Barème : (cf rapport de jury) : Préliminaire 8%, Partie I 20%, Partie II 16%, Partie III 28%, Partie IV 28% (dont Python 9%).
Faire 60% du sujet donne la note de 20/20.

Préliminaire

1. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f_k définie sur $[0,+\infty[$ par : $f_k(t) = t^k e^{-t^2} dt$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, et en $+\infty$ $f_k(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), par critère d'équivalence (fonctinos positives), l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_k(t)dt$ converge. Comme $\int_0^1 f_k(t)dt$ est bien définie, $\int_0^{+\infty} f_k(t)dt$ converge.

   (b) D'après le cours, l'intégrale de Gauss vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$.
   Donc $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

   On considère $A_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Posons $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$. La fonction $t \mapsto \sqrt{2}.t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$, bijective de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$. Le CDV est autorisé et

$$A_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} . \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} . \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

   Le calcul de A_1 est plus simple :

$$A_1 = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt = \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^A = \frac{1}{2}$$

   On considère enfin $A_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$. Soit $B > 0$ et $A_2^B = \int_0^B t^2 e^{-t^2} dt$. Posons

$$\begin{cases} u'(t) = t.e^{-t^2} \\ v(t) = t \end{cases} \to \begin{cases} u(t) = -\frac{1}{2}.e^{-t^2} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,B]$. Par IPP

$$A_2^B = [-\frac{1}{2} t.e^{-t^2}]_0^B + \frac{1}{2} \int_0^B e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} B.e^{-B^2} + \frac{1}{2} \int_0^B e^{-t^2} dt$$

   d'où en passant à la limite quand $B \to +\infty$: $A_2 = \frac{1}{2}.A_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.
   Ainsi, $\boxed{A_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ A_1 = \frac{1}{2} \text{ et } A_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}}$

2. La fonction $t \mapsto \left| e^{-t^2} \cos(xt) \right|$ est continue, positive, et dominée par f_0 ; ainsi $\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt$ converge absolument, donc converge ; de même $\int_0^{+\infty} t^2 \sin(xt) e^{-t^2} dt$ converge absolument (domination de la valeur absolue par f_2).

Partie I. Calcul d'une fonction auxiliaire

3. (a) Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 0 en 0, pour la fonction sin qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad |\sin(u) - \sin(0)| \leq M|u|$$

avec $M = \sup_{t\in[0,u]} |\sin'(t)| = \sup_{t\in[0,u]} |\cos(t)| \leq 1$, donc :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R} \quad |\sin(u)| \leq |u|}$$

(b) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \cos(a-b) + \cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b)$; pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, prenons $a = \dfrac{u+v}{2}$ et $b = \dfrac{u-v}{2}$, on a bien $a+b = u$ et $a-b = v$ d'où :

$$\boxed{\cos(u) - \cos(v) = 2\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)\sin\left(\frac{v-u}{2}\right)}$$

(c) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \left(\cos(2xt) - \cos(2yt)\right) \right| dt \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \left|\cos(xt) - \cos(yt)\right| dt \\
&\quad \text{par inégalité triangulaire pour les intégrales absolument convergentes} \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} 2 \left|\sin((x+y)t)\right| \left|\sin((x-y)t)\right| dt \\
&\quad \text{par 3)b) et croissance de l'intégrale} \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} 2 \left|(x-y)t\right| dt \\
&\quad \text{par 3)a), et absolue convergence de } \textstyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt = A_1 \\
&\leq 2|x-y| \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{|F(x) - F(y)| \leq 2A_1|x-y|}$$

donc :

$$\boxed{\lim_{y\to x} F(y) = F(x)}$$

F est continue en x et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. (a) Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en 0, pour la fonction sin qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$:

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \left|\sin(u) - \sin(0) - \sin'(0)u\right| \leq M\frac{u^2}{2}$$

avec $M = \sup_{t\in[0,u]} |\sin''(t)| = \sup_{t\in[0,u]} |-\sin(t)| \leq 1$, donc :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R} \quad |\sin(u) - u| \leq \frac{u^2}{2}}$$

