Corrigé du CB1 - Sujet 1 EDHEC / Ecricome -

Exercice 1

Partie 1

Soit A une matrice fixée inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Φ_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi_A(M) = AM$$

1. • Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc Φ_A va bien de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   • Pour tout $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $$\Phi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda \Phi_A(M) + \Phi_A(N)$$
   donc Φ_A est linéaire. Ainsi $\Phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
   • Calculons $Ker(\Phi_A)$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors
   $$M \in Ker(\Phi_A) \Leftrightarrow AM = 0 \Leftrightarrow A^{-1}AM = A^{-1}.0 \Leftrightarrow M = 0$$
   donc $Ker(\Phi_A) = \{0\}$ et Φ_A est injective. Comme Φ_A est un endomorphisme de l'e.v. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, c'est une bijection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Bilan : $\boxed{\Phi_A \text{ est un automorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

2. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) La matrice A est symétrique donc diagonalisable. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on sait que λ est une valeur propre de A ssi $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, soit avec le déterminant :
   $$det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$
   donc $Sp(A) = \{1, 3\}$.

   (b) On calcule :
   $$\begin{aligned} \Phi(E_1) &= AE_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Phi(E_2) &= AE_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Phi(E_3) &= AE_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \Phi(E_4) &= AE_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   D'où
   $$B = Mat_{\mathscr{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   Cette matrice est symétrique, donc B est diagonalisable et donc Φ_A l'est aussi.

   (c) • Calculons $Ker(B - I_4)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors
   $$\begin{aligned} X \in Ker(B - I_4) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \\ -y \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   Donc $Ker(B - I_4) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$ et $\dim(Ker(B - I_4) = 2$.
   • Calculons $Ker(B - 3I_4)$. En procédant comme ci-dessus :
   $$\begin{aligned} X \in Ker(B - 3I_4) &\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ t = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   Donc $Ker(B - 3I_4) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ et $\dim(Ker(B - 3I_4) = 2$.
   • Comme $\dim(Ker(B-I_4)) + \dim(Ker(B-3I_4)) = 4$, on a obtenu toutes les valeurs propres donc $Sp(B) = \{1, 3\}$.

   Bilan : $\boxed{Sp(\Phi_A) = \{1, 3\}}$

   On remarque que sur cet exemple, $Sp(A) = Sp(\Phi_A)$.
   Est-ce le cas de façon plus générale ? Le suspense est à son comble...

3. On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 2, et où A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur colonne propre associé : on a $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$.
   Tout d'abord, on remarque que
   $$\Phi_A(X\,{}^tX) = AX\,{}^tX = \lambda X\,{}^tX \quad (1)$$
   Il reste à montrer que $X.\,{}^tX \neq 0$. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Comme X n'est pas la matrice nulle, il existe $i \in [[1, n]]$ tel que $x_i \neq 0$. De plus, le terme de la i-ème ligne et i-ème

colonne de $X\,{}^tX$ est égal à :

$$(X\,{}^tX)_{i,i} = x_i^2 > 0$$

donc la matrice $X\,{}^tX$ est non nulle (2).

Bilan : d'après (1) et (2), $\boxed{X.{}^tX \text{ est un vecteur propre de } \Phi_A \text{ associé à la valeur propre } \lambda}$

(b) Soit λ une valeur propre de Φ_A : il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $M \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, telle que $\Phi_A(M) = \lambda.M$.
Notons $M = (C_1|C_2|\cdots|C_n)$ où les C_i sont les colonnes de M. Comme M n'est pas nulle, il existe $i \in [[1,n]]$ tel que $C_i \neq 0$. Mais alors

$$AM = \lambda.M \Leftrightarrow (AC_1|\cdots|AC_n) = \lambda(C_1|\cdots|C_n) \Rightarrow AC_i = \lambda C_i$$

donc λ est bien une valeur propre de A puisque $C_i \neq 0$.

Bilan : $\boxed{Sp(A) = Sp(\Phi_A)}$

Partie 2

4. (a) $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$.

