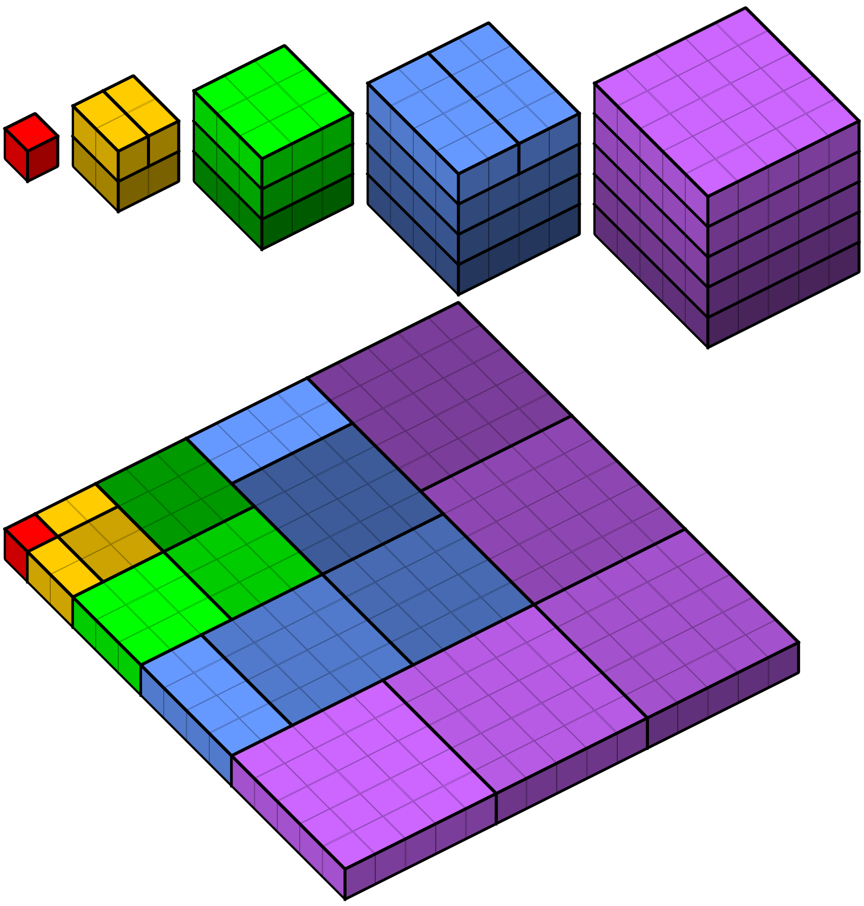
Annales de concours ECS

Ecricome, EDHEC, EM Lyon, HEC, ES-SEC, ...

Près de 180 exercices et problèmes de concours corrigés



$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

M. Vienney
http ://www.ecs2-fauriel.fr
vienney@ecs2-fauriel.fr

Table des matières

Les différentes épreuves de concours

En ECS, il y a au total six épreuves écrites de mathématiques au concours, chaque école utilisant une épreuve (voire deux pour les écoles du Top 5).
Toutes les épreuves durent 4h et interdisent l'usage de la calculatrice.
Toutes peuvent présenter des questions de `Scilab` qui sont souvent bien valorisées par le barême.

Les classiques : Ecricome, EM Lyon et Edhec

Ces trois épreuves sont les plus «classiques», et couvrent une grande partie du programme. Cependant, il arrive qu'un exercice ne porte que sur un point précis du programme. Pour cette raison, il est assez dangereux de faire une «impasse» totale sur un chapitre, y compris les chapitres de « fin de programme» (convergence des variables aléatoires, estimation, optimisation sous contrainte, etc).
Il est préférable pour ces trois épreuves d'aborder **tous les exercices**, les premières questions de chaque exercice étant souvent largement abordables par tout le monde (et donc tout candidat correctement préparé **doit** obtenir les points correspondants).
Ceci nécessite une bonne gestion de son temps, et il est conseillé de commencer par parcourir rapidement le sujet en début d'épreuve et de commencer par les exercices sur lesquels on se sent le plus à l'aise, tout en prenant soin de garder du temps pour les autres exercices.
On n'hésitera pas à sauter des questions pour passer aux suivantes, quitte à revenir sur ces questions en fin d'épreuve s'il reste du temps. Dans ce cas, on prendre tout de même soin de bien lire les questions qu'on ne traite pas, quitte à admettre les résultats donnés dans les question, qui peuvent être utiles pour les suivantes.
Une rédaction rigoureuse (et notamment la vérification des hypothèses avant d'appliquer un théorème) est attendue.

ECRICOME

Écoles utilisant cette épreuve : Neoma, Kedge.
L'épreuve est constituée de deux exercices et d'un problème, et couvre une large partie du programme. Généralement, un exercice porte sur de l'analyse, un sur de l'algèbre et le problème sur les probabilités.
Les questions sont plutôt classiques, mais demandent une certaine maîtrise du cours, et peuvent parfois être assez calculatoires. Idéalement, il faudrait passer 1h–1h15 sur chaque exercice et le reste du temps sur le problème.
Le problème est souvent très long, et il n'est pas nécessaire de terminer l'épreuve pour obtenir une très bonne note. Les dernières questions du problème peuvent être nettement plus difficiles que le reste, et servent essentiellement à départager les tous meilleurs candidats.

EMLyon

Écoles utilisant cette épreuve : EMLyon, Skema, Telecom EM, EM Strasbourg, ESC Rennes, BSB (Dijon), ICN, ISCP, ESC La Rochelle, INSEEC, Normandie, ESC Troyes, ESC Pau, ESC Clermont, Brest BS.
L'épreuve est généralement composée de deux problèmes d'égale longueur, l'un portant essentiellement sur le programme d'algèbre, l'autre sur le programme d'analyse. Plus rarement, il peut y avoir un seul problème constitué de parties largement indépendantes, et mêlant algèbre et analyse. Les questions de probabilités sont plus rares, mais peuvent faire l'objet d'une partie d'un des deux problèmes. Dans ce cas, il s'agit en général de variables aléatoires à densité.
Quelques questions peuvent être vraiment difficiles, mais en général les épreuves sont de difficulté croissante et les premières questions sont très largement abordables.
Les meilleurs candidats peuvent quasiment finir l'épreuve, et il faut donc traiter la quasi-totalité du sujet pour obtenir la note maximale.

EDHEC

Écoles utilisant cette épreuve : EDHEC, Audencia, Grenoble EM, Toulouse BS, Montpellier BS.
Épreuve constituée de trois exercices (compter 30 à 50 minutes suivant les exercices) et d'un problème (compter environ 1h30). Les exercices peuvent porter sur tout le programme, et le problème porte le plus souvent sur les probabilités, sans que ce soit un principe gravé dans le marbre.
En général, il y a peu de questions vraiment difficiles, mais une bonne maîtrise de l'ensemble du programme et de la rapidité sont nécessaires pour traiter un maximum de questions.
Un très bon candidat peut aborder toutes les questions du sujet, mais il n'est pas nécessaire de finir l'épreuve pour obtenir la note maximale. Suivant les années, 25% à 30% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16, mais toute la gamme

de notes est utilisée, et un certain nombre de candidats ont moins de 1.
Il s'agit de l'épreuve ayant l'écart-type le plus important, pouvant avoisiner 6.

Les parisiennes : Maths II, Hec et Essec

Ces trois épreuves ne comptent que pour les écoles du Top 5.
Toutes trois sont composées d'un seul problème, très long et **impossible à terminer dans le temps imparti.** Elles introduisent souvent de nouvelles notions, parfois complexes, ainsi que des notations parfois assez lourdes, le but étant de tester la capacité des candidats à assimiler rapidement ces notions et à les relier à ce qui a été vu en cours.
Sur les questions plus difficiles, la rédaction n'a pas nécessairement besoin d'être aussi détaillée que sur des épreuves plus faciles et il n'est pas forcément nécessaire de vérifier des hypothèses qui sont trivialement vérifiées (par exemple la dérivabilité d'une fonction obtenue par opérations sur les fonctions usuelles).
Suivant les années, il faut traiter correctement entre la moitié et les deux tiers du sujet pour avoir la note maximale. Un élève sérieux peut aisément avoir la moyenne, mais il faudra être rapide et efficace pour faire mieux.

Maths II (CCIP)

Écoles utilisant cette épreuve : HEC, ESSEC, ESCP, EML, EDHEC
Épreuve portant (quasi-)exclusivement sur les probabilités et les statistiques et qui nécessite une excellente maîtrise du programme de probabilités (même si des outils d'algèbre linéaire ou d'analyse peuvent être nécessaires) et une grande capacité à faire preuve d'initiatives. Certaines questions peuvent être très calculatoires.
Le début du sujet est généralement assez abordable, et les différentes parties sont généralement relativement indépendantes, ce qui permet à un candidat qui aurait décroché au milieu d'une partie de tout de même aborder les parties suivantes.

ESSEC

Cette épreuve ne compte que pour l'ESSEC.
L'épreuve porte soit sur de l'algèbre linéaire, soit sur de l'analyse et peut parfois mélanger les deux (comme en 2015). Ne comporte habituellement pas de questions de probabilités.

HEC

Écoles utilisant cette épreuve : HEC, ESCP.
Le sujet peut comporter aussi bien de l'analyse, de l'algèbre que des probabilités.
L'énoncé introduit souvent beaucoup de notions et de notations nouvelles, face auxquelles il ne faudra pas se décourager.
Si l'énoncé est généralement de difficulté progressive, il se peut que les premières questions soient déjà relativement complexes (et le plus souvent assez calculatoires).

Et l'oral ?

En ECS, seules HEC et l'ESCP ont des épreuves de mathématiques à l'oral.
Les deux épreuves se ressemblent beaucoup, et sont constituées d'un exercice (souvent très long) préparé pendant 30 minutes et présenté pendant 15 à 20 minutes, suivi d'une question sans préparation (QSP) d'une durée de 10 à 15 minutes.
L'ESCP publie tous les ans l'intégralité de ses énoncés avec des corrigés (parfois un peu rapides, mais globalement de bonne qualité) disponibles sur le site de l'ESCP.
HEC publie chaque année une sélection d'exercices, sans corrigés, disponibles sur le site d'HEC.

Le tableau ci-dessous donne les coefficients des différentes épreuves de mathématiques lors des concours 2017.
Pour toutes ces écoles, exceptées Néoma et Kedge, le total des coefficients des épreuves écrites vaut 30.

École	Ecricome	EDHEC	EML	Maths II	ESSEC	HEC
HEC				5		6
ESSEC				5	6	
ESCP				4		6
EMLyon			6	3		
EDHEC		8		2		
Audencia		8				
Grenoble EM		8				
Toulouse BS		8				
Néoma⋆	6					
Skema			5			
Kedge⋆	5					
ESC Rennes			5			
Telecom			6			
Montpellier BS		6				
EM Strasbourg			5			
BSB (Dijon)			5			
ICN Nancy			5			
ESC La Rochelle			5			
INSEEC			4			
ISCP			4			
ESC Clermont			5			
EM Normandie			6			
ESC Pau			4			
ESC Troyes			4			
Brest BS			4			

⋆ : total des coefficients égal à 25.

Des statistiques détaillées pour les épreuves des dernières années, ainsi que des rapports de jury et certains corrigés se trouvent sur le site de la BCE : http ://www.concours-bce.com/annales et sur celui d'Ecricome : https ://www.ecricome.org/Epreuves-ecrites-Annales-ECRICOME-PREPA

Extraits commentés de rapport de jury

EDHEC 2015 — Il reste, en assez grand nombre, des candidats qui rendent pratiquement un brouillon et truffent leur copie d'abréviations non officielles : les correcteurs n'apprécient pas du tout en n'ont alors aucune compassion pour le candidat.

✎ Gagner la confiance du correcteur est essentiel : si la copie est propre, que vous avez montré sur les premières questions que vous pouviez rédiger proprement (si possible avec une grammaire et une orthographe correctes) et avec des arguments pertinents, il doutera moins de vos capacités mathématiques, et sera plus à même de laisser passer par la suite une petite erreur ou un argument manquant.
Au contraire, si dès la fin de votre première page, le correcteur est pressé de passer à la copie suivante, n'attendez aucun cadeau de sa part !
Enfin, concernant les abréviations, celles-ci sont à proscrire : si certaines d'entre elles sont relativement courantes (IPP pour intégration par parties, s.c.e pour système complet d'événements, etc), d'autres vous sont propres, ou du moins le sont à votre enseignant, et ne sont pas forcément compréhensibles au premier coup d'œil. Là encore, une copie truffée d'abréviations (et donc difficilement lisible) risque de ne pas mettre le correcteur dans les meilleurs dispositions à votre égard.
De plus, vous viendrait-il à l'idée d'utiliser une abréviation dans une dissertation de philo ? Non ? Alors pourquoi le faire dans une copie de maths ?

ECRICOME 2016 — Le problème était assez long et [...] fut finalement traité partiellement, sûrement en raison de la longueur du sujet, les candidats ayant peut-être perdu un peu de temps sur l'exercice 2. Nous invitons les candidats à davantage prendre le temps de bien lire le sujet en entier au début d'épreuve et de bien repérer les questions abordables.

✎ Même si ce n'est peut-être pas totalement satisfaisant intellectuellement, le but d'une épreuve en temps limité est bien de traiter le plus de questions possibles afin de se démarquer des autres candidats, et non d'essayer de faire jusqu'au bout tel ou tel exercice.

ECRICOME 2015 — Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.

✎ Lorsque ces hypothèses sont faciles à vérifier (par exemple la continuité d'une fonction usuelle lors d'une application du théorème de la bijection, ou du caractère $\mathscr{C}^{n+1}$ lors de l'application de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n), on ne perdra pas de temps à détailler les raisons pour lesquelles elles sont vraies, mais on n'oubliera pas de le mentionner, afin de prouver qu'on connaît les hypothèses d'application du théorème.

EDHEC 2008 — Les correcteurs ont constaté que lorsque les résultats sont donnés par l'énoncé, certains candidats sont prêts à tout pour faire croire qu'ils ont prouvé le résultat demandé (pour les questions portant sur les probabilités notamment) : qu'ils sachent que ceci est sanctionné sévèrement.

✎ Tout est dit...

EDHEC 2008 — Une remarque d'ordre général : trop de candidats se contentent de plagier l'énoncé et donnent des explications très succintes ou floues pour établir le résultat demandé lorsque celui est donné.

✎ Si le résultat est donné dans l'énoncé, c'est souvent afin de permettre au candidat qui ne saurait répondre de poursuivre le sujet. Mais cela signifie également qu'on attend une réponse parfaitement justifiée.
Autant que possible, en probas, il faut essayer de justifier à l'aide de théorèmes usuels : formules des probabilités composées, des probabilités totales, des arguments d'indépendance ou d'incompatibilité, etc. Ce qui nécessite souvent de nommer des événements.
Il existe toutefois quelques cas où il est dur de justifier tout cela correctement, et où l'explication attendue est une phrase : dans ce cas celle-ci doit être syntaxiquement correcte (sujet/verbe/complément) et intelligible par le correcteur.

Maths II 2018 — La recherche d'une solution à une question ne doit pas dépasser quatre à cinq minutes. Au-delà de ce délai, en cas d'échec, le candidat doit admettre le résultat de cette question (si la réponse figure dans l'énoncé), passer à la question suivante sans éprouver un sentiment de déstabilisation ou de découragement. Autrement dit, le jury recommande aux futurs candidats de faire preuve d'une grande ténacité.

✎ Tout est dit : on ne sèche pas un quart d'heure sur une question pour laquelle on n'a aucune piste. Bien entendu, la rédaction complète de la réponse à une question peut prendre davantage de temps, mais même là, on conseille de ne pas trop dépasser les 10 minutes, surtout en cas de calculs dont vous ne voyez pas la fin.

Maths II 2018 — Le jury recommande aux futurs candidats de prendre le temps de lire l'ensemble du sujet, non seulement pour s'en imprégner, mais aussi pour pointer les questions qui paraissent faciles à résoudre, lesquelles ne se situent pas nécessairement dans la première partie du sujet.

1

ECRICOME

ECRICOME 2018

Exercice 1

Sujet : Spectre de la composée de deux projecteurs orthogonaux **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : projecteurs, endomorphismes et matrices symétriques, valeurs propres

On note E l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$, muni du produit scalaire canonique.
Pour toutes matrices colonnes X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on note $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$.
Pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on note $\|X\| = \sqrt{{}^tXX}$.
On considère u et v deux endomorphismes de E, et on note A et B leurs matrices respectives dans la base canonique de E.

Partie I

Soit $a \in \mathbf{R}$. On suppose **dans cette partie uniquement** que $n = 2$ et que les matrices de u et v dans la base canonique sont respectivement :

$$A = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix}1 & a\\ a & a^2\end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que u et v sont des projecteurs.
2. a. Vérifier que les endomorphismes u, v et $u \circ v$ sont tous de rang 1.
   b. Vérifier que le vecteur $x_0 = (1, a)$ est un vecteur propre de $u \circ v$.
   c. Déterminer le spectre de $u \circ v$.
3. a. Montrer que les valeurs propres de $u \circ v$ appartiennent à l'intervalle $[0;1]$.
   b. Pour quelle(s) valeur(s) de a, $u \circ v$ est-il un projecteur ?

Partie II

On revient dans cette partie au cas général, où n désigne un entier tel que $n \geqslant 2$.
On suppose que u et v sont des projecteurs symétriques de E et on pose : $C = BAB$.

4. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$:
$$\|BX\|^2 = \langle BX, X\rangle.$$
En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$:
$$\|BX\| \leqslant \|X\|.$$
5. Montrer que C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
6. Soit λ une valeur propre de C et X un vecteur propre associé.
   a. Exprimer $\|ABX\|^2$ en fonction de λ et $\|X\|$.
   b. En déduire que les valeurs propres de C sont réelles positives.
7. Soit μ une (éventuelle) valeur propre de AB non nulle, et X un vecteur propre associé.
   a. Montrer que BX est un vecteur propre de C.
   b. Montrer : $ABX = \mu AX$. En déduire que : $AX = X$.
   c. Montrer que : $\langle X, BX\rangle = \mu\|X\|^2$.
8. Déduire des questions précédentes que le spectre de AB est inclus dans $[0;1]$.

Exercice 2

Sujet : Variations autour de la suite de Fibonacci et du nombre d'or **Facile**

Abordable en première année : ✓ (sauf la question 2) **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : suites, séries numériques, `Scilab` , fonctions de plusieurs variables, calcul différentiel d'ordre 2.

Commentaires : La question 5 est un peu plus délicate, mais le reste de l'exercice est assez classique et ne présente pas de grosses difficultés (pour un candidat qui sait manipuler les racines carrées).

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

et on note f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6y.$$

On pose enfin $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\varphi > 1$ et que les réels φ et $\dfrac{-1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.
2. a. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.

   b. Montrer que les seuls points critiques de f sont $(\varphi, \varphi+1)$ et $\left(-\dfrac{1}{\varphi}, \dfrac{1}{\varphi+1}\right)$.

   c. Étudier la nature des points critiques de f.
3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$: $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
4. a. Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un entier $n \geqslant 2$, elle calcule et renvoie la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

```
function u=suite(n)
  v=0
  w=1
  for k=2 :n
    ..........
    ..........
    ..........
  end
  u=..........
endfunction
```

   b. Justifier qu'il existe des réels λ et μ, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \lambda \varphi^n + \mu \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n.$$

   c. En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite
5. On considère pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

   a. Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n u_{n+1}}$ converge.

   b. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.

   c. En utilisant le résultat de la question 3, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

   d. Montrer que : $\varphi = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

Problème

Sujet : Algorithme de Panjer **Difficile**

Abordable en première année : ✓ (sauf la partie 3) **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : Variables aléatoires discrètes, fonctions d'une variable, Scilab

Modifications apportées au sujet d'origine : les questions de la partie 3 ont été renumérotées (absence de question 8 dans le sujet d'origine).

Commentaires : le sujet est intéressant, mais la partie 1 est excessivement technique si on veut tout bien écrire. Le principal intérêt réside dans la partie 3, avec un thème difficile, mais que l'on rencontre tout de même de temps à autre aux concours : la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires.

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Partie 1 – Variables vérifiant une relation de Panjer.
On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbf{N}$ vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$P(N = 0) \neq 1 \text{ et } \forall k \in \mathbf{N}^*,\ P(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(N = k - 1).$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.
   a. Montrer que :
   $$\forall k \in \mathbf{N},\ P(N = k) = \frac{b^k}{k!} P(N = 0).$$
   b. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k)$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
   Préciser son espérance et sa variance.
2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.
   a. Montrer que :
   $$\forall k \geqslant 2,\ P(N = k) = 0.$$
   b. En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.
3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0;1[$.
   a. Montrer que :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(Z = k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times P(Z = k - 1).$$
   b. En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p.
4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbf{N}$, vérifiant la relation de Panjer.
   a. Calculer $P(N = 1)$. En déduire que $a + b \geqslant 0$.
   b. Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$:
   $$\sum_{k=1}^{m} kP(N = k) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k + 1)P(N = k) + b \sum_{k=0}^{m-1} P(N = k).$$
   c. En déduire que $\left((1-a)\sum_{k=1}^{m} kP(N = k)\right)_{m \geqslant 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.
   Préciser alors la valeur de $E(N)$ en fonction de a et b.
   d. Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et que :
   $$E\left(N^2\right) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.$$
   e. En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $V(N)$ en fonction de a et b.
   f. Montrer que $E(N) = V(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Partie 2 – Fonction génératrice.
On notera dans la suite :
$$\forall k \in \mathbf{N},\ p_k = P(N = k),$$
où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.

5. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, la série $\sum_{k \geqslant 0} p_k x^k$ est convergente.

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0; 1]$ par :

$$\forall x \in [0; 1],\ G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k)x^k$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\frac{b}{a} > 0$. On pose : $\alpha = \frac{-(a+b)}{a}$.
On note enfin f la fonction définie par
$$\forall x \in [0; 1],\ f(x) = p_0(1 - ax)^{\alpha}.$$

6. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$:
$$\forall x \in [0;1],\ f^{(k)}(x) = k! \times p_k(1-ax)^{\alpha-k}.$$

7. Soit $x \in [0;1]$.
   a. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, montrer que :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt.$$
   b. Vérifier que pour tout $t \in [0,x]$, $\dfrac{x-t}{1-at} \leqslant 1$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$0 \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\,dt.$$
   c. En déduire que :
$$G(x) = p_0(1-ax)^{\alpha}.$$
   En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier que $G'(1) = E(N)$.

Partie 3 – Formule de récursivité.
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbf{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question 4 de la partie 1.
On considère alors la variable aléatoire S définie par :
$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geqslant 1 \end{cases}$$
autrement dit :
$$\forall \omega \in \Omega,\ S(\omega) = 0 \text{ si } N(\omega) = 0 \text{ et } S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \text{ sinon.}$$

8. Calculer $P(S=0)$ lorsque $a \in]0;1[$ à l'aide de la partie 2.

9. a. Calculer $P(S=0)$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   b. On considère la fonction `Scilab` suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```
function y=simuX(n)
  y=0 ;
  for i=1 :n
    if rand()<1/2
      y=y+1 ;
    end
  end
endfunction
```

   Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser ses paramètres.
   c. On rappelle qu'en `Scilab` l'instruction `grand(1,1,"poi",lambda)` renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `lambda`.
   On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ, et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.
   Recopier et compléter la fonction Scilab suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```
function s=simulS(lambda,n)
  N=grand(1,1,"poi",lambda)
  ..........
  ..........
  ..........
  ..........
  ..........
endfunction
```

10. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :

$$\forall k \geqslant 0,\ p_k = P(N = k)$$

et on notera également :

$$\forall k \geqslant 0,\ q_k = P(X_1 = k).$$

Enfin, on considère pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$.

a. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que :

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!],\ E(X_i | S_{n+1} = k) = \frac{k}{n+1}.$$

Indication : on pourra considérer la somme $\sum_{i=1}^{n+1} E(X_i | S_{n+1} = k)$.

b. Justifier que :

$$\forall j \in [\![0, k]\!],\ P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j) P(S_{n+1} = k) = q_j P(S_n = k - j).$$

c. Déduire des deux questions précédentes que :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S_n = k - j) = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) P(S_{n+1} = k).$$

11. Soit $k \in \mathbf{N}^*$.

a. Montrer que :

$$\forall j \in [\![0, k]\!],\ P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n = k - j).$$

b. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).$$

c. Justifier que :

$$P(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).$$

d. En déduire finalement que :

$$P(S = k) = \frac{1}{1 - a q_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j)$$

ECRICOME 2018 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie I.

1. On a $A^2 = \dfrac{1}{(1+a^2)^2}\begin{pmatrix}1+a^2 & a+a^3\\ a+a^3 & a^2+a^4\end{pmatrix} = \dfrac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix}1 & a\\ a & a^2\end{pmatrix} = A$.

Et donc $u^2 = u$: $\boxed{u \text{ est un projecteur de } E.}$

De même, $B^2 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = B$.

Et donc $v^2 = v$: $\boxed{v \text{ est un projecteur.}}$

> **☠ Danger !**
> Une matrice dont toutes les colonnes sont colinéaires peut encore être la matrice nulle, et donc être de rang 0. Pour affirmer qu'une telle matrice est de rang 1, il ne faut pas oublier de vérifier qu'elle est non nulle (*i.e.* qu'au moins l'une de ses colonnes est non nulle).

2.a. Les deux colonnes de A sont colinéaires, la deuxième étant égale à a fois la première.
Puisque A est non nulle, on en déduit que $\operatorname{rg}(A) = 1$, et donc $\boxed{\operatorname{rg}(u) = 1.}$

De même, les colonnes de B sont non nulles, et égales, donc $\operatorname{rg}(B) = 1$, et donc $\boxed{\operatorname{rg}(v) = 1.}$

Enfin, $AB = \dfrac{1}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix}1+a & 1+a\\ a+a^2 & a+a^2\end{pmatrix}$.
Les colonnes de AB sont donc égales, donc $\operatorname{rg}(AB) \leqslant 1$.
Si $a \neq -1$, ces colonnes sont non nulles, et donc $\operatorname{rg}(AB) = 1$, de sorte que $\boxed{\operatorname{rg}(u \circ v) = 1.}$
En revanche, si $a = -1$, alors $AB = 0$, et donc $\operatorname{rg}(u \circ v) = 0$.

> **Erreur d'énoncé ?**
> Le concepteur du sujet semble avoir oublié ce cas.

