CB1 - Epreuve de Maths n°2 (type EM Lyon)

Problème 1 : analyse

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}dt \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{n}-x^{\frac{2}{n}}}}{1-x}dx$$

Le but de ce problème est d'expliciter un équivalent de v_n, puis de $u_n - l$ où l est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On rappelle que la série de Riemann $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE I

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) &= \frac{1-(1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \\
&= \frac{1-(1-t+t-t^2+\cdots+t^{n-1}-t^n}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \\
&= \frac{t^n}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \text{ par télescopage} \\
&= \frac{t^n}{\sum_{i=0}^{n-1}t^k} = \frac{t^n}{\frac{1-t^n}{1-t}} \quad \text{car} \quad t\neq 1 \\
&= \frac{(1-t).t^n}{1-t^n}
\end{aligned}$$

Bilan :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1[, \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{t^n}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} = \frac{(1-t).t^n}{1-t^n}}$$

(b) On remarque que la première égalité ci-dessus est encore valable si $t=1$. En intégrant entre 0 et 1, les fonctions étant continues, on a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t)dt &= \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}dt \\
\Leftrightarrow u_n - [-\frac{1}{2}(1-t)^2]_0^1 &= \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}dt \\
\Leftrightarrow u_n - \frac{1}{2} &= \int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}dt
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
& 1 \leq 1+t+t^2+\cdots+t^{n-1} \\
\Rightarrow \quad & 0 \leq \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \leq 1 \text{ par décroissance de la fonction inverse sur }]0;+\infty[\\
\Rightarrow \quad & 0 \leq \frac{t^n}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \leq t^n \quad \text{car } t^n \geq 0
\end{aligned}$$

D'où par croissance de l'intégrale, les fonctions étant continues et les bornes étant dans le bon sens,

$$0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

Bilan : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1}}$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, on en déduit par encadrement que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}}$

(c) Premièrement, avec la relation du 1.(a), on a

$$\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{(1-t).t^n}{1-t^n}$$

En intégrant entre 0 et 1, on obtient :

$$u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{(1-t).t^n}{1-t^n}dt$$

Notons que la seconde intégrale est convergente car faussement impropre en 0 puisque $\lim_{t\to 1}\frac{(1-t).t^n}{1-t^n} = \lim_{t\to 1}\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{1}{n}$.

Posons $x = t^n$. La fonction $t \mapsto t^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, strictement croissante sur $[0,1]$, bijective de $[0,1]$ sur $[0,1]$.
On a $t = x^{\frac{1}{n}}$, $dx = n.t^{n-1}dt$, les bornes restent inchangées. Par CDV,

$$\begin{aligned}
u_n - \frac{1}{2} &= \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{(1-t).t}{1-t^n}.nt^{n-1}dt \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{(1-x^{1/n}).x^{1/n}}{1-x}dx \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{n}-x^{\frac{2}{n}}}}{1-x}dx \\
&= \frac{1}{n}v_n
\end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}}$

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons $f_k : t \mapsto (\ln(t))^k$. La fonction f_k est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $t>0$, $f'(t) = k.(\ln(t))^{k-1}.\frac{1}{t}$. D'où

$$\lim_{t\to 1}\frac{(\ln(t))^k}{t-1} = \lim_{t\to 1}\frac{f_k(t)-f_k(1)}{t-1} = f_k'(1) = k.0^{k-1}$$

Bilan : $\boxed{\lim_{t\to 1}\frac{(\ln(t))^k}{t-1} = \begin{cases} 1 \text{ si } k=1 \\ 0 \text{ si } k\geq 2 \end{cases}}$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par quotient de fonctions continues, la fonction $g_k : t \mapsto \frac{(\ln(t))^k}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$. L'intégrale L_k est donc doublement impropre en 0 et en 1, elle converge ssi $\int_0^{1/2} g_k(t)dt$ et $\int_{1/2}^1 g_k(t)dt$ convergent.