(b) On sait que $Im(Tr) \subset \mathbb{R}$. Ainsi $\dim(Im(Tr)) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$. On a donc $\dim(Im(Tr)) = 0$ ou 1. Supposons que $\dim(Im(Tr)) = 0$, ceci signifierait que l'application trace envoie toute matrice M sur 0 ce qui est faux ($Tr(I_n) = n$ par exemple). Donc $\dim(Im(Tr)) = 1$.
Par le théorème du rang, on en déduit que

$$\dim(Ker(Tr)) = n^2 - \dim(Im(Tr)) = n^2 - 1$$

5. Soit Ψ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Psi(M) = -M + Tr(M).I_n$$

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} M \in Ker(\Psi + Id) &\Leftrightarrow \Psi(M) + M = 0 \\ &\Leftrightarrow Tr(M).I_n = 0 \\ &\Leftrightarrow Tr(M) = 0 \text{ car } I_n \neq 0 \\ &\Leftrightarrow M \in \mathrm{Ker}(Tr) \end{aligned}$$

Ainsi $\dim(Ker(\Psi + Id)) = \dim(Ker(Tr)) = n^2 - 1 \geq 3$ car $n \geq 2$.
Bilan : $\boxed{-1 \text{ est valeur propre de } \Psi \text{ et } \dim(Ker(\Psi + Id)) = n^2 - 1}$

(b) $\Psi(I_n) = -I_n + n.I_n = (n-1).I_n$

(c) Comme $I_n \neq 0$, on en déduit que $n-1$ est une valeur propre de Ψ. On a donc $\dim(Ker(\Psi - (n-1)Id) \geq 1$. De plus les $n - 1 \neq -1$ car $n \geq 2$. Ainsi :

$$\dim(Ker(\Psi + Id)) + \dim(Ker(\Psi - (n-1)Id) \geq n^2 - 1 + 1 = n^2$$

Mais d'autre part, comme Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est un e.v. de dimension n^2, on sait aussi que :

$$\dim(Ker(\Psi + Id)) + \dim(Ker(\Psi - (n-1)Id) \leq n^2$$

donc finalement

$$\dim(Ker(\Psi + Id)) + \dim(Ker(\Psi - (n-1)Id) = n^2$$

ce qui prouve que $\boxed{\Psi \text{ est diagonalisable et que } Sp(\Psi) = \{-1, n-1\}}$

Exercice 2

Python

1.
```
def Sym(X):
    a,b=np.shape(X) #on récupère la taille de X
    T=True
    for i in range(0,a):
        if X[i,0]!=X[a-1-i,0]: #attention cases numérotées de 0 à a-1
            T=False
    return T
```

Partie A

2. Le calcul donne $S^2 = I_3$. Donc $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de S, ses racines sont 1 et -1 donc

$$Spec(S) \subset \{-1, 1\}$$

On remarque que $S + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 (deux de ses colonnes sont égales), cette matrice n'est donc pas inversible. Ainsi -1 est valeur propres de S.

On remarque que $S - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 1. Donc cette matrice n'est pas inversible et 1 est valeur propre de S.

Conclusion : $\boxed{Spec(S) = \{-1, 1\}}$

3. On applique la définition de F. Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in F \Longleftrightarrow a = c \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Donc $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, par conséquent $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ engendre F et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils forment une famille libre et donc une base de F.
On applique la définition de G,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in G \Longleftrightarrow a = -c \text{ et } b = -b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Donc $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, par conséquent $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ engendre G et ce vecteur n'est pas nul donc il forme une famille libre et donc une base de G.

Déterminons le sous-espace propre $Ker(S+I_3)$:

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in Ker(S+I_3) \iff (S+I_3)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (0) \iff \left\{\begin{array}{r} a+c=0\\ b=0\end{array}\right. \iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in G$$

Donc $\boxed{G = Ker(S+I_3)}$

De même

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in Ker(S-I_3) \iff (S-I_3)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (0) \iff \left\{\begin{array}{r} -a+c=0\\ a-c=0\end{array}\right.$$
$$\iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in F$$

Donc $\boxed{F = Ker(S-I_3)}$

Conclusion : $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont les deux sous-espaces propres de } S}$

4. En tant que sous-espaces propres associées à des valeurs propres distinctes, F et G sont en somme directe, la somme de leurs dimensions vaut 3 qui est celle de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

   Conclusion : $\boxed{F \oplus G = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

Partie B

5. (a) Dans la colonne 1 de S, tous les termes sont nuls sauf celui sur la ligne $i = n+1-1 = n$.
   Dans la colonne 2 de S, tous les termes sont nuls sauf celui sur la ligne $i = n+1-2 = n-1$.
   Et ainsi de suite jusqu'à la colonne n où tous les termes sont nuls sauf celui sur la ligne $i = n+1-n = 1$.
   Donc

$$S = \begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 0 & 1\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0\\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

   S est symétrique à coefficients réels donc $\boxed{\text{diagonalisable}}$.