(b) Soit $(x,h) \in \mathbb{R}^2$;

$$|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \left(\cos(2(x+h)t) - \cos(2xt) + 2ht\sin(2xt)\right) dt \right|$$

avec :

$$\begin{aligned}
&\left|e^{-t^2}\left(\cos(2(x+h)t)-\cos(2xt)+2ht\sin(2xt)\right)\right| \\
&= e^{-t^2}\left|\cos(2xt)\cos(2ht)-\sin(2xt)\sin(2ht)-\cos(2xt)+2ht\sin(2xt)\right| \\
&= e^{-t^2}\left|\cos(2xt)\left(\cos(2ht)-1\right)+\sin(2xt)\left(2ht-\sin(2ht)\right)\right| \\
&\leq e^{-t^2}\left(\left|\cos(2xt)\left(\cos(2ht)-1\right)\right|+\left|\sin(2xt)\left(2ht-\sin(2ht)\right)\right|\right) \\
&\leq e^{-t^2}\left(\left|\cos(2xt)\right|\left(1-\cos(2ht)\right)+\left|\sin(2xt)\left(2ht-\sin(2ht)\right)\right|\right)
\end{aligned}$$

Notons que

$$e^{-t^2}\left(\left|\cos(2xt)\right|\left(1-\cos(2ht)\right)\right) \leq 2\left|\cos(2xt)\right|e^{-t^2},$$

qui est le terme général d'une intégrale convergente d'après le préliminaire ;
de même pour

$$e^{-t^2}\left|\sin(2xt)\left(2ht-\sin(2ht)\right)\right| \leq e^{-t^2}\left|\sin(2xt)\right|\frac{(2ht)^2}{2}$$

(cette dernière intégrale convergeant par le même argument que la deuxième du 2)).
Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\left(\left|\cos(2xt)\right|\left(1-\cos(2ht)\right)+\left|\sin(2xt)\left(2ht-\sin(2ht)\right)\right|\right)dt$ converge comme somme d'intégrales convergentes, donc :

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\left(\cos(2(x+h)t)-\cos(2xt)+2ht\sin(2xt)\right)dt$ est absolument convergente ;
- l'inégalité triangulaire s'applique :

$$\boxed{\left|F(x+h)-F(x)+2hG(x)\right| \leq \int_0^{+\infty}\left(\left|\cos(2xt)\right|\left(1-\cos(2ht)\right)+\left|\sin(2xt)\left(2ht-\sin(2ht)\right)\right|\right)dt}$$

(c) D'après les inégalités établies dans la question précédente,

$$e^{-t^2}\left|\sin(2xt)\left(2ht-\sin(2ht)\right)\right| \leq e^{-t^2}\left|\sin(2xt)\right|\frac{(2ht)^2}{2} = 2e^{-t^2}\left|\sin(2xt)\right|h^2t^2$$

et

$$e^{-t^2}\left|\cos(2xt)\right|\left(1-\cos(2ht)\right) \leq 2e^{-t^2}\sin^2(ht)\left|\cos(2xt)\right| \leq 2e^{-t^2}h^2t^2\left|\cos(2xt)\right|$$

donc :

$$\boxed{\left|F(x+h)-F(x)+2hG(x)\right| \leq 2h^2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}t^2\left(\left|\sin(2xt)\right|+\left|\cos(2xt)\right|\right)dt}$$

Cette dernière intégrale converge de la même manière que la deuxième de la question 2), et ne dépend pas de h, ce qui justifie de remplacer sa valeur par une constante C :

$$\boxed{\left|F(x+h)-F(x)+2hG(x)\right| \leq Ch^2}$$

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En divisant la relation précédente par $|h| > 0$:

$$\forall h \in \mathbb{R}^* \quad \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+2G(x)\right| \leq C|h|$$

donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = -2G(x)$$

donc F est dérivable en x et $F'(x) = -2G(x)$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{F' = -2G}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$; $F(x) = -2\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin(2xt)dt$.
Intégration par parties sur le segment $[0, A]$ $(A \geq 0)$, avec

$$\begin{array}{ll} u(t) = e^{-t^2} & v(t) = \sin(2xt) \\ u'(t) = -2te^{-t^2} & v'(t) = 2x\cos(2xt) \end{array}$$

les fonctions u et v étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_0^A -2te^{t^2}\sin(2xt)dt &= \Big[\sin(2xt)e^{-t^2}\Big]_0^A - 2x\int_0^A \cos(2xt)e^{-t^2}dt \\ &= \sin(2Ax)e^{-A^2} - 2x\int_0^A \cos(2xt)e^{-t^2}dt \end{aligned}$$

donc :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A -2te^{t^2}\sin(2xt)dt = 0 - 2x\int_0^{+\infty}\cos(2xt)e^{-t^2}dt$$

donc :

$$\boxed{F'(x) = -2xF(x)}$$

(c) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = F(x)e^{x^2}$.
H est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H'(x) = F'(x)e^{x^2} + F(x)2xe^{x^2} = 0$$

