$

7. En déduire que pour tout $x \in [0, A]$,

$$(1 - \frac{x^2}{n})^n \geq e^{-\frac{x^2}{1-\frac{A^2}{n}}}$$

On a donc à l'aide de $(*)$: $\forall A > 0$, $\forall n > A^2$,

$$\sqrt{n}.I_n \geq \int_0^A e^{-\frac{x^2}{1-\frac{A^2}{n}}} dx$$

et on note $J_{A,n} = \displaystyle\int_0^A e^{-\frac{x^2}{1-\frac{A^2}{n}}} dx$.

8. A l'aide d'un changement de variables bien choisi, montrer que

$$J_{A,n} = \sqrt{1 - \frac{A^2}{n}}. \int_0^{\frac{A}{\sqrt{1-\frac{x^2}{n}}}} e^{-y^2} dy$$

9. En déduire que pour tout $A > 0$, $\dfrac{L}{2\sqrt{2}} \geq \displaystyle\int_0^A e^{-y^2} dy$, puis que $L \geq \sqrt{2\pi}$.

10. Donner finalement la valeur de L.

<u>Conclusion :</u> nous avons démontré la formule de Stirling :

$$\boxed{n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}.(\frac{n}{e})^n}$$