2.b. On a $AB\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix}1+a+a+a^2\\ a+a^2+a^2+a^3\end{pmatrix} = \dfrac{1+2a+a^2}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix} = \dfrac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix}$.

Et donc $(u \circ v)(x_0) = \dfrac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}x_0$.

Puisque x_0 est non nul[1], ceci prouve que $\boxed{x_0 \text{ est un vecteur propre de } u \circ v,}$ associé à la valeur propre $\boxed{\dfrac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}}$.

[1] Même si $a = 0$, sa première coordonnée est non nulle.

2.c. Si $a = -1$, alors $u \circ v = 0$, et donc $\operatorname{Spec}(u \circ v) = \{0\}$.

Si $a \neq -1$, nous venons de déterminer une valeur propre de $u \circ v$, qui est $\dfrac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \neq 0$.
D'autre part, $u \circ v$ étant de rang $1 < \dim \mathbf{R}^2$, 0 est valeur propre de $u \circ v$.
Nous avons donc deux valeurs propres distinctes et $u\circ$, et puisque $\dim \mathbf{R}^2 = 2$, il ne peut y avoir d'autres valeurs propres. Ainsi, $\boxed{\operatorname{Spec}(u \circ v) = \left\{0, \dfrac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}\right\}}$.

> **Rappel**
> 0 est valeur propre de $f \in \mathscr{L}(E)$ si et seulement si $\operatorname{rg}(f) < \dim E$.

3.a. Il est évident que $0 \in [0;1]$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$f'(x) = \frac{2(1+x)(1+x^2) - 2x(1+x)^2}{2(1+x^2)^2} = \frac{1+x+x^2+x^3-x-2x^2-x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

On a donc $f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1-x^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$.
Le tableau de variation de f est donc donné par :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

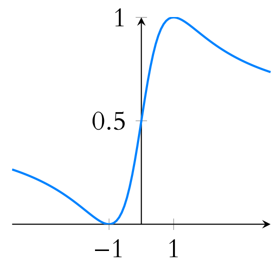


FIGURE 1– La fonction f.

Et alors, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $f(a) = \dfrac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \in [0;1]$.

On en déduit donc que $\boxed{\mathrm{Spec}(u \circ v) \subset [0;1].}$

3.b. Si $a = -1$, alors $u \circ v = 0$, qui est bien un projecteur.
Pour $a \neq -1$, $u \circ v$ possède deux valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable.
C'est un projecteur si et seulement si ses valeurs propres sont dans $\{0, 1\}$.
C'est le cas si et seulement si $a = 1$.
Donc $\boxed{u \circ v \text{ est un projecteur si et seulement si } a = \pm 1.}$

Détails
Un endomorphisme diagonalisable est un projecteur si et seulement si ses valeurs propres sont dans [0, 1].
En effet, dans une «bonne base», sa matrice est diagonale, donc est égale à son carré si et seulement si ses coefficient diagonaux (ses valeurs propres) sont égaux à leurs propres carrés.
Seuls 0 et 1 vérifient ceci (ce sont les seules solutions de $x^2 - x = 0$).

Partie II
Notons que u et v étant à la fois des projecteurs et des endomorphismes symétriques, ce sont des projecteurs orthogonaux. Ceci ne nous sera toutefois pas nécessaire dans la suite de l'exercice.

4. Puisque v est un endomorphisme symétrique, et que la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique, B, qui est la matrice de v dans la base canonique est une matrice symétrique.
Et donc pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on a

$$\|BX\|^2 = {}^t(BX)(BX) = {}^tX\,{}^tBBX = {}^tXBBX = {}^tXBX = \langle X, BX\rangle = \boxed{\langle BX, X\rangle.}$$

Détails
Puisque v est un projecteur, $v^2 = v$ et donc $B^2 = B$.

On a alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|BX\|^2 = \langle BX, X\rangle \leqslant \|BX\| \cdot \|X\|.$$

Si $\|BX\| \neq 0$, alors, en divisant par $\|BX\|$, il vient $\boxed{\|BX\| \leqslant \|X\|.}$
Et dans le cas où $\|BX\| = 0$, il est évident que $\|BX\| \leqslant \|X\|$.

5. Comme précédemment, puisque u est symétrique, A est une matrice symétrique.
Et donc ${}^tC = {}^t(BAB) = {}^tB\,{}^tA\,{}^tB = BAB = C$.
Donc C est une matrice symétrique réelle : elle est donc $\boxed{\text{diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).}$

6.a. On a

$$\begin{aligned}\|ABX\|^2 &= {}^t(ABX)(ABX) = {}^tX\,{}^tB\,{}^tAABX = {}^tXBA^2BX = {}^tXBABX = {}^tXCX \\ &= {}^tX\lambda X = \lambda\,{}^tXX = \boxed{\lambda\|X\|^2.}\end{aligned}$$

6.b. D'une part, $\|ABX\|^2 \geqslant 0$ car un carré est toujours positif.
D'autre part, $\|X\|^2 \geqslant 0$, et puisque X est un vecteur propre, il est non nul et donc $\|X\|^2 > 0$.
On en déduit que $\lambda = \dfrac{\|ABX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0$.
Et donc $\boxed{\text{toutes les valeurs propres de } C \text{ sont positives.}}$

Remarque
Il est vraiment important ici de remarquer que $\|X\| > 0$, et de ne pas se contenter de $\|X\| \geqslant 0$.
En effet, si on avait $\|X\| = 0$, on saurait seulement que $\lambda \times 0 \geqslant 0$, ce qui ne nous renseigne aucunement sur le signe de λ.

7.a. On a $CBX = BABBX = BABX = B\mu X = \mu BX$.
Donc si $BX \neq 0$, c'est un vecteur propre de C, associé à la valeur propre μ.
Or, si on avait $BX = 0$, alors il viendrait $ABX = 0$, et donc $\mu X = 0$.
Puisque μ et X sont tous deux non nuls, ceci ne peut se produire.
Donc on a bien $BX \neq 0$, donc $\boxed{BX \text{ est un vecteur propre de } C \text{, associé à la valeur propre } \mu.}$

7.b. On a $ABX = \mu X$. En multipliant à droite par A, il vient $A^2BX = \mu AX$, mais $A^2 = A$, donc $\boxed{ABX = \mu AX.}$
Puisque d'autre part, $ABX = \mu X$, on en déduit que $\mu AX = \mu X$.
Et μ étant non nul, il vient $\boxed{AX = X.}$

7.c. D'après ce qui précède,

$$\langle X, BX\rangle = \langle AX, BX\rangle = {}^tX\,{}^tABX = {}^tXABX = {}^tX\mu X = \mu\,{}^tXX = \boxed{\mu\|X\|^2.}$$

8. En combinant les résultats des questions 4 et 7.c, il vient d'une part

$$\mu\|X\|^2 = \langle X, BX\rangle = \|BX\|^2 \geqslant 0$$

et donc $\mu = \dfrac{\|BX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0$.
D'autre part, $\mu\|X\|^2 = \|BX\|^2 \leqslant \|X\|^2$, et donc $\mu \leqslant 1$.
Ainsi, les valeurs propres non nulles de AB sont bien dans $[0;1]$.
Et si jamais 0 est valeur propre de AB, elle est bien évidemment incluse dans $[0;1]$.
Ainsi, $\boxed{\text{toutes les valeurs propres de } AB \text{ sont dans } [0;1].}$

EXERCICE 2

Méthode
Lorsqu'au dénominateur d'une fraction, on a une expression de la forme $a+b\sqrt{c}$, on multiplie numérateur et dénominateur par $a-b\sqrt{c}$ (la «quantité conjuguée»), afin de ne garder des racines carrées qu'au numérateur.

1. Puisque $5 > 1$, $\sqrt{5} > \sqrt{1} = 1$, et donc $\varphi > \dfrac{1+1}{2} = 1$.
D'autre part, le discriminant de $x^2 - x - 1$ est $\Delta = 1+4 = 5$, de sorte que ses solutions sont $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Mais $-\dfrac{1}{\varphi} = -\dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = -\dfrac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = -\dfrac{2-2\sqrt{5}}{1-5} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = x_2$.
Donc $\boxed{\varphi \text{ et } -\dfrac{1}{\varphi} \text{ sont bien les deux}^2 \text{ solutions de } x^2-x-1.}$

[2] Et même les deux seules !

2.a. Il suffit de remarquer que f est polynomiale sur $\mathbf{R}^2$, donc elle est de classe $\mathscr{C}^2$.

2.b. On a $\partial_1 f(x,y) = 6x^2 - 6y$ et $\partial_2 f(x,y) = -6x + 6y - 6$.
Et donc $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

D'après ce qui précède, on a alors $x = \varphi$ ou $x = -\dfrac{1}{\varphi}$.

Astuce
Puisque φ est solution de $x^2-x-1=0$, on a $\varphi^2 = \varphi+1$, il n'est pas nécessaire de recalculer la valeur de φ^2.

Dans le premier cas, $y = \varphi^2 = \varphi + 1$, et dans le second cas, $y = \dfrac{1}{\varphi^2} = \dfrac{1}{\varphi+1}$.
Et donc $\boxed{f \text{ possède deux points critiques, qui sont } (\varphi, \varphi+1) \text{ et } \left(-\dfrac{1}{\varphi}, \dfrac{1}{\varphi+1}\right).}$

2.c. Commençons par noter que f ne possède ni maximum global ni minimum global car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$.
Ceci signifie donc que f peut prendre des valeurs arbitrairement grandes et arbitrairement petites, et donc ne possède pas d'extremum global.

Pour étudier la nature locale des points critiques, calculons les dérivées partielles secondes de f.
On a $\partial^2_{1,1} f(x,y) = 12x$, $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = -6$, $\partial^2_{2,2} f(x,y) = 6$.
En particulier, la hessienne de f en $(\varphi, \varphi+1)$ est

$$\nabla^2 f(\varphi, \varphi+1) = \begin{pmatrix} 12\varphi & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6(1+\sqrt{5}) & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mais un réel λ est valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ si et seulement si $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, soit si et seulement si

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda I_2\right) = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - (2+\sqrt{5})\lambda + \sqrt{5} = 0.$$

Le discriminant de cette dernière équation est

$$\Delta = \left(2+\sqrt{5}\right)^2 - 4\sqrt{5} = 4 + 4\sqrt{5} + 5 - 4\sqrt{5} = 5 > 0.$$

Il y a donc deux valeurs propres, qui sont $\lambda_1 = \dfrac{2+\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2} = 1$ et $\dfrac{2+\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2} = 1+\sqrt{5}$.
Ces deux valeurs propres étant positives strictement, on en déduit que celles de $\nabla^2 f(\varphi, \varphi+1)$

le sont également , et donc $\boxed{f \text{ possède en } (\varphi, \varphi+1) \text{ un minimum local.}}$

Détails

Si on multiplie une matrice par 6, ses valeurs propres sont également multipliées par 6.

De la même manière, on a

$$\nabla^2 f\left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{12}{\varphi} & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or, un réel λ est valeur propre de $B = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ si et seulement si $B - \lambda I_2$ n'est pas inversible soit si et seulement si

$$\det(B - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (2-\sqrt{5})\lambda - \sqrt{5} = 0.$$

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 en λ est $\Delta = \left(2-\sqrt{5}\right)^2 + 4\sqrt{5} = 5$.

Ses racines, qui sont les valeurs propres de B, sont donc $\lambda_1 = \dfrac{2-\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2} = 1-\sqrt{5} < 0$ et $\lambda_2 = \dfrac{2-\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2} = 1 > 0$.

Les valeurs propres de B étant de signes opposés, il en est de même de celles de $\nabla^2 f\left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1}\right)$, et donc $\boxed{\left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1}\right) \text{ est un point selle de } f.}$

3. Montrons par récurrence sur n que $u_n u_{n+2} - u_n^2 = (-1)^{n+1}$.
Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = u_2 = 1$, de sorte que

$$u_0 u_2 - u_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^{0+1}.$$

Supposons que $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1}u_{n+3} - u_{n+2}^2 &= u_{n+1}(u_{n+1} + u_{n+2}) - u_{n+2}^2 \\ &= u_{n+1}^2 + u_{n+1}u_{n+2} - u_{n+2}^2 \\ &= u_n u_{n+2} - (-1)^{n+1} + u_{n+1}u_{n+2} - u_{n+2}^2 \\ &= \underbrace{(u_n + u_{n+1})}_{=u_{n+2}} u_{n+2} - u_{n+2}^2 + (-1)^{n+2} = (-1)^{n+1+1}. \end{aligned}$$

Hypothèse de récurrence.

Ainsi, par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.}$

4.a. Nous allons calculer successivement les valeurs de u_k, en utilisant toujours la variable w pour stocker la dernière valeur de u_k calculée, et v pour stocker l'avant dernière valeur calculée.

```
function u=suite(n)
  v=0
  w=1
  for k=2 :n
    a = v+w
    v =w
    w = a
  end
  u = w
endfunction
```

Notons que nous avons utilisé une autre variable appelée a pour stocker temporairement la valeur de w, car si nous avions directement utilisé `w = v+w`, alors nous aurions perdu la valeur de w.

4.b. La suite (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont le polynôme caractéristique est $X^2 - X - 1$, dont les racines ont été calculées précédemment : il s'agit de φ et $-\dfrac{1}{\varphi}$.

Ces racines étant distinctes, il existe deux réels λ et μ tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \lambda\varphi^n + \mu\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n$.
Afin de déterminer les valeurs de λ et μ, il suffit d'utiliser les valeurs de u_0 et u_1 :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\varphi - \frac{\mu}{\varphi} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right) = 1 \end{cases}$$

Or, nous savons déjà que $-\dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, de sorte que $\varphi + \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.
Et donc $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\mu = -\lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right).}$$

4.c. On a $\dfrac{\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{\varphi^n} = \left(\dfrac{-1}{\varphi^2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\varphi > 1$ et donc $\left|\dfrac{-1}{\varphi^2}\right| < 1$.
Et donc $\left(-\dfrac{1}{\varphi}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} o(\varphi^n)$ de sorte que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n$.
Et donc $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{n+1}$, de sorte que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} = \varphi \text{ et donc } \boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi.}$$

> **Rappel**
> $u_n \simeq v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$.

5.a. D'après ce qui précède, on a $\dfrac{1}{u_n u_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{5}}{\varphi^n}\dfrac{\sqrt{5}}{\varphi^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{5}{\varphi^{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{5}{\varphi}\left(\dfrac{1}{\varphi^2}\right)^n$.
Mais $0 < \dfrac{1}{\varphi^2} < 1$, de sorte que la série de terme général $\left(\dfrac{1}{\varphi^2}\right)^n$ est une série géométrique convergente.
Et donc, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général $\dfrac{1}{u_n u_{n+1}}$ converge.

> **Rédaction**
> Ne pas oublier de mentionner la positivité (ou au moins le signe constant) lorsqu'on utilise un équivalent pour déterminer la nature des séries : le résultat n'est plus vrai pour des séries qui changent de signe !
> Le mentionner permet de montrer au correcteur qu'on connaît bien les hypothèses.

5.b. Puisque $\left|\dfrac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}\right| = \dfrac{1}{u_k u_{k+1}}$, nous venons de prouver que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$ converge absolument.
Et donc en particulier elle converge. Par définition, cela signifie que la suite de ses sommes partielles est une suite convergente.
Or S_n est précisément la somme partielle d'ordre n de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$, et donc $\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$

5.c. D'une part, on a

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{u_n u_{n+1}}.$$

D'autre part, en utilisant le résultat de la question 3,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} = \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_n u_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{u_n u_{n+1}} = S_{n+1} - S_n.$$

5.d. Sommons les relations de la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{n} (S_{k+1} - S_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{u_k}{u_{k+1}} - \frac{u_{k+1}}{u_{k+2}}\right).$$

Nous reconnaissons alors deux sommes télescopiques :

$$\sum_{k=1}^{n} (S_{k+1} - S_k) = \sum_{k=1}^{n} S_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{i=2}^{n+1} S_i - \sum_{k=1}^{n} S_k = S_{n+1} - S_1 = S_{n+1} + 1.$$

Et de même,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{u_k}{u_{k+1}}-\frac{u_{k+1}}{u_{k+2}}\right)=\frac{u_1}{u_2}-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}=1-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

En utilisant le résultat de 4.c, on a donc $S_{n+1}=-\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\frac{1}{\varphi}$.

Et donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{u_ku_{k+1}}=-\frac{1}{\varphi}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1-\varphi.$$

Somme de la série

Par **définition**, la somme d'une série est la limite de la suite de ses sommes partielles (donc ici de S_n).

On en déduit enfin que

$$\boxed{\varphi=1-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{u_ku_{k+1}}.}$$

Quelques commentaires : la suite (u_n) est très classique, et est appelée suite de Fibonacci et doit son nom à Leonardo Fibonacci qui s'y est intéressé dès le XIIIème siècle, via l'amusant problème suivant : «Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?»
Si on note x_n le nombre de couples de lapins au début du nème mois, on a donc $x_0=0$ et $x_1=1$. De plus, au début du nème mois, le nombre de couples est égal au nombre de couples déjà présents le mois précédent (x_{n-1}), plus le nombre de couples nés depuis.
Mais puisqu'il faut deux mois à un couple pour atteindre la maturité sexuelle, le nombre de couples qui viennent de naître est égal au nombre de couples âgés de plus de deux mois, c'est-à-dire au nombre de couples qui étaient déjà nés deux mois avant : c'est x_{n-2}.
Et ainsi, on a la relation

$$x_n=x_{n-1}+x_{n-2}\Leftrightarrow x_{n+1}=x_n+x_{n-1}.$$

Cette suite a passionné des générations de mathématiciens, et il existe toujours une revue mathématique[3] qui ne publie que des articles traitant des propriétés de (x_n).

[3] Le Fibonacci Quarterly.

Problème

Partie 1 – Variables vérifiant une relation de Panjer.

1.a. Prouvons le résultat demandé par récurrence sur $k\in\mathbf{N}$. Il est bien évidemment vrai pour $k=0$ car

$$P(N=0)=\frac{1}{1}P(N=0)=\frac{b^0}{0!}P(N=0).$$

Supposons donc que $P(N=k)=\frac{b^k}{k!}P(N=0)$. Alors

$$P(N=k+1)=\frac{b}{k+1}P(N=k)=\frac{b}{k+1}\frac{b^k}{k!}P(N=0)=\frac{b^{k+1}}{(k+1)!}P(N=0).$$

Donc la propriété est vraie au rang $k+1$, et donc par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall k\in\mathbf{N},\ P(N=k)=\frac{b^k}{k!}P(N=0).}$$

1.b. D'une part, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}P(N=k)=P(N=0)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{b^k}{k!}=P(N=0)e^b.$$

D'autre part, N étant à valeurs dans $\mathbf{N}$, $\sum_{k=0}^{+\infty}P(N=k)=1$, et donc $P(N=0)=\frac{1}{e^b}=e^{-b}$.

On en déduit que pour tout $k\in\mathbf{N}$, $P(N=k)=e^{-b}\frac{b^k}{k!}$, et donc N suit une loi de Poisson de paramètre b.

En particulier, $\boxed{E(N)=V(N)=b.}$

2.a. Prouvons par récurrence sur $k \geqslant 2$ que $P(N = k) = 0$.
Pour $k = 2$, on a

$$P(N = 2) = \left(a + \frac{b}{2}\right) P(N = 1) = \left(a - \frac{2a}{2}\right) P(N = 1) = 0.$$

Supposons donc que pour $k \geqslant 2$, $P(N = k) = 0$. Alors

$$P(N = k + 1) = \left(a + \frac{b}{k+1}\right) P(N = k) = 0.$$

Et donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \geqslant 2,\ P(N = k) = 0.}$

2.b. On a $P(N = 1) = (a + b)P(N = 0) = (a - 2a)P(N = 0) = -aP(N = 0)$.
D'autre part, puisque N est à valeurs dans $\mathbf{N}$ et que $P(N = k) = 0$ pour $k \geqslant 2$, il vient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k) = 1 \Leftrightarrow P(N = 0) + P(N = 1) = 1 \Leftrightarrow P(N = 0) - aP(N = 0) = 1 \Leftrightarrow P(N = 0) = \frac{1}{1-a}.$$

Et donc $P(N = 1) = 1 - P(N = 0) = \dfrac{-a}{1-a}$.
Puisque N ne prend que les valeurs 0 et 1, elle suit une loi de Bernoulli, de paramètre $P(N = 1) = \dfrac{-a}{1-a}$.

> **Bernoulli**
> Rappelons que pour une variable X qui suit une loi de Bernoulli, son paramètre p est égal à $P(N = 1)$ (probabilité de succès).

3.a. On a, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
P(Z = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n-k+1}{k} \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} \frac{p}{1-p} p^{k-1} (1-p)^{n-(k-1)} \\
&= \boxed{\frac{p}{1-p} \frac{n-k+1}{k} P(Z = k-1).}
\end{aligned}$$

3.b. Nous venons de prouver que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$P(Z = k) = \frac{p}{1-p}\left(-1 + \frac{n+1}{k}\right) P(Z = k-1).$$

Pour $k = n + 1$, cette relation reste valable car on a $P(Z = n + 1) = 0$ et $-1 + \dfrac{n+1}{n+1} = 0$.
Et pour $k \geqslant n + 2$, on a $P(Z = k) = P(Z = k - 1) = 0$, donc la relation est toujours valable.
En résumé, on a, pour tout $k \geqslant 1$,

$$P(Z = k) = \frac{p}{1-p}\left(-1 + \frac{n+1}{k}\right) P(Z = k-1).$$

Donc Z vérifie une relation de Panjer, avec $\boxed{a = -\dfrac{p}{1-p} \text{ et } b = \dfrac{p}{1-p}(n+1).}$

> **Remarque**
> Puisque $a < 0$, on a bien $a < 1$, ce qui fait partie des hypothèses nécessaires pour vérifier une relation de Panjer.

4.a. On a $P(N = 1) = \left(a + \dfrac{b}{1}\right) P(N = 0) = (a + b)P(N = 0)$.

Puisque $P(N = 0) \neq 0$, on en déduit[4] que $a + b = \dfrac{P(N = 1)}{P(N = 0)} \geqslant 0$.

[4] Une probabilité est toujours positive.

4.b. Pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$kP(N = k) = k\left(a + \frac{b}{k}\right) P(N = k-1) = akP(N = k-1) + bP(N = k-1).$$

Et donc pour $m \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} kP(N = k) &= a \sum_{k=1}^{m} kP(N = k-1) + b \sum_{k=1}^{m} P(N = k-1) \\
&= \boxed{a \sum_{i=0}^{m-1} (i+1)P(N = i) + b \sum_{i=0}^{m-1} P(N = i).}
\end{aligned}$$

> **Chgt d'indice**
> $i = k - 1$.

4.c. On a donc, pour tout $m \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{m-1} kP(N=k) - a\sum_{k=0}^{m-1} kP(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k) - mP(N=m).$$

Et donc,

$$\begin{aligned}(1-a)\sum_{k=1}^{m} kP(N=k) &= \sum_{k=1}^{m} kP(N=k) - a\sum_{k=1}^{m} kP(N=k)\\ &= a\sum_{k=0}^{m} P(N=k) + b\sum_{k=0}^{m} P(N=k) - (m+1)P(N=m+1)\\ &\leqslant (a+b)\sum_{k=0}^{m} P(N=k)\\ &\leqslant (a+b)\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)\\ &\leqslant a+b.\end{aligned}$$

C'est la relation de la question précédente où on a changé m en $m+1$.

Remarque
Cette inégalité est vraie car les $P(N=k)$ sont tous positifs, mais aussi car $a+b \geqslant 0$.

Ainsi, la suite $\left((1-a)\sum_{k=1}^{m} kP(N=k)\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée.
De plus, elle est croissante car

$$(1-a)\sum_{k=1}^{m+1} kP(N=k) - \underbrace{(1-a)}_{\geqslant 0}\sum_{k=1}^{m} kP(N=k) = (1-a)(m+1)P(N=m+1) \geqslant 0.$$

Et donc, étant croissante et majorée, elle converge.
Cela signifie donc que la suite $\left(\sum_{k=1}^{m} kP(N=k)\right)_{m\geqslant 1}$ est convergente, et donc que la série de terme général $kP(N=k)$ est une série convergente.
Puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, sa convergence est équivalente à sa convergence absolue.
Et donc la série de terme général $kP(N=k)$ converge absolument, et donc N admet une espérance.

Rappel
Une série est convergente si et seulement si la **suite** de ses sommes partielles est convergente.

On a alors, pour tout $m \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{m} kP(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1} kP(N=k) + (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k).$$

En passant à la limite lorsque $m \to +\infty$, il vient alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kP(N=k) = a\sum_{k=1}^{+\infty} P(N=k) + (a+b)\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k).$$

Soit encore

$$E(N) = aE(N) + (a+b)\times 1 \Leftrightarrow \boxed{E(N) = \frac{a+b}{1-a}.}$$

4.d. Pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$k^2P(N=k) = ak^2P(N=k-1) + bkP(N=k-1).$$

Et donc en sommant ces relations comme à la question 4.b, pour tout $m \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{m} k^2P(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)^2P(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)P(N=k)$$

$$= a\sum_{k=0}^{m-1} k^2P(N=k) + 2a\sum_{k=0}^{m-1} kP(N=k) + a\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1} kP(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k).$$

Et alors, comme à la question 4.b,

$$\begin{aligned}(1-a)\sum_{k=0}^{m} k^2P(N=k) &= (2a+b)\sum_{k=0}^{m} kP(N=k) + a\sum_{k=0}^{m} P(N=k) + b\sum_{k=0}^{m} P(N=k) - (m+1)^2P(N=m+1)\\ &\leqslant (2a+b)\sum_{k=0}^{m} kP(N=k) + (a+b)\sum_{k=0}^{m} P(N=k)\\ &\leqslant (2a+b)E(N) + a + b.\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité n'est toutefois vraie que si $2a+b \geqslant 0$.
Mais on a $P(N=2) = \left(a+\frac{b}{2}\right)P(N=1)$.
Et donc si $P(N=1) \neq 0$, il vient $2a+b = \frac{2P(N=2)}{P(N=1)} \geqslant 0$.
Enfin, $P(N=1)$ ne peut être nul, car une récurrence immédiate prouverait alors que pour tout $k \geqslant 1$, $P(N=k)=0$, et donc $P(N=0)=1$, ce qui est contraire aux hypothèses.