Ainsi, H est constante donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H(x) = H(0) = F(0) = A_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}}$$

II. Fonction de Dirichlet

6. (a) • $\sin(\frac{u}{2}) = 0$ ssi $\frac{u}{2} = k\pi$, où $k \in \mathbb{R}$, ssi $u = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{R}$.
Donc $\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)$ ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, et φ_n est continue sur $\mathcal{D}$ comme quotient de fonctions continues avec un dénominateur non nul.
• En 0 : $\varphi_n(u) \sim \dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\frac{u}{2}} \sim n + \dfrac{1}{2}$, donc :

$$\boxed{\varphi_n \text{ est prolongeable par continuité avec } \varphi_n(0) = n + \frac{1}{2}}$$

(b)

$$\begin{aligned}\forall u \in \mathcal{D},\ \ \forall k \in \mathbb{Z},\ \ \varphi_n(u+2\pi) &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(u+2\pi)\right)}{2\sin\left(\frac{u+2\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u+(2n+1)\pi)\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}+\pi\right)} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{-2\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \quad \text{car } \sin(k\pi+x)=(-1)^k\sin(x) \\ &= \varphi_n(u)\end{aligned}$$

Ainsi φ_n est 2π-périodique, donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \lim_{x\to 2k\pi}\varphi_n(x) = \lim_{x\to 0}\varphi_n(x) = n+\frac{1}{2}}$$

φ_n est bien prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

(c) φ_n est paire comme quotient de fonctions impaires.

7. (a) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$$

donc en soustrayant : $\boxed{\sin(a+b)-\sin(a-b) = 2\cos(a)\sin(b)}$

(b) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété : $\mathcal{H}(n)$: "$\forall u \in \mathcal{D}$, $\sum_{k=1}^n \cos(ku) = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}$"

- Initialisation : si $n=1$, pour tout $u \in \mathcal{D}$,

$$\varphi_1(u) - \frac{1}{2} = \frac{\sin((1+\frac{1}{2})u)-\sin(\frac{u}{2})}{2\sin(\frac{u}{2})} = \frac{2\cos(u).\sin(\frac{u}{2})}{2\sin(\frac{u}{2})} = \cos(u)$$

en prenant $a=u$ et $b=\frac{u}{2}$ dans la relation du 7.(a). Donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Alors pour tout $u \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\cos(ku) &= \sum_{k=1}^{n}\cos(ku)+\cos((n+1)u) \\ &= \varphi_n(u)-\frac{1}{2}+\cos((n+1)u) \quad \text{par HR} \\ &= \frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{2\sin(\frac{u}{2})}+\cos((n+1)u)-\frac{1}{2} \\ &= \frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)+2\sin(\frac{u}{2})\cos((n+1)u)}{2\sin(\frac{u}{2})}-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Or en prenant $a=(n+1)u$ et $b=\frac{u}{2}$ dans la relation de la question précédente, on obtient :

$$2\sin(\frac{u}{2})\cos((n+1)u) = \sin((n+1+\frac{1}{2})u)-\sin((n+\frac{1}{2})u)$$

ce qui en simplifiant nous donne

$$\sum_{k=1}^{n+1}\cos(ku)=\frac{\sin((n+1+\frac{1}{2})u)}{2\sin(\frac{u}{2})}-\frac{1}{2}=\varphi_{n+1}(u)-\frac{1}{2}$$

donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall u\in\mathcal{D},\ \sum_{k=1}^{n}\cos(ku)=\varphi_n(u)-\frac{1}{2}}$

De plus, la fonction $u\mapsto\sum_{k=1}^{n}\cos(ku)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Comme φ_n est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}\setminus\mathcal{D}$ n'est formé que de points isolés, on a bien

$$\forall u\in\mathbb{R},\quad\sum_{k=1}^{n}\cos(ku)=\varphi_n(u)-\frac{1}{2}$$

Autre rédaction possible : si $u=2l\pi$ où.$l\in\mathbb{Z}$, alors $\sum_{k=1}^{n}\cos(ku)=n$ et $\varphi(u)-\frac{1}{2}=n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=n$ donc la relation reste vraie si $u\in\mathbb{R}\setminus\mathcal{D}$.

