Corrigé du DM4

Problème : Edhec 2017

Partie 1 : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $k \in [[0,n]]$, $P^{(k)} \in \mathbb{R}_n[X]$, φ est donc bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a:

$$\varphi(\lambda P+Q) = \sum_{k=0}^{n}(\lambda P+Q)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\lambda P^{(k)} + Q^{(k)}\right) = \lambda\sum_{k=0}^{n}P^{(k)} + \sum_{k=0}^{n}Q^{(k)} = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$$

et φ est alors bien linéaire.

Bilan : $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

2. (a) e_0 est le polynôme constant égal à 1, donc pour tout $k \geqslant 1$, $(e_0)^{(k)}$ est nul. Donc:

$$\varphi(e_0) = \sum_{k=0}^{n}(e_0)^{(k)} = e_0$$

De plus, e_0 n'est pas le polynôme nul.

Bilan : $\boxed{\varphi(e_0) = e_0 \text{ et 1 est une valeur propre de } \varphi.}$

(b) Soit $j \in [[1,n]]$. On a :

$$\varphi(e_j) - e_j = e_j + \sum_{k=1}^{n}(e_j)^{(k)} - e_j = \sum_{k=1}^{n}(e_j)^{(k)}$$

Or, $e_j \in \mathbb{R}_j[X]$ avec $j \geqslant 1$, donc pour tout entier $k \geqslant 1$, $(e_j)^{(k)}$ appartient à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{j-1}[X]$.

Bilan : $\boxed{\forall j \in [[1,n]], \quad (\varphi(e_j) - e_j) \in \mathbb{R}_{j-1}[X].}$

(c) D'après ce qui précède, $\varphi(e_0) = e_0$ et pour tout $j \in [[1,n]]$,
il existe $Q_{j-1} \in \text{Vect}(e_0, \dots, e_{j-1})$ tel que $\varphi(e_j) = Q_{j-1} + e_j$. La matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ s'écrit donc :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant triangulaire, les valeurs propres de φ sont alors les coefficients diagonaux.

Bilan :

$\boxed{\begin{array}{l}\text{La matrice de } \varphi \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ est donc triangulaire}\\ \text{supérieure, l'unique valeur propre de } \varphi \text{ est 1.}\end{array}}$

(d) $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls, elle est donc inversible et φ est alors un endomorphisme bijectif.

Bilan : $\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

3. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $P' = P^{(1)} \in \mathbb{R}_n[X]$ et par télescopage :

$$\varphi(P-P') = \sum_{k=0}^{n}\left(P-P'\right)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n}\left(P^{(k)} - P^{(k+1)}\right) = P - P^{(n+1)}$$

Or, $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $P^{(n+1)}$ est nul.

Bilan : $\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P-P') = P.}$

(b) Posons $\psi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $\psi(P) = P - P'$.
ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (facile) et d'après la question précédente :

$$\varphi \circ \psi = Id_{\mathbb{R}_n[X]} \text{ et en composant par } \varphi^{-1}, \quad \psi = \varphi^{-1}$$

On a alors $\varphi^{-1}(e_0) = e_0$ et pour tout $k \in [[1,n]]$, $\varphi^{-1}(e_k) = e_k - ke_{k-1}$.

Bilan :

$\boxed{\begin{array}{l}\varphi^{-1} \text{ est définie pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ par } \varphi^{-1}(P) = P - P'\\ \text{et la matrice de } \varphi^{-1} \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ est :}\\ \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array}}$

(c) Le programme indiqué calcule la matrice M de φ^{-1} dans la base $\mathscr{B}$. Pour obtenir $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ il suffit alors d'inverser M :

```
n=int(input("entrez la valeur de n : "))
M=np.eye(n+1)
for k in range(0,n):
    M[k,k+1]=-(k+1)
A=al.inv(M)
print(A)
```

Partie 2 : étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On désigne par x un réel quelconque.

