CB1 - Epreuve de Maths n°2 (type EM Lyon)

Consignes

Il est demandé aux candidats d'indiquer clairement les numéros des questions traitées et de mettre leurs résultats en valeur.

Problème 1 : analyse

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}dt \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{2}{n}}}{1-x}dx$$

Le but de ce problème est d'expliciter un équivalent de v_n, puis de $u_n - l$ où l est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On rappelle que la série de Riemann $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE I

1. (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,1[$,

$$\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{t^n}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} = \frac{(1-t).t^n}{1-t^n}$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}$$

   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (c) En utilisant le changement de variable $x = t^n$, établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}$

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la limite $\lim_{t\to 1} \frac{(\ln(t))^k}{t-1}$.

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouver que l'intégrale $L_k = \int_0^1 \frac{(\ln(t))^k}{t-1}dt$ est convergente.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^t - e^{2t}$.
   A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f, montrer que :

$$\forall x \in]-\infty, 0], \quad |e^x - e^{2x} + x| \leq \frac{5x^2}{2}$$

4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|v_n - \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt| \leq \frac{5}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln(t))^2}{1-t}dt$$

5. On considère l'intégrale $A = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt$ que l'on ne cherchera pas à calculer.
   Expliciter un équivalent de v_n, puis de $u_n - \frac{1}{2}$ pour n tendant vers $+\infty$, en fonction de A.

PARTIE II : Etude d'une fonction définie par une intégrale et calcul de A

On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k = \displaystyle\int_0^1 t^k.\ln(t)dt$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{k+1}.\ln(t)}{t-1}dt$.

On a déjà vu que l'intégrale $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt$ converge.

1. Justifier en intégrant par parties que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale B_k converge et calculer la valeur de B_k en fonction de k.

2. On admet que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale A_k converge.

   (a) Prouver que pour tout $t \in]0,1[$, $\frac{t\ln(t)}{t-1} \leq 1$

   (b) Prouver alors que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est monotone convergente et déterminer sa limite.

3. Justifier à l'aide des questions II.1 et II.2 que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} - A| \leq \frac{1}{n+1}$$

4. Python : en utilisant la question précédente, écrire un programme Python qui calcule une valeur approchée de A à 0.0001 près.

5. Vérifier que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt = \frac{\pi^2}{6}$.

6. Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(t) = \frac{\ln(t)}{t-1} \text{ si } t \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

   Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et déterminer sa dérivée.

7. Justifier que l'intégrale $C = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t-1}dt$ diverge.

8. Soit g la fonction telle que $g(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$.

   (a) Justifier que g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.

   (b) Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$h(x) = g(x) + g(\frac{1}{x}) - \frac{1}{2}(\ln(x))^2$$

   Prouver que h est constante sur $]0;+\infty[$.

   (c) En déduire que $g(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}(\ln(x))^2$

Problème 2 : exponentielles de matrices

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On notera $\mathbf{0}_3$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On rappelle que par convention, pour tout réel x on a $x^0 = 1$ (et donc en particulier $0^0 = 1$), et pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A^0 = I_3$ (on a donc en particulier $(\mathbf{0}_3)^0 = I_3$).

PARTIE I : cas d'une matrice nilpotente

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer N^2 puis vérifier que $N^3 = 0$.
   (b) Montrer que (I, N, N^2) est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. (a) Déterminer le spectre de φ.
   (b) φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$? est-il diagonalisable ?
3. (a) Soit t un réel. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} N^k$$

   Montrer que pour $n \geq 2$, la matrice $T_n(t)$ est indépendante de n.
   On note $E(t)$ cette matrice.
   (b) Expliciter $E(0)$ et montrer que : $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ E(s+t) = E(s)E(t)$
   (c) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, exprimer $E(kt)$ en fonction de $E(t)$.
   (d) Soit $t \in \mathbb{R}$, montrer $E(t)$ est inversible et expliciter son inverse à l'aide de E.
   (e) Montrer que l'application $E : t \longmapsto E(t)$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est injective. Est-elle surjective ?