(c) $$\int_0^{2\pi}\varphi_n(u)du=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(ku)\right)du=\pi+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(ku)}{k}\right]_0^{2\pi}=\pi+0$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\varphi_n(u)du=\pi}$$

8. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\int_x^{x+T}\psi(u)du=\int_x^0\psi(u)du+\int_0^T\psi(u)du+\int_T^{x+T}\psi(u)du$$

On pose $x=u-T$ dans la dernière intégrale. Comme $u\mapsto u-T$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ce CDV est autorisé. On obtient alors $\int_T^{x+T}\psi(u)du=\int_0^x\psi(x+T)dx=\int_0^x\psi(x)dx$ par périodicité. D'où

$$\int_x^{x+T}\psi(u)du=\int_x^0\psi(u)du+\int_0^T\psi(u)du+\int_0^x\psi(u)du=\int_0^T\psi(u)du$$

Partie III. Formule sommatoire de Poisson

9. (a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$k^2f(x+2k\pi)=k^2.\exp(-\theta.(x+2k\pi)^2)=\exp\left(2\ln(k)-\theta(x+2k\pi)^2\right);$$

or $-\theta(x+2k\pi)^2\sim_{k\to+\infty}-4\theta\pi^2k^2$, et $\ln(k)=o_{k\to+\infty}(k^2)$, donc :

$$2\ln(k)-\theta(x+2k\pi)^2\sim_{k\to+\infty}-4\theta\pi^2k^2$$

donc :

$$\lim_{k\to+\infty}2\ln(k)-\theta(x+2k\pi)^2=-\infty$$

donc :

$$\lim_{k\to+\infty}k^2f(x+2k\pi)=0\text{ et par conéquent }f(x+2k\pi)=o_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Par critère de comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum_{k\geq1}f(x+2k\pi)$ converge et de même pour $\sum_{k\geq1}f(x-2k\pi)$.

(b) f étant paire,

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad H(-x) &= f(-x) &&+\sum_{k\geq 1} f(-x+2k\pi) &&+\sum_{k\geq 1} f(-x-2k\pi)\\ &= f(x) &&+\sum_{k\geq 1} f(x-2k\pi) &&+\sum_{k\geq 1} f(x+2k\pi)\\ &= H(x)\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{H \text{ est paire et donc sa dérivée est impaire}}$: en effet, en dérivant la relation ci-dessus : $\forall x\in\mathbb{R}$, $-H'(-x)=H'(x)$ donc $H'(-x)=-H'(x)$.

10. (a) Pour $N\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} H_N(x)\cos(nx)dx &= \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx+\sum_{k=1}^{N}\int_0^{2\pi} f(x+2k\pi)\cos(nx)dx+\sum_{k=1}^{N}\int_0^{2\pi} f(x-2k\pi)\cos(nx)dx\\ &= \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx+\sum_{k=1}^{N}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f(u)\cos(nu-n2k\pi)du+\sum_{k=1}^{N}\int_{-2k\pi}^{-(2k-1)\pi} f(u)\cos(nu+n2k\pi)du\\ &= \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx+\sum_{k=1}^{N}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f(u)\cos(nu)du+\sum_{k=1}^{N}\int_{-2k\pi}^{-(2k-1)\pi} f(u)\cos(nu)du\\ &\quad\text{car cos est } 2\pi-\text{périodique}\\ &= \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx+\int_{2\pi}^{(2N+1)\pi} f(u)\cos(nu)du+\int_{-2N\pi}^{0} f(u)\cos(nu)du\\ &= \int_{-2N\pi}^{(2N+1)\pi} f(u)\cos(nu)du\end{aligned}$$

(b)
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)du=\int_0^{+\infty} e^{-\theta u^2}\cos(nu)du=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos\left(\frac{nt}{\sqrt{\theta}}\right)\frac{dt}{\sqrt{\theta}}$;
  cette intégrale est donc absolument convergente d'après le préliminaire ;
- $u\mapsto f(u)\cos(nu)$ est paire ;
- donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(nu)du$ converge et vaut $\displaystyle 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)du$;
- donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{-2N\pi}^{(2N+1)\pi} f(u)\cos(nu)du=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(nu)du$
- et $\boxed{\displaystyle\lim_{N\to+\infty} H_N(x)\cos(nx)dx=2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)du}$

(c) Pour tout $\boxed{x\in[0,2\pi]}$ et $N\in\mathbb{N}^*$:

$$|H(x)-H_N(x)|=\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} f(x+2k\pi)+\sum_{k=N+1}^{\infty} f(x-2k\pi)\right| \text{ (reste d'une série convergente)}$$