4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^k.e^{-t}$ est continue sur $[x;+\infty[$ donc l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k.e^{-t}\,dt$ est impropre en $+\infty$.

$$\frac{t^k.e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{k+2}.e^{-t} \to_{t\to+\infty} 0 \text{ par croissance comparée}$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$ est convergente (Riemann impropre en $+\infty$, $2>1$). Par critère de négligeabilité des fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^k.e^{-t}\,dt$ est convergente. De plus

la fonction $t \mapsto t^k.e^{-t}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que l'intégrale $\int_x^{+\infty} t^k.e^{-t}\ dt$ converge.

Bilan : $\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in \mathbb{R},\ \int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

(b) Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t).e^{-t} = \sum_{k=0}^{n} a_k.t^k e^{-t}$.

Or, d'après (a), pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$ converge, donc $\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes.

Bilan : $\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et tout } x \in \mathbb{R},\ \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

5. (a) Calculons cette intégrale. Pour tout $b > x$, on a :

$$\int_x^b e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_x^b = e^{-x} - e^{-b}$$

Or, $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-b} = 0$, donc l'intégrale converge et vaut e^{-x}.

Bilan : $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ \int_x^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = e^{-x}}$

(b) Soit pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{H}(k) : \quad \int_x^{+\infty} t^k\, e^{-t}\, dt = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i\,!}\, e^{-x}$$

On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Initilisation : pour $k = 0$ c'est la question précédente.

Hérédité : supposons que, pour un certain rang $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(k)$ est vraie. Effectuons alors une intégration par parties pour calculer $\int_x^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}\mathrm{d}t$.
$u : t \mapsto t^{k+1}$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
$u' : t \mapsto (k+1)t^k$ et $v' : t \mapsto e^{-t}$, et pour tout $b > x$:

$$\int_x^b t^{k+1}e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^{k+1}e^{-t}\right]_x^b - \int_x^b -(k+1)t^k e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$\int_x^b t^{k+1}e^{-t}\mathrm{d}t = x^{k+1}e^{-x} - b^{k+1}e^{-b} + (k+1)\int_x^b t^k e^{-t}\mathrm{d}t$$

Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{k+1}e^{-b} = 0$ et la convergence de l'intégrale étant déjà acquise, on en déduit :

$$\int_x^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}\mathrm{d}t = x^{k+1}e^{-x} + (k+1)\int_x^{\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$$

Soit encore, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\int_x^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}\mathrm{d}t = x^{k+1}e^{-x} + (k+1)k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x} = (k+1)!\sum_{i=0}^{k+1}\frac{x^i}{i!}e^{-x}$$

donc $\mathcal{H}(k+1)$ est vraie.

Bilan :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in \mathbb{R},\ \int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}.}$$

6. Informatique.

(a)
```
def facto(n):
    a=1
    for k in range(1,n+1):
        a=a*k
    return a
```

(b)
```
def Integrale(x,k):
    S=0
    for i in range(0,k+1):
        S=S+x**i/facto(i)*np.exp(-x)
    S=facto(k)*S
    return S
```

7. (a) Soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $(\lambda P + Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et donc, d'après 4.(b), les intégrales suivantes sont, pour tout $x \in \mathbb{R}$, toutes convergentes et :

$$\int_x^{+\infty} (\lambda P + Q)(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \lambda\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$$

et donc, en multipliant par e^x, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\Psi(\lambda P + Q)](x) = \lambda[\Psi(P)](x) + [\Psi(Q)](x)$$

Autrement dit, $\Psi(\lambda P + Q) = \lambda\Psi(P) + \Psi(Q)$ et Ψ est linéaire.

Montrons maintenant que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Psi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour cela, il suffit de le vérifier pour les polynômes de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, la linéarité permettra d'en déduire le résultat. Soit alors $k \in [[0, n]]$. D'après 5.(b) et la définition de Ψ, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$[\Psi(X^k)](x) = e^x \times \left(k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}\right) = \sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!}x^i \in \mathbb{R}_n[X]$$

et donc, par linéarité de Ψ, pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Psi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Bilan :

$$\boxed{\Psi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

(b) D'après la question précédente, F est un polynôme et est donc bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, la convergence permet d'écrire la relation de Chasles, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t - \int_0^x P(t)e^{-t}\mathrm{d}t$$