- En 1, l'intégrale L_k est faussement impropre puisque la fonction g_k admet une limite finie quand t tend vers 1. Donc $\int_{1/2}^1 g_k(t)dt$ converge.
- En 0, on remarque que

$$\frac{g_k(t)}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \sqrt{t}.g_k(t) = \frac{1}{t-1}.t^{1/2}.(\ln(t))^k \to_{t\to 0} 0$$

par croissances comparées. Donc $g_k(t) = o_{t\to 0}(\frac{1}{\sqrt{t}})$. Comme l'intégrale $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est une intégrale de Riemann convergente (impropre en 0, $\alpha = 1/2 < 1$), par critère de négligeabilité (fonctions positives), l'intégrale $\int_0^{1/2} g_k(t)dt$ converge.

- Bilan : $\boxed{\text{l'intégrale } L_k = \int_0^1 \frac{(\ln(t))^k}{t-1}dt \text{ est convergente}}$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^t - e^{2t}$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$f'(t) = e^t - 2e^{2t}, \quad f''(t) = e^t - 4e^{2t}$$
D'où pour tout $t \in]-\infty, 0]$,
$$|f''(t)| \leq e^t + 4e^{2t} \leq 5 \text{ car } e^t \leq 1 \text{ et } e^{2t} \leq 1$$
D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à f, à l'ordre 1, avec $a = 0$, $b = x$ et $M = 5$:
$$|f(x) - f(0) - x.f'(0)| \leq M.\frac{x^2}{2}$$
d'où en remplaçant :
Bilan : $\boxed{\forall x \in]-\infty, 0], \ |e^x - e^{2x} + x| \leq \frac{5x^2}{2}}$

4. On remarque que
$$v_n = \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{2}{n}}}{1-x}dx = \int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{n}\ln(x)} - e^{\frac{2}{n}\ln(x)}}{1-x}dx$$
Pour tout $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\frac{\ln(x)}{n} \in]-\infty, 0]$, on a d'après l'inégalité précédente :
$$|e^{\frac{1}{n}\ln(x)} - e^{\frac{2}{n}\ln(x)} + \frac{\ln(x)}{n}| \leq \frac{5}{2}.(\frac{\ln(x)}{n})^2$$
D'où en multipliant par $\frac{1}{|1-x|} = \frac{1}{1-x} > 0$:
$$|\frac{e^{\frac{1}{n}\ln(x)} - e^{\frac{2}{n}\ln(x)}}{1-x} + \frac{\ln(x)}{n(1-x)}| \leq \frac{5}{2}.(\frac{\ln(x)}{n})^2.\frac{1}{1-x}$$
et enfin en intégrant entre 0 et 1 :
$$|v_n - \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt| \leq \frac{5}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln(t))^2}{1-t}dt$$

5. On note A l'intégrale $A = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt$ que l'on ne cherchera pas à calculer.
On a déjà vu que l'intégrale $L_2 = \int_0^1 \frac{(\ln(t))^2}{1-t}dt$ est convergente. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|v_n - \frac{1}{n}A| \leq \frac{5B}{2}.\frac{1}{n^2} \Leftrightarrow |nv_n - A| \leq \frac{5B}{2}.\frac{1}{n}$$
Par encadrement on a alors $\lim_{n\to+\infty} nv_n = A$, donc $\boxed{v_n \sim_{n\to+\infty} \frac{A}{n}}$
Enfin, comme $u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}$, on obtient que $\boxed{u_n - \frac{1}{2} \sim_{n\to+\infty} \frac{A}{n^2}}$

PARTIE II : Etude d'une fonction définie par une intégrale et calcul de A

On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k = \int_0^1 t^k.\ln(t)dt$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$A_k = \int_0^1 \frac{t^{k+1}.\ln(t)}{t-1}dt$$
On a déjà vu que l'intégrale $A = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt$ converge.

1. La fonction $t \mapsto t^k.\ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$, l'intégrale B_k est donc impropre en 0. Posons $\epsilon \in]0, 1]$ et $B_{k,\epsilon} = \int_\epsilon^1 t^k.\ln(t)dt$. Posons
$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = t^k \end{cases} \to \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{1}{k+1}t^{k+1} \end{cases}$$
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\epsilon, 1]$, l'IPP est donc autorisée. Par IPP on a alors :
$$\begin{aligned} B_{k,\epsilon} &= [\frac{1}{k+1}t^{k+1}\ln(t)]_\epsilon^1 - \frac{1}{k+1}\int_\epsilon^1 t^k dt \\ &= -\frac{1}{k+1}(\epsilon)^{k+1}\ln(\epsilon) - \frac{1}{(k+1)^2}.(1 - \epsilon^{k+1}) \end{aligned}$$
Par croissances comparées, $\lim_{\epsilon\to 0}(\epsilon)^{k+1}\ln(\epsilon) = 0$, et $\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{k+1} = 0$. Finalement, $\lim_{\epsilon\to 0} B_{k,\epsilon} = -\frac{1}{(k+1)^2}$