   (b) Définition de S en Python :

```
def S(n):
    S=np.zeros([n,n])
    for i in range(0,n):
        S[i,n-1-i]=1
    return S
```


   (c)

$$SX = \begin{pmatrix}x_n\\x_{n-1}\\\vdots\\x_2\\x_1\end{pmatrix}.$$

   Cette question en apparence anodine présente un intérêt pour la suite si on remarque que

   - X est symétrique si et seulement si $SX = X$,
   - X est antisymétrique si et seulement si $SX = -X$

   (d) Pour toute matrice M, on note $(M)_{i,j}$ son coefficient en ligne i et colonne j.
   On a alors $(S^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}(S)_{i,k}(S)_{k,j}$ par définition du produit matriciel.
   Or les $(S)_{u,v}$ valent 0 ou 1 donc $(S)_{i,k}(S)_{k,j}$ vaut 0 ou 1, et $(S)_{i,k}(S)_{k,j}$ vaut 1 si et seulement si $(S)_{i,k} = (S)_{k,j} = 1$ si et seulement si $i = n+1-k$ et $k = n+1-j$ si et seulement si $i = j = n+1-k$.
   Par conséquent si $i \neq j$ alors $(S^2)_{i,j} = 0$.
   Si $i = j$ alors $(S^2)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n}(S)_{i,k}(S)_{k,i}$. Dans cette somme tous les termes sont nuls sauf celui pour $k = n+1-i$ et ce terme $(S)_{i,n+1-i}(S)_{n+1-i,i}$ vaut 1 donc la somme vaut 1.
   Conclusion : $\boxed{S^2 = I_n}$

6. (a) *On s'inspire de la démonstration du TD par analyse-synthèse qui montre que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme d'une matrice symétrique : $\frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et d'une matrice antisymétrique : $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$.*

   Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   Analyse : On suppose qu'il existe $Y \in F$, $Z \in G$ tel que $X = Y + Z$.
   On utilise la remarque faite en 4(b), on multiplie par S et

$$SX = SY + SZ = Y - Z$$

   car Y est symétrique et Z est antisymétrique.
   Donc $X + SX = 2Y$ et $X - SX = 2Z$ donc, en cas d'existence, Y et Z sont uniques et valent respectivement $\frac{1}{2}(X+SX)$ et $\frac{1}{2}(X-SX)$.
   Synthèse : Il est immédiat que $\frac{1}{2}(X+SX) + \frac{1}{2}(X-SX) = X$.
   De plus $S\left(\frac{1}{2}(X+SX)\right) = \frac{1}{2}(SX + S^2X) = \frac{1}{2}(SX+X)$ donc $\frac{1}{2}(X+SX) \in F$.
   Et $S\left(\frac{1}{2}(X-SX)\right) = \frac{1}{2}(SX - S^2X) = \frac{1}{2}(SX-X)$ donc $\frac{1}{2}(X-SX) \in G$.

   Conclusion : $\boxed{\text{il existe un unique couple } (Y,Z) \text{ tel que } Y \in F,\ Z \in G \text{ et } X = Y+Z.}$

   (b) Avec 4(c), on sait que $S^2 - I_n = (0)$ donc $X^2 - 1$ est annulateur de S donc

$$Spec(S) \subset \{-1, 1\}$$

   On sait aussi que S est diagonalisable, S a donc au moins une valeur propre.
   Si S n'avait qu'une valeur propre λ alors on aurait $S = P.\lambda I_n.P^{-1}$ où P est une certaine matrice inversible, donc $S = \lambda.I_n$, ce qui est absurde car S n'est pas diagonale (cf définition de S avec $n \geq 2$).
   Donc S a au moins deux valeurs propres donc le spectre de S est $\{-1, 1\}$.

On utilise ensuite la remarque de la question 4(b) ainsi

$$X \in F \iff SX = X \iff (S - I_n)X = (0) \iff X \in Ker(S - I_n)$$

et

$$X \in G \iff SX = -X \iff (S + I_n)X = (0) \iff X \in Ker(S + I_n)$$

Donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont les sous-espaces propres de } G \text{ avec les valeurs propres respectives 1 et } -1.}$

7. (a) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(AS)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k}(S)_{k,j} = (A)_{i,n+1-j}$ car $(S)_{k,j}$ est nul sauf si $k = n+1-j$ et dans ce cas il vaut 1.
D'autre part $(SA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (S)_{i,k}(A)_{k,j} = (A)_{n+1-i,j}$ car $(S)_{i,k}$ est nul sauf si $k = n+1-i$ et dans ce cas il vaut 1.
Or l'énoncé dit que $(A)_{i,n+1-j} = (A)_{n+1-i,j}$ donc $(AS)_{i,j} = (SA)_{i,j}$ et cela pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Donc $SA = AS$.