Ainsi, la suite $\left((1-a)\sum_{k=1}^{m} k^2P(N=k)\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée, de sorte que la série de terme général $k^2P(N=k)$ converge.
Par le théorème de transfert, N admet donc un moment d'ordre 2, et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2P(N=k) = a\sum_{k=0}^{+\infty} k^2P(N=k)+2a\sum_{k=0}^{+\infty} kP(N=k)+a\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)+b\sum_{k=0}^{+\infty} kP(N=k)+b\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k).$$

Soit encore $E\left(N^2\right) = aE\left(N^2\right) + 2aE(N) + a + bE(N) + b$. Et donc

$$E(N^2) = \frac{(2a+b)E(N)+a+b}{1-a} = (a+b)\frac{2a+b+1-a}{(1-a)^2} = \boxed{\frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}}.$$

4.e. Puisque N admet un moment d'ordre 2, elle admet une variance, et par la formule de Huygens,

$$V(N) = E\left(N^2\right) - E(N)^2 = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2} - \frac{(a+b)^2}{(1-a)^2} = \boxed{\frac{a+b}{(1-a)^2}}.$$

> **Cas particuliers**
> On pourrait vérifier que pour les lois de Poisson, Bernoulli et binomiales traitées précédemment, on retrouve bien les variances usuelles.

4.f. On a $E(N) = V(N)$ si et seulement si

$$\frac{a+b}{1-a} = \frac{a+b}{(1-a)^2} \Leftrightarrow 1-a = 1 \Leftrightarrow a = 0.$$

Mais nous avons déjà dit à la question 1 que si $a=0$, alors N suit une loi de Poisson (de paramètre b).
Et inversement, il est évident que si N suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors

$$\forall k \geqslant 1,\ P(N=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda}{k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{\lambda}{k}P(N=k-1)$$

et donc N vérifie une relation de Panjer, avec $a=0$ et $b=\lambda$, et on a alors $E(N)=V(N)=\lambda$.
Ainsi, $\boxed{E(N)=V(N) \text{ si et seulement si } N \text{ suit une loi de Poisson.}}$

Quelques commentaires *: bien que la relation de Panjer semble assez spécifique, nous avons prouvé dans cette partie que les lois de Poisson, Bernoulli et binomiales vérifient une telle relation. Il n'est pas très difficile de prouver que si X suit une loi géométrique, alors $X-1$ vérifie également une relation de Panjer puisque*

$$P(X-1=k) = P(X=k+1) = p(1-p)^k = (1-p)P(X=k) = \left((1-p)+\frac{0}{k}\right)P(X-1=k-1).$$

> **Remarque**
> $X-1$ compte alors le nombre d'échecs avant l'obtention d'un succès lors d'une répétition d'épreuves de Bernoulli.

En revanche, puisque $P(X=0)=0$, X ne suit pas une relation de Panjer, car on aurait alors $P(X=1)=P(X=2)=\cdots=0$.
Parmi les lois discrètes usuelles, les lois uniformes sont donc les seules qui ne sont pas apparentées aux relations de Panjer.

Partie 2 – Fonction génératrice

5. Puisqu'une probabilité est toujours entre 0 et 1, pour tout $k \geqslant 0$, on a $0 \leqslant p_k x^k \leqslant x^k$.
En particulier, si $x \in [0,1[$, puisque la série géométrique de terme général x^k converge, il en est de même de la série de terme général $p_k x^k$.

Et pour $x = 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k 1^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k) = 1$ qui converge[5].

[5] N étant à valeurs dans $\mathbf{N}$, $\{[N=k], k \in \mathbf{N}\}$ forme un système complet d'événements.

6. Montrons le résultat par récurrence sur k. Il est évidemment vrai pour $k = 0$.
Supposons donc que pour tout $x \in [0,1]$, $f^{(k)}(x) = k! \times p_k(1-ax)^{\alpha-k}$.
Alors, $f^{(k)}$ est dérivable sur $[0,1]$, et pour tout $x \in [0,1]$,

$$f^{(k+1)}(x) = k! \times p_k(\alpha-k)\times(-a)\times(1-ax)^{\alpha-k-1} = (k+1)! \times \frac{1}{k+1} a(k-\alpha)p_k(1-ax)^{\alpha-(k+1)}.$$

Mais puisque N vérifie une relation de Panjer,

$$p_{k+1} = \left(a + \frac{b}{k+1}\right)p_k = p_k \frac{a}{k+1}\left(k+1+\frac{b}{a}\right)p_k = p_k \frac{a}{k+1}\left(k + \frac{a+b}{a}\right) = p_k \frac{a}{k+1}(k-\alpha).$$

Et donc on a bien

$$f^{(k+1)}(x) = (k+1)! \times p_{k+1}(1-ax)^{\alpha-(k+1)}.$$

Par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbf{N}$, et tout $x \in [0,1]$, $\boxed{f^{(k)}(x) = k! \times p_k(1-ax)^{\alpha-k}.}$

$\mathscr{C}^\infty$
Nous venons de prouver que la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f existe pour tout k. Ceci prouve bien que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

7.a. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à f entre 0 et x, ce qui est légitime car f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$.
Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Mais par le résultat de la question précédente, on a $\forall k \in \mathbf{N}$, $f^{(k)}(0) = k! \times p_k$ et donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}(n+1)! \times p_{n+1}(1-at)^{\alpha-n-1}\,dt \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt.} \end{aligned}$$

7.b. Pour $t \in [0,x]$, on a $1 - at \geqslant 1 - a > 0$ et donc

$$\frac{x-t}{1-at} \leqslant 1 \Leftrightarrow x - t \leqslant 1 - at \Leftrightarrow x - 1 \leqslant (1-a)t \Leftrightarrow t \geqslant \frac{x-1}{1-a}.$$

Signe
Le fait que $1 - at$ soit positif justifie que le sens de l'inégalité reste inchangé par multiplication par $1 - at$.

Mais $\dfrac{x-1}{1-a} \leqslant 0$, et donc automatiquement, pour $t \in [0,x]$, $\boxed{\dfrac{x-t}{1-at} \leqslant 1.}$
On en déduit que $(1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n = (1-at)^{\alpha-1}\left(\dfrac{x-t}{1-at}\right)^n \leqslant (1-at)^{\alpha-1}$.
Et donc par croissance de l'intégrale

$$\boxed{\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\,dt.}$$

Puisque d'autre part, $(1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \geqslant 0$, pour tout $t \in [0,x]$, par positivité de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt.$$

7.c. Nous savons, d'après la question 4.c que N admet une espérance, et donc $\displaystyle\sum_n nP(N=n)$ converge.
Et en particulier, son terme général tend vers 0 : $np_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte qu'on a également $(n+1)p_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'autre part, nous venons de prouver que la suite $\left(\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée.
Et donc[6] $(n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité de la question 7.a, il vient

$$p_0(1-ax)^\alpha = f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = G(x).$$

Puisque $G(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k) = 1$, on en déduit que $p_0(1-a)^\alpha = 1$.

Et donc $\boxed{p_0 = \frac{1}{(1-a)^\alpha}.}$

On a alors $G'(1) = -ap_0\alpha(1-a)^(\alpha-1) = -a\alpha\frac{1}{1-a} = \frac{a+b}{1-a} = \boxed{E(N).}$

Remarque *: ce résultat n'est pas spécifique aux variables suivant une loi de Panjer.*

L'idée est que si l'on dérive $G(x)$, on obtient $G'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(N=n)x^{n-1}$ et donc

$$G'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(N=n) = E(N).$$

Toutefois, cela nécessite de pouvoir dériver terme à terme[7] la série définissant $G(x)$. Malheureusement, nous ne disposons d'aucun théorème justifiant ceci, bien que de tels résultats existent.

Partie 3 – Formule de récursivité.

8. La définition de S dépend de la valeur de N, puisque si $N=n$, alors S est la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de X_1.
Pour prendre ceci en compte, utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[N=k], k\in\mathbf{N}\}$:

$$P(S=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([S=0]\cap[N=k]).$$

Puisque $S=0$ si $N=0$, on a $P([S=0]\cap[N=0]) = P(N=0) = p_0$.
D'autre part, pour $k\geqslant 1$, on a

$$P\left([S=0]\cap[N=k]\right) = P\left([N=k]\cap\left[\sum_{i=1}^k X_i = 0\right]\right) = P(N=k)P\left(\sum_{i=1}^k X_i = 0\right)$$

puisque d'après le lemme des coalitions, N et $\sum_{i=1}^k X_i$ sont indépendantes.
Et puisque les X_i sont à valeurs dans $\mathbf{N}$, il vient[8]

$$\left[\sum_{i=1}^k X_i = 0\right] = \bigcap_{i=1}^k [X_i = 0].$$

Et les X_i étant indépendantes, on a donc

$$P([S=0]\cap[N=k]) = P(N=k)\prod_{i=1}^k P(X_i=0) = p_k P(X_1=0)^k.$$

Ainsi, il vient

$$P(S=0) = p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_k P(X_1=0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k P(X_1=0)^k = G(P(X_1=0)).$$

[6] Le produit d'une suite bornée est d'une suite de limite nulle tend vers 0.

[7] C'est-à-dire affirmer que la dérivée de la somme infinie est égale à la somme infinie des dérivées.

[8] Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul.

Mais d'après la partie 2, pour tout $x \in [0,1]$, $G(x) = p_0(1-ax)^\alpha$, donc

$$P(S=0) = \frac{1}{(1-a)^\alpha}(1-aP(X_1=0))^\alpha = \boxed{\left(\frac{1-aP(X_1=0)}{1-a}\right)^\alpha.}$$

Remarque
La partie 2 supposait $0 < a < 1$ et $\frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow b > 0$.
Toutefois, cette deuxième hypothèse nous a été totalement inutile !

9.a. Sur le même principe que précédemment, on a

$$P(S=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k P(X_1=0)^k.$$

Mais si N suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors

$$P(S=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}P(X_1=0)^k = e^{-\lambda}e^{\lambda P(X_1=0)} = \boxed{e^{\lambda(P(X_1=0)-1)}.}$$

9.b. Cette fonction simule n lois uniformes sur $[0,1]$, indépendantes[9], et compte parmi ces n variables combien sont inférieures à $1/2$.
Puisque ceci se produit avec une probabilité $1/2$, nous reconnaissons là la simulation d'une $\boxed{\text{loi binomiale } \mathscr{B}(n,1/2).}$

[9] Car en `Scilab` , deux appels à `rand` simulent nécessairement des variables indépendantes.

9.c. Le programme suivant commence par simuler une loi de Poisson `N`. Puis, il calcule la somme de `N` lois binomiales.
Notons que si `N` vaut 0, le programme retourne bien 0.

```
function s=simulS(lambda,n)
  N=grand(1,1,"poi",lambda)
  s  = 0 ;
  for i=1 :N
        s = s+simul(n)
  end
endfunction
```

10.a. Notons que, sachant que $[S_{n+1}=k]$ est réalisé, les $X_i, 1 \leqslant i \leqslant n+1$ ne peuvent prendre que des valeurs entre 0 et k, et donc sont à support[10] fini.
Par conséquent les espérances conditionnelles $E(X_i|S_{n+1}=k)$ existent bien.
Par linéarité de l'espérance conditionnelle, on a

[10] Pour la probabilité conditionnelle $P_{[S_{n+1}=k]}$.
Cela n'est pas incompatible avec le fait que les $P(X_i > k)$ soient non nuls.

$$\sum_{i=1}^{n+1} E(X_i|S_{n+1}=k) = E\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i|S_{n+1}=k\right) = E(S_{n+1}|S_{n+1}=k) = E(k|S_{n+1}=k) = k.$$

D'autre part, les X_i ont la même loi, et donc la même espérance conditionnelle.
Et donc $\sum_{i=1}^{n+1} E(X_i|S_{n+1}=k) = (n+1)E(X_1|S_{n+1}=k)$.
On en déduit que $E(X_1|S_{n+1}=k) = \frac{k}{n+1}$ et donc

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n+1]\!],\ E(X_i|S_{n+1}=k) = \frac{k}{n+1}.}$$

Remarque
Le fait que les espérances conditionnelles soient les mêmes est en fait loin d'être évident et nous y reviendrons ci-dessous.
Toutefois, il y a fort à parier que les correcteurs n'attendaient aucune justification à ce sujet.

Quelques détails : il n'est en fait pas si évident qu'il pourrait le paraître que les espérance conditionnelles $E(X_i|S_{n+1}=k)$ soient égales.
En effet, ceci tient au fait qu'on conditionne par l'événement $[S_{n+1}=k]$, dans lequel les X_i jouent des rôles symétriques.
En tous cas, le fait que deux variables indépendantes aient même loi n'implique pas nécessairement qu'elles aient même loi conditionnelle par rapport à un événement.
Prenons un exemple très similaire à celui que nous considérons : soient X_1, X_2 deux variables indépendantes suivant la même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, et soit $S = X_1 + 2X_2$.
Si $[S=2]$ est réalisé, alors nécessairement $X_1 = 0$ et $X_2 = 1$.
Autrement dit, la loi conditionnelle de X_1 sachant $[S=2]$ est une loi certaine égale à 0

alors que celle de X_2 est une loi certaine égale à 1.
Et donc $E(X_1|S=2)=0$ alors que $E(X_2|S=2)=1$.

Dans notre cas, il faut donc justifier que la loi X_i sachant $[S_{n+1}=k]$ est indépendante de la valeur de i.
Or, pour $\ell \in [\![0,k]\!]$, on a

$$P_{[S_{n+1}=k]}(X_i=\ell)=\frac{P([X_i=\ell]\cap[S_{n+1}=k])}{P(S_{n+1}=k)}=\frac{P\left([X_i=\ell]\cap[S_{n+1}-X_i=k-\ell]\right)}{P(S_{n+1}=k)}.$$

Mais $S_{n+1}-X_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}X_j$ est indépendant de X_i par le lemme des coalitions, de sorte que

$$P_{[S_{n+1}=k]}(X_i=\ell)=\frac{P(X_i=\ell)}{P(S_{n+1}=k)}P\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}X_j=k-\ell\right).$$

Les X_i étant de même loi, $P(X_i=\ell)$ ne dépend pas de i.
De même, la loi de $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}X_j$ ne dépend pas de i : il s'agit de la loi de la somme de n variables indépendantes suivant la loi de X_1.
Et donc $P_{[S_{n+1}=k]}(X_i=\ell)$ ne dépend pas de i, de sorte que

$$E(X_1|S_{n+1}=k)=E(X_2|S_{n+1}=k)=\cdots=E(X_{n+1}|S_{n+1}=k).$$

10.b. On a

$$\begin{aligned}P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)P(S_{n+1}=j)&=P\left([S_{n+1}=k]\cap[X_{n+1}=j]\right)\\&=P\left([S_n=k-j]\cap[X_{n+1}=j]\right)\\&=P(S_n=k-j)P(X_{n+1}=j)\\&=\boxed{q_jP(S_n=k-j).}\end{aligned}$$

Détails
Si $S_n=k$ et que $X_{n+1}=j$, c'est donc que la somme des n premières variables X_i vaut $k-j$.

X_{n+1} et S_n sont indépendantes par le lemme des coalitions.

10.c. On a

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_jP(S_n=k-j)&=\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)P(S_{n+1}=k)\\&=a\sum_{j=0}^{k}P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)+\frac{b}{k}P(S_{n+1}=k)\sum_{j=0}^{k}jP_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)\\&=a\sum_{j=0}^{k}P([S_{n+1}=k]\cap[X_{n+1}=j])+P(S_{n+1}=k)\frac{b}{k}E(X_{n+1}|S_{n+1}=k)\\&=a\sum_{j=0}^{k}P([S_{n+1}=k]\cap[X_{n+1}=j])+P(S_{n+1}=k)\frac{b}{\cancel{k}}\frac{\cancel{k}}{n+1}.\end{aligned}$$

Mais par la formule des probabilités totales,

$$P(S_{n+1}=k)=\sum_{j=0}^{+\infty}P([S_{n+1}=k]\cap[X_{n+1}=j]).$$

Or, pour $j>k$, on ne peut avoir à la fois $[X_{n+1}=j]$ et $[S_{n+1}=k]$ car $S_{n+1}\geqslant X_{n+1}$.
Et donc $P([S_{n+1}=k]\cap[X_{n+1}=j])=0$.
On en déduit que $P(S_{n+1}=k)=\sum_{j=0}^{k}P([S_{n+1}=k]\cap[X_{n+1}=j])$ et donc que

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_jP(S_n=k-j)=\left(a+\frac{b}{n+1}\right)P(S_{n+1}=k).}$$

11.a. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[N = n],\ n \in \mathbf{N}\}$.

$$P(S = k-j) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([N = n]\cap[S = k-j]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([N = n]\cap[S_n = k-j]) = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n = k-j).}$$

Indépendance

À n fixé, S_n et N sont indépendantes par le lemme des coalitions (les X_i sont indépendantes de N).

11.b. En utilisant les résultats des questions 11.a et 10.c, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_j P(S = k-j) &= \sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n = k-j)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_j P(S_n = k-j)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \left(a+\frac{b}{n+1}\right)P(S_{n+1} = k)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).\end{aligned}$$

Permutation de sommes

Notons que la permutation des somme est légitime car la première somme est finie (et que les sommes infinies convergent).

Détails

Puisque N vérifie une relation de Panjer,

$$p_{n+1} = \left(a+\frac{b}{n+1}\right)p_n.$$

11.c. Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[N = n]\}$,

$$\begin{aligned}P(S = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P([N = n]\cap[S = k])\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P([N = n]\cap[S_n = k])\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n)P(S_n = k)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n = k)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n P(S_n = k)\\ &= \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).}\end{aligned}$$

Si $N = n$, alors $S = S_n$.

Puisque les X_i sont indépendantes de N, par le lemme des coalitions, les S_n sont indépendantes de n.

$S_0 = 0$, et donc $P(S_n = k) = 0$ pour $k \in \mathbf{N}^*$.

11.d. En combinant les résultats de 11.b et 11.c, il vient

$$P(S = k) = \sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_j P(S = k-j).$$

Soit encore

$$P(S = k) = aq_0 P(S = k) + \sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)P(S = k-j) \Leftrightarrow (1-aq_0)P(S = k) = \sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_j P(S = k-j).$$

Et donc on a bien[11]

$$\boxed{P(S = k) = \frac{1}{1-aq_0}\sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_j P(S = k-j).}$$

[11] $a < 1$ et $q_0 \leqslant 1$, donc $1 - aq_0 \neq 0$.

Quelques commentaires *: l'intérêt de cette formule est qu'elle permet de calculer successivement $P(S = 1), P(S = 2), \ldots, P(S = n), \ldots$.*
On obtient alors un algorithme (appelé algorithme de Panjer) qui permet de calculer les $P(S = n)$.
Celui-ci est utilisé par exemple par les assureurs pour calculer le coût total des sinistres subis par

l'ensemble des assurés.
En effet, si n est le nombre total d'assurés d'une compagnie, et que chacun subit un sinistre avec probabilité p, le nombre total N de sinistres suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, dont nous avons prouvé précédemment qu'elle vérifie une relation de Panjer.
Et alors si les X_i sont des variables aléatoires représentant le coût de chaque sinistre (ce coût n'est bien entendu pas le même pour chaque sinistre, et dépend de l'ampleur des dégâts), alors $S = \sum_{k=1}^{N} X_i$ représente le coût total pour l'assureur.
Être capable de déterminer la loi de S est nécessaire à l'assureur afin de fixer ses tarifs.

Remarque

Rappelons que sous certaines hypothèses, une loi binomiale peut-être approchée par une loi de Poisson, pour laquelle les calculs sont plus simples (il est plus rapide pour un ordinateur de calculer des probabilités pour une loi de Poisson que pour une loi binomiale avec n grand).

ECRICOME 2017

Exercice 1

Sujet : Calcul de la somme d'une série alternée **Facile**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : intégrales, séries, fonctions d'une variable, `Scilab` .

Commentaires : classique, comportant quelques subtilités calculatoires. Un excellent entraînement sur les séries et les intégrales. Ressemble beaucoup à l'exercice 2 d'Ecricome 1994, et surtout à l'exercice 2 d'Ecricome 1997.

On définit sur l'intervalle $]0,1]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x\ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$.

1. a. Les fonctions f et g admettent-elles des limites en 0 ?
   b. Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $]0,1]$.
   c. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$ est convergente. On notera I sa valeur.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (t\ln(t))^n\,dt,$$

et :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

   a. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n existe.
   b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
   c. Calculer u_0 et u_1.
   d. À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

   e. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
   f. Écrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function S = somme(n)` qui prend comme paramètre d'entrée un entier naturel n et qui produit en paramètre de sortie la valeur de S_n.
3. a. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle, montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ et tout entier naturel n :

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

   b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ |I - S_n| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

   c. Montrer que :

$$I = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}.$$

   d. Écrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function I = estimation(eps)` qui prend comme paramètre d'entrée un réel flottant strictement positif ε et qui produit en paramètre de sortie une valeur approchée de I à ε près.

Exercice 2

Sujet : Optimisation de formes quadratiques et de produit de formes quadratiques sur la sphère unité. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : algèbre bilinéaire, endomorphismes et matrices symétriques, fonctions de plusieurs variables, (optimisation sous contrainte)

Modifications apportées au sujet d'origine : on demande aux matrices M et B des questions 2.b et 3.a d'être symétriques pour avoir l'unicité de la solution.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout élément $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
On rappelle que si x est ainsi associé à X et y à Y, le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$ est défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^tXY = {}^tYX,$$

où ${}^tX$ représente la transposée de X.

1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
   a. Justifier qu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que :
   $$J = PD\,{}^tP.$$
   b. Déterminer le rang de J. En déduire une valeur propre de J ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.
   c. En examinant la trace de J, expliciter la matrice D.
2. On note f la forme quadratique définie sur $\mathbf{R}^n$ par :
   $$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j.$$
   a. Montrer que pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
   $$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right].$$
   b. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, symétrique, telle que :
   $$\forall x \in \mathbf{R}^n,\ f(x) = {}^tXMX.$$
   c. Exprimer M comme combinaison linéaire de J et I, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   d. En déduire qu'il existe une matrice diagonale Δ à déterminer telle que :
   $$M = P\Delta\,{}^tP.$$
   e. Montrer que la fonction f admet un maximum et un minimum sur l'ensemble :
   $$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \,/\, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$
   et déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de f sur $\mathcal{S}$.
3. Dans cette question, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui est symétrique et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. On note u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
   a. Justifier que A est diagonalisable et montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, symétrique et telle que $B^2 = A$. On note v l'endomorphisme dont B est la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
   b. À l'aide de v et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :
   $$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^n)^2,\ (\langle x, y \rangle)^2 \leqslant \langle u(x), x \rangle \times \langle u^{-1}(y), y \rangle.$$
   Pour un $x \in \mathbf{R}^n$ non nul donné, trouver un $y \in \mathbf{R}^n$ non nul tel que cette inégalité soit une égalité.
   c. En déduire que :
   $$\inf_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ \|x\|=1}} (\langle u(x), x \rangle) \times \left(\langle u^{-1}(x), x \rangle\right) = 1.$$
4. On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
   b. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

c. En déduire le minimum de la fonction g définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$g(x_1, x_2) = (x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2)(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)$$

sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Problème

Sujet : Convergence en loi vers la loi de Rayleigh dans le problème des anniversaires. **Difficile**

Abordable en première année : ✓ (parties B et C) **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : variables aléatoires discrètes, variables aléatoires à densité, convergence des variables aléatoires, `Scilab`

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : sujet assez intéressant dans les thèmes abordés, mais les deux dernières parties sont assez techniques. Le résultat final est le même que celui prouvé dans le problème 2 d'EML 2012, mais les méthodes employées sont très différentes.

Toutes les variables aléatoire présentes dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Partie A.

Dans toute cette partie, a est un réel strictement positif et g_a est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Justifier que g_a est une densité de probabilité.
2. Soit Z_a une variable aléatoire admettant g_a pour densité.
   a. Soit N une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et de variance a^2.
   Rappeler une densité de N et donner les valeurs de $E(N)$ et $E(N^2)$.
   b. Montrer que Z_a admet une espérance et calculer $E(Z_a)$.
   c. Montrer que Z_a admet une variance et calculer $V(Z_a)$.

Partie B.

Pour tout entier n strictement positif, on considère l'expérience suivante : on dispose de n urnes initialement vides, numérotées de 1 à n et on dispose d'un grand stock de boules que l'on dépose une à une dans ces urnes. Pour chaque boule, on choisit au hasard, de façon équiprobable, l'urne dans laquelle la boule est déposée.

On note X_n le rang du premier tirage pour lequel une des urnes contiendra deux boules.

3. Compléter la fonction `Scilab` suivante pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire X_n :

```
function X = tirage(n)
        urnes = zeros(1,n)
        X = 1
        choix = floor((rand()*n))+1
        while .........
                urnes(choix) = urnes(choix)+1
                choix = floor((rand()*n))+1
                X = .......
        end
endfunction
```

4. On suppose dans cette question que $n = 1$.
   Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
5. On suppose dans cette question que $n = 2$.
   Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance et sa variance.
6. On se place ici dans le cas général, n désigne un entier strictement positif.
   a. Déterminer $X_n(\Omega)$ en justifiant brièvement.
   b. Montrer que :

$$\forall k \in [\![2, n+1]\!],\ P(X_n = k) = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$

c. Montrer que pour tout entier strictement positif n, X_n admet une espérance.

d. On souhaite écrire une fonction `Scilab` qui calcule $E(X_n)$ en fonction de n.
Compléter la fonction suivante à cet effet :

```
function E = esperance(n)
        facto = prod([1 :n])
        fac = facto
        somme = 0
        puissance = n
        for k=2  : (n+1)
                puissance = ....
                fac = ....
                somme = somme + k*(k-1)/(puissance*fac)
        end
        E = facto*somme
endfunction
```

Partie C.
On reprend dans cette partie les variables aléatoires X_n étudiées dans la partie B.
Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $m \in \mathbf{N}$, on pose :

$$\alpha(n,m) = \sum_{k=0}^{m} \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

7. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$-x - x^2 \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x.$$

8. En déduire que pour tout $(n,m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$ tel que $m \leqslant \frac{n}{2}$, on a :

$$-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leqslant \alpha(n,m) \leqslant -\frac{m(m+1)}{2n}.$$

9. On suppose dans cette question que $x \leqslant 0$.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n} P\left(X_n = \lfloor \sqrt{n} x \rfloor\right)\right)$.