Bilan : $\boxed{\text{l'intégrale } B_k \text{ converge et } B_k = -\frac{1}{(k+1)^2}}$

2. On admet que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale A_k converge.

(a) Montrons que pour tout $t \in]0, 1[$, $\frac{t\ln(t)}{t-1} \leq 1$. On remarque d'abord que
$$\frac{t\ln(t)}{t-1} \leq 1 \Leftrightarrow t\ln(t) \geq t - 1 \Leftrightarrow t\ln(t) - t + 1 \geq 0$$
car $1 - t < 0$. Il s'agit donc de montrer cette dernière inégalité. Posons pour tout $t \in]0, 1[$,
$$h(t) = t\ln(t) - t + 1$$
La fonction h est dérivable sur $]0, 1[$ et $h'(t) = \ln(t) + 1 - 1 = \ln(t) < 0$. La fonction h est donc décroissante sur $]0, 1[$. Comme $\lim_{t\to 1} h(t) = 0$, on a donc bien pour tout $t \in]0, 1[$, $h(t) \geq 0$.
Bilan: $\boxed{\text{pour tout } t \in]0, 1[, \ \frac{t\ln(t)}{t-1} \leq 1}$

(b)
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$A_{k+1} - A_k = \int_0^1 (t-1).\frac{t^{k+1}\ln(t)}{t-1}dt$$
Comme $t \in]0, 1[$, on a $t - 1 < 0$, $\ln(t) < 0$, $t^{k+1} > 0$ et au final $A_{k+1} - A_k \leq 0$: la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Etant décroissante et minorée par 0, elle converge.
- De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq A_k = \int_0^1 t^k.\frac{t\ln(t)}{t-1}dt \leq \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$$
d'après la question précédente. Finalement, par encadrement, $\boxed{\lim_{k\to+\infty} A_k = 0}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
& |\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} - A| \\
= \ & |\sum_{k=0}^{n} - \int_0^1 t^k \ln(t) dt - \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1} dt| \text{ d'après II.1} \\
= \ & |-\int_0^1 (\sum_{k=0}^{n} t^k) \ln(t) dt + \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt| \text{ par linéarité de l'intégrale} \\
= \ & |-\int_0^1 \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \ln(t) + \frac{\ln(t)}{1-t} dt| \\
= \ & |\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t} dt| = |B_n| \\
\leq \ & \frac{1}{n+1} \text{ d'après II.2}
\end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ |\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} - A| \leq \frac{1}{n+1}}$

4. On remarque que $\frac{1}{n+1} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow n+1 \geq 10^4 \Leftrightarrow n \geq 10^4 - 1$. D'où le programme Python :

```
n=10**4-1
S=0
for k in range(0,n+1):
      S=S+\frac{1}{(k+1)**2}
print("Valeur approchée de A:",S)
```

5. Par encadrement avec l'inégalité précédente, on voit que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = A$, donc

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

6. Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} f(t) = \frac{\ln(t)}{t-1} \text{ si } t \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[\cup]1;+\infty[$ par produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On a déjà montré dans la Partie I. que $\lim_{t\to 1} f(t) = 1 = f(1)$, donc f est continue en 1 et donc sur $]0;+\infty[$. Pour tout $t \in]0,1[\cup]1;+\infty[$,

$$f'(t) = \frac{1 - \frac{1}{t} - \ln(t)}{(t-1)^2} = \frac{(t-1) - t\ln(t)}{t(t-1)^2}$$