Conclusion : $\boxed{SA = AS}$

(b) On sait que $AX = \lambda X$ donc $A(SX) = SAX = S(\lambda X) = \lambda SX$ car λ est un réel. Comme X est un vecteur propre, X est non nul. Avec le calcul de 4(b), on voit que SX est également non nul car on retrouve les mêmes coefficients que pour X dans un ordre inverse.
Conclusion : $\boxed{SX \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à } \lambda.}$

(c) On calcule $AY = AX + ASX = \lambda X + \lambda SX = \lambda Y$.

(d) Si Y est nul alors $X = -SX$ donc X est antisymétrique tout en étant un vecteur propre de A associé à λ.
Si Y est non nul alors comme $AY = \lambda Y$, Y est vecteur propre de A associé à λ et de plus $SY = SX + S^2X = SX + X = Y$ donc Y est symétrique.
Conclusion : il existe un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ qui est symétrique ou antisymétrique.

Problème : une démonstration de la formule de Stirling

Questions Préliminaires

1. D'après le cours, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$.

2. Posons $x = \frac{t}{\sqrt{2}}$. Il s'agit d'un changement de variables affine non constant donc autorisé. $dx = \frac{1}{\sqrt{2}}dt$, et par CDV :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{\pi}$$

Enfin, par parité de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$,

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Partie I.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_n)$$

1. Simulation Python

(a)
```
def factorielle(n):
    A=np.arange(1,n+1,1)
    return np.prod(A)
```

(b) On peut conjecturer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et qu'elle converge vers une limite L qui vaut environ $2,525$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n \neq 0$ donc u_n est bien défini et $u_n > 0$ par quotient de nombres strictement positifs. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$ existe bien.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= \ln\left(\frac{n!.e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}.\frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1)!.e^{n+1}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1/2}}{n^{n+1/2}}.\frac{n+1}{(n+1).e}\right) \\ &= \ln\left((\frac{n+1}{n})^{n+1/2}.\frac{1}{e}\right) \\ &= (n+\frac{1}{2})\ln(\frac{n+1}{n}) - \ln(e) \\ &= (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) - 1 \end{aligned}$$

4. (a) D'après le cours,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3)$$

(b) Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a alors :

$$\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^3})$$

D'où en remplaçant :

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= (n+\frac{1}{2}).\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^3})\right) - 1 \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2}) - 1 \\ &= \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^2} + o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2}) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

(c) On en déduit que $v_n - v_{n+1} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($2 > 1$), par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } v_n - v_{n+1} \text{ converge}}$

5. *Penser à des séries télescopiques !!*
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on remarque que

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k - v_{k+1} = v_1 - v_n \quad \text{par téléscopage}$$

donc aussi $v_n = v_1 - \sum_{k=1}^{n-1} v_k - v_{k+1}$. Comme la série $\sum_{k\geq 1} v_k - v_{k+1}$ converge, il existe un réel l tel que $\lim_{n\to+\infty} -\sum_{k=1}^{n-1} v_k - v_{k+1} = l$, donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = v_1 - l$: $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente}}$.
Ensuite, comme $u_n = e^{v_n}$, par continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle, on obtient $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{v_1 - l} = L$.

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers un réel } L \text{ strictement positif}}$

6. Comme $L > 0$, ceci peut se reformuler sous la forme :

$$\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \sim_{n\to+\infty} L \quad \text{et donc} \quad n! \sim_{n\to+\infty} n^{n+\frac{1}{2}}.L.e^{-n}$$

Bilan : $\boxed{n! \sim_{n\to+\infty} L.\sqrt{n}.(\frac{n}{e})^n}$

Partie II.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $f_n : t \mapsto (1-t^2)^n$. La fonction f_n est positive, continue sur $[0,1]$. De plus elle est différente de la fonction nulle. D'après le cours, $I_n > 0$.