10. On suppose dans cette question que x est un réel strictement positif.

a. Donner la limite puis un équivalent simple de $\lfloor \sqrt{n} x \rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Justifier qu'il existe un entier N tel que :

$$\forall n \geqslant N,\ \lfloor \sqrt{n} x \rfloor \leqslant \frac{n}{2}.$$

c. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall k \in [\![2, n+1]\!],\ P(X_n = k) = \frac{k-1}{n} \prod_{i=0}^{k-2} \left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

d. En déduire que pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$P(X_n = \lfloor \sqrt{n} x \rfloor) = \frac{\lfloor \sqrt{n} x \rfloor - 1}{n} \exp\left(\alpha\left(n, \lfloor \sqrt{n} x \rfloor - 2\right)\right).$$

e. Montrer alors que $\sqrt{n} P(X_n = \lfloor \sqrt{n} x \rfloor)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite.

Partie D.
On **admettra** dans cette partie le résultat suivant :
Si W est une variable aléatoire et si $(W_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires telles que :

- ⋆ *pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, W_n admet une densité h_n ;*
- ⋆ *la variable W admet une densité h ;*

★ *pour tout réel x, on a :* $\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = h(x)$ *;*

alors la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *converge en loi vers* W.

On considère toujours dans cette partie la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires définies dans la partie B.
On introduit une variable aléatoire U qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$, que l'on suppose indépendante des variables aléatoires X_n (pour $n \in \mathbf{N}^*$), et on pose :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ Y_n = \frac{X_n + U}{\sqrt{n}}.$$

On définit enfin, pour tout entier strictement positif n, la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_n(x) = \sqrt{n}P\left(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor\right).$$

11. **a.** Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \mathbf{Z}$. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\lfloor \sqrt{n}x \rfloor = k$.

b. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction f_n est une densité de probabilités.

12. **a.** Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \mathbf{Z}$. Calculer $P(U \leqslant \sqrt{n}x - k)$.
On pourra séparer les cas où $k > \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$, $k < \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$ *et* $k = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$.

b. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ P(Y_n \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt.$$

c. Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, la variable aléatoire Y_n est une variable aléatoire à densité, et que Y_n admet f_n pour densité.

d. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y à densité dont on précisera la densité.

13. **a.** Rappeler l'énoncé du théorème de Slutsky.

b. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{X_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

ECRICOME 2017 : Corrigé

Exercice 1

1.a. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = \boxed{0.}$

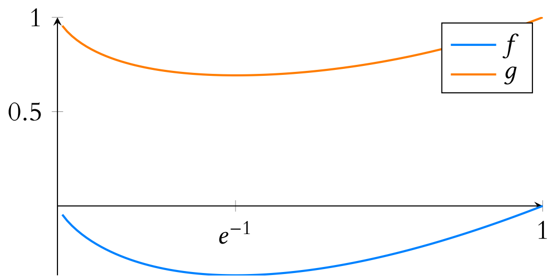
Et alors, par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{f(x)} = e^0 = \boxed{1.}$

1.b. Notons que, par croissance de l'exponentielle, il suffit d'étudier le sens de variation de f, car alors $g = \exp(f)$ possède les mêmes variations que f.
La fonction f est dérivable sur $]0,1]$ car produit de fonctions dérivables, avec

$$f'(t) = \ln t + \frac{t}{t} = \ln t + 1.$$

On a donc $f'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln t \geqslant -1 \Leftrightarrow t \geqslant e^{-1}$.
Et donc le tableau de variations de f, puis celui de g s'en déduisent immédiatement.

x	0		e^{-1}		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0
$g(x)$	1	$\searrow$	$e^{-e^{-1}}$	$\nearrow$	1



1.c. La fonction g est continue sur $]0,1]$, et prolongeable par continuité en 0, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$ est faussement impropre, et donc $\boxed{\text{convergente.}}$

2.a. Pour $n = 0$, la fonction $t \mapsto (t\ln t)^0 = 1$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0.
Et pour $n \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto (t\ln(t))^n$ est continue sur $]0,1]$, et d'après la question 1.a, admet une limite finie[1] en 0.
Dans les deux cas, $t \mapsto (t\ln t)^n$ est prolongeable par continuité en une fonction continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (t\ln(t))^n\,dt$ est faussement impropre, et donc $\boxed{\text{convergente.}}$

[1] Égale à 0.

2.b. D'après le tableau de variations réalisé à la question 1.b, on a, pour tout $t \in]0,1]$, $|f(t)| \leqslant e^{-1}$.
Et donc pour tout $t \in]0,1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|(t\ln(t))^n| \leqslant (e^{-1})^n \leqslant 1.$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^1 (t\ln t)^n\,dt\right| \leqslant \int_0^1 1\,dt = 1.$$

On en déduit donc que $0 \leqslant |u_n| \leqslant \dfrac{1}{n!}$.
Par le théorème des gendarmes, on a alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

Rappel
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.

2.c. On a $u_0 = \dfrac{1}{0!}\displaystyle\int_0^1 1\,dt = 1$ et $u_1 = \dfrac{1}{1!}\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,dt$.
Procédons à une intégration par parties sur un segment de la forme $[A,1]$, $A \in]0,1]$, en posant $u(t) = \ln t$ et $v(t) = \dfrac{t^2}{2}$, de sorte que u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A,1]$ avec $u'(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = t$. Alors

$$\int_A^1 t\ln(t)\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_A^1 - \int_A^1 \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\,dt$$

Segment
Rappelons que le théorème d'intégration par parties n'est valable que sur un segment, et qu'il n'est donc pas possible de procéder directement à une intégration par parties sur $]0,1]$.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A^2}{2}\ln(A) - \int_A^1 \frac{t}{2}\,dt \\
&= -\frac{A^2}{2}\ln(A) - \left[\frac{t^2}{4}\right]_A^1 \\
&= -\frac{A^2}{2}\ln(A) - \frac{1}{4} + \frac{A^2}{4} \\
&\underset{A\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{u_1 = -\frac{1}{4}.}$

2.d. Calculons u_n à l'aide d'une intégration par parties sur un segment de la forme $[A,1]$, en posant $u(t) = (\ln t)^n$ et $v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$, qui sont bien deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A,1]$, avec

$$u'(t) = \frac{n}{t}(\ln t)^{n-1} \text{ et } v'(t) = t^n.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_A^1 t^n(\ln t)^n\,dt &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln t)^n\right]_A^1 - \frac{n}{n+1}\int_A^1 \frac{t^{n+1}}{t}(\ln t)^{n-1}\,dt \\
&= \underbrace{-\frac{A^{n+1}}{n+1}(\ln A)^n}_{\underset{A\to 0^+}{\longrightarrow} 0} - \frac{n}{n+1}\int_A^1 t^n \ln(t)^{n-1}\,dt \\
&\underset{A\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-1}\,dt.
\end{aligned}$$

> **Remarque**
> Notons que cette dernière intégrale converge bien, car la fonction
> $$t \mapsto t^n(\ln t)^{n-1}$$
> est prolongeable par continuité en 0.

Une nouvelle intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}
\int_A^1 t^n(\ln t)^{n-1}\,dt &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(\ln t)^{n-1}\right]_A^1 - \frac{n-1}{n+1}\int_A^1 t^n(\ln t)^{n-2}\,dt \\
&= -\frac{A^{n+1}}{n+1}(\ln A)^{n-1} - \frac{n-1}{n+1}\int_A^1 t^n(\ln t)^{n-2}\,dt \\
&\underset{A\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{n-1}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-2}\,dt.
\end{aligned}$$

Plus généralement, une intégration par parties similaire prouve que pour tout $k \leqslant n-1$,

$$\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-k}\,dt = -\frac{n-k}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-k-1}\,dt.$$

Et alors

$$u_n = -\frac{1}{n!}\frac{n}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-1}\,dt = \frac{1}{n!}\frac{(-1)^2 n(n-1)}{(n+1)^2}\int_0^1 t^n(\ln t)^{n-2}\,dt = \cdots = \frac{1}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n}\int_0^1 t^n\,dt = \boxed{\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}}.$$

2.e. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant |u_n| = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{(n+1)^2}$ est une série (de Riemann) convergente, et donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général $|u_n|$ est également convergente.
Ainsi, la série de terme général u_n est absolument convergente, et donc $\boxed{\text{convergente.}}$

2.f. Il s'agit de calculer les sommes partielles de la série. À cet effet, nous pouvons utiliser une boucle.

```
function S = somme(n)
        S = 1
        for k=1 :n
                S = S + (-1)^k/((k+1)^(k+1))
        end
endfunction
```

3.a. Notons $h : x \mapsto e^x$ la fonction exponentielle.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction h est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\left[-\frac{1}{e}, 0\right]$, et pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, $h^{(k)}(x) = e^x$. En particulier, pour tout $t \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$, on a

$$|h^{n+1}(t)| = e^t \leqslant e^0 = 1.$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$,

$$\left|h(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Soit encore

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Mais pour $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$, $|x| \leqslant \frac{1}{e}$, de sorte que $|x|^{n+1} \leqslant \frac{1}{e^{n+1}}$.

Et donc

$$\boxed{\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.}$$

Majorant

Notons que pour appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange, il n'est pas nécessaire que la dérivée $(n+1)$-ième soit bornée sur $\mathbf{R}$ tout entier (ce qui n'est pas le cas ici) : il suffit qu'on dispose d'un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment d'extrémités 0 et x (qui ici est le segment $[x, 0]$ car $x \leqslant 0$).

3.b. Nous avons prouvé à la question 1.b que pour tout $t \in]0, 1]$, $t \ln t \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$. Et donc le résultat de la question 3.a s'applique : pour tout $t \in]0, 1]$,

$$\left|e^{t\ln(t)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t\ln t)^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$\int_0^1 \left|e^{t\ln(t)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t\ln t)^k}{k!}\right| dt \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{e^{n+1}(n+1)!} = \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

D'autre part, on a

$$|I - S_n| = \left|\int_0^1 e^{t\ln t}\, dt - \sum_{k=0}^{n} u_k\right| = \left|\int_0^1 e^{t\ln t}\, dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\int_0^1 (t\ln t)^k\, dt\right| = \left|\int_0^1 \left(e^{t\ln t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t\ln t)^k}{k!}\right) dt\right|.$$

Or, par l'inégalité triangulaire[2],

$$|I - S_n| = \left|\int_0^1 \left(e^{t\ln t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t\ln t)^k}{k!}\right) dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|e^{t\ln(t)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t\ln t)^k}{k!}\right| dt \leqslant \boxed{\frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.}$$

[2] Pour les intégrales.

3.c. Lorsque $n \to +\infty$, $\frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} \to 0$, et donc par le théorème des gendarmes, $|I - S_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I - S_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = I$.
Mais S_n est la somme partielle d'ordre n de la série de terme général u_n, et donc cette série

converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = I$.
Or, en utilisant le résultat de la question 2.d, il vient

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n} = \boxed{-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.}$$

Rappel

Par **définition**, une série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge. Dans ce cas, la somme de la série est la limite de la suite des sommes partielles.

3.d. La question 3.b nous donne une majoration de l'écart entre I et la somme partielle d'ordre n de la série.
Et donc si $\frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} \leqslant \varepsilon$, alors $|I - S_n| \leqslant \varepsilon$, de sorte que S_n est une valeur approchée de I à ε près.
Nous proposons donc le programme suivant, qui calcule les valeurs successives de $\frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$ et s'arrête lorsque cette valeur est inférieure ou égale à ε.Pourquoi ne pas utiliser la fonction somme écrite précédemment ?

```
function I = estimation(eps)
        I = 1
        n = 1
        majorant = exp(-1)
        while majorant>=eps
                I = I+(-1)^n/((n+1)^(n+1))
                n = n+1
                majorant = majorant*exp(-1)/n
        end
endfunction
```

Notons que pour calculer $\frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$, qui est stocké dans la variable `majorant`, nous avons utilisé le fait suivant : pour passer de $\frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$ à $\frac{1}{e^{n+2}(n+2)!}$, il suffit d'effectuer une multiplication par $\frac{1}{e(n+2)}$.

Alternative sans boucle `while` : remarquons que $\frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} \leqslant \frac{1}{e^{n+1}}$, de sorte que pour $\frac{1}{e^{n+1}} \leqslant \varepsilon$, nécessairement $\frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} \leqslant \varepsilon$.
Or, $\frac{1}{e^{n+1}} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow e^{n+1} \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \geqslant -\ln(\varepsilon) - 1$.
Ainsi, le programme suivant fonctionne également :

```
function I = estimation(eps)
        I = 1
        n = -log(eps)
        for i=1 :n
                I = I + (-1)^i/((i+1)^(i+1))
        end
endfunction
```

Remarque

En revanche, le temps d'exécution de ce programme sera un peu plus long que celui du précédent, car à ε fixé, il aura probablement besoin de calculer plus de termes de la suite (u_n), la majoration du reste utilisée étant moins fine.

Exercice 2

1.a. J est clairement une matrice symétrique, à coefficients réels. Elle est donc diagonalisable[3] en base orthonormée : il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ diagonale et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ orthogonale telles que

$$J = PDP^{-1} = \boxed{PD^tP.}$$

[3] À valeurs propres réelles.

1.b. Puisque toutes les colonnes de J sont égales, et non nulles, $\boxed{\operatorname{rg}(J) = 1.}$
On en déduit que 0 est valeur propre de J et que $\boxed{\dim E_0(J) = n - \operatorname{rg}(J) = n - 1.}$

1.c. Puisque D et J sont semblables, elles ont même trace.
Or, les n coefficients diagonaux de J sont égaux à 1 et donc $\operatorname{tr}(J) = n$.
D'autre part, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de J, chaque valeur propre apparaissant autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé.
On peut par exemple supposer que D est de la forme

$$D = \operatorname{Diag}(\underbrace{0,\dots,0}_{(n-1)\text{ fois}},\lambda),$$

où λ est la dernière valeur propre de J.
Et alors $\operatorname{tr}(D) = \lambda$. Par conséquent, on doit donc avoir $\lambda = n$.
Ainsi, on peut prendre $\boxed{D = \operatorname{Diag}(0,\dots,0,n).}$.

Remarque
Il n'y a pas unicité de la matrice D, puisqu'on a le choix de l'ordre dans lequel on fait apparaître les valeurs propres de J sur la diagonale de D. C'est pour cette raison qu'on dit bien «on peut prendre» : c'est une option parmi d'autres.

2.a. On a

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} x_i x_j.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} x_i x_j &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j + \sum_{j=i+1}^n x_i x_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n x_i x_j\\
&= \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} x_i x_j + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\\
&= 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j.
\end{aligned}$$

Détails
Pourquoi pas avec des pointillés. Expliquer les histoires des doubles produits.

Et donc

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} x_i x_j = \boxed{\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2\right]}.$$

2.b. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et soit $X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Alors, par la formule du produit matriciel,

$$(MX)_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j}x_j.$$

Et donc

$${}^tXMX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}x_i x_j.$$

Si M est une matrice symétrique, on a alors $m_{i,j} = m_{j,i}$, de sorte que

$$\begin{aligned}
{}^tXMX &= \sum_{i=1}^n m_{i,i}x_i^2 + \sum_{i<j} m_{i,j}x_i x_j + \sum_{i>j} m_{i,j}x_i x_j\\
&= \sum_{i=1}^n m_{i,i}x_i^2 + \sum_{i<j} m_{i,j}x_i x_j + \sum_{j<i} m_{j,i}x_i x_j\\
&= \sum_{i=1}^n m_{i,i}x_i^2 + 2\sum_{i<j} m_{i,j}x_i x_j.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour avoir

$${}^tXMX = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j = \sum_{i=1}^n 0\times x_i^2 + 2\sum_{i<j}\frac{1}{2}x_i x_j$$

on peut prendre $m_{i,i} = 0$ et $m_{i,j} = \frac{1}{2}$ pour $i \neq j$, c'est-à-dire

$$\boxed{M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.}$$

Détails
Pour passer d'une matrice symétrique M à la forme quadratique q_M associée, nous savons que le coefficient en x_i^2 est le coefficient diagonal (i, i) de M et que pour $i \neq j$, le coefficient en $x_i x_j$ de q_M est la moitié du coefficient (i, j) de M.
Ici il s'agissait de retrouver M à partir de q_M.

2.c. On a $\boxed{M = \frac{1}{2}(J - I).}$

2.d. On a

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I \\ &= \frac{1}{2}PD^tP - \frac{1}{2}PI^tP \\ &= P\left(\frac{1}{2}D - \frac{1}{2}I\right){}^tP \\ &= P\mathrm{Diag}\Bigg(\underbrace{\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \dots, \frac{-1}{2}}_{(n-1)\text{ fois}}, \frac{n-1}{2}\Bigg){}^tP. \end{aligned}$$

Astuce
Pour toute matrice P inversible, on a

$$I_n = PI_nP^{-1}.$$

Et donc on a $\boxed{\Delta = \mathrm{Diag}\Bigg(\underbrace{\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \dots, \frac{-1}{2}}_{(n-1)\text{ fois}}, \frac{n-1}{2}\Bigg)}.$

2.e. Notons que $\mathscr{S}$ est un fermé borné de $\mathbf{R}^n$. Or, f étant continue sur $\mathscr{S}$, car polynomiale, elle y admet nécessairement un maximum et un minimum.
D'autre part, notons que pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathscr{S}$, on a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

<u>**Première méthode : «à la main».**</u>

Puisque $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \geqslant 0$, on a toujours $f(x_1, \dots, x_n) \geqslant -\frac{1}{2}$.
D'autre part, pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right) \in \mathscr{S}$, on obtient

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Et donc $\boxed{-\frac{1}{2} \text{ est le minimum de } f \text{ sur } \mathscr{S}.}$

Remarque
Ce minimum est atteint en de nombreux points, il suffit que la somme des coordonnées de x soit nulle, et que la somme de leurs carrés vaille 1.

D'autre part, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée dans $\mathbf{R}^n$, on a, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathscr{S}$,

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n 1 \times x_i\right)^2 \leqslant \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n 1^2\right)}_{=n}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)}_{=1} \leqslant n.$$

Et donc $f(x_1, \dots, x_n) \leqslant \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$.
De plus, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

et $(1,1,\dots,1)$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $(x_1,x_2,\dots,x_n)=(\lambda,\lambda,\dots,\lambda)$.
Pour $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathscr{S}$, c'est le cas si et seulement si $n\lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Soit si et seulement si $(x_1,x_2,\dots,x_n)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{n}},\dots,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Et alors pour ces deux points[4], on a

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}=\frac{n-1}{2}.$$

Et donc $\boxed{\text{le maximum de } f \text{ sur } \mathscr{S} \text{ est } \frac{n-1}{2}.}$

[4] Et seulement pour ces deux points, puisque nous avons raisonné par équivalence.

Seconde méthode : en utilisant la matrice Δ.

Soit $x=(x_1,\dots,x_n)$ et soit $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=PX$. Alors

$$\begin{aligned}
f(x_1,\dots,x_n) &= {}^tXMX={}^tX{}^tP\Delta PX={}^tY\Delta Y\\
&= -\frac{1}{2}y_1^2-\cdots-\frac{1}{2}y_{n-1}^2+\frac{n-1}{2}y_n^2\\
&= -\frac{1}{2}(y_1^2+\cdots+y_n^2)+\frac{n}{2}y_n^2\\
&= -\frac{1}{2}\|Y\|^2+\frac{n}{2}y_n^2.
\end{aligned}$$

Mais si $x_1^2+\cdots+x_n^2=\|X\|^2=1$, alors

$$\|Y\|^2={}^t(PX)PX={}^tX\underbrace{{}^tPP}_{=I}X=\|X\|^2=1.$$

Et alors $0\leqslant y_n^2\leqslant y_1^2+\cdots+y_n^2\leqslant 1$.
On en déduit que $f(x_1,\dots,x_n)=-\frac{1}{2}+\frac{n}{2}y_n^2$ et donc

$$-\frac{1}{2}\leqslant f(x_1,\dots,x_n)\leqslant\frac{n-1}{2}.$$

Majorant/maximum
Notons que nous avons obtenu ici un majorant et un minorant de f sur $\mathscr{S}$, mais rien n'indique pour l'instant qu'il s'agit du minimum et du maximum, il reste à prouver que ce sont bien des valeurs atteintes.

D'autre part, si $X={}^tP\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$, alors

$$f(x_1,\dots,x_n)=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\end{pmatrix}\underbrace{P{}^tP}_{=I}\Delta\underbrace{P{}^tP}_{=I}\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}.$$

Vecteur propre
Puisque ${}^tP=P^{-1}$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ à une base formée de vecteurs propres de M, la condition imposée revient à demander à X d'être un vecteur propre de M associé à la valeur propre $-\frac{1}{2}$.
Et comme de plus $\|PX\|=\|X\|$, ce vecteur propre sera bien de norme 1 et donc dans $\mathscr{S}$.

De même, si $X={}^tP\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}$, alors

$$f(x_1,\dots,x_n)=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\end{pmatrix}P{}^tP\Delta P{}^tP\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\frac{n-1}{2}.$$

Et donc $\boxed{\text{le minimum de } f \text{ sur } \mathscr{S} \text{ vaut } -\frac{1}{2} \text{ et son maximum vaut } \frac{n-1}{2}.}$

Troisième méthode : par optimisation sous contrainte.

Notons que la contrainte $\mathscr{S}$ est non critique, car si l'on note $g(x_1,\dots,x_n) = x_1^2+\cdots+x_n^2$, alors $\nabla g(x_1,\dots,x_n) = 2(x_1,\dots,x_n)$ ne s'annule pas sur $\mathscr{S}$.
D'autre part, f est une fonction $\mathscr{C}^1$ car polynomiale sur $\mathbf{R}^n$ et

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \partial_i f(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{2}\left(2\sum_{j=1}^n x_j - 2x_i\right) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n x_j.$$

Non critique

Le gradient de g peut s'annuler si et seulement si $(x_1,\dots,x_n)=0$.
Mais le vecteur nul n'est pas dans $\mathscr{S}$.

D'après le théorème des extrema liés, le maximum et le minimum[5] de f sous la contrainte $\mathscr{S}$ sont nécessairement atteints en des points critiques de f sous la contrainte $\mathscr{S}$. Or, $(x_1,\dots,x_n)\in\mathscr{S}$ est un point critique de f sous la contrainte $\mathscr{S}$ si et seulement si il existe $\lambda\in\mathbf{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_1^2+\cdots+x_n^2 = 1\\ \displaystyle\sum_{i=2}^n x_i = 2\lambda x_1\\ \vdots\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i = 2\lambda x_n\end{cases} \iff \begin{cases} x_1^2+\cdots+x_n^2 = 1\\ \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = (2\lambda+1)x_1\\ \vdots\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = (2\lambda+1)x_n\end{cases}$$

En particulier, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]$, on a $(2\lambda+1)x_i = (2\lambda+1)x_j \Leftrightarrow (2\lambda+1)(x_i-x_j)=0$.

• Si $2\lambda+1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{1}{2}$.

Alors dans ce cas $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = 0$, et donc $f(x_1,\dots,x_n) = -\dfrac{1}{2}$.

Il est aisé de vérifier que de tels points[6] existent, par exemple $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0,\dots,0\right)$, et sont bien des points critiques sous la contrainte $\mathscr{S}$ car solutions du système avec $\lambda = -\dfrac{1}{2}$.

• Si $2\lambda+1\neq 0$: alors pour tous i,j, $x_i = x_j$. Et donc les x_i sont tous égaux à x_1.

Et donc $x_1^2+\cdots+x_n^2 = 1 \Leftrightarrow nx_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Dans ce cas, on a alors $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = \pm\frac{n}{\sqrt{n}} = \pm\sqrt{n}$ et donc $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = n$.

Et donc $f(x_1,\dots,x_n) = \dfrac{n-1}{2}$.

Ainsi, $\boxed{\text{le maximum de } f \text{ sous la contrainte } \mathscr{S} \text{ est } \frac{n-1}{2} \text{ et son minimum est } -\frac{1}{2}.}$

[5] Nous avons déjà dit que ces extrema existent.

[6] C'est-à-dire des points de $\mathscr{S}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

Détails

Le maximum et le minimum sont forcément atteints en des points critique (sous la contrainte $\mathscr{S}$) et donc ne peuvent valoir que $\frac{-1}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$.

3.a. Puisque A est symétrique à coefficients réels, elle est diagonalisable : il existe $P\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ orthogonale telle que

$$A = P\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)^tP,$$

où $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont les valeurs propres de A, apparaissant éventuellement plusieurs fois.
Soit $B = P\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})^tP$.
On a alors

$$B^2 = \left(P\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})^tP\right)^2 = P\left(\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})\right)^2{}^tP = P\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda)^tP = A.$$

Notons que B est alors une matrice symétrique. Or, la base canonique de $\mathbf{R}^n$ étant orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$, cela signifie que v est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$.

3.b. Notons que toutes les valeurs propres de A étant positives strictement, elles sont non nulles, et donc A est inversible, de sorte que u est un isomorphisme[7].
On a alors, pour $(x,y)\in(\mathbf{R}^n)^2$:

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= {}^tXY\\ &= {}^tXAA^{-1}Y\\ &= {}^tXB^2A^{-1}Y\end{aligned}$$

[7] Et donc u^{-1} existe bien.

$$\begin{aligned} &= {}^tX{}^tBBA^{-1}Y \\ &= {}^t(BX)BA^{-1}Y \\ &= \langle v(x), v(u^{-1}(y))\rangle. \end{aligned}$$

B est symétrique.

Ou encore, pour le lecteur préférant manipuler des endomorphismes que des matrices :

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \langle x, u(u^{-1}(y))\rangle \\ &= \langle x, v^2(u^{-1}(y))\rangle \\ &= \langle v(x), v(u^{-1}(y))\rangle. \end{aligned}$$

$v^2 = u$.

v est un endomorphisme symétrique.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient donc

$$\langle x, y\rangle^2 = \langle v(x), v(u^{-1}(y))\rangle^2 \leqslant \|v(x)\|^2 \times \|v(u^{-1}(y))\|^2.$$

Or, v étant un endomorphisme symétrique,

$$\|v(x)\|^2 = \langle v(x), v(x)\rangle = \langle v^2(x), x\rangle = \langle u(x), x\rangle.$$

De même,

$$\|v(u^{-1}(y))\|^2 = \langle v(u^{-1}(y)), v(u^{-1}(y))\rangle = \langle u^{-1}(y), v^2(u^{-1}(y))\rangle = \langle u^{-1}(y), u(u^{-1}(y))\rangle = \langle u^{-1}(y), y\rangle.$$

Et donc on a bien

$$\boxed{\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \times \langle u^{-1}(y), y\rangle.}$$

De plus, nous savons qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires.
Ici, nous avons appliqué cette inégalité aux vecteurs $v(x)$ et $v(u^{-1}(y))$, donc il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $v(u^{-1})(y) = \lambda v(x) = v(\lambda x)$.
Or, les valeurs propres de v sont $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$ et sont donc toutes non nulles, de sorte que v est un isomorphisme.
Et donc $v(u^{-1}(y)) = v(\lambda x)$ si et seulement si $u^{-1}(y) = \lambda x \Leftrightarrow y = u(\lambda x)$.
En particulier[8], si $\boxed{y = u(x)}$, qui est non nul car $x \neq 0$ et u est injectif, on a bien $v(x)$ et $v(u^{-1}(y))$ colinéaires et donc

$$\langle x, y\rangle^2 = \langle u(x), x\rangle \times \langle u^{-1}(y), y\rangle.$$

[8] Ce qui précède est vrai pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, donc on peut par exemple prendre $\lambda = 1$.