Posons $u = t-1$, alors

$$\begin{aligned}
f'(t) \quad = \quad & \frac{u - (1+u)\ln(1+u)}{(1+u)u^2} \\
= \quad & \frac{u - (1+u)(u - \frac{u^2}{2} + o_{u\to 0}(u^2))}{(1+u)u^2} \\
= \quad & \frac{u - u + \frac{u^2}{2} - u^2 + o_{u\to 0}(u^2)}{(1+u)u^2} \\
= \quad & \frac{-\frac{1}{2} + o_{u\to 0}(1)}{1+u} \\
\to_{u\to 0} \quad & -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{t\to 1} f'(t) = -\frac{1}{2}$.
Bilan : d'après le théorème de prolongement de la dérivée:
$\boxed{f' \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0;+\infty[\text{ et } f'(1) = -\frac{1}{2}}$

7. Montrons que l'intégrale $C = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t-1} dt$ diverge.
On remarque que

$$\frac{\frac{1}{t}}{\frac{\ln(t)}{t-1}} = \frac{t-1}{t} . \frac{1}{\ln(t)} \to_{t\to+\infty} 0$$

donc $\frac{1}{t} = o_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t-1}$. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge, par critère de négligeabilité (fonctions positives), $\boxed{\text{l'intégrale } C \text{ diverge aussi}}$

8. Soit g la fonction telle que $g(x) = \int_1^x f(t) dt$.

(a) La fonction f étant continue sur $]0,+\infty[$, elle admet une primitive F sur cet intervalle, et F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. On a alors $g(x) = F(x) - F(1)$ donc $\boxed{g \text{ est bien définie et de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0;+\infty[}$

(b) Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$h(x) = g(x) + g(\frac{1}{x}) - \frac{1}{2}(\ln(x))^2$$

La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ par composition et somme et pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
h'(x) \quad = \quad & g'(x) - \frac{1}{x^2} . g'(\frac{1}{x}) - \frac{1}{2} . 2 . \frac{1}{x} \ln(x) \\
= \quad & \frac{\ln(x)}{x-1} - \frac{1}{x^2} . \frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x} - 1} - \frac{\ln(x)}{x} \\
= \quad & \frac{\ln(x)}{x-1} + \frac{\ln(x)}{x-x^2} - \frac{\ln(x)}{x} \\
= \quad & \frac{-x\ln(x) + \ln(x) - (1-x)\ln(x)}{x-x^2} \\
= \quad & 0
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est constante sur }]0;+\infty[}$

(c) Notons K la valeur de la fonction h. On en déduit que

$$g(x) = K - g(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2$$

Comme l'intégrale de f sur $[0,1]$ converge, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(\frac{1}{x}) = \int_1^0 f(t) dt \in \mathbb{R}$$

et donc $K - g(\frac{1}{x}) = o_{x\to+\infty}(\frac{1}{2}(\ln(x))^2)$.
Bilan : $\boxed{g(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}(\ln(x))^2}$

Problème 2 : exponentielles de matrices

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On rappelle que par convention $0^0 = 1$.

PARTIE I : cas d'une matrice nilpotente

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. (a) On trouve que :
$$N^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
La matrice N est donc nilpotente d'indice 3.

   (b) Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha I + \beta N + \gamma N^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. On écrit le système correspondant et on trouve sans problème que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ainsi la famille (I, N, N^2) est libre.

2. (a) Comme $N^3 = 0$, le polynôme $P = X^3$ est annulateur de N. On a donc
$$Sp(N) \subset \{ \text{ racines de } P\} \Leftrightarrow Sp(N) \subset \{0\}$$
De plus, $rg(N) = 2$ donc par le théorème du rang matriciel $\dim(Ker(N)) = 1$. On en déduit que $0 \in Sp(N)$ et on a bien $Sp(N) = \{0\}$.

   (b) Comme $0 \in Sp(N)$, N n'est pas inversible, donc φ n'est pas bijective : φ n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
De plus,
$$\sum_{\lambda \in Sp(N)} \dim(Ker(N - \lambda I_3) = \dim(Ker(N)) = 1 \neq 3$$
donc φ n'est pas diagonalisable.

3. (a) Soit t un réel et $n \geq 3$. Alors
$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} N^k = \sum_{k=0}^{2} \frac{t^k}{k!} N^k + \sum_{k=3}^{n} \frac{t^k}{k!} N^k = \sum_{k=0}^{2} \frac{t^k}{k!} N^k \text{ car } \forall k \geq 3,\ N^k = 0$$
La matrice $S_n(t)$ est donc indépendante de n et on note $E(t)$ cette matrice.