2. (a) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x} - 1 + x$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = -e^{-x} + 1$$

On a donc $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, et la fonction g est décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$ (écrivez le tableau de variations). Elle a pour minimum $g(0) = 0$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire que $e^{-x} \geq 1 - x$.

Bilan $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x \leq e^{-x}}$

(b) Soit $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité ci-dessus à $x = t^2$, et comme $t^2 \in [0,1]$, on a :

$$\begin{array}{ll} & 0 \leq 1 - t^2 \leq e^{-t^2} \\ \Rightarrow & 0 \leq (1-t^2)^n \leq e^{-nt^2} \quad \text{par croissance de la fonction } t \mapsto t^n \text{ sur } \mathbb{R}_+ \end{array}$$

D'où en intégrant, les bornes étant dans le bon sens :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt}$$

3. (a) Posons $u = \sqrt{n}.t$. Il s'agit d'un changement de variables affine, donc autorisé. On a $dt = \frac{1}{\sqrt{n}} du$, et au niveau des bornes :

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 1 \\ t = 0 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{n} \\ t = 0 \end{array} \right.$$

Par CDV,

$$\int_0^1 e^{-nt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du$$

(b) On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n}.I_n \leq \sqrt{n}.\int_0^1 e^{-nt^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du \leq \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

d'après les résultats précédents, et par positivité de e^{-u^2}.

Bilan : $\boxed{\sqrt{n}.I_n \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt$. On procède à une intégration par parties : posons

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = (1-t^2)^{n+1} \\ v'(t) = 1 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} u'(t) = -2(n+1)t.(1-t^2)^n \\ v(t) = t \end{array} \right.$$

Ces fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, donc l'IPP est autorisée. Par IPP,

$$\begin{array}{rcl} I_{n+1} & = & [t.(1-t^2)^{n+1}]_0^1 + 2(n+1).\int_0^1 t^2.(1-t^2)^n dt \\ & = & 0 - 0 + 2(n+1).\int_0^1 (t^2 - 1 + 1).(1-t^2)^n dt \\ & = & 2.(n+1).(-\int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt + \int_0^1 (1-t^2)^n dt) \\ & = & (2n+2).(-I_{n+1} + I_n) \end{array}$$

Donc $(2n+3).I_{n+1} = (2n+2).I_n$.

Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}.I_n}$

(b) Montrons par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}_n : "I_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}"$$

- Initialisation : si $n = 0$, $I_0 = \int_0^1 1 dt = 1 = \frac{(2^0.0!)^2}{1!}$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. D'après la question précédente,

$$\begin{array}{rcl} I_{n+1} & = & \frac{2n+2}{2n+3}.I_n \\ & = & \frac{2n+2}{2n+3}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ & = & \frac{2n+2}{2n+2}.\frac{2n+2}{2n+3}\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \\ & = & \frac{4.(n+1)^2.(2^n.n!)^2}{(2n+3)!} \\ & = & \frac{(2^{n+1}.(n+1)!)^2}{(2n+3)!} \end{array}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$

Remarque : le résultat étant donné dans l'énoncé, penser à faire une récurrence !

(c) Par définition de la suite (u_n), on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{2n}}{(u_n)^2} &= \frac{(2n)!e^{2n}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}.\frac{(n)^{2n+1}}{(n!)^2e^{2n}}\\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2}.\frac{n.n^{2n}}{\sqrt{2n}.(2n)^{2n}}\\ &= \frac{1}{2n+1}.\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}.\frac{n}{\sqrt{2n}}.(\frac{1}{2})^{2n}\\ &= \frac{n}{(2n+1).\sqrt{2n}}.\frac{1}{I_n}\\ &\sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2n}.I_n}\end{aligned}$$

(d) Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = L > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = L$ et $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^2 = L^2$, donc

$$\frac{1}{2\sqrt{2n}.I_n} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{L} \Rightarrow \sqrt{n}.I_n \sim_{n\to+\infty} \frac{L}{2\sqrt{2}}$$

Bilan : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}.I_n = \frac{L}{2\sqrt{2}}}$

On admet que le changement de variables $t = \frac{x}{\sqrt{n}}$ permet d'obtenir le résultat suivant (preuve non demandée) :

$$\sqrt{n}.I_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{x^2}{n})^n dx$$