3.c. En particulier, si l'on prend $x = y$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \times \langle u^{-1}(x), x\rangle.$$

Et donc pour $\|x\| = 1$, $\langle u(x), x\rangle \times \langle u^{-1}(x), x\rangle \geqslant 1$.
Donc l'ensemble des $\langle u(x), x\rangle \times \langle u^{-1}(x), x\rangle$ est minoré par 1, de sorte que $\inf\limits_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ \|x\|=1}} \langle u(x), x\rangle \times \langle u^{-1}(x), x\rangle$ existe et est supérieur ou égal à 1.

Rappel
Toute partie minorée de $\mathbf{R}$ admet une borne inférieure (mais pas nécessairement un minimum).

D'autre part, si x est un vecteur propre de u, associé à une valeur propre λ, alors on a

$$u(x) = \lambda x \Leftrightarrow x = u^{-1}(\lambda x) \Leftrightarrow u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x.$$

Plus généralement
Si x est un vecteur propre d'un isomorphisme f, associé à une valeur propre λ, alors x est également un vecteur propre de f^{-1} associé à la valeur propre λ^{-1}.

Et donc $\langle u(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\|x\|^2$.
Et de même, $\langle u^{-1}(x), x\rangle = \left\langle \frac{1}{\lambda}x, x\right\rangle = \frac{1}{\lambda}\|x\|^2$.
Or, il existe bien des vecteurs propres de u de norme 1 : il suffit de prendre n'importe quel vecteur propre de u et de le diviser par sa norme.
Et alors, pour un tel vecteur propre x de norme 1, on a

$$\langle u(x), x\rangle \times \langle u^{-1}(x), x\rangle = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{1 = \min_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ \|x\|=1}} \langle u(x), x\rangle \times \langle u^{-1}(x), x\rangle.}$$

Min/inf
Notons qu'on cherchait a priori une borne inférieure, mais nous venons de prouver que cette borne inférieure est une valeur atteinte : il s'agit donc d'un minimum.

4.a. Les deux colonnes de A ne sont pas colinéaires, donc A est de rang 2 et par conséquent inversible.
D'autre part, la méthode du pivot nous donne :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

de sorte que $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.}$

4.b. Un réel λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, c'est-à-dire si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$.
Or, $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$.
Et donc $\lambda \in \operatorname{Spec}(A) \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$.
Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 9 - 4 = 5$, et donc les deux valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Puisque $3^2 > 5$, on a donc $3 > \sqrt{5}$ et donc $\lambda_2 > 0$. Il est évident que $\lambda_1 > 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont strictement positives.}}$

4.c. Notons u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A.
Alors pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\langle u(x), x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2.$$

De même, on a

$$\langle u^{-1}(x), x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2.$$

Et donc $g(x_1, x_2) = \langle u(x), x\rangle \times \langle u^{-1}(x), x\rangle$.
Puisque la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$ n'est autre que $\|x\| = 1$, par le résultat de la question 3.c, qui s'applique car A est symétrique et que ses valeurs propres sont strictement positives,
$\boxed{\text{le minimum de } g \text{ sous la contrainte } x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ est égal à } 1.}$

Problème

Partie A.

1. La fonction g_a est positive sur $\mathbf{R}$, et elle est continue sauf éventuellement[9] en 0.
De plus, pour $A \geqslant 0$, on a

$$\int_{-\infty}^{A} g_a(t)\,dt = \int_0^A \frac{t}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^A = 1 - e^{-\frac{A^2}{2a^2}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(t)\,dt$ converge et vaut 1.
Ainsi, $\boxed{g_a \text{ est bien une densité de probabilités.}}$

[9] En fait un calcul de limites prouverait qu'elle est continue en 0, mais puisqu'une densité a droit à un nombre fini de points de discontinuité, inutile de perdre du temps à le vérifier.

2.a. Une densité de N est $f_a : x \mapsto \dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.
De plus, on a alors $\boxed{E(N) = 0}$ et par la formule de Huygens,

$$E(N^2) = V(N) + E(N)^2 = \boxed{a^2.}$$

2.b. Z_a admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,dt$ converge.
Or, par le théorème de transfert, $E(N^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,dt$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$ étant paire, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\, dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\, dt = \frac{1}{2}a^2.$$

Et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{a} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}a^2.$

On en déduit donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}a = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

Et donc Z_a admet une espérance et $\boxed{E(Z_a) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$

2.c. Z_a admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 g_a(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\, dt$ converge.
Procédons à une intégration par parties sur un segment de la forme $[0, A]$, avec $A > 0$ en posant $u(t) = t^2$ et $v(t) = -e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ avec $u'(t) = 2t$ et $v'(t) = \dfrac{t}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{t^3}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\, dt &= \left[-t^2 e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^A + 2\int_0^A t e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\, dt \\ &= -A^2 e^{-\frac{A^2}{2a^2}} + 2\int_0^A t e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\, dt \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t}{a^2} e^{-\frac{t}{2a^2}}\, dt = 2a^2.\end{aligned}$$

Ainsi, Z_a admet un moment d'ordre 2 et donc une variance, qui d'après la formule de Huygens vaut

$$V(Z_a) = E(Z_a^2) - E(Z_a)^2 = 2a^2 - \frac{\pi}{2}a^2 = \boxed{\frac{4-\pi}{2}a^2.}$$

Partie B.

3. Rappelons que `floor((rand()*n))+1` simule une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
Et donc le programme choisit successivement les numéros des urnes dans lesquelles sont placées les boules, et doit donc s'arrêter dès qu'un numéro d'urne est tiré pour la seconde fois.
Le contenu de chacune des urnes est représenté par le vecteur `urnes` qui au départ ne contient que des 0 (car toutes les urnes sont vides) et chaque fois qu'une boule est placée dans une urne, le 0 est remplacé par un 1.

```
function X = tirage(n)
        urnes = zeros(1,n)
        X = 1
        choix = floor((rand()*n))+1
        while urnes(choix) <1
                urnes(choix) = urnes(choix)+1
                choix = floor((rand()*n))+1
                X = X+1
        end
endfunction
```

Avant la première entrée dans la boucle `while`, la variable `choix` contient le numéro de l'urne dans laquelle sera placée la première boule, et avant la k-ième entrée dans la boucle, `choix` contient le numéro de l'urne dans laquelle doit être placée la $(k+1)$-ième boule.
Si cette urne contient déjà une boule (c'est-à-dire si `urnes(choix) = 1`), alors le programme s'arrête.
Puisque la boucle `while` a alors été parcourue k fois, `X` vaut $k+1$, et donc le programme renvoie $k+1$ qui est bien la valeur attendue de X_n.

4. X_1 est la variable certaine égale à 2 : la première boule va dans l'urne 1, et nécessairement la seconde boule va également dans l'urne 1.

Et donc $\boxed{E(X_1) = 1 \text{ et } V(X_1) = 0.}$

Variance
Une variable aléatoire est de variance nulle si et seulement si elle est certaine.

5. Lorsqu'il y a deux urnes, soit la seconde boule est placée dans la même urne que la première, et alors $X_2 = 2$; soit elle est placée dans l'autre urne, et alors nécessairement la troisième boule va dans une urne déjà occupée par une boule, de sorte que $X_2 = 3$.
Donc $X_2(\Omega) = \{2, 3\}$. Notons U_i le numéro de l'urne dans laquelle va la i-ème boule, de sorte que U_i suit la loi uniforme sur $[\![1, 2]\!]$.
Alors, par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[U_1 = 1], [U_1 = 2]\}$, on a

$$\begin{aligned} P(X_2 = 2) &= P([X_2 = 2] \cap [U_1 = 1]) + P([X_2 = 2] \cap [U_1 = 2]) \\ &= P([U_1 = 1] \cap [U_2 = 1]) + P([U_1 = 2] \cap [U_2 = 2]) \\ &= P(U_1 = 1)P(U_2 = 1) + P(U_1 = 2)P(U_2 = 2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

U_1 et U_2 sont indépendantes.

Et alors nécessairement $P(X_2 = 3) = 1 - P(X_2 = 2) = \frac{1}{2}$. Ainsi, $\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![2, 3]\!]).}$ Et donc

$$E(X_2) = \frac{2+3}{2} = \boxed{\frac{5}{2}} \text{ et } V(X_2) = \frac{(3-2+1)^2 - 1}{12} = \boxed{\frac{1}{4}.}$$

6.a. Il faut au minimum tirer deux boules avant que deux d'entre elles se trouvent dans la même urne, et dans le meilleur des cas, les n premières boules seront dans n urnes différentes, mais alors la $n+1$-ième devra forcément aller dans une urne déjà occupée.

Et donc $\boxed{X_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!].}$

Pour la culture
C'est un argument classique parfois appelé lemme des tiroirs : si $n+1$ paires de chaussettes sont rangées dans une commode à n tiroirs, alors nécessairement l'un au moins des tiroirs contient au moins deux paires de chaussettes.

6.b. Notons que $[X_n = k]$ est réalisé si et seulement si les $k-1$ premières boules se sont réparties dans $k-1$ urnes différentes et que la k-ième se trouve dans une urne déjà occupée par une autre boule.
Procédons par dénombrement : il y a n choix pour l'urne dans laquelle se trouve la première boule, puis n choix pour la seconde, etc, de sorte qu'il y a $n \times n \times \cdots \times n = n^k$ manières de placer k boules dans n urnes.
Pour réaliser $[X_n = k]$, il y a n choix pour le placement de la première boule, puis $(n-1)$ pour la seconde[10], puis $n-2$ choix pour la troisième, etc, $(n-(k-2))$ choix pour la $(k-1)$-ème boule.
Et alors la k-ième boule doit aller dans une urne déjà occupée, et donc il y a $k-1$ choix possibles.

Soit en tout $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(k-2)) \times (k-1) = \frac{n!}{(n-k+1)!}(k-1)$ combinaisons possibles.
Et donc, en divisant par le nombre total de placements possibles des k boules,

$$\boxed{P(X_n = k) = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.}$$

[10] Qui peut aller dans n'importe quelle urne, sauf celle occuppée par la première boule.

6.c. X_n est une variable aléatoire à support fini, donc elle admet nécessairement une espérance.

6.d. Par définition, $E(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} k \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}$.
Notons que `[1 :n]` a pour effet de créer un vecteur contenant les nombres de 1 à n, et donc `prod([1 :n])` renvoie $1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$.
Les valeurs successives de n^k sont calculées à la ligne 7 en remarquant que $n^k = n^{k-1} \times n$.
De même, les valeurs successives de $(n-k+1)!$ sont calculées à la ligne 8 en remarquant que

$$(n-k+1)! = \frac{(n-(k-1)+1)!}{(n-k+2)}.$$

Le programme calcule donc les valeurs successives de $k(k-1)\frac{1}{n^k(n-k+1)!}$, et les ajoute à la variable `somme`, qui à la fin de la boucle vaut $\sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)\frac{1}{n^k(n-k+1)!}$.

Alternative
Si l'on ne remarque pas ceci, on peut remplacer la ligne 7 du programme par `puissance = n^k`

Alternative
Là aussi, on pouvait s'en tirer différemment, par exemple à l'aide de `facto = prod([1 :n-k+1])`

Puis la ligne 11 multiplie cette somme par `facto` qui vaut $n!$, permettant alors d'obtenir la valeur de $E(X_n)$.

```
1  function E = esperance(n)
2          facto = prod([1 :n])
3          fac = facto
4          somme = 0
5          puissance = n
6          for k=2  : (n+1)
7                  puissance = puissance*n
8                  fac = fac/(n-k+2)
9                  somme = somme + k*(k-1)/(puissance*fac)
10         end
11         E = facto*somme
12 endfunction
```

Partie C.

7. La fonction $f : x \mapsto \ln(1-x)$ est dérivable, et sa dérivée est $x \mapsto -\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{x-1}$ qui est décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Donc f est concave, et par conséquent est située en dessous de ses tangentes.
Or, la tangente à la courbe représentative de f en $x = 0$ est la droite d'équation $y = -x$. Et donc pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $\boxed{\ln(1-x) \leqslant -x.}$

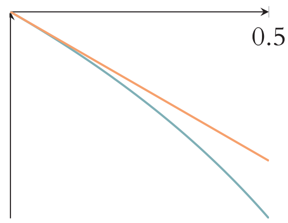


FIGURE 1– La fonction f se situe en dessous de sa tangente en $x = 0$.

Pour l'autre inégalité, introduisons une fonction $g : x \mapsto \ln(1-x) + x + x^2$.
Alors g est dérivable sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ avec

$$g'(x) = \frac{1}{x-1} + 1 + 2x = \frac{2x^2 - x}{x-1} = \frac{2x\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x-1}.$$

En particulier, $g'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et donc g est croissante sur cet intervalle.

Et puisque $g(0) = 0$, g est positive sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$:

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \ln(1-x) \geqslant -x - x^2.}$$

8. Si $m \leqslant \dfrac{n}{2}$, alors pour tout $k \in [\![0, m]\!]$, $k \leqslant \dfrac{n}{2}$ et donc $\dfrac{k}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Le résultat de la question précédente s'applique alors :

$$-\frac{k}{n} - \frac{k^2}{n^2} \leqslant \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) \leqslant -\frac{k}{n}.$$

En sommant ces relations pour k variant de 0 à m, on obtient alors

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m} k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{m} k^2 \leqslant \sum_{k=0}^{m} \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m} k.$$

Soit

$$\boxed{-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leqslant \alpha(n,m) \leqslant -\frac{m(m+1)}{2n}.}$$

9. Si $x \leqslant 0$, alors $\lfloor \sqrt{n}x \rfloor \leqslant 0$.
Mais X_n prend ses valeurs dans $\mathbf{N}^*$, de sorte que $P(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor) = 0$.
Et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor) = 0.}$$

10.a. Notons que $\sqrt{nx}-1<\lfloor\sqrt{nx}\rfloor$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\lfloor\sqrt{nx}\rfloor=+\infty$.
D'autre part, on a $\sqrt{nx}-1<\lfloor\sqrt{nx}\rfloor\leqslant\sqrt{nx}$ et donc

$$1-\frac{1}{\sqrt{nx}}\leqslant\frac{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor}{\sqrt{nx}}\leqslant 1.$$

Par le théorème des gendarmes, il vient alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor}{\sqrt{nx}}=1\Leftrightarrow\boxed{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{nx}.}$$

> **Rappel**
> Pour tout réel y, on a
> $$\lfloor y\rfloor\leqslant y<\lfloor y\rfloor+1.$$
> Soit encore
> $$y-1<\lfloor y\rfloor\leqslant y.$$

10.b. Nous savons que $\sqrt{nx}=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{n}{2}\right)$ et donc $\lfloor\sqrt{nx}\rfloor=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{n}{2}\right)$.
Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor}{\frac{n}{2}}=0$.
Ainsi, il existe $N\in\mathbf{N}$ tel que pour $n\geqslant N$,

$$\frac{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor}{\frac{n}{2}}\leqslant 1\Leftrightarrow\boxed{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor\leqslant\frac{n}{2}.}$$

> **Détails**
> Si $u_n\sim v_n$ et $v_n=o(w_n)$, alors $u_n=o(w_n)$.

> **Détails**
> C'est la définition de $\frac{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor}{\frac{n}{2}}\to 0$, où on a pris $\varepsilon=1$.

10.c. Reprenons le résultat de la question 6.b :

$$\begin{aligned}P(X_n=k)&=\frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}\\&=(k-1)\frac{n(n-1)\times\cdots\times(n-k+2)}{n^k}\\&=\frac{k-1}{n}\frac{1}{n^{k-1}}\prod_{i=0}^{k-2}(n-i)\\&=\frac{k-1}{n}\left(\prod_{i=0}^{k-2}\frac{1}{n}\right)\left(\prod_{i=0}^{k-2}(n-i)\right)\\&=\boxed{\frac{k-1}{n}\prod_{i=0}^{k-2}\left(1-\frac{i}{n}\right).}\end{aligned}$$

10.d. Commençons par noter que pour tout $k\geqslant 2$ et tout $n\geqslant\frac{4}{x^2}$,

$$\prod_{i=0}^{k-2}\left(1-\frac{i}{n}\right)=\prod_{i=0}^{k-2}\exp\left(\ln\left(1-\frac{i}{n}\right)\right)=\exp\left(\sum_{i=0}^{k-2}\ln\left(1-\frac{i}{n}\right)\right)=\exp(\alpha(n,k-2)).$$

En particulier, pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a

$$P(X_n=\lfloor\sqrt{nx}\rfloor)=\frac{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-1}{n}\prod_{i=0}^{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-2}\left(1-\frac{i}{n}\right)=\boxed{\frac{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-1}{n}\exp\left(\alpha\left(n,\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-2\right)\right).}$$

> **Remarque**
> Notons que, contrairement à ce que l'énoncé semble indiquer, il n'y a pas besoin ici de supposer $n\geqslant N$.
> En revanche, il faut
> $$\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-2\geqslant 0\Leftrightarrow n\geqslant\frac{4}{x^2}$$
> afin que $\alpha(n,\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-2)$ soit bien défini.

10.e. Pour $n\geqslant\max\left(N,\frac{4}{x^2}\right)$, il est possible d'utiliser le résultat de la question 8 avec $m=\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-2$, et donc

$$-\frac{(\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-2)(\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-1)}{2n}-\frac{(\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-2)(\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-1)(2\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-3)}{6n^2}\leqslant\alpha(n,\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-2)\leqslant-\frac{(\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-2)(\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-1)}{2n}.$$

Mais puisque $\lfloor\sqrt{nx}\rfloor\to+\infty$, $\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-2\underset{n\to+\infty}{\sim}\lfloor\sqrt{nx}\rfloor\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{nx}$.
Et de même pour tous les autres termes en $\lfloor\sqrt{nx}\rfloor$, de sorte que

$$\frac{(\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-2)(\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-1)(2\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-3)}{6n^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2(\sqrt{nx})^3}{6n^2}=x^3\frac{1}{3\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

D'autre part,

$$\frac{(\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2)(\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-1)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\sqrt{n}x)^2}{2n^2} = \frac{x^2}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x^2}{2}.$$

On en déduit donc, par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha(n,\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2) = -\frac{x^2}{2}.$$

Et donc, par continuité de l'exponentielle,

$$\exp\left(\alpha\left(n,\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Enfin,

$$\sqrt{n}\frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{\sqrt{n}x}{n} = x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

Et donc, par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}P(X_n = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor) = xe^{-\frac{x^2}{2}}.}$$

Partie D.

11.a. Par définition de la partie entière, on a

$$\lfloor\sqrt{n}x\rfloor = k \Leftrightarrow k \leqslant \sqrt{n}x < k+1 \Longleftrightarrow \boxed{\frac{k}{\sqrt{n}} \leqslant x < \frac{k+1}{\sqrt{n}}.}$$

11.b. Puisque $P(X_n = k) = 0$ pour $k \notin [\![2, n+1]\!]$, il vient $f_n(x) = 0$ si $x < \frac{2}{\sqrt{n}}$ ou si $x \geqslant \frac{n+2}{\sqrt{n}}$.

D'autre part, pour $k \in [\![2, n+1]\!]$ et $x \in \left[\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{k+1}{\sqrt{n}}\right[$, on a $f_n(x) = \sqrt{n}P(X_n = k)$. Et donc f_n est constante sur $\left[\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{k+1}{\sqrt{n}}\right[$.

Ainsi, f_n est continue sur ces intervalles, et donc elle est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en les $\frac{k}{\sqrt{n}}$, $k \in [\![2, n+2]\!]$.

Il est évident que f_n est positive, car une probabilité est toujours positive.

Enfin, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt &= \int_{\frac{2}{\sqrt{n}}}^{\frac{n+2}{\sqrt{n}}} f_n(t)\,dt \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} \int_{\frac{k}{\sqrt{n}}}^{\frac{k+1}{\sqrt{n}}} f_n(t)\,dt \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} \int_{\frac{k}{\sqrt{n}}}^{\frac{k+1}{\sqrt{n}}} \sqrt{n}P(X_n = k)\,dt \\
&= \sqrt{n}\sum_{k=2}^{n+1} P(X_n = k)\left(\frac{k+1}{\sqrt{n}} - \frac{k}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} P(X_n = k) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Rappelons que $X_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.

Ainsi, $\boxed{f_n \text{ est bien une densité de probabilités.}}$

12.a. Rappelons que la fonction de répartition de U est donnée par

$$P(U \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}.$$

Si $k > \lfloor\sqrt{n}x\rfloor$, alors $\sqrt{n}x - k < \lfloor\sqrt{n}x\rfloor + 1 - k \leqslant 0$ et donc $P\left(U \leqslant \sqrt{n}x - k\right) = 0$.
Si $k < \lfloor\sqrt{n}x\rfloor$, alors $\sqrt{n}x - k \geqslant \lfloor\sqrt{n}x\rfloor - k \geqslant 1$, et donc $P\left(U \leqslant \sqrt{n}x - k\right) = 1$.
Enfin, si $k = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor$, alors $\sqrt{n}x - k \in [0,1[$ et donc

$$P\left(U \leqslant \sqrt{n}x - k\right) = \sqrt{n}x - k.$$

12.b. Notons que $X_n + U$ est à valeurs dans $[2, n+2]$ et donc que Y_n prend ses valeurs dans l'intervalle $\left[\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{n+2}{\sqrt{n}}\right]$.
En particulier, pour $x < \frac{2}{\sqrt{n}}$, $P(Y_n \leqslant x) = 0$ et pour $x \geqslant \frac{n+2}{\sqrt{n}}$, $P(Y_n \leqslant x) = 1$.
Soit à présent $x \in \left[\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{n+2}{\sqrt{n}}\right]$. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[X_n = k],\ k \in [\![2, n+1]\!]\}$. Alors

$$\begin{aligned}
P(Y_n \leqslant x) &= \sum_{k=2}^{n+1} P([Y_n \leqslant x] \cap [X_n = k]) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} P\left(\left[\frac{X_n + U}{\sqrt{n}} \leqslant x\right] \cap [X_n = k]\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} P\left(\left[\frac{k + U}{\sqrt{n}} \leqslant x\right] \cap [X_n = k]\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} P\left(\left[U \leqslant \sqrt{n}x - k\right] \cap [X_n = k]\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} P(U \leqslant \sqrt{n}x - k)P(X_n = k) && \text{U et X_n sont indépendantes.} \\
&= \sum_{k=2}^{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor - 1} 1 \times P(X_n = k) + P(U \leqslant \sqrt{n}x - \lfloor\sqrt{n}x\rfloor)P(X_n = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor) && \text{C'est le résultat de la question 12.a : les termes avec $k > \lfloor\sqrt{n}x\rfloor$ sont nuls.} \\
&= \sum_{k=2}^{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor - 1} P(X_n = k) + \left(\sqrt{n}x - \lfloor\sqrt{n}x\rfloor\right) P\left(X_n = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor\right) \\
&= \sum_{k=2}^{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor - 1} \int_{\frac{k}{\sqrt{n}}}^{\frac{k+1}{\sqrt{n}}} f_n(t)\,dt + \int_{\frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}{\sqrt{n}}}^{\frac{\sqrt{n}x}{\sqrt{n}}} f_n(t)\,dt \\
&= \int_{\frac{2}{\sqrt{n}}}^{x} f_n(t)\,dt && \text{Chasles.} \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt. && \text{$f_n(t)$ est nul pour $t < \frac{2}{\sqrt{n}}$.}
\end{aligned}$$

12.c. Si W_n est une variable aléatoire possédant f_n comme densité, alors sa fonction de répartition est $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt$.
Mais alors W_n est une variable à densité, donc sa fonction de répartition est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Et donc la fonction de Y_n est également continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points, de sorte que $\boxed{Y_n \text{ est une variable à densité.}}$
De plus, la dérivée de $F_{W_n} = F_{Y_n}$ coïncide avec f_n sauf éventuellement en un nombre fini de points, et donc $\boxed{f_n \text{ est également une densité de } Y_n.}$

12.d. Utilisons le résultat admis dans l'énoncé.
Nous avons prouvé dans la partie C que pour $x \in \mathbf{R}$ fixé,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}P\left(X_n = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} = g_1(x)$$

où g_1 est la densité introduite à la partie A.
Soit donc Y une variable aléatoire de densité g_1. Alors :

Résultat admis
Le résultat donné par l'énoncé (appelé lemme de Scheffé) nous dit que pour étudier la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires à densité, au lieu d'étudier la convergence des fonctions de répartition, il est possible d'étudier la convergence des densités.

$\star$pour tout n, Y_n admet une densité f_n ;
$\star$$Y$ admet une densité g_1 ;
$\star$pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = g_1(x)$.

Ainsi, $\boxed{Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y.}$

13.a. Si $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ et si $Y_n \xrightarrow{P} c$, où $c \in \mathbf{R}$, alors $X_n + c \xrightarrow{\mathscr{L}} X + c$.

13.b. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on a

$$P\left(\left|-\frac{U}{\sqrt{n}}\right| \geqslant \varepsilon\right) = P\left(\frac{U}{\sqrt{n}} \geqslant \varepsilon\right) = P(U \geqslant \sqrt{n}\varepsilon) = 1 - P(U \leqslant \sqrt{n}\varepsilon) = \begin{cases} 1 - \sqrt{n}\varepsilon & \text{si } \sqrt{n}\varepsilon \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or, pour n suffisamment grand, on a $\sqrt{n}\varepsilon > 1$ et donc $P\left(\left|-\frac{U}{\sqrt{n}}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit donc que $-\dfrac{U}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} 0$.
Et alors, par le théorème de Slutsky,

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} = Y_n + \left(-\frac{U}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} Y,$$

où Y admet g_1 pour densité.