   (b)
$$E(0) = \sum_{k=0}^{2} \frac{0^k}{k!} N^k = \frac{0^0}{0!}.N^0 = I_3$$
Pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned} E(s).E(t) &= (I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2)(I_3 + sN + \frac{s^2}{2}N^2) \\ &= I_3 + sN + \frac{s^2}{2}N^2 + tN + stN^2 + \frac{t^2}{2}N^2 \text{ car } N^3 = 0 \\ &= I_3 + (s+t)N + \frac{s^2 + 2st + t^2}{2}N^2 \\ &= I_3 + (s+t)N + \frac{(s+t)^2}{2}N^2 \\ &= E(s+t) \end{aligned}$$
Bilan : $\boxed{E(0) = I_3 \text{ et } \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ E(s+t) = E(s)E(t)}$

   (c) Montrons par récurrence sur n que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$: "$E(kt) = (E(t))^k$".
- Initialisation : si $k = 0$, $E(0) = I_3 = (E(t))^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit k un entier fixé tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Alors
$$E((k+1)t) = E(kt + t) = E(kt).E(t) = (E(t))^k.E(t) = (E(t))^{k+1}$$
donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ E(kt) = (E(t))^k}$

   (d) Soit $t \in \mathbb{R}$. On remarque que $E(t).E(-t) = E(0) = I_3$ donc $E(t)$ est inversible et $(E(t))^{-1} = E(-t)$.

   (e) Soit $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tels que $E(t) = E(s)$. Alors
$$I_3 + sN + \frac{s^2}{2}N^2 = I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2 \Leftrightarrow (s-t)N + \frac{s^2 - t^2}{2}N^2 = 0$$
et comme la famille (I_3, N, N^2) est libre, $s = t$. Donc l'application E est injective.
On remarque que $Im(E) \subset Vect(I_3, N, N^2)$. Comme $\dim(Vect(I, N, N^2)) = 3 \neq 9$, on a $Vect(I, N, N^2) \neq \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc l'application E n'est pas surjective.

Notons que E n'est pas une application linéaire !!

PARTIE II : exponentielle de matrice, cas des matrices diagonalisables

1. On considère la matrice nulle $\mathbf{0} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n(\mathbf{0}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.\mathbf{0}^k = \frac{1}{0!}.\mathbf{0}^0 = I_3$$

2. Pour la matrice I_3 :
$$S_n(I_3) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.I_3^k = (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}).I_3$$
De plus,
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$
d'où $\lim_{n \to +\infty} S_n(I_3) = e.I_3$ et $\boxed{\exp(I_3) = e.I_3}$

3. On considère la matrice N définie dans la Partie 1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geq 3$, on a vu que
$$S_n(tN) = I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2$$
La suite $(S_n(tN))_{n \geq 3}$ est donc constante : elle est convergente et
$$\exp(tN) = I_3 + tN + \frac{t^2}{2}N^2$$

4. On note f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) On voit immédiatement que $rg(A) = 1 \neq 3$, la matrice A n'est donc pas diagonalisable.

(b) On pose $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,0,-1)$, $u_3 = (1,-1,1)$ et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.

- Montrons que la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$. Par une résolution de système sans difficulté on montre que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Etant libre et de cardinal 3, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- On a de plus :

$$A.\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad A.\begin{pmatrix}1\\0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad A.\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

donc u_1, u_2 et u_3 sont bien trois vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 0, 0, 3.

(c) Comme $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f, d'après le cours f est diagonalisable, donc A l'est aussi et en notant

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = Diag(0,0,3)$$

On a bien $A = PDP^{-1}$.

(d) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on montre par une récurrence standard (à faire) que $A^k = PD^kP^{-1}$.

(e)

$$\begin{aligned}
S_n(A) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} A^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.P.D^k.P^{-1} \\
&= P.(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k).P^{-1} \\
&= P.(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} Diag(0^k, 0^k, 3^k)).P^{-1} \\
&= P.Diag(\sum_{k=0}^{n} \frac{0^k}{k!}, \sum_{k=0}^{n} \frac{0^k}{k!}, \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!}).P^{-1} \\
&= P.Diag(1, 1, \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!}).P^{-1} \quad \text{ATTENTION } 0^0 = 1
\end{aligned}$$

(f) Comme $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} = e^3$, on en déduit par les règles de calcul sur la limite d'un produit de matrices que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(A) = P.\Delta.P^{-1}$$

où $\Delta = Diag(1,1,e^3)$.
On a donc bien $\exp(A) = P.\Delta.P^{-1}$.