5. Soit $A \in]0;+\infty[$ et $n > A^2$. On a alors $\sqrt{n} > A$.

   Pour tout $x \in [0, \sqrt{n}]$, on a

   $$0 \leq x^2 \leq n \Rightarrow 0 \leq \frac{x^2}{n} \leq 1$$

   donc la fonction $x \mapsto (1-\frac{x^2}{n})^n$ est positive sur $[0, \sqrt{n}]$. On en déduit, comme $[0, A] \subset [0, \sqrt{n}]$, que

   $$\sqrt{n}.I_n = \int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{x^2}{n})^n dx \geq \int_0^A (1-\frac{x^2}{n})^n dx$$

6. On considère la fonction h définie sur $[0,1[$ par

   $$h(u) = \ln(1-u) + \frac{u}{1-u}$$

   Cette fonction est dérivable sur $[0,1[$ et pour tout $u \in [0,1[$,

   $$h'(u) = \frac{-1}{1-u} + \frac{(1-u)+u}{(1-u)^2} = \frac{-(1-u)+1}{(1-u)^2} = \frac{u}{(1-u)^2} \geq 0$$

   donc h est croissante sur $[0,1[$. De plus, $h(0) = 0$ donc pour tout $u \in [0,1[$, $h(u) \geq 0$.

   Bilan : $\boxed{\text{pour tout } u \in [0,1[,\ \ln(1-u) \geq -\frac{u}{1-u}}$

7. Pour tout $x \in [0, A]$, on a $\frac{x^2}{n} \in [0,1[$, donc

   $$\begin{aligned}\ln(1-\frac{x^2}{n}) \geq -\frac{\frac{x^2}{n}}{1-\frac{x^2}{n}} &\Rightarrow n\ln(1-\frac{x^2}{n}) \geq -\frac{x^2}{1-\frac{x^2}{n}}\\ &\Rightarrow \exp(n\ln(1-\frac{x^2}{n})) \geq \exp(-\frac{x^2}{1-\frac{x^2}{n}})\\ &\Rightarrow (1-\frac{x^2}{n})^n \geq e^{-\frac{x^2}{1-\frac{x^2}{n}}}\\ &\Rightarrow (1-\frac{x^2}{n})^n \geq e^{-\frac{x^2}{1-\frac{A^2}{n}}}\end{aligned}$$

   en utilisant le fait que $x \in [0, A]$ (assez long si on veut tout écrire !! S'en dispenser à ce stade du sujet).

   On a donc : $\forall A > 0, \forall n > A^2$,

   $$\sqrt{n}.I_n \geq \int_0^A e^{-\frac{x^2}{1-\frac{A^2}{n}}} dx$$

   et on note $J_A = \int_0^A e^{-\frac{x^2}{1-\frac{A^2}{n}}} dx$.

8. Le CDV $y = \frac{x}{\sqrt{1-\frac{A^2}{n}}}$ est affine non constant donc autorisé. Bien qu'un peu lourd ce changement de variables ne pose pas de problème et on obtient :

   $$J_A = \sqrt{1-\frac{A^2}{n}}.\int_0^{\frac{A}{\sqrt{1-\frac{A^2}{n}}}} e^{-y^2} dy$$

9. D'une part, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1-\frac{A^2}{n}} = 1$. D'autre part, en notant F une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction continue $y \mapsto e^{-y^2}$, on a

   $$\int_0^{\frac{A}{\sqrt{1-\frac{x^2}{n}}}} e^{-y^2} dy = F(\frac{A}{\sqrt{1-\frac{x^2}{n}}}) - F(0) \to_{n\to+\infty} F(A) - F(0) = \int_0^A e^{-y^2} dy$$

   en utilisant la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction F. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, comme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}.I_n = \frac{L}{2\sqrt{2}}$, on obtient alors que : pour tout $A > 0$,

   $$\frac{L}{2\sqrt{2}} \geq \int_0^A e^{-y^2} dy$$

   Enfin, en passant à la limite quand $A \to +\infty$:

   $$\frac{L}{2\sqrt{2}} \geq \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

   Bilan : $\boxed{L \geq \sqrt{2\pi}}$

   Ca c'est de l'analyse !! Majorations et minorations dans tous les sens !! En espérant que vous ayez apprécié ce joli problème, en partie "fait maison" !

10. Enfin, on a montré d'une part que $L \leq \sqrt{2\pi}$ et d'autre part que $L \geq \sqrt{2\pi}$. D'où $\boxed{L = \sqrt{2\pi}}$

    Conclusion : nous avons démontré la formule de Stirling :

    $$\boxed{n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}.(\frac{n}{e})^n}$$