$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t = C$ est alors une constante, donc de dérivée nulle par rapport à x. Notons G une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto P(t).e^{-t}$. Cette fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc $F = e^x.(C - G(x) + G(0))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
De plus,

$$F'(x) = e^x.\int_x^{+\infty} P(t).e^{-t}\ dt - e^x.P(x).e^{-x} = F(x) - P(x)$$

Bilan :

$\boxed{F \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } F' = F - P.}$

(c) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Psi)$. On a alors $F = \Psi(P) = 0$. Donc $F' = 0$ et d'après la question précédente : $P = F - F' = 0$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(\Psi) \subset \{0\}$ et l'inclusion réciproque étant évidente, $\mathrm{Ker}(\Psi) = \{0\}$ et Ψ est injective. De plus $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, l'endomorphisme Ψ est alors, par corollaire du théorème du rang, bijectif.

Bilan : $\boxed{\Psi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$

8. (a) On a $F = \Psi(P) = \lambda P$ donc $F' = \lambda P'$. De plus, d'après 7.(b), $F' = F - P$.
Donc $\lambda P' = \lambda P - P = (\lambda - 1)P$. Reste alors à diviser par $\lambda \neq 0$.

Bilan :

$\boxed{\text{Pour } P \neq 0 \text{ vecteur propre associé à une valeur propre } \lambda \neq 0, \text{ on a : } P' = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} P.}$

(b) Remarquons tout d'abord que 0 ne peut pas être valeur propre puisque Ψ est un automorphisme.
Posons $\deg(P) = k \in [[0, n]]$. Si P est constant ($k = 0$) alors $P' = 0 = \frac{\lambda-1}{\lambda} P$ et comme $P \neq 0$, on a $\lambda = 1$. Si P n'est pas constant ($k \in [[1, n]]$) alors $\deg(P') = k - 1 = \deg\left(\frac{\lambda-1}{\lambda} P\right)$ ce qui est impossible car $\deg\left(\frac{\lambda-1}{\lambda} P\right) = \begin{cases} k & , \text{si } \lambda \neq 1 \\ -\infty & , \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$

Bilan : $\boxed{\lambda = 1 \text{ est la seule valeur propre possible de } \Psi.}$

(c) D'après 5.(a), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = e^{-x}$. Donc, $[\Psi(1)](x) = e^x \times e^{-x} = 1$. Autrement dit, $\Psi(1) = 1$ et le polynôme constant égal à 1 est un vecteur propre de Ψ associé à la valeur propre 1. Avec la question précédente, on sait que c'est la seule.

Bilan : $\boxed{1 \text{ est la seule valeur propre de } \Psi}$

9. (a) Ψ et φ sont tous les deux des automorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour montrer que Ψ et φ sont égaux il suffit de montrer qu'ils coïncident sur la base canonique. Soit $k \in [[0, n]]$, on a :

D'une part

$$(X^k)^{(i)} = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-i+1)X^{k-i} & , \text{si } i \leqslant k \\ 0 & , \text{si } i > k \end{cases}$$

et donc :

$$\varphi(X^k) = \sum_{i=0}^{n} (X^k)^{(i)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i} = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!} X^j$$

La dernière égalité étant obtenue par le renversement d'indice $j = k - i$.

D'autre part, d'après 5.(b),

$$\Psi(X^k) = e^x \int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = e^x \left(k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x} \right) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x^i$$

Donc : $\varphi(X^k) = \Psi(X^k)$ pour tout $k \in [[0, n]]$.
Bilan :

$\boxed{\text{Les endomorphismes } \varphi \text{ et } \Psi \text{ sont égaux.}}$

(b) Soient $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \geqslant a$, $P(x) \geqslant 0$. Dans ce cas, $t \mapsto P(t)e^{-t}$ est positive sur $[x, +\infty[$ et par positivité de l'intégrale, on a :

$$\forall x \geqslant a, \quad [\Psi(P)](x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Mais comme φ et Ψ sont égaux, on a alors :

$$\forall x \geqslant a, \quad [\varphi(P)](x) \geqslant 0$$

ce qui est exactement le résultat recherché.

Bilan :

$$\boxed{\forall x \geqslant a, \quad \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geqslant 0}$$