(g) On a de façon évidente $-A = P.(-D).P^{-1} = P.Diag(0,0,-3).P^{-1}$, d'où avec les mêmes calculs que précédemment, $\exp(-A) = P.Diag(1,1,e^{-3}).P^{-1}$. On remarque que

$$\exp(A).\exp(-A) = P.Diag(1,1,e^3).P^{-1}.P.Diag(1,1,e^3).P^{-1} = P.Diag(1,1,1).P = I_3$$

donc $\exp(A)$ est inversible, d'inverse $\exp(-A)$.

5. Plus généralement, on considère $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ (où ces trois valeurs propres ne sont pas nécessairement distinctes). On alors $B = P.Diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).P^{-1}$ et par la méthode précédente,

$$\exp(B) = P.Diag(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, e^{\lambda_3}).P^{-1}$$

PARTIE III : exponentielle d'une matrice non diagonalisable, non nilpotente

1. Un résultat préliminaire d'analyse

(a) La fonction cos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on remarque que

$$\begin{cases} \cos^{(2i)}(x) = (-1)^i \cos(x) \\ \cos^{(2i+1)}(x) = (-1)^{i+1} \sin(x) \end{cases} \quad \text{et en particulier} \quad \begin{cases} \cos^{(2i)}(0) = (-1)^i) \\ \cos^{(2i+1)}(0) = (0 \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|\cos^{(2n+1)}(x)| = |(-1)^{n+1}.\sin(x)| \leq 1$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, appliquée à la fonction cos à l'ordre $2n$, avec $a = 0$ et $b = x$, on a alors

$$|\cos(x) - \sum_{k=0}^{2n} \cos^{(k)}(0).\frac{x^k}{k!}| \leq 1.\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

d'où en séparant les sommes de termes d'indices pairs et impairs :

$$|\cos(x) - \sum_{i=0}^{n} \cos^{(2i)}(0).\frac{x^{2i}}{(2i)!} - \sum_{i=0}^{n-1} \cos^{(2i+1)}(0).\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}| \leq 1.\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$|\cos(x) - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ce qui est le résultat souhaité.

(b) En reconnaissant que $\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ est le terme général (d'indice impair) d'une série exponentielle qui converge, on peut affirmer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$. Par encadrement, on trouve alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)$$

Bilan : $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)}$

On admet que l'on a aussi $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(x)$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est une valeur propre de A si et seulement si :

$$det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -x^2$$

ce qui est impossible puisque $-x^2 < 0$. Par conséquent A n'a aucune valeur propre réelle et la matrice A n'est pas diagonalisable.

3. (a) $J^2 = -I_2$, puis $J^3 = -J$, $J^4 = I_2$, $J^5 = J$ etc...
On obtient ainsi : pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} J^{2i} = (-1)^i.I_2 \\ J^{2i+1} = (-1)^i.J \end{cases}$$

(b) Comme $A = x.J$, on en déduit immédiatement que pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} A^{2i} = (-1)^i.x^{2i}.I_2 \\ A^{2i+1} = (-1)^i.x^{2i+1}.J \end{cases}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_{2n}(A) &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!}.A^k \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(2i)!}A^{2i} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)!}A^{2i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(2i)!}(-1)^i.x^{2i}.I_2 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)!}(-1)^i.x^{2i+1}.J \\ &= (\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}).I_2 + (\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}).J \end{aligned}$$

5. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient avec le résultat préliminaire d'analyse :

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n}(A) = \cos(x).I_2 + \sin(x).J = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

On admet que l'on a de même $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}(A) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$

6. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} (S_{2n}(A))_{1,1} = \lim_{n\to+\infty} (S_{2n+1}(A))_{1,1} = \cos(x)$$

d'où d'après le théorème sur les sous suites de termes pairs et impairs, $\lim_{n\to+\infty}(S_n(A))_{1,1} = \cos(x)$. On obtient ainsi la limite de chaque case de la suite de matrices $(S_n(A))$ et on a enfin $\exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$.