Or,

$$\begin{array}{rl} & 0 \leq x \leq 2\pi \\ \Rightarrow & 2k\pi \leq x + 2k\pi \leq (2k+1)\pi \\ \Rightarrow & -\theta(2k+1)^2\pi^2 \leq -\theta(x+2k\pi)^2 \leq -\theta(2k\pi)^2 \\ \Rightarrow & \exp(-\theta(2k+1)^2\pi^2) \leq f(x+2k\pi) \leq \exp(-\theta 4k^2\pi^2) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} f(x+2k\pi) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \exp(-\theta 4k^2\pi^2)}$$

et

$$\begin{array}{rl} & 0 \leq x \leq 2\pi \\ \Rightarrow & -2k\pi \leq x - 2k\pi \leq -(2k-1)\pi \\ \Rightarrow & (2k-1)^2\pi^2 \leq (x-2k\pi)^2 \leq (2k\pi)^2 \\ \Rightarrow & \exp(-\theta(2k)^2\pi^2) \leq f(x+2k\pi) \leq \exp(-\theta(2k-1)^2\pi^2) \\ \Rightarrow & \displaystyle\sum_{k=N+1}^{\infty} f(x-2k\pi) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \exp(-\theta(2k-1)^2\pi^2) \\ \Rightarrow & \displaystyle\sum_{k=N+1}^{\infty} f(x-2k\pi) \leq \sum_{j=N}^{\infty} \exp(-\theta(2j+1)^2\pi^2) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} f(x-2k\pi) \leq \sum_{j=N}^{\infty} \exp(-\theta 4j^2\pi^2)}$$

Ainsi,

$$\boxed{|H(x) - H_N(x)| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \exp(-\theta 4k^2\pi^2) + \sum_{j=N}^{\infty} \exp(-\theta 4j^2\pi^2) \leq 2\sum_{k=N}^{\infty} \exp(-\theta 4k^2\pi^2)}$$

Remarque :
l'énoncé demande d'établir cette inégalité pour tout $x \in \mathbb{R}$; cette inégalité est fausse, car elle impliquerait que $|H(x)-H_N(x)|$ tende vers 0 indépendamment de x (convergence uniforme) et, en particulier, que pour toute suite de réels $(x_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$, $\lim\limits_{N\to\infty} |H(x_N) - H_N(x_N)| = 0$.

Or, pour $x_N = 2(N+1)\pi$, on a : $|H(x_N) - H_N(x_N)| \geq 1$ (*contre-exemple proposé par Romain Bouillaud*).

(d) D'après la question précédente,

$$\begin{array}{l} \left| \displaystyle\int_0^{2\pi} H(x)\cos(nx)dx - \int_0^{2\pi} H_N(x)\cos(nx)dx \right| \\ \leq \displaystyle\int_0^{2\pi} |H(x) - H_N(x)||\cos(nx)|dx \\ \leq \displaystyle\int_0^{2\pi} 2\left|\sum_{k=N}^{\infty} e^{-4\theta^2k^2}\right| dx \leq 2\left|\sum_{k=N}^{\infty} e^{-4\theta^2k^2}\right| \times 2\pi \\ \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ comme reste d'une série convergente} \end{array}$$

donc :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} H(x)\cos(nx)dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} H_N(x)\cos(nx)dx = 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)du}$$

et enfin,

$$\begin{aligned}
2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)du &= 2\int_0^{+\infty} e^{-\theta u^2}\cos(nu)du \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos\left(\frac{nt}{\sqrt{\theta}}\right)\frac{dt}{\sqrt{\theta}} = \frac{2}{\sqrt{\theta}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos\left(2\frac{nt}{2\sqrt{\theta}}\right)\frac{dt}{\sqrt{\theta}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\theta}}F\left(\frac{n}{2\sqrt{\theta}}\right) \quad (F \text{ étudiée en partie I}) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\theta}}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\left(\frac{n}{2\sqrt{\theta}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}}e^{-n^2/4\theta}
\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} H(x)\cos(nx)dx = 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)du = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}}e^{-n^2/4\theta}}$$

11. $a_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} H(x)\cos(nx)dx = 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos(nu)du = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right)$.

(a)

$$\begin{aligned}
a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) &= a_0 + 2\sum_{n=1}^{N}\cos(nx)\int_0^{2\pi} H(u)\cos(nu)du \\
&= a_0 + 2\sum_{n=1}^{N}\int_0^{2\pi} H(u)\cos(nx)\cos(nu)du \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{N}\int_0^{2\pi} H(u)\left(\cos(n(x+u)) + \cos(n(x-u))\right)du \\
&= a_0 + \int_0^{2\pi} H(u)\left(\sum_{n=1}^{N}\cos(n(x+u)) + \sum_{n=1}^{N}\cos(n(x-u))\right)du \\
&= a_0 + \int_0^{2\pi} H(u)\left(\varphi_N(x+u) - \frac{1}{2} + \varphi_N(x-u) - \frac{1}{2}\right) \text{ d'après 7)b)} \\
&= a_0 + \int_0^{2\pi} H(u)\varphi_N(x+u)du + \int_0^{2\pi} H(u)\varphi_N(x-u)du - \int_0^{2\pi} H(u)du
\end{aligned}$$

or $\displaystyle\int_0^{2\pi} H(u)du = a_0$, donc :

$$\boxed{a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) = \int_0^{2\pi} H(u)\varphi_N(x+u)du + \int_0^{2\pi} H(u)\varphi_N(x-u)du}$$