ECRICOME 2016

Exercice 1

Sujet : Calcul de la somme d'une série alternée **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : séries numériques, intégration sur un segment, développements limités

Commentaires : sujet assez progressif, plutôt bien guidé. Nécessite un peu de familiarité avec les comparaisons séries/intégrales ainsi que les suites extraites.

On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note : $\forall n \geqslant 1,\ w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

   a. Rappeler les développements limités à l'ordre 2 lorsque x tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{1+x}$.

   b. Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.

   c. Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ appelé **constante d'Euler**.

2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

3. On note pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

   a. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

   b. Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?

4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.

   a. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :
$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,dt.$$

   b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et convergente.

5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$
   puis que :
$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n).$$

6. Démontrer alors que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma\ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}.$$

Exercice 2

Sujet : Étude d'une fonction de plusieurs variables définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : calcul différentiel d'ordre 1 et 2, diagonalisation, polyômes

Commentaires : sujet exigeant car mélangeant algèbre linéaire et calcul différentiel et nécessitant de faire preuve d'initiatives dans la rédaction. Demande beaucoup d'aisance avec les polynômes. La question 3.d mériterait d'être davantage guidée, la dérivée logarithmique étant rarement rencontrée en ECS.
Ressemble beaucoup à l'exercice 2 d'ECRICOME 2010 (qui est tout de même plus facile).

Le but de cet exercice est d'étudier pour un entier n tel que $n \geqslant 2$ les points critiques de la fonction f définie sur le domaine

$$\mathscr{D}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$$

par :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \ln(x_j - x_i).$$

On admettra que $\mathscr{D}_n$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

1. Pour tout polynôme P de $\mathbf{R}_n[X]$, on note :

$$\varphi(P) = 4XP'(X) - P''(X).$$

   a. Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P)$ définit un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
   b. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.
   c. Vérifier que le polynôme $3X - 4X^3$ est un vecteur propre de φ pour une valeur propre à préciser.
   d. Montrer que φ est diagonalisable et préciser la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

2. On s'intéresse dans cette question (et uniquement dans cette question) au cas $n = 2$. On a donc :

$$\mathscr{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < y\}$$

   et :

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D}_2 &\to \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y^2 - \ln(y - x) \end{aligned}$$

   a. Justifier que f admet des dérivées partielles premières et secondes sur $\mathscr{D}_2$ et les calculer.
   b. Montrer que f admet un unique point critique : le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
   c. Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   La fonction f admet-elle un extremum local en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$?

On revient à présent au cas général avec $n \geqslant 2$.

3. On note $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathscr{D}_n$. On note S le polynôme à coefficients réels défini par : $S(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note : $Q_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n}(X - x_i)$. On a donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ S(X) = (X - x_k)Q_k(X).$$

   a. Calculer $\partial_k f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   b. En déduire que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ 2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i} = 0.$$

   c. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $S'(x_k) = Q_k(x_k)$ et $S''(x_k) = 2Q_k'(x_k)$.

d. Justifier que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{x_i, 1 \leqslant i \leqslant n, i \neq k\}$, on a :

$$Q_k'(x) = Q_k(x) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x - x_i}.$$

e. En déduire que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 0.$$

f. Montrer que u est un point critique de f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que :

$$S''(X) - 4XS'(X) = \lambda S(X).$$

En observant le terme dominant de S, montrer plus précisément que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff S''(X) - 4XS'(X) + 4nS(X) = 0.$$

4. **a.** À l'aide des résultats des questions 1.d et 3.f, montrer que la fonction f admet au plus un seul point critique sur $\mathscr{D}_n$.

   b. Dans le cas spécifique où $n = 3$, montrer, en utilisant le résultat de la question 1.c que f admet un unique point critique sur $\mathscr{D}_3$ que l'on déterminera.

Problème

Sujet : Étude de l'évolution du contenu d'une urne de Polya — **Moyen**

Abordable en première année : ✓ (sauf question 10) — **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : probabilités discrètes, variables à densité, convergence en loi, `Scilab`

Commentaires : le thème est plutôt intéressant, mais demande beaucoup d'habilité dans les calculs. Sujet assez progressif, même si comme souvent à Ecricome, la dernière partie semble plus être là pour flatter les enseignants que pour réellement classer les étudiants.
La partie de `Scilab` est très jolie, tout à fait dans l'esprit du programme 2015.

Partie A

Pour tout $(a,b) \in \mathbf{N}^2$, on note $I_{a,b}$ le réel défini par :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx$$

et on note $f_{a,b}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_{a,b}(x) = \begin{cases} \dfrac{(a+b+1)!}{a! \times b!} x^a(1-x)^b & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

1. **a.** Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbf{N}$.

   b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*,\ I_{a,b} = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}.$$

   c. En déduire que :

$$\forall (a,b) \in \mathbf{N}^2,\ I_{a,b} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}.$$

   d. Justifier que pour tout couple $(a,b) \in \mathbf{N}^2$, $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

2. Dans toute la suite de cette partie, on fixe $(a,b) \in \mathbf{N}^2$ et on considère une variable aléatoire réelle X admettant $f_{a,b}$ pour densité. On dit que X **suit la loi *beta* de paramètres a et b.**

   a. Montrer que X admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{a+1}{a+b+2}.$$

b. Montrer que X admet une variance et que :

$$V(X) = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}.$$

c. Soit F la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (a+b+1)! \displaystyle\sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{x^k(1-x)^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que F est la fonction de répartition de X.

Partie B

Soient a et b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,
- on replace la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée.

Après n épreuves, l'urne contient donc $a+b+n$ boules.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été **ajoutées** dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on notera R_n l'événement «on pioche une boule rouge au n-ième tirage».

3. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X_n en fonction de n.
4. On souhaite simuler l'expérience grâce à `Scilab`.

a. Compléter la fonction suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant x boules rouges et y boules blanches et qui retourne la valeur 0 si la boule est rouge et 1 si elle est blanche.

```
function res = tirage(x,y)
        r = rand()
        if ......... then
                res = 0
        else
                res=1
        end
endfunction
```

b. Compléter la fonction suivante, qui simule n tirages successifs dans une urne contenant initialement a boules rouges et b boules blanches (selon le protocole décrit ci-dessus) et qui retourne la valeur de X_n :

```
function Xn = experience(a,b,n)
        x = a
        y=b
        for k=1 :n
                r = tirage(x,y)
                if r ==0 then
                        x = .......
                else
                        .........
                end
        end
        Xn = .......
endfunction
```

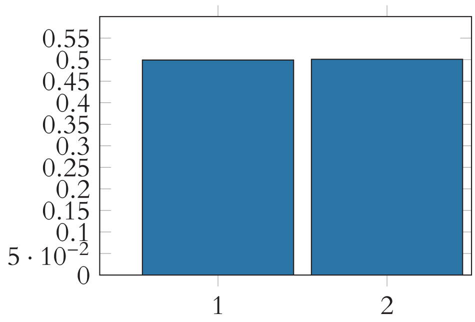
c. Écrire une fonction `Scilab` d'en tête :

```
function loi = simulation(a,b,n,m)
```

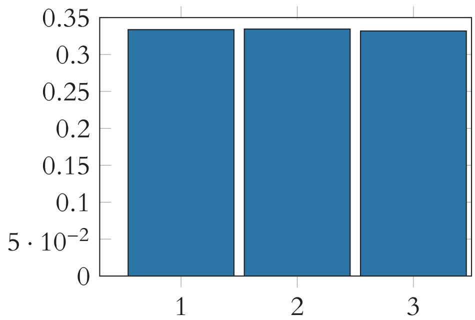
qui fait appel `m` fois à la fonction précédente pour estimer la loi de X_n. Le paramètre de sortie sera un vecteur contenant les approximations de $P(X_n = 0), P(X_n = 1), \ldots, P(X_n = n)$.

5. On s'intéresse ici au cas où $a = b = 1$. On utilise la fonction `simulation` avec des valeurs de n entre 1 et 5 et on affiche à chaque fois l'estimation de la loi de X_n sous forme d'un diagramme en «bâtons».

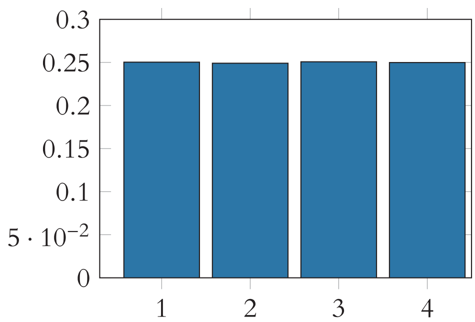
```
--> bar(simulation(1,1,1,100000))
```



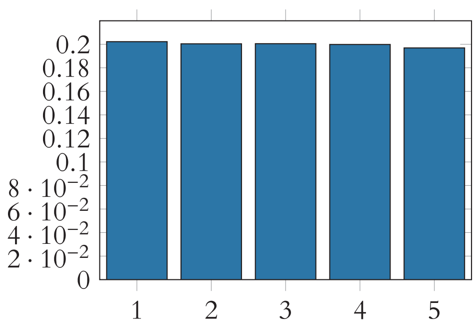

```
--> bar(simulation(1,1,2,100000))
```



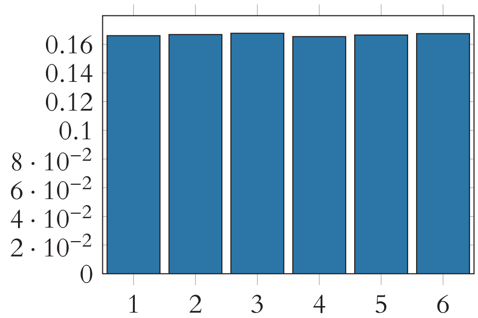

```
--> bar(simulation(1,1,3,100000))
```




```
--> bar(simulation(1,1,4,100000))
```



```
--> bar(simulation(1,1,5,100000))
```



a. À l'aide de ces résultats, conjecturer la loi de X_n.
b. Déterminer la loi de X_1.
c. Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k),\ P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k+1),\ P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell) \text{ avec } \ell \notin \{k,k+1\}.$$

d. En raisonnant par récurrence sur n, prouver la conjecture émise au 5.a.

6. On revient au cas général où a et b sont deux entiers strictement positifs.
   a. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Calculer la probabilité suivante :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \overline{R_{k+2}} \cap \cdots \overline{R_n}).$$

   b. Justifier alors que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X_n=k) = \binom{n}{k}\frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}.$$

   c. En déduire que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X_n=k) = \frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}.$$

   d. Calculer $E(a+X_n)$, puis en déduire que : $E(X_n) = \dfrac{na}{a+b}$.

Partie C

On admettra dans cette partie que si a, b et n sont trois entiers strictement positifs, alors pour tout entier naturel $p \in [\![a, a+b+n-1]\!]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{p-a}\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1} = \sum_{i=a}^{a+b-1}\binom{p}{i}\binom{a+b+n-1-p}{a+b-1-i}.$$

On reprend pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ la variable aléatoire X_n étudiée dans la partie précédente, et on note $X_n = \dfrac{Y_n}{n}$.
On note F_n la fonction de répartition de Y_n.

7. a. Soit $x < 0$. Que vaut $F_n(x)$?
   b. Soit $x \geqslant 1$. Que vaut $F_n(x)$?
8. On fixe $x \in]0,1[$. Pour tout réel y, on note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière de y, c'est-à-dire le plus grand entier m tel que $m \leqslant y$. On rappelle qu'alors on a $y-1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$.
   a. Justifier que $F_n(x) = P(X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor)$.
   b. À l'aide de la formule sommatoire admise en début de la partie C, prouver que :

$$F_n(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=a}^{a+b-1}\binom{\lfloor nx\rfloor + a}{i}\binom{b+n-1-\lfloor nx\rfloor}{a+b-1-i}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}.$$

c. Pour $j \in \mathbf{N}$ fixé, déterminer un équivalent simple de $\binom{m}{j}$ lorsque m tend vers $+\infty$.

d. Déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (On obtiendra alors un résultat sous forme d'une somme qu'on ne tentera pas de calculer).

9. Déterminer $F_n(0)$ puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

10. Déduire de ce qui précède que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi Beta dont on explicitera les paramètres.

11. À l'aide du résultat de la question 6.d de la partie B, déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $E(Y_n)$ et commenter ce résultat à la lumière de la question précédente.

ECRICOME 2016 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1.a. On a

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \text{ et } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).}$$

1.b. Par définition de w_n, on a

$$w_{n+1} - w_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{1+n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Or, on a $\dfrac{1}{1+n} = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$ avec $\dfrac{1}{n} \to 0$, donc

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \boxed{\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}}. \end{aligned}$$

Danger !
Un piège grossier dans lequel il ne faudrait pas tomber serait d'utiliser la question précédente pour obtenir des développements limités de $\frac{1}{1+n}$ et $\ln(1+n)$. On ne peut utiliser directement la question précédente car $n \to +\infty$.

Équivalents
Si $u_n = v_n + o(v_n)$, alors $u_n \sim v_n$.

1.c. Par critère de comparaison de séries à terme général de signe constant[1], la série de terme général $w_{n+1} - w_n$ converge.
Or, pour $N \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} (w_{k+1} - w_k) = \sum_{k=1}^{N} w_{k+1} - \sum_{k=1}^{N} w_k = w_{N+1} - w_1.$$

Et donc $w_{N+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} (w_{k+1} - w_k) + w_1 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) + w_1$.

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$ On note γ sa limite.

[1] On ne connaît pas le signe de $w_{n+1} - w_n$, mais $-\frac{1}{2n^2}$ est de signe constant.

Pour la culture
On sait assez peu de choses de γ, si ce n'est que

$$\gamma \simeq 0,5772.$$

On ignore par exemple si γ est ou non un nombre rationnel (même si l'on suspecte que ce ne soit pas le cas).

2. La fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée égale à $\varphi'(t) = \dfrac{1 - \ln(t)}{t^2}$.
Et donc $\varphi'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow t \leqslant e$.
De plus, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = -\infty$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$.
Le tableau de variations de φ est donc donné par

t	0		e		$+\infty$
$\varphi'(t)$	‖	$+$	0	$-$	
$\varphi(t)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

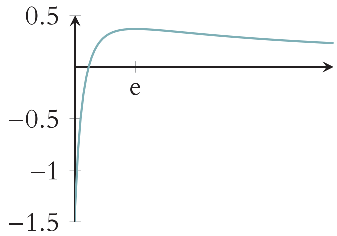


FIGURE 1– Représentation graphique de φ.

3.a. On a

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_{2(n+1)} = S_{2n} - S_{2n+2} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k} \\ &= \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} = \varphi(2n+1) - \varphi(2n+2). \end{aligned}$$

Mais pour $n \geqslant 2$, on a $2n+1 \geqslant 3 > e$. La fonction φ étant décroissante sur $[e,+\infty[$, il vient $\varphi(2n+1) \geqslant \varphi(2n+2)$ et donc $S_{2n} - S_{2n+2} \geqslant 0$: $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
De même,

$$S_{2n+1} - S_{2(n+1)+1} = \varphi(2n+3) - \varphi(2n+2) \leqslant 0$$

et donc $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ est croissante.
Enfin,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=2}^{2n+1} u_k - \sum_{k=2}^{2n} u_k = u_{2n} = \frac{\ln(2n)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

3.b. Deux suites adjacentes sont convergentes et de même limite, donc les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ convergent vers une même limite ℓ.
Or, il s'agit des suites extraites des termes d'ordre pair (resp. impair) de la suite $(S_n)_{n\geqslant 4}$. Celle-ci est donc convergente, de limite ℓ.
Mais (S_n) est la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n, qui est donc convergente.

On a $|u_n| = \dfrac{\ln(n)}{n}$. Et donc pour $n \geqslant 3$, $|u_n| \geqslant \dfrac{1}{n}$.

Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ est divergente[2], il en est de même de $\sum |u_n|$.

Ainsi, la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente.

Rappel
Une suite (u_n) converge si et seulement si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent **vers une même limite.**
Ce n'est plus vrai si ces limites sont différentes, comme le prouve la suite $u_n = (-1)^n$.

[2] Série de Riemann avec $\alpha = 1$.

4.a. La fonction φ est décroissante sur $[3, +\infty[$, donc pour tout $t \in [n, n+1]$, $\varphi(t) \geqslant \varphi(n+1)$.
Alors, par croissance de l'intégrale,

$$\int_n^{n+1} \varphi(t)\,dt \geqslant \int_n^{n+1} \varphi(n+1)\,dt \geqslant \varphi(n+1)$$

et donc $\boxed{\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,dt.}$

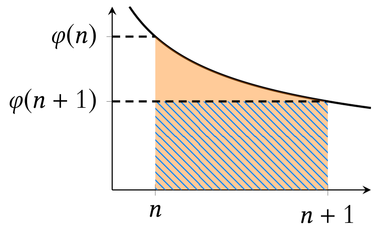


FIGURE 2– L'intégrale, qui est l'aire de la partie colorée est plus grande que l'aire de la partie hachurée, qui vaut $\varphi(n+1)$ (c'est l'aire d'un rectangle de largeur 1 et de hauteur $\varphi(n+1)$).

4.b. Pour $n \geqslant 3$, on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n+1)]^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} + \frac{[\ln(n)]^2}{2}\\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{[\ln(n)]^2 - [\ln(n+1)]^2}{2}\\
&\leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,dt + \frac{[\ln(n)]^2 - [\ln(n+1)]^2}{2}\\
&\leqslant \left[\frac{[\ln t]^2}{2}\right]_n^{n+1} + \frac{[\ln(n)]^2 - [\ln(n+1)]^2}{2}\\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.

Primitive
On a
$$\frac{\ln t}{t} = \frac{1}{t}\ln t.$$
On reconnaît donc une fonction de la forme $u'u$, dont une primitive est alors donnée par $t \mapsto \dfrac{[\ln t]^2}{2}$.

Comme à la question 4.a, on prouve que pour tout entier $k \geqslant 3$, on a $\dfrac{\ln k}{k} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,dt$.

Et alors, pour $n \geqslant 3$, on a

$$\begin{aligned}
v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}\\
&= \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}\\
&\geqslant \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,dt - \frac{[\ln(n)]^2}{2}\\
&\geqslant \frac{\ln 2}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,dt\\
&\geqslant \frac{\ln 2}{2} + \frac{[\ln(n+1)]^2}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}\\
&\geqslant \frac{\ln 2}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est minorée, et par le théorème de la limite monotone, elle est donc $\boxed{\text{convergente.}}$

5. Partons de l'expression proposée :

$$\begin{aligned}2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k} &= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k\ln(k)}{k} = \boxed{S_{2n}.}\end{aligned}$$

Détails
On a séparé la seconde somme en deux sommes, formées respectivement des termes d'ordre pair et des termes d'ordre impair.

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}S_{2n} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2)+\ln(k)}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k}\\ &= \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k}\\ &= \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+v_n+\frac{[\ln(n)]^2}{2}-v_{2n}-\frac{[\ln(2n)]^2}{2}\\ &= \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+v_n-v_{2n}+\frac{\ln(n)^2-(\ln(2)+\ln(n))^2}{2}\\ &= \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+v_n-v_{2n}+\frac{\ln(n)^2-\ln(2)^2+2\ln(2)\ln(n)-\ln(n)^2}{2}\\ &= \boxed{\ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+v_n-v_{2n}+\ln(2)\ln(n)-\frac{[\ln 2]^2}{2}.}\end{aligned}$$

6. De la dernière égalité, il vient

$$S_{2n}=\ln(2)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)+v_n-v_{2n}-\frac{[\ln(2)]^2}{2}.$$

Mais si l'on note λ la limite de la suite (v_n), il vient alors, en passant à la limite[3] dans cette égalité

$$\lim_{n\to+\infty}S_{2n}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\ln(k)}{k}=\ln(2)\gamma+\lambda-\lambda-\frac{[\ln(2)]^2}{2}=\boxed{\gamma\ln(2)-\frac{[\ln(2)]^2}{2}.}$$

[3] Tous les termes admettent une limite lorsque $n\to+\infty$, donc le passage à la limite est bien justifié.

Somme de série
La limite de (S_{2n}) est la limite de (S_n), c'est-à-dire la limite de la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n.
Cette limite est donc égale à

$$\sum_{k=1}^{+\infty}u_k=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k\ln(k)}{k}.$$

EXERCICE 2

1.a. Notons que φ est bien à valeurs dans $\mathbf{R}_n[X]$ car si $\deg P\leqslant n$, alors $\deg P'\leqslant n-1$ et donc $\deg(4XP')\leqslant n$.
Puisque $\deg P''\leqslant n$, on a bien $\deg\varphi(P)\leqslant n$.
Soient $P,Q\in\mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda\in\mathbf{R}$. Alors, par linéarité de la dérivation, on a

$$\varphi(\lambda P+Q)=4X(\lambda P+Q)'(X)-(\lambda P+Q)''(X)=4\lambda XP'(X)+4XQ'(X)+\lambda P''(X)+Q''(X)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q).$$

Ainsi, φ est linéaire, et donc $\boxed{\text{est un endomorphisme de } \mathbf{R}_n[X].}$

1.b. Il est facile de constater que $\varphi(1)=0$ et $\varphi(X)=4X$.
Pour $k\in[\![2,n]\!]$, on a

$$\varphi(X^k)=4XkX^{k-1}-k(k-1)X^{k-2}=4kX^k-k(k-1)X^{k-2}.$$

Et donc la matrice de φ dans la base canonique est

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3) & \dots & \dots & \varphi(X^n) \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 4 & 0 & -12 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & 0 & 8 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & -n(n-1) \\
\vdots & & & & \ddots & 4(n-1) & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 4n
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-2} \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array}
\end{array}
$$

Remarque

La question n'a pas de sens pour $n = 2$ puisque $3X - 4X^3 \notin \mathbf{R}_2[X]$.

1.c. On a $\varphi(3X - 4X^3) = 4X(3 - 12X^2) + 24X = 12X - 48X^3 + 24X = 12(3X - 4X^3)$.
Puisque $3X - 4X^3 \neq 0$, c'est donc un vecteur propre de φ pour la valeur propre 12.

1.d. La matrice de φ dans la base canonique est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire les $4k, k \in [\![0, n]\!]$.
En particulier, cette matrice possède $n+1$ valeurs propres distinctes, et est une matrice carrée de taille $n+1$: elle est donc diagonalisable, et chacun de ses sous-espaces propres est de dimension un.

Et donc $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable, avec des sous-espaces propres de dimension un.}}$

Danger !

Attention à la dimension de $\mathbf{R}_n[X]$: c'est bien $n+1$ et non n. Par conséquent, la matrice d'un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ est un élément de $M_{n+1}(\mathbf{R})$ et non de $M_n(\mathbf{R})$.

2.a. La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe $\mathscr{C}^2$ car polynomiale.
De même, $(x, y) \mapsto y - x$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}_2$, à valeurs[4] dans $\mathbf{R}_+^*$. Puisque la fonction logarithme est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^*$, on en déduit que, par somme et composition de fonction $\mathscr{C}^2$, f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}_2$. Et donc elle admet des dérivées partielles premières et secondes.
On a alors, pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}_2$,

$$\boxed{\partial_1 f(x,y) = 2x + \frac{1}{y-x},\ \partial_2 f(x,y) = 2y - \frac{1}{y-x}.}$$

[4] Notons que cela tient au fait que si $(x, y) \in \mathscr{D}_2$, alors $x < y$, donc $y - x > 0$.

De même, on a

$$\boxed{\partial^2_{1,1} f(x,y) = 2 + \frac{1}{(y-x)^2},\ \partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = -\frac{1}{(x-y)^2},\ \partial^2_{2,2} f(x,y) = 2 + \frac{1}{(y-x)^2}.}$$

2.b. (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{y-x} = 0 \\ 2y - \frac{1}{y-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2y = \frac{1}{y-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 2y = \frac{1}{2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 4y^2 = 1 \end{cases}$$

Puisque x et y sont de signes opposés et que l'on doit[5] avoir $y > x$, nécessairement $y > 0$.
Et donc la seconde équation implique que $y = \frac{1}{2}$.

[5] $(x, y) \in \mathscr{D}_2$, donc $y > x$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique point critique de } f \text{ est } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).}$

2.c. Notons que $\mathscr{D}_2$ est un ouvert, et que donc la nature locale des points critiques est donnée par le signe des valeurs propres de la hessienne.
Un réel λ est valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ si et seulement si $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, soit si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$.
Or, $\det(A - \lambda I_2) = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$. Et donc $\mathrm{Spec}(A) = \{2, 4\}$.
Or, la matrice hessienne de f en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est précisément A. Puisque toutes ses valeurs propres sont strictement positives, on en déduit que $\boxed{f \text{ possède un minimum local en } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).}$

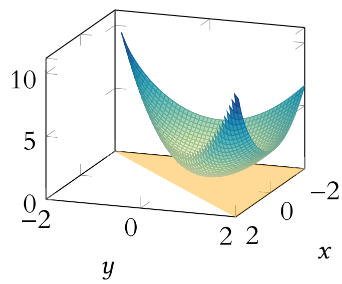


FIGURE 3– Le graphe de la fonction f sur l'ouvert $\mathscr{D}_2$ (représenté en orange).

3.a. Notons que dans la somme $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \ln(x_j - x_i)$, les termes faisant apparaître x_k sont les[6] $\ln(x_j - x_k)$, avec $j > k$ et les[7] $\ln(x_k - x_i)$, avec $i < k$.
Autrement dit, il est possible d'écrire

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{k-1} \ln(x_k - x_i) - \sum_{j=k+1}^{n} \ln(x_j - x_k) + g(x_1, \dots, x_n)$$

où g est une fonction ne dépendant pas de x_k.
On a alors

$$\partial_k f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{x_k - x_i} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{x_j - x_k}.$$

Soit encore,

$$\partial_k f(x_1, \dots, x_n) = 2x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{x_k - x_i} - \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{x_k - x_j} = \boxed{2x_k - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i}.}$$

[6] Dans le cas où $i = k$.

[7] Dans le cas où $j = k$.

3.b. On en déduit directement que u est un point critique de f si et seulement si

$$\forall x \in [\![1, n]\!],\ \partial_k f(u) = 0 \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ 2x_k - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i} = 0.$$

Trop facile ?
Si l'on a correctement répondu à la question précédente, cette question peut sembler déroutante car trop facile.
Mais elle permet en réalité aux candidats n'ayant pas su répondre à la précédente de «raccrocher» et de continuer.

