Variables aléatoires discrètes - exercices pour aller plus loin

Exercice 1
Oral HEC - QSP : utilisation de la fonction génératrice

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes et non certaines. On pose $Z = X + Y$ et on suppose que $\mathbb{P}(X = 0) < \mathbb{P}(Y = 0)$ et que $\mathbb{P}(Z > 4) = 0$ et $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 3) = 0$ et que

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{2}, \text{ et } \mathbb{P}(Z = 4) = \frac{1}{6}$$

On définit la fonction

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k, t \in \mathbb{R}$$

On définit de même G_Y et G_Z.

1. Montrer que G_X, G_Y et G_Z sont des polynômes en t et que $G_Z = G_X G_Y$
2. Trouver les lois de X et de Y.

Exercice 2
D'après oral HEC - QSP : retrouver la loi à partir des moments - matrice de Vandermonde

1. Soit Y une variable aléatoire, telle que $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et qui prend les valeurs 0, 1 et 2 avec les probabilités p_0, p_1, p_2 respectivement. On suppose que $E(Y) = 1$ et $E(Y^2) = \frac{5}{3}$.
   Calculer p_0, p_1 et p_2.
2. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$.
   On suppose que $E(X)$, $E(X^2)$, ..., $E(X^n)$ sont connus. Peut-on déterminer la loi de X ?

Exercice 3
D'après oral HEC - QSP Soit X une variable discrète admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et telle que :

$$\begin{cases} E(X) = \alpha \\ E(X^2) = E(X^4) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $\alpha \in [-1, 1]$.
2. Déterminer la loi de X.

Exercice 4
D'après oral ESCP
On dispose d'une urne contenant n boules portant des numéros deux à deux distincts. Un premier joueur effectue une suite de tirages sans remise dans cette urne jusqu'à obtenir la boule portant le plus grand numéro. On note alors X_1 le nombre de tirages qu'il a effectué pour obtenir cette boule. S'il reste des boules dans l'urne, le premier joueur passe l'urne (sans la remplir) à un second joueur qui effectue la même expérience. C'est-à-dire que le second joueur tire des boules de l'urne, sans remise, jusqu'à obtenir la boule portant le plus grand numéro parmi celles qui n'ont pas été tirées par le premier joueur. On note alors X_2 le nombre de tirages effectués par ce second joueur. Si le premier joueur a déjà tiré toutes les boules, alors X_2 prend la valeur 0.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_1.
2. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de X_2 conditionnellement à l'événement $[X_1 = i]$.
3. En déduire l'espérance de X_2.
4. Déterminer la loi de X_2, puis retrouver le résultat de la question précédente.