(b) Transformons $\displaystyle\int_0^{2\pi} H(u)\varphi_N(x+u)du$ à l'aide du changement de variable affine $v = u + x$:

$$\int_0^{2\pi} H(u)\varphi_N(u+x)du = \int_x^{2\pi+x} H(v+x)\varphi_N(v)dv$$

Or H est $2\pi-$périodique, car

$$\begin{aligned} H(x+2\pi) &= f(x+2\pi)+\sum_{k=1}^{\infty} f(x+2\pi+2k\pi)+\sum_{k=1}^{\infty} f(x+2\pi-2k\pi) \\ &= f(x+2\pi)\sum_{j=2}^{\infty} f(x+2j\pi)+\sum_{i=0}^{\infty} f(x-2i\pi) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f(x+2k\pi)+f(x)+\sum_{k=1}^{\infty} f(x-2k\pi) \\ &= H(x) \end{aligned}$$

φ_N est également $2\pi-$périodique d'après le résultat établi en 6)b), donc la fonction $v \mapsto H(v+x)\varphi_N(v)$ est $2\pi-$périodique, et ainsi, d'après la question 8),

$$\int_x^{2\pi+x} H(v+x)\varphi_N(v)dv = \int_0^{2\pi} H(v+x)\varphi_N(v)dv = \int_0^{2\pi} H(v+x)\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)v\right)}{2\sin\left(\frac{v}{2}\right)}dv$$

et de même pour $\displaystyle\int_0^{2\pi} H(u)\varphi_N(u-x)du$.

Il s'ensuit :

$$\boxed{a_0+2\sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) = \int_0^{2\pi} \frac{H(v+x)+H(v-x)}{2\sin(v/2)} \times \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)v\right)dv}$$

(c) • Sur $]0,2\pi[$: H est de classe $\mathcal{C}^1$ (admis) donc continue ; $v \mapsto \sin(v/2)$ est continue et ne s'annule pas, donc K_x est continue par quotient.

• En 0 : $v \mapsto H(x+v)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elle est notamment dérivable en 0 et y admet un DL d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} H(v+x) &= H(x)+H'(x)v+o(v) \\ H(v-x) &= H(x)-H'(x)v+o(v) \end{aligned}$$

donc :

$$H(v+x)+H(v-x)-2H(x) = o(v)$$

D'autre part, lorsque $v \to 0$, $2\sin\left(\frac{v}{2}\right) \sim 2\frac{v}{2} \sim v$, donc :

$$\boxed{\lim_{v\to 0} \frac{H(v+x)+H(v-x)-2H(x)}{2\sin\left(\frac{v}{2}\right)} = 0 \text{ donc } K_x \text{ continue en } 0}$$

• En 2π :

$$\begin{aligned} K_x(2\pi-v) &= \frac{H(2\pi-v+x)+H(2\pi-v-x)-2H(x)}{2\sin\left(\frac{2\pi-v}{2}\right)} \\ &= \frac{H(-v+x)+H(-v-x)-2H(x)}{2\sin\left(\pi-\frac{v}{2}\right)} \text{ car } H \ 2\pi-\text{périodique} \\ &= \frac{H(v-x)+H(v+x)-2H(x)}{2\sin\left(\frac{v}{2}\right)} \text{ car } H \text{ est paire (9)b)), et } \sin(\pi-t)=\sin(t) \\ &= K_x(v) \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\lim_{v\to 2\pi^-} K_x(v) = \lim_{u\to 0^+} K_x(u) = 0 \text{ donc } K_x \text{ continue en } 2\pi}$$

(par le changement de variable $u = 2\pi - v$.)