3.c. On a $S'(X) = (X - x_k)Q_k'(X) + Q_k(X)$ de sorte que $\boxed{S'(x_k) = Q_k(x_k).}$
En dérivant de nouveau, il vient $S''(X) = (X - x_k)Q_k''(X) + Q_k'(X) + Q_k'(X)$ et donc $\boxed{S''(x_k) = 2Q_k'(x_k).}$

3.d. Notons que si x n'est égal à aucun des $x_i, i \neq k$, alors $Q_k(x) \neq 0$.
Il s'agit donc de prouver que pour un tel x, $\dfrac{Q_k'(x)}{Q_k(x)} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \dfrac{1}{x - x_i}$.

Mais on sait que $\dfrac{Q_k'(x)}{Q_k(x)}$ est la dérivée de $\ln(Q_k(x))$.

On a donc $\ln(Q_k(x)) = \ln\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} (x - x_i)\right) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \ln(x - x_i)$, et en dérivant cette égalité sur l'ouvert
$\mathbf{R} \setminus \{x_i, 1 \leqslant i \leqslant n, i \neq k\}$, il vient

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{x_i, 1 \leqslant i \leqslant n, i \neq k\},\ \frac{Q_k'(x)}{Q_k(x)} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{1}{x - x_i} \iff \boxed{Q_k'(x) = Q_k(x) \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{1}{x - x_i}.}$$

3.e. En particulier, en prenant $x = x_k$, on a $Q_k'(x_k) = Q_k(x_k) \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \dfrac{1}{x_k - x_i}$.

Et donc, en utilisant les résultats des questions 3.b et 3.d, u est un point critique de f si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ 2x_k - \frac{Q_k'(x_k)}{Q_k(x_k)} = 0 \iff 2x_k - \frac{S''(x_k)}{2S'(x_k)} = 0 \iff \boxed{S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 0.}$$

Notation
$\varphi(S)$ est un polynôme, et $\varphi(S)(x_k)$ est la valeur de ce polynôme en x_k.
À ne pas confondre avec $\varphi(S(x_k))$: $S(x_k)$ est un nombre (qu'on peut voir comme un polynôme constante), et $\varphi(S(x_k))$ est l'image de ce polynôme constant.

3.f. La condition précédente s'écrit encore : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \varphi(S)(x_k) = 0$.
Donc u est un point critique de f si et seulement si $\varphi(S)$ possède pour racines les $x_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.
Or $\varphi(S)$ possède les $x_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\varphi(S)(X) = Q(X)\prod_{i=1}^{n}(X - x_i) = R(X)S(X)$.
Puisque $\deg(\varphi(S)) \leqslant n$ et que $\deg(\varphi(S)) = \deg R(X) + \deg S(X) = \deg(R(X)) + n$, on en

déduit que $\deg R(X) = 0$: $R(X)$ est une constante.
Donc u est un point critique de f si et seulement si il existe une constante $\mu \in \mathbf{R}$ telle que $\varphi(S) = \mu S \Leftrightarrow S''(X) - 4XS'(X) = -\mu S(X)$.
En posant $\lambda = -\mu$, on obtient le résultat souhaité.
Le coefficient dominant de S est X^n, et donc $S(X) = X^n + P(X)$, avec $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$.
On en déduit que

$$S''(X) = n(n-1)X^{n-2} - 4X(nX^{n-1} + P'(X)) = -4nX^n + \underbrace{n(n-1)X^{n-2} - 4XP'(X)}_{\in \mathbf{R}_{n-1}[X]}.$$

Donc le terme dominant de $S''(X) - 4XS'(X)$ est $-4nX^n$.
Par identification des termes dominants dans l'égalité $S''(X) - 4XS'(X) = \lambda S(X)$, on obtient alors $\lambda = -4n$, et donc

$$\boxed{u \text{ est un point critique de } f \iff S''(X) - 4XS'(X) + 4nS(X) = 0.}$$

4.a. D'après la question 3.f, u est un point critique de f si et seulement si $\varphi(S) = 4nS$, c'est-à-dire si et seulement si S est un vecteur propre[8] de φ associé à la valeur propre $4n$.
Or, nous avons prouvé à la question 1.d que $E_{4n}(\varphi)$ est de dimension un, et donc contient un unique polynôme unitaire[9]. Notons P ce polynôme unitaire. Alors :

— si P possède n racines distinctes $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, alors $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est l'unique point critique de f.
— si P ne possède pas n racines distinctes, alors f ne possède pas de point critique sur $\mathcal{D}_n$.

Dans tous les cas, f possède au plus un point critique sur l'ouvert $\mathcal{D}_n$.

4.b. Si $n = 3$, nous avons prouvé à la question 1.c que

$$P = 3X - 4X^3 = X(3 - 4X^2) = -4X\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

est un vecteur propre de φ pour la valeur propre $12 = 4 \times 3$.
Donc $S = \dfrac{-1}{4}P = X\left(X - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est un vecteur propre de φ pour la valeur propre 12, et il est unitaire, scindé à racines simples.

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ admet un unique point critique, et ce point critique est } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).}$$

[8] Notons que S est toujours non nul.

[9] Unitaire = de coefficient dominant égal à 1.

Détails
Il peut y avoir plusieurs raisons au fait que P ne possède pas n racines distinctes : soit il possède des racines complexes non réelles, soit il possède des racines multiples (et les deux cas peuvent se produire simultanément).

Remarque
Notons qu'il existe un vecteur propre de φ unitaire et scindé à racines simples si et seulement si il existe un vecteur propre de φ scindé à racines simples. En effet, diviser un tel polynôme par ce coefficient dominant (comme nous venons de diviser P par -4) donne toujours un vecteur propre de φ scindé à racine simples, et qui est nécessairement unitaire.

Problème

Partie A

1.a. Pour $a \in \mathbf{N}$, on a

$$I_{a,0} = \int_0^1 x^a \, dx = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{a+1}}.$$

1.b. Posons $u(x) = \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$ et $v(x) = (1-x)^b$, qui sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment[10] $[0,1]$, avec $u'(x) = x^a$ et $v'(x) = -b(1-x)^{b-1}$. Alors, par intégration par parties,

$$I_{a,b} = \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx = \underbrace{\left[(1-x)^b \frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1}_{=0} + \frac{b}{a+1}\int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1}\,dx = \boxed{\frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}}.$$

[10] Notons qu'ici on a affaire à des intégrales de fonctions continues sur un segment, et qu'il est donc inutile de se poser la question de la convergence, ou de procéder au calcul de ces intégrales par passage à la limite.

1.c. Soit $(a,b) \in \mathbf{N}^2$. Si $b = 0$, alors le résultat a été prouvé à la question 1.a.
Supposons donc $b > 0$, et montrons par récurrence sur $k \leqslant b$ que $I_{a,b} = \dfrac{b}{a+1}\dfrac{b-1}{a+2}\cdots\dfrac{b-k+1}{a+k} I_{a+k,b-k}$.
Pour $k = 1$, il s'agit du résultat de la question précédente.
Supposons donc que $I_{a,b} = \dfrac{b}{a+1}\dfrac{b-1}{a+2}\cdots\dfrac{b-k+1}{a+k} I_{a+k,b-k}$ et que $k+1 \leqslant b$. Alors, en appliquant le résultat de la question précédente[11],

$$I_{a,b} = \frac{b}{a+1}\frac{b-1}{a+2}\cdots\frac{b-k+1}{a+k} I_{a+k,b-k} = \frac{b}{a+1}\frac{b-1}{a+2}\cdots\frac{b-k+1}{a+k}\frac{b-k}{a+k+1} I_{a+k+1,b-k-1}$$

[11] Qui s'applique car $b - k \in \mathbf{N}^*$.

$$= \frac{b}{a+1}\frac{b-1}{a+2}\cdots\frac{b-(k+1)+1}{a+(k+1)}I_{a+k+1,b-(k-1)}.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$, et donc est vraie pour tout $k \leqslant b$.
En particulier, pour $k=b$, on obtient

$$I_{a,b} = \frac{b}{a+1}\frac{b-1}{a+2}\cdots\frac{b-b+1}{a+b}I_{a+b,b-b} = \frac{b!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+b)}I_{a+b,0}.$$

Or, par la question 1.a, $I_{a+b,0} = \frac{1}{a+b+1}$, et donc en multipliant numérateur et dénominateur par $a!$, il vient

$$I_{a,b} = \frac{b!\times a!}{a!\times(a+1)(a+2)\dots(a+b)(a+b+1)} = \boxed{\frac{a!\times b!}{(a+b+1)!}}.$$

Rédaction ✎
Notons qu'on aurait également pu se passer de récurrence et donner le résultat «avec des pointillés» en exprimant $I_{a,b}$ en fonction de $I_{a+1,b-1}$, puis $I_{a+2,b-2}$, etc.

1.d. La fonction $f_{a,b}$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1, et elle est positive car pour $x \in [0,1]$, $x \geqslant 0$ et $1-x \geqslant 0$.
On a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)\,dt = \int_0^1 \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}t^a(1-t)^b\,dt = \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}I_{a,b} = 1.$$

Ainsi, $\boxed{f_{a,b} \text{ est une densité de probabilités.}}$

2.a. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_0^1 \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}t^{a+1}(1-t)^b\,dt$$

converge[12]. C'est le cas puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.
Et alors

$$E(X) = \int_0^1 \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}t^{a+1}(1-t)^b\,dt = \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}I_{a+1,b} = \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}\frac{(a+1)!\times b!}{(a+b+2)!} = \boxed{\frac{a+1}{a+b+2}}.$$

[12] Absolument, mais puisqu'il s'agit d'une fonction positive, la convergence est équivalente à la convergen absolue.

2.b. Par le théorème de transfert, X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{a,b}(t)\,dt$ converge, ce qui est le cas pour les mêmes raisons que précédemment.
On a alors

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{a,b}(t)\,dt = \int_0^1 \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}t^{a+2}(1-t)^b\,dt = \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}I_{a+2,b}\\ &= \frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}\frac{(a+2)!\times b!}{(a+b+3)!} = \frac{(a+2)(a+1)}{(a+b+3)(a+b+2)}.\end{aligned}$$

Par la formule de Huygens, on a alors

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2)-E(X)^2 = \frac{(a+2)(a+1)}{(a+b+3)(a+b+2)} - \frac{(a+1)^2}{(a+b+2)^2}\\ &= \frac{(a+2)(a+1)(a+b+2)-(a+1)^2(a+b+3)}{(a+b+3)(a+b+2)^2} = \frac{(a+1)\left((a+2)(a+b+2)-(a+1)(a+b+3)\right)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}\\ &= \boxed{\frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}}.\end{aligned}$$

2.c. Notons que F est continue sur $]-\infty,0[$, sur $[0,1]$ et sur $]1,+\infty[$, et qu'elle possède en $\pm\infty$ les limites d'une fonction de répartition.
On a $F(0) = 0 = \lim\limits_{x\to0^-} F(x)$ et

$$F(1) = (a+b+1)!\sum_{k=a+1}^{a+b+1}\frac{1^k\times 0^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!} = (a+b+1)!\frac{1}{(a+b+1)!} = 1 = \lim_{x\to1^+}F(x).$$

Danger !
On aurait vite fait de conclure que $F(1) = 0$ si l'on ne se souvient pas que, par convention, $0^0 = 1$, de sorte que le terme correspondant à $k = a+b+1$ est non nul (et c'est le seul).

Ainsi, F est continue en 0 et en 1 et donc est continue sur $\mathbf{R}$.
F est évidemment $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0 et en 1, et on a $F'(x) = 0$ si $x < 0$ et $F'(x) = 0$ si $x > 1$.

Astuce
Puisque F est continue sur $[0,1]$, elle est continue à droite en 0, et donc le calcul de la limite à gauche en 0 suffit à garantir sa continuité en 0.

Pour $x \in]0,1[$, notons que $F(x) = (a+b+1)!\left(\sum_{k=a+1}^{a+b} \frac{x^k(1-x)^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!} + \frac{x^{a+b+1}}{(a+b+1)!}\right)$ et que la dérivée de $x^k(1-x)^{a+b+1-k}$ est $kx^{k-1}(1-x)^{a+b+1-k} - (a+b+1-k)x^k(1-x)^{a+b-k}$.
Alors on a

$$\begin{aligned}
F'(x) =&(a+b+1)!\left(\sum_{k=a+1}^{a+b} \frac{kx^{k-1}(1-x)^{a+b+1-k} - (a+b+1-k)x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b+1-k)!} + \frac{(a+b+1)x^{a+b}}{(a+b+1)!}\right)\\
=&(a+b+1)!\left(\sum_{k=a+1}^{a+b} \frac{x^{k-1}(1-x)^{a+b+1-k}}{(k-1)!(a+b+1-k)!} - \sum_{k=a+1}^{a+b} \frac{x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b-k)!} + \frac{x^{a+b}}{(a+b)!}\right)\\
=&(a+b+1)!\left(\sum_{i=a}^{a+b-1} \frac{x^i(1-x)^{a+b-i}}{i!(a+b-i)!} - \sum_{k=a+1}^{a+b} \frac{x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b-k)!} + \frac{x^{a+b}}{(a+b)!}\right)\\
=&(a+b+1)!\left(\frac{x^a(1-x)^b}{a!\times b!} + \sum_{i=a+1}^{a+b-1} \frac{x^i(1-x)^{a+b-i}}{i!(a+b-i)!} - \sum_{k=a+1}^{a+b-1} \frac{x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b-k)!} - \frac{x^{a+b}}{(a+b)!} + \frac{x^{a+b}}{(a+b)!}\right)\\
=&(a+b+1)!\left(\frac{x^a(1-x)^b}{a!\times b!} - \frac{x^{a+b}}{(a+b)!} + \frac{x^{a+b}}{(a+b)!}\right)\\
=&\frac{(a+b+1)!}{a!\times b!}x^a(1-x)^b = f_{a,b}(x).
\end{aligned}$$

Chgt d'indice
$i = k-1$

Puisque $f_{a,b}$ est une fonction positive, on en déduit que F est croissante sur $[0,1]$, et d'après ce qui a été dit précédemment, il s'agit donc de la fonction de répartition d'une variable à densité.
Et alors $f_{a,b}$ en est une densité, puisqu'elle coïncide avec F' sur $\mathbf{R}$ privé d'un nombre fini de points.
Par conséquent, $\boxed{F \text{ est la fonction de répartition de } X}$, puisque cette dernière possède $f_{a,b}$ comme densité.

Méthode
Notons qu'ici, rien ne permettait de garantir que F est une fonction de répartition. On ne peut donc se contenter de vérifier qu'elle est continue et $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points, il faut également s'assurer de ses limites, et, plus dur, de sa croissance.
Il est sûrement possible de raisonner comme d'habitude en calculant la fonction de répartition de X, définie par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_{a,b}(t)\,dt$$

mais le calcul n'a rien d'agréable, et il est délicat de tomber sur l'expression proposée dans l'énoncé.

Partie B

3. À chaque tirage, il est possible d'obtenir une boule rouge ou une boule blanche. Donc, dans le meilleur des cas, on n'obtient que des boules rouges, soit n boules rouges, et dans le pire des cas, on n'obtient que des boules blanches, soit 0 boules rouges. Et tous les cas intermédiaires sont possibles, de sorte que $\boxed{X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]}$.

4.a. Il s'agit de remarquer que la probabilité d'obtenir une boule rouge est $\frac{x}{x+y}$ (nombre de boules rouges divisé par le nombre total de boules), et donc on peut proposer le programme suivant :

```
function res = tirage(x,y)
    r = rand()
    if r<x/(x+y) then
        res=0
    else
        res=1
    end
endfunction
```

4.b. À chaque étape, si $r = 0$ (si la boule tirée est rouge), alors on rajoute une boule rouge dans l'urne, donc on augmente x de 1.
Au contraire, si la boule tirée est blanche, on augmentera y de 1.
À la fin, X_n est le nombre de boules rouges **ajoutées** dans l'urne : c'est la différence entre le nombre final de boules rouges (stocké dans la variable x) et le nombre initial de boules rouges (stocké dans la variable a).

```
function Xn = experience(a,b,n)
    x =a
    y=b
    for k=1 :n
        r = tirage(x,y)
        if r==0 then
            x = x+1
        else
            y = y+1
        end
    end
    Xn = x-a
endfunction
```

4.c. Notons que X_n peut prendre $n+1$ valeurs différentes (de 0 à n), et que donc le vecteur `loi` va devoir être de taille $n+1$.
Puisque dans `Scilab` les éléments d'un vecteur sont numérotés à partir de 1 et non de 0, on stockera $P(X_n = k)$ dans la $(k+1)^{\text{ème}}$ colonne du vecteur `loi`, de sorte que $P(X_n = 0)$ corresponde à `loi(1)`, $P(X_n = 1)$ corresponde à `loi(2)`, etc.

Remarque
Puisque l'énoncé nous indique qu'on souhaite des fréquences, on n'oublie pas de diviser le vecteur `loi` par le nombre total de répétitions.

```
function loi = simulation(a,b,n,m)
    loi = zeros(1,n+1)
    for i = 1 :m
        u = experience(a,b,n)
        loi(u+1) = loi(u+1)+1
    end
    loi=loi/m
endfunction
```

5.a. Notons que sur les figures proposées, la loi de X_n semble être à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$ et non dans $[\![0, n]\!]$, mais ceci est du à la convention que nous avons adoptée pour stocker la loi de X_n dans un vecteur (voir question précédente).
Au vu de la régularité de ces figures, il semble raisonnable de conjecturer que X_n suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Conjecture
Bien entendu, cela peut-être un simple hasard, dû à un tirage particulièrement heureux (et peut-être très peu probable) si les simulations nous font penser à des lois uniformes. Donc une simulation n'autorise que des conjectures et ne prouve strictement rien !

5.b. On a $X_1(\Omega) = [\![0, 1]\!]$ et $[X_1 = 1] = B_1$, de sorte que $P(X_1 = 1) = P(B_1) = \dfrac{1}{2}$.

Et donc $\boxed{X_1 \text{ suit la loi de Bernoulli } \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right), \text{ qui n'est autre que la loi uniforme sur } [\![0,1]\!].}$

5.c. Sachant que $[X_n = k]$ est réalisé, c'est qu'on a ajouté k boules rouges, et donc $n-k$ boules blanches lors des n premiers tirages.
Lors du $n+1$-ième tirage, l'urne contient donc $n+2$ boules, dont $n-k+1$ blanches, de sorte que

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = P_{[X_n=k]}(\overline{R_{n+1}}) = \boxed{\frac{n-k+1}{n+2}.}$$

De même, on a $P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k+1) = P_{[X_n=k]}(R_{n+1}) = \boxed{\dfrac{k+1}{n+2}.}$

Et puisqu'on doit[13] avoir $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n+1} P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell) = 1$ et que $P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) + P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k+1) = 1$, alors nécessairement

$$\boxed{P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell) = 0 \text{ si } \ell \notin \{k, k+1\}.}$$

[13] Les $[X_{n+1} = \ell]$, $0 \leqslant \ell \leqslant n+1$ forment un système complet d'événements, donc la somme de leurs probabilités (pour la probabilité P comme pour la probabilité conditionnelle $P_{[X_n=k]}$) vaut 1.

5.d. Pour $n = 1$ le résultat a été prouvé à la question 5.b.
Supposons donc que X_n suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.
Pour $\ell \in [\![0, n+1]\!]$, la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X_n = k], k \in [\![0, n]\!]\}$ nous donne

$$P(X_{n+1} = \ell) = \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell).$$

Si $\ell = 0$, alors seul reste le terme correspondant à $k = 0$ et donc

$$P(X_{n+1} = \ell) = P(X_n = 0)P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

De même, pour $\ell = n+1$, on a

$$P(X_{n+1} = n+1) = P(X_n = n)P_{[X_n=n]}(X_{n+1} = n+1) = \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

Enfin, pour $\ell \in [\![1, n]\!]$, les termes $k = \ell$ et $k = \ell - 1$ sont non nuls et alors

$$\begin{aligned}P(X_{n+1} = \ell) &= P(X_n = \ell - 1)P_{X_n=\ell-1}(X_{n+1} = \ell) + P(X_n = \ell)P_{[X_n=\ell]}(X_{n+1} = \ell)\\ &= \frac{1}{n+1}\frac{\ell}{n+2} + \frac{1}{n+1}\frac{n+1-\ell}{n+2} = \frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

Et donc X_{n+1} suit bien la loi uniforme sur $[\![0, n+1]\!]$.
Par le principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0, n]\!]).}$

6.a. D'après la formule des probabilités composées, on a

$$\begin{aligned}P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \overline{R_{k+2}} \cap \cdots \overline{R_n}) &= P(R_1)P_{R_1}(R_2)\cdots P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k)P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_k}(\overline{R_{k+1}})\cdots P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap\overline{R_{n-1}}}(\overline{R_n})\\ &= \frac{a}{a+b}\frac{a+1}{a+b+1}\cdots\frac{a+k-1}{a+b+k-1}\frac{b}{a+b+k}\frac{b+1}{a+b+k+1}\cdots\frac{b+(n-k)-1}{a+b+n-1}\\ &= \boxed{\frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!}{(a-1)!(b-1)!}\frac{(a+b-1)!}{(a+b+n-1)!}}.\end{aligned}$$

6.b. Nous venons de calculer la probabilité de tirer k boules rouges, puis $n-k$ boules blanches lors des n premiers tirages.
Or, si l'on se **fixe** un autre ordre dans lequel tirer k boules rouges et $n-k$ boules blanches, nous trouverons la même probabilité. En effet, l'urne contiendra toujours successivement $a+b$ boules, puis $a+b+1$, etc, $a+b+n-1$. Donc les dénominateurs restent les mêmes. Au moment de tirer la première boule rouge, l'urne en contiendra toujours a, puis $a+1$ au moment de tirer la seconde, etc, $a+k-1$ au moment de tirer la k-ième. Et de même pour les boules blanches, donc le numérateur est le même.
Enfin, il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir les numéros des tirages auxquels sortent les boules rouges, de sorte que

$$\boxed{P(X_n = k) = \binom{n}{k}\frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!}{(a-1)!(b-1)!}\frac{(a+b-1)!}{(a+b+n-1)!}}.$$

> **Rédaction**
> Il existe de nombreuses manières de rédiger une telle question, la difficulté étant de trouver l'équilibre entre l'intuition expliquée par des phrases, et le calcul rigoureux. L'important étant de montrer qu'on a bien compris la situation à laquelle on est confronté.

6.c. En utilisant $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, il vient

$$\begin{aligned}P(X_n = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!}{(a-1)!(b-1)!}\frac{(a+b-1)!}{(a+b+n-1)!}\\ &= \frac{(a+k-1)!}{k!(a-1)!}\frac{(b+n-k-1)!}{(n-k)!(b-1)!}\frac{n!(a+b-1)!}{(a+b+n-1)!}\\ &= \binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}\frac{1}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} = \boxed{\frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}}.\end{aligned}$$

6.d. Notons que quels que soient les valeurs de a et de b, $\{[X_n = k], k \in [\![0, n]\!]\}$ est un système complet d'événements et donc

$$\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1} = \binom{a+b+n-1}{a+b-1} \qquad (\star)$$

D'après le théorème de transfert, on a

$$E(X_n + a) = \sum_{k=0}^{n}(k+a)P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n}(k+a)\frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$
$$= \frac{1}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \sum_{k=0}^{n}(k+a)\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}$$
$$= \frac{1}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \sum_{k=0}^{n} a\binom{a+k}{a}\binom{b+n-k-1}{b-1}.$$

Convergence
Nous avons ici affaire à une variable aléatoire à support fini, donc il n'est pas besoin de se préoccuper de la convergence des sommes qui apparaissent : ce sont des sommes finies.

Rappel
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Mais en changeant a en $a+1$ dans l'équation ($\star$), il vient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{a+k}{a}\binom{b+n-k-1}{b-1} = \binom{a+b+n}{a+b}$$

et donc

$$E(X_n + a) = \frac{a}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}\binom{a+b+n}{a+b} = a\frac{(a+b-1)!n!}{(a+b+n-1)!}\frac{(a+b+n)!}{n!(a+b)!} = \frac{a(a+b+n)}{a+b}.$$

Et donc[14]

$$E(X_n) = E(X_n + a) - a = \frac{a(a+b+n)}{a+b} - \frac{a(a+b)}{a+b} = \boxed{\frac{na}{a+b}.}$$

[14] Enfin !

Partie C

7.a. X_n est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, donc Y_n prend les valeurs $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$.
En particulier, si $x < 0$, alors $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = \boxed{0.}$

7.b. Pour les mêmes raisons, si $x \geqslant 1$, on a $F_n(x) = \boxed{1.}$

8.a. On a $F_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P\left(\frac{X_n}{n} \leqslant x\right) = P(X_n \leqslant nx)$.
Mais X_n ne prend que des valeurs entières, de sorte que $[X_n \leqslant nx] = [X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor]$.
Et donc $\boxed{F_n(x) = P(X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor).}$

Autrement dit
Il n'y a pas d'entier dans $]\lfloor nx \rfloor, nx[$, donc si X_n prend une valeur (nécessairement entière) inférieure ou égale à nx, elle prend donc une valeur inférieure ou égale à $\lfloor nx \rfloor$.

8.b. On a donc

$$F_n(x) = P(X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor}\frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$
$$= \boxed{\frac{1}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \sum_{i=a}^{a+b-1}\binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i}\binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}.}$$

Explication
On souhaite avoir
$$\lfloor nx \rfloor = p - a$$
donc il s'agit d'appliquer la formule de l'énoncé avec $p = a + \lfloor nx \rfloor$.