PARTIE II : exponentielle de matrice et cas des matrices diagonalisables

Définitions :

- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices carrées d'ordre 3 où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = (a_{i,j}(n))_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
  Soit A une matrice carrée d'ordre 3, avec $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
  On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice A si

$$\text{pour tout } (i,j) \in [\![1,3]\!], \quad \lim_{n\to+\infty} a_{i,j}(n) = a_{i,j}$$

  et dans ce cas on note $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$ (cette limite étant unique).

- Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices colonnes où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = (x_i(n)) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soit X une matrice colonne où $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice X si pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} x_i(n) = x_i$ et dans ce cas on note $\lim_{n\to+\infty} X_n = X$ (cette limite étant unique).

On admet les résultats suivants :

R1. Si (A_n) et (B_n) sont deux suites de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ convergentes de limites A et B, alors la suite $(A_n + B_n)$ converge vers $A + B$, et la suite de matrices $(A_n.B_n)$ converge vers $A.B$.

R2. Si (B_n) est une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ convergente de limite B, et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors la suite $(B_n.X)$ converge vers $B.X$.

R3. Si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels convergente de limite λ et si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors la suite $(\lambda_n A)$ converge vers λA.

Etant donné une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.A^k$$

Dans le cas où la suite de matrices $(S_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, la limite de cette suite est notée $\exp(A)$: il s'agit de **l'exponentielle de la matrice** A.

1. On considère la matrice nulle $\mathbf{0}_3$. Montrer que la suite $(S_n(\mathbf{0}_3))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner la valeur de $\exp(\mathbf{0}_3)$.

2. On considère la matrice unité I_3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $S_n(I_3)$. Montrer alors que la suite $(S_n(I_3))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner la valeur de $\exp(I_3)$.

3. On considère la matrice N définie dans la Partie 1. A l'aide de la Partie 1., justifier que pour tout $t \in \mathbb{N}$, la suite $(S_n(tN))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner la valeur de $\exp(tN)$ en fonction de t et de N.

4. On note f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) La matrice A est-elle inversible ?

   (b) On pose $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, -1)$, $u_3 = (1, -1, 1)$ et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

   (c) En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

   (d) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer A^k à l'aide des matrices P et D.

   (e) Ecrire $S_n(A)$ à l'aide des matrices D et P.

   (f) Montrer que la suite de matrices $(S_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est de la forme $P.\Delta.P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale que vous préciserez.
   On a donc $\exp(A) = P.\Delta.P^{-1}$.

   (g) Adapter rapidement les résultats précédents pour montrer que la suite $(S_n(-A))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner la valeur de $\exp(-A)$. Calculer $\exp(A).\exp(-A)$. Que peut-on en déduire ?

5. Plus généralement, on considère $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ (où ces trois valeurs propres ne sont pas nécessairement distinctes). Donner sans justification la valeur de $\exp(B)$.

PARTIE III : exponentielle d'une matrice non diagonalisable et non nilpotente

On reprend les notations et définitions de la Partie II, en travaillant cette fois dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2.

Soit x un réel non nul. On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$.

1. Un résultat préliminaire d'analyse

   (a) A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction cosinus, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

   (b) En déduire que la série $\sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)$

   On admet que l'on a aussi $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x)$.

2. Montrer que A n'admet aucune valeur propre réelle. Que peut-on en déduire ?

3. (a) Calculer J^2, puis donner la valeur de J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, en fonction des matrices I_2 et J (aucune justification n'est attendue).

   (b) En déduire la valeur de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, toujours en fonction des matrices I_2 et J.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

   $$S_{2n}(A) = \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \right) I_2 + \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \right) J$$

5. En déduire que

   $$\lim_{n\to+\infty} S_{2n}(A) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

   On admet que l'on a de même $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}(A) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$

6. En déduire que la suite $(S_n(A))$ converge et que $\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$.