(d) D'après 7)c),

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi = \int_0^{2\pi} \varphi_n(x)dx$$

donc :

$$\pi = \int_0^{2\pi} \varphi_N(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)v\right)}{2\sin\left(\frac{v}{2}\right)}dv$$

donc :

$$\begin{aligned}
&a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) - 2\pi H(x) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{H(v+x)+H(v-x)}{2\sin(v/2)}\right) \times \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)v\right)dv - 2H(x)\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)v\right)}{2\sin\left(\frac{v}{2}\right)}dv \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{H(v+x)+H(v-x)-2H(x)}{2\sin(v/2)}\right) \times \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)v\right)dv \\
&= \int_0^{2\pi} K_x(v)\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)v\right)dv
\end{aligned}$$

12. (a) On suppose $\lambda > 0$. On souhaite calculer $\int_0^1 g(t)\sin(\lambda t)dt$ par intégration par parties. Posons

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = g(t) \\ v'(t) = \sin(\lambda t) \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} u'(t) = g'(t) \\ v(t) = -\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Par IPP :

$$\int_0^1 g(t)\sin(\lambda t)dt = \left[-g(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\right]_0^1 + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 g'(t)\cos(\lambda t)dt = -g(1)\frac{\cos(\lambda)}{\lambda} + g(0)\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 g'(t)\cos(\lambda t)dt$$

- $\left|-g(1)\dfrac{\cos(\lambda)}{\lambda}\right| \leq \dfrac{|g(1)|}{\lambda}$ donc $\lim\limits_{\lambda\to\infty} -g(1)\dfrac{\cos(\lambda)}{\lambda} = 0$;
- $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \dfrac{g(0)}{\lambda} = 0$;
- $\left|\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^1 g'(t)\cos(\lambda t)dt\right| \leq \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^1 |g'(t)\cos(\lambda t)|dt \leq \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^1 |g'(t)|dt = \dfrac{K}{\lambda}$,
  donc $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^1 g'(t)\cos(\lambda t)dt = 0$.

Par somme,

$$\boxed{\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 g(t)\sin(\lambda t)dt = 0}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right)\cos(nx)\right) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)\right)
\end{aligned}$$

Or, d'après 11)d),

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) - 2\pi H(x) = \int_0^{2\pi} K_x(v) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) v\right) dv$$

d'après 11)c), K_x est continue sur $[0, 2\pi]$;

d'après 12)a), $\lim\limits_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} K_x(v) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right) v\right) dv = 0$

donc $a_0 + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = 2\pi H(x)$

donc :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\left(a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\right) = H(x) = e^{-\theta x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\theta(x+2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\theta(x-2k\pi)^2}}$$

Partie IV. Une application probabiliste de la formule sommatoire de Poisson

13. Analyse de l'algorithme :

- l'instruction `rd.random()<= p` traduit l'obtention d'un "Pile", `rd.random()>p` l'obtention d'un "Face" ;
- la variable `i` commence à 1 et est incrémentée à chaque lancer de jeton : elle compte le nombre de lancers effectués depuis le début de la partie et jusqu'à l'arrêt du jeu ;
- la variable `j` est incrémentée à chaque lancer, mais réinitialisée à chaque changement de main : elle compte le nombre de lancers effectués lors du tour d'un joueur ;
- l'instruction `j>s` signifie que le joueur a fini son tour et doit passer la main ;
- la variable `s` représente donc la longueur maximale du tour d'un joueur (1, 3, 5 ...) ; elle démarre à 1 et augmente de 2 à chaque changement de joueur ;
- la variable `v` vaut 1 au début du tour de A, -1 au début du tour de B ; `v` garde sa valeur le jeu s'arrête avant que le tour soit fini, autrement dit si le joueur a gagné par "Pile".

Réponse aux questions :

(a) `s=s+2 ; j=1`

(b) `i` est le nombre de lancers effectués depuis le début de la partie et jusqu'à l'arrêt du jeu.

(c) `v` est un indicateur permettant de savoir quel est le joueur en cours (et donc qui gagne).

(d) Dans les initialisations ajouter : `k=1`.
Dans la boucle `while`, avant l'instruction `if j s ...`, ajouter :

```
if v==1 then
      k=k+1
end
```

(e) Méthode de Monte-Carlo : une valeur approchée est la fréquence de l'événement "A vainqueur" sur un grand nombre de simulations :

```
N=10000 ;
f=0 ;
p=input('entrez probabilite de Pile') ;
for k=1:N
      if jeu(p)==1 then
           f=f+1
      end
end
disp(f/N)
```

14. (a) $H \cup K$ signifie qu'il y a un vainqueur (le jeu se termine) ; $\overline{H \cup K}$ signifie qu'il n'y a pas de vainqueur : le jeu continue indéfiniment, ce qui signifie que "Pile" ne sort jamais.
Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n l'événement : "il n'y a eu que des Face lors des n premiers lancers".
$(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements, donc, par le théorème de limite monotone :

$$P_p(\overline{H \cup K}) = P_p\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} P_p(F_n) = \lim_{n\to\infty} (1-p)^n = 0$$

donc :

$$\boxed{P_p(H \cup K) = 1}$$

$X + Y$ est le nombre total de lancers effectués jusqu'à l'arrêt du jeu (obtention du premier "Pile"). D'après ce qui précède, $X + Y$ a une valeur finie presque sûrement et :

$$\boxed{X + Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$$

(b) Notons A_1 l'événement : le joueur A gagne dès le premier lancer (autrement dit, "Pile" sort au premier lancer). Alors

$$\begin{array}{ll} & A_1 \subset H \\ \text{donc} & P_p(A_1) \leq P_p(H) \leq 1 \\ \text{donc} & p \leq P_p(H) \leq 1 \end{array}$$

Par théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{p\to 1} P_p(H) = 1}$$

15. (a) i. Les séquences sont de longueur impaire : 1,3,5 ...
Ainsi, la séquence numéro j est de longueur $2j + 1$, avec les conventions suivantes :
- la première séquence porte le numéro 0, elle ne comporte que le premier lancer (effectué par le joueur A)
- A joue les séquences de numéro j pair et B les séquences de numéro j impair

ii. Lorsque la séquence numéro j commence, le nombre total de lancers déjà effectués est donc :

$$\sum_{k=0}^{j-1}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{j-1} k + j = j(j-1) + j = j^2$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la séquence numéro } j \text{ commence au lancer numéro } j^2+1}$

iii. Or, $\underline{A \text{ effectue les séquences de numéro pair : } j = 2n}$ donc :

- le premier lancer de la séquence est le lancer numéro $(2n)^2 + 1 = 4n^2 + 1$;
- la séquence est de longueur $2j + 1 = 4n + 1$ donc le dernier lancer (s'il a lieu) porte le numéro $4n^2 + 4n + 1$

Ainsi, les valeurs de I sont incluses dans l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![4n^2+1, 4n^2+4n+1]\!]$.

(b) Notons A_n l'événement : "A gagne lors de la séquence numéro $2n$".

$$A_n = F_1 \cap \cdots \cap F_{4n^2} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{4n+1} (\underbrace{F \cdots F}_{\text{k-1 fois}} P) \right)$$

donc, la réunion étant disjointe et les lancers indépendants,

$$\begin{aligned} P_p(A_n) &= (1-p)^{4n^2} \times \left(\sum_{k=1}^{4n+1} (1-p)^{k-1} p \right) \\ &= (1-p)^{4n^2} \times \frac{1-(1-p)^{4n+1}}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^{4n^2} - (1-p)^{4n^2+4n+1} \end{aligned}$$

H étant l'union disjointe des A_n,

$$\boxed{P_p(H) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((1-p)^{4n^2} - (1-p)^{4n^2+4n+1} \right)}$$

J prend ses valeurs dans l'ensemble complémentaire de celles de I : les séries démarrent aux lancers $4n^2 + 4n + 1$ et terminent aux lancers $4(n+1)^2 - 1$:

$$\boxed{P_p(K) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((1-p)^{4n^2+4n+1} - (1-p)^{4(n+1)^2} \right)}$$

16. (a) D'après 12)b),

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta} \right) \cos(nx) \right) = e^{-\theta x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\theta(x+2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\theta(x-2k\pi)^2}$$

Appliquons cette égalité avec :

- $x = \pi$ donc $\cos(nx) = (-1)^n$
- $\theta = -\dfrac{1}{4\ln(1-p)}$ donc $e^{-1/4\theta} = 1-p$ et $\exp\left(-\dfrac{n^2}{4\theta}\right) = (1-p)^{n^2}$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-p)^{n^2} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-p)^{n^2}\\ &= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)\exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}+\sqrt{\pi\theta}\left(e^{-\theta\pi^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\theta(\pi+2k\pi)^2\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\theta(\pi-2k\pi)^2\right)\right)\\ &> \frac{1}{2} \text{ car sommes de séries à termes strictement positifs}\end{aligned}$$

(b) $P_p(H)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left((1-p)^{(2n)^2}-(1-p)^{(2n+1)^2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(1-p)^{k^2}>\frac{1}{2}$

En reconnaissant des termes d'indices pairs/impairs.

Le jeu est inéquitable : A a plus de chance de gagner que B

Sujet difficile !!! Il faut s'accrocher et aller chercher les points !