8.c. On a, par définition, $\binom{m}{j} = \frac{m(m-1)\cdots(m-j+1)}{j!}$.
Or, à j fixé, $m(m-1)\cdots(m-j+1)$ est un polynôme en m, équivalent à son terme de plus haut degré, à savoir m^j.
Et donc

$$\boxed{\binom{m}{j} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{m^j}{j!}.}$$

8.d. Par ce qui précède, on a

$$\binom{a+b+n-1}{a+b-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(a+b+n-1)^{a+b-1}}{(a+b-1)!} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{n^{a+b-1}}{(a+b-1)!}.$$

Puisque $nx-1 \leqslant \lfloor nx \rfloor < nx$, par le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \lfloor nx \rfloor = +\infty$.
Il est donc légitime d'utiliser l'équivalent obtenu à la question précédente :

$$\forall i \in [\![a, a+b-1]\!],\ \binom{\lfloor nx\rfloor + a}{i}\binom{b+n-1-\lfloor nx\rfloor}{a+b-1-i} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\lfloor nx\rfloor + a)^i}{i!}\frac{(b+n-1-\lfloor nx\rfloor)^{a+b-1-i}}{(a+b-1-i)!}$$

Or, on a $\lfloor nx\rfloor + a \sim \lfloor nx\rfloor$.
De plus, on a $\dfrac{nx-1}{nx} \leqslant \dfrac{\lfloor nx\rfloor}{nx} < \dfrac{nx}{nx}$ et donc par le théorème des gendarmes, $\dfrac{\lfloor nx\rfloor}{nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
de sorte que $\lfloor nx\rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} nx$.
De même, on a

$$\frac{b+n-1-nx}{n(1-x)} < \frac{b+n-1-\lfloor nx\rfloor}{n(1-x)} \leqslant \frac{b+n-1-(nx-1)}{n(1-x)}$$

et donc $\dfrac{b+n-1-\lfloor nx\rfloor}{n(1-x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $b+n-1-\lfloor nx\rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} n(1-x)$.
On en déduit donc que

$$\forall i \in [\![a, a+b-1]\!],\ \frac{\binom{\lfloor nx\rfloor + a}{i}\binom{b+n-1-\lfloor nx\rfloor}{a+b-1-i}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(a+b-1)!}{n^{a+b-1}}\frac{(nx)^i}{i!}\frac{(n(1-x))^{a+b-1-i}}{(a+b-1-i)!} = (a+b-1)!\frac{x^i(1-x)^{a+b-1-i}}{(a+b-1-i)!}.$$

En particulier, on a

$$\forall i \in [\![a, a+b-1]\!],\ \frac{\binom{\lfloor nx\rfloor + a}{i}\binom{b+n-1-\lfloor nx\rfloor}{a+b-1-i}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (a+b-1)!\frac{x^i(1-x)^{a+b-1-i}}{(a+b-1-i)!}.$$

Et donc par somme de limites

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = (a+b-1)!\sum_{i=a}^{a+b-1}\frac{x^i(1-x)^{a+b-1-i}}{(a+b-1-i)!}.}$$

⚠Équivalents
Une grave erreur serait de sommer à un moment les équivalents, alors qu'on ne peut sommer que les limites. Notons que ceci n'est possible que parce que le nombre de termes de la somme est fixé.

9. On a $F_n(0) = P(Y_n \leqslant 0) = P(X_n \leqslant 0) = P(X_n = 0)$.
Et donc

$$F_n(0) = \frac{\binom{b+n-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{b-1}}{(b-1)!}\frac{(a+b-1)!}{n^{a+b-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(a+b-1)!}{(b-1)!}\frac{1}{n^a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

10. Notons $F_{a,b}(x)$ la fonction de répartition d'une loi Beta de paramètres a et b.
Alors, d'après la question 2.c, on a en particulier,

$$\forall x \in [0,1],\ F_{a-1,b-1}(x) = (a+b-1)!\sum_{k=a}^{a+b-1}\frac{x^k(1-x)^{a+b-k-1}}{k!(a+b-k-1)!}.$$

Soit $x \in \mathbf{R}$. Si $x<0$, alors $F_n(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = 0 = F_{a-1,b-1}(x)$.
Si $x=0$, alors $F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = F_{a-1,b-1}(0)$ d'après la question précédente.
Si $x \in]0,1[$, alors $F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_{a-1,b-1}(x)$ par 8.d.
Enfin, si $x \geqslant 1$, alors $F_n(x) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = F_{a-1,b-1}(x)$.
Ainsi,

$$\forall x \in \mathbf{R}, F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_{a-1,b-1}(x).$$

On en déduit que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y suivant la loi Beta de paramètres $a-1$ et $b-1$.

Pour tout x
Notons que $F_{a-1,b-1}$ étant continue sur $\mathbf{R}$ tout entier, il est indispensable d'avoir la convergence pour tout x (= en tout point de contiuité de $F_{a-1,b-1}$).

11. On a $E(Y_n) = \dfrac{E(X_n)}{n} = \dfrac{a}{a+b} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{a}{a+b}$.
D'autre part, d'après la question 2.a, on a $E(Y) = \dfrac{a-1+1}{a-1+b-1+2} = \dfrac{a}{a+b}$.
Donc on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n) = E(Y).}$

Ce résultat n'est pas très surprenant, mais n'était pas pour autant prévisible : $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ n'implique pas nécessairement[15] $E(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E(X)$.
Par exemple, si l'on considère la suite de variables aléatoires X_n définies par

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \text{ et } P(X_n = n) = \frac{1}{n},$$

alors il est aisé de prouver que $E(X_n) = 1$ et que $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} 0$, alors que $E(0) = 0$.

[15] Et même si un tel résultat était vrai, il serait un peu cavalier de l'affirmer sans preuve alors qu'il ne figure pas dans le cours !

EXTRAITS COMMENTÉS DU RAPPORT DU JURY

Le problème était assez long et [...] fut finalement traité partiellement, sûrement en raison de la longueur du sujet, les candidats ayant peut-être perdu un peu de temps sur l'exercice 2. Nous invitons les candidats à davantage prendre le temps de bien lire le sujet en entier au début d'épreuve et de bien repérer les questions abordables.

✎ Même si ce n'est peut-être pas totalement satisfaisant intellectuellement, le but d'une épreuve en temps limité est bien de traiter le plus de questions possibles afin de se démarquer des autres candidats, et non d'essayer de faire jusqu'au bout tel ou tel exercice.

Exercice 2

2.a — Même si c'était explicitement demandé par la question, peu de candidats justifient l'exitence des dérivées partielles. On attendait l'étude de $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto \ln(y - x)$ séparément, l'une étant polynomiale, l'autre étant une composée à exhiber.

✎ Pour les fonctions de plusieurs variables, il n'est pas question de vérifier le caractère $\mathscr{C}^1/\mathscr{C}^2$ par une formule magique du type «par opérations sur les fonctions usuelles».
Il faut systématiquement revenir à des fonctions polynomiales (les seules fonctions de plusieurs variables dont on sait qu'elles sont $\mathscr{C}^1$) et exhiber les opérations réalisée à partir de ces fonctions.
Ce type de question n'est pas très difficile (c'est toujours la même chose !), mais les différentes rédactions que l'on peut rencontrer dans les copies sont très révélatrices d'une mauvaise compréhension du sujet.

2.d — Nombreux sont ceux qui affirment que toute matrice triangulaire est diagonalisable.

✎ Une erreur récurrente. Rappelons que pour une matrice triangulaire $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, si les valeurs propres sont bien les coefficients diagonaux, la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ n'est pas **égale** au nombre de fois où λ apparaît sur la diagonale, mais seulement **inférieure ou égale**. Et donc on n'a pas toujours $n = \sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Spec}(A)} \dim E_\lambda(A)$.

On pourra par exemple penser à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui ne possède que 0 pour valeur propre, mais avec $\dim E_0(A) = 2 - \mathrm{rg}(A) = 1$.

3.a — Peu de candidats ont réellement calculé les dérivées partielles d'ordre 1 de f, se contentant de recopier le résultat de la question suivante. Ces candidats-là n'ont alors pas eu de points sur cette question.

✎ Voir qu'un résultat est donné dans la suite de l'énoncé permet de vérifier ses résultats, mais difficilement de bluffer, le correcteur étant très conscient que le résultat figure à la question suivante !
Bluffer ainsi est dangereux : il y a toutes les chances que le correcteur s'en rende compte, et qu'il soit donc plus vigilant dans la suite et moins enclin à donner des points lorsque certains arguments manquent.

ECRICOME 2015

Exercice 1

Sujet : Autour des polynômes d'Hermite. **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : algèbre bilinéaire, polynômes, diagonalisation.

Commentaires : exercice plutôt classique, à l'exception de la question 4 qui exige une compréhension approfondie des concepts d'algèbre.

Soit n un entier naturel et soit $E = \mathbf{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout polynôme P de E, on pose : $\varphi(P) = P'' - 2XP'$.

1. a. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
   b. Déterminer la matrice associée à φ dans la base canonique de E.
   c. Montrer que φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
2. Pour tout (P, Q) de E^2, on note :
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt.$$
   a. Montrer que pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q\rangle$ est bien défini.
   b. Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
3. Montrer que φ est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
4. On définit une famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de polynômes de E par :
$$P_0 = 1 \text{ et } \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ P_k = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, X^k\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i.$$
   a. Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_n[X]$.
   b. Montrer que la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est constituée de vecteurs propres de φ.

Exercice 2

Sujet : Approximation de π par la méthode de Snellius **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : analyse réelle, trigonométrie, polynômes,suites réelles, `Scilab` .

1. On note pour tout $x \in I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:
$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$
   a. Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.
   b. On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.
   Justifier que u est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $u'(x) = \dfrac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.
   c. En déduire les variations de u sur I.
   d. On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$.
   Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbf{R}[X]$, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$, $v'(x) = \dfrac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos x)^2}$.
   e. En déduire les variations de v sur I.
   f. Montrer que :
$$\forall x \in I,\ g(x) < x < f(x).$$
2. a. En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   b. Déduire de la question 1.f un encadrement de π.

3. On pose pour tout entier naturel n,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right).$$

a. Justifier que pour tout réel θ,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta),$$

et en déduire que pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad (\star) \qquad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}} \quad (\star\star)$$

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$9\times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

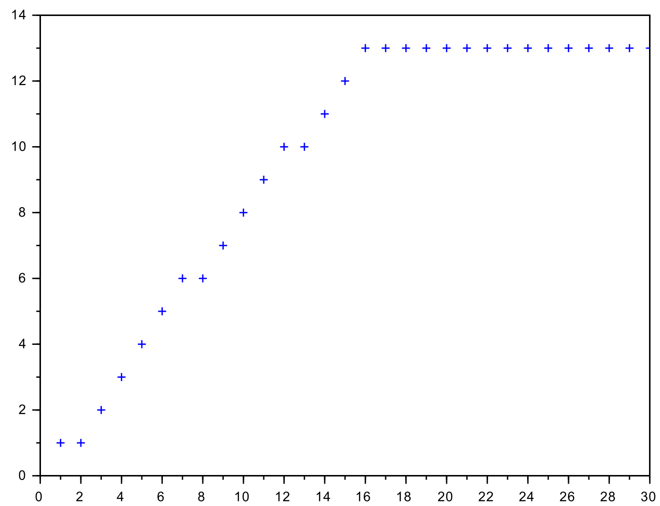
c. Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers l'infini.

d. Compléter la fonction `Scilab` suivante afin qu'elle retourne, à l'aide des relations $(\star)$ et $(\star\star)$ et de la question 3.b, une approximation x de π à e près, ainsi que le nombre k d'itérations qui ont été nécessaires.

```
function [x,k]=h(e)
        k = 0
        a = sqrt(3) / 2
        b = 1 / 2
        while ..........
                a = ..........
                b = ..........
                k = ..........
        end
        x = ..........
endfunction
```

e. On souhaite étudier l'évolution du nombre d'itérations nécessaires en fonction de la précision souhaitée. Écrire une fonction Scilab qui prend comme paramètre d'entrée un entier p et qui retourne un vecteur de taille p qui contient les nombres d'itérations nécessaires pour les précisions 10^{-k}, pour $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

f. On utilise la fonction précédente avec $p = 30$ et on représente graphiquement les valeurs obtenues. On obtient le graphe suivant :



Commenter ce graphe.

Problème

Sujet : Espérance d'un maximum/minimum de variables aléatoires i.i.d **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : variables aléatoires discrètes, variables aléatoires à densité, lois de max/min

Modifications apportées au sujet d'origine : une erreur d'énoncé a été rectifiée à la question 11.

Commentaires : problème intéressant, même si trop long comme souvent à Ecricome. Les quatre premières parties sont de difficulté raisonnable, les deux dernières étant réservées à de très bons candidats.

Toutes les variables aléatoires introduites dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Dans tout le problème, on considère X une variable aléatoire à valeurs positives, et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X.
On note pour tout entier $n \geqslant 2$, $Y_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

On dit que la loi de X est **implosive** si X n'admet pas d'espérance et s'il existe un entier $m \geqslant 2$ tel que Y_m admet une espérance.
Si la loi de X est implosive, on appelle **indice d'implosion de** X le plus petit entier $m \geqslant 2$ tel que Y_m admet une espérance.

On notera F la fonction de répartition de X et F_n la fonction de répartition de Y_n pour tout entier $2 \leqslant k \leqslant m$.
Dans le cas où X (respectivement Y_n) admet une densité, on la notera f (resp. f_n).

Partie A – Résultats préliminaires

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction de répartition de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

2. On suppose dans cette question que X admet une densité f. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, Y_n admet une densité f_n et que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_n(x) = nf(x)\,(1 - F(x))^{n-1}.$$

3. On souhaite prouver dans cette question que pour une variable aléatoire positive V admettant une densité φ continue sur $\mathbf{R}^+$ et dont on note la fonction de répartition Φ, on a l'équivalence suivante :

$$V \text{ admet une espérance } \iff \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,dt \text{ converge,}$$

et qu'on a dans ce cas :

$$E(V) = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,dt.$$

   a. Montrer que :

$$\forall x \geqslant 0,\ \int_0^x t\varphi(t)\,dt = \int_0^x (1 - \Phi(t))\,dt - x(1 - \Phi(x)).$$

   b. On suppose que V admet une espérance.
   Montrer que $x\,(1 - \Phi(x))$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
   En déduire que $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,dt$ converge.

   c. On suppose que $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,dt$ converge. Montrer que V admet une espérance.

   d. Conclure.

On admet que le résultat de la question 3 reste vrai si la fonction φ est continue sur $\mathbf{R}^+$ sauf en un nombre fini de points.

Partie B – Quelques exemples

4. On suppose dans cette question que X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{\alpha}{1 + x^2} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

   a. Déterminer le réel α.

b. Donner la fonction de répartition F de X.

c. Déterminer la fonction de répartition F_2 de Y_2 et justifier que Y_2 admet une densité f_2, que l'on calculera.

d. Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

e. En déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.

f. En déduire que la loi de X est implosive et donner son indice d'implosion.

5. On suppose dans cette question que X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

a. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 1$.

b. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

c. Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, donner la valeur de $F(k) = P(X \leqslant k)$.

d. Déterminer la loi de Y_2. Admet-elle une espérance ?

e. Déterminer la loi de Y_3. Admet-elle une espérance ?

f. La loi de X est-elle implosive ? Si oui, quel est son indice d'implosion ?

Partie C – Loi implosive d'indice fixé

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « *Existe-t-il, pour tout entier naturel $m \geqslant 2$, une loi qui est implosive et d'indice d'implosion égal à m ?* »

6. Soit $\alpha > 1$.

a. Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{a}{x^\alpha} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

soit une densité de probabilités.

b. Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.
Déterminer la fonction de répartition F de X.

c. Discuter, en fonction de α, l'existence de l'espérance de X.

d. Discuter, en fonction de n et de α, l'existence de l'espérance de Y_n.

e. Répondre à la question posée.

Partie D – Lois non implosives

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « *Existe-t-il des variables aléatoires positives qui n'admettent pas d'espérance et dont la loi n'est pas implosive ?* »

7. **a.** Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{a}{x\ln^2(x)} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

b. Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.
Déterminer la fonction de répartition F de X.

c. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

d. Discuter l'existence de l'espérance de Y_n.

e. Répondre à la question posée.

Partie E - Variables implosant sur une autre

Soit Y une variable aléatoire positive admettant une espérance. On dit que **la variable aléatoire X implose sur Y** si X est implosive et si, en notant m son indice d'implosion, Y_m est de même loi que Y.

8. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et soit n un entier supérieur ou égal à 2 tel que Y_n a la même loi que Y. À l'aide de la formule de la question **A.1**, exprimer la fonction de répartition de X en fonction de celle de Y.
9. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. À l'aide de la question précédente, montrer qu'il n'existe aucune variable aléatoire X implosive qui implose sur Y.
10. Soit m un entier tel que $m \geqslant 2$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y admettant une espérance et une variable aléatoire X implosive d'indice d'implosion m qui implose sur Y.
(on pourra s'inspirer des résultats de la partie C).
11. Soit Y une variable aléatoire positive admettant une densité g. On note G sa fonction de répartition.
Soit m un entier tel que $m \geqslant 2$. Montrer que s'il existe une variable aléatoire X implosive, d'indice d'implosion m, qui implose sur Y, alors pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant m$, il existe une variable aléatoire implosive, d'indice d'implosion k, qui implose sur Y.

Partie F - Variables explosives

On pose pour tout entier $n \geqslant 2$, $Z_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

On dit que **la loi de X est explosive** s'il existe un entier $m \geqslant 2$ tel que Z_m n'admet pas d'espérance. Si la loi de X est explosive, on appelle **indice d'explosion** de X le plus petit entier $m \geqslant 2$ tel que Z_m n'admet pas d'espérance.

12. Pour un entier m donné, existe-t-il des variables aléatoires de loi explosive dont l'indice d'explosion est m ?
13. Existe-t-il des variables aléatoires positives qui ne sont pas explosives ?

ECRICOME 2015 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1.a. Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$. Alors $\deg P \leqslant n$, de sorte que $\deg P' \leqslant n-1$ et $\deg P'' \leqslant n-2$.
Et alors $\deg(XP') \leqslant n$ de sorte que

$$\deg \varphi(P) = \deg(P'' - 2XP') \leqslant n.$$

Ainsi, φ est bien une application de $\mathbf{R}_n[X]$ dans lui-même.
Soient $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\varphi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)'' - 2X(\lambda P + Q)' = \lambda(P'' - 2XP') + (Q'' - 2XQ') = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).$$

Donc φ est une application linéaire de $\mathbf{R}_n[X]$ dans lui-même : c'est $\boxed{\text{un endomorphisme de } \mathbf{R}_n[X].}$

1.b. On a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = -2X$, et pour $k \in [\![2, n]\!]$, $\varphi(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 2kX^k$, de sorte que la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ est

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3) & \ldots & \varphi(X^{n-1}) & \varphi(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -2n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-2} \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R}).$$

1.c. La matrice M est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont $0, -2, -4, \ldots, -2n$.
Ce sont les valeurs propres de M qui sont alors au nombre de $n+1$.
Ainsi, M est une matrice carrée de taille $n+1$ possédant $n+1$ valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.
Et puisque M est la matrice de φ dans la base canonique de E, $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable.}}$

2.a. La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbf{R}$, donc les éventuels problèmes de convergence de l'intégrale sont en $\pm\infty$.
Notons a_kX^k le terme dominant de $P(X)$ et b_iX^i le coefficient dominant de $Q(X)$
Alors au voisinage de $\pm\infty$, on a

> **Remarque**
> On peut supposer a_k et b_i non nuls car si $P = 0$ ou $Q = 0$, alors le résultat est évident.

$$t^2P(t)Q(t)e^{-t^2} \sim t^2a_kt^kb_it^ie^{-t^2} \sim a_kb_it^{k+i+2}e^{-t^2} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $P(t)Q(t)e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt$.
De même, $\int_{-\infty}^{-1} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt$ converge car $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^2}$ converge, et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt$ converge.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } (P, Q) \in E^2,\ \langle P, Q\rangle \text{ est bien défini.}}$

2.b. Commençons par remarquer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien une application de $\mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}$.

Soient $P, Q, R \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \langle \lambda P + Q, R\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda P(t) + Q(t))R(t)e^{-t^2}\,dt \\ &= \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t^2}\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t^2}\,dt \\ &= \lambda\langle P, R\rangle + \langle Q, R\rangle \end{aligned}$$

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable.

Pour $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$,

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t^2}\,dt = \langle Q, P \rangle.$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, et par conséquent bilinéaire symétrique.

Si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, la fonction $t \mapsto P^2(t)e^{-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbf{R}$, donc par positivité de l'intégrale,

$$\langle P, P \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t^2}\,dt \geqslant 0.$$

Enfin, si $\langle P, P \rangle = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t^2}\,dt = 0$, puisque la fonction $t \mapsto P^2(t)e^{-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbf{R}$, on a

$$\forall t \in \mathbf{R},\ P^2(t)e^{-t^2} = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbf{R},\ P(t) = 0.$$

Et donc $P = 0$.

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

Rédaction Il est important de mentionner à la fois la positivité et la continuité de l'intégrande. En effet, le résultat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbf{R}, f(t) = 0$$

nécessite ces deux hypothèses, et n'est plus vrai dès que l'on enlève une des deux hypothèses.

3. Soient $P, Q \in E^2$. Alors

$$\langle \varphi(P), Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(P))(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)e^{-t^2}\,dt$$

Soient $A \leqslant B$. Alors

$$\int_A^B (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)e^{-t^2}\,dt = \int_A^B P''(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt - \int_A^B 2tP'(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt$$

Procédons à une intégration par parties dans la première intégrale en posant $u(t) = P'(t)$ et $v(t) = Q(t)e^{-t^2}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A, B]$, avec $u'(t) = P''(t)$ et $v'(t) = (Q'(t) - 2tQ(t))e^{-t^2}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_A^B (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)e^{-t^2}\,dt &= [P'(t)Q(t)e^{-t^2}]_A^B - \int_A^B P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\,dt \\ &\quad + \int_A^B 2tP'(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt - \int_A^B 2tP'(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Lorsque $A \to -\infty$, alors $P'(A)Q(A)e^{-A^2} \to 0$ de sorte que

$$\int_{-\infty}^B (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)e^{-t^2}\,dt = P'(B)Q(B)e^{-B^2} - \int_{-\infty}^B P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\,dt.$$

Détails Si P est un polynôme, alors au voisinage de $+\infty$, $P(t)$ est équivalent à son terme de plus haut degré, qui est de la forme at^n.
Et alors, en posant, $x = t^2$, on a $P(t)e^{-t^2} \sim at^n e^{-t^2}$ et

$$at^n e^{-t^2} = ax^{n/2}e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Puis en faisant tendre B vers $+\infty$, il vient

$$\langle \varphi(P), Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)e^{-t^2}\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\,dt.$$

De même, en inversant les rôles de P et Q, on a

$$\langle P, \varphi(Q) \rangle = \langle \varphi(Q), P \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} Q'(t)P'(t)e^{-t^2}\,dt = \langle \varphi(P), Q \rangle.$$

Ceci prouve donc que φ est un endomorphisme symétrique de $\mathbf{R}_n[X]$.

4.a. Montrons par récurrence sur $i \leqslant n$ que $(P_0, \dots, P_i)$ est une famille orthogonale de E.
Pour $i = 0$, le résultat est évident : toute famille formée d'un seul vecteur non nul est orthogonale.

Supposons donc que $(P_0, \dots, P_i)$ est orthogonale.
Pour tout $j \in [\![0, i]\!]$, on a

$$\langle P_{i+1}, P_j\rangle = \left\langle X^{i+1} - \sum_{\ell=0}^{i} \frac{\langle P_\ell, X^{i+1}\rangle}{\langle P_\ell, P_\ell\rangle} P_\ell, P_j \right\rangle = \langle X^{i+1}, P_j\rangle - \sum_{\ell=0}^{i} \frac{\langle P_\ell, X^{i+1}\rangle}{\langle P_\ell, P_\ell\rangle}\langle P_\ell, P_j\rangle.$$

Détails

Les $\dfrac{\langle P_\ell, X^{i+1}\rangle}{\langle P_\ell, P_\ell\rangle}$ sont des réels. On peut donc les sortir du produit scalaire par linéarité à gauche.

Pour $\ell \neq j$, alors $\langle P_\ell, P_j\rangle = 0$ par hypothèse de récurrence.
Ainsi, il ne reste qu'un terme non nul dans la somme, correspondant à $\ell = j$:

$$\langle P_{i+1}, P_j\rangle = \langle X^{i+1}, P_j\rangle - \frac{\langle P_j, X^{i+1}\rangle}{\langle P_j, P_j\rangle}\langle P_j, P_j\rangle = \langle X^{i+1}, P_j\rangle - \langle X^{i+1}, P_j\rangle = 0.$$

Ainsi, P_{i+1} est orthogonal à $P_0, \dots, P_i$: la famille $(P_0, \dots, P_{i+1})$ est orthogonale.
Par le principe de récurrence, $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale de E.

Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est nécessairement libre, donc $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre de E, de cardinal $n+1 = \dim E$: c'est une base de E.
Nous avons donc bien prouvé que $\boxed{(P_0, \dots, P_n) \text{ est une base orthogonale de } E.}$

Détails

Les P_i sont non nuls car $\deg P_i = i$, ce qui se prouve aisément par récurrence sur i.

Remarque : le procédé de construction des P_i ressemble à un procédé de Gram-Schmidt, appliqué à la famille $(1, X, \dots, X^n)$.
Il en diffère toutefois légèrement en ceci que, à chaque étape, on ne normalise pas le vecteur obtenu en le divisant par sa norme. Nous venons de montrer qu'on obtenait alors une famille orthogonale, mais non nécessairement orthonormée, puisque les vecteurs n'ont pas de raison d'être de norme 1.

4.b. Notons que $\left(\dfrac{P_0}{\|P_0\|}, \dots, \dfrac{P_n}{\|P_n\|}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}_n[X]$.
Mieux : pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathscr{B}_k = \left(\dfrac{P_0}{\|P_0\|}, \dots, \dfrac{P_k}{\|P_k\|}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}_k[X]$.
De plus, il est aisé de prouver par récurrence que P_k est de degré k, donc dans $\mathbf{R}_k[X]$.

Enfin, $\mathbf{R}_k[X]$ est stable par φ car $\forall i \in [\![0, k]\!]$, $\varphi(X^i) \in \mathbf{R}_k[X]$.
Donc $\varphi(P_k) \in \mathbf{R}_k[X]$ et alors la décomposition de $\varphi(P_k)$ dans la base orthonormée $\mathscr{B}_k$ est

$$\varphi(P_k) = \sum_{i=0}^{k} \left\langle \varphi(P_k), \frac{P_i}{\|P_i\|}\right\rangle \frac{P_i}{\|P_i\|} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle \varphi(P_k), P_i\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i.$$

Rappel

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E, alors pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Puisque φ est symétrique, alors

$$\varphi(P_k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle P_k, \varphi(P_i)\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i.$$

Pour $0 \leqslant i \leqslant k-1$, $\varphi(P_i) \in \mathbf{R}_{k-1}[X]$, et donc $\varphi(P_i)$ est orthogonal à P_k.
Ainsi, dans la somme précédente, seul le terme correspondant à $i = k$ est non nul et donc

$$\varphi(P_k) = \frac{\langle P_k, \varphi(P_k)\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle} P_k.$$

Ainsi, si $\lambda_k = \dfrac{\langle P_k, \varphi(P_k)\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle} \in \mathbf{R}$, $\varphi(P_k) = \lambda_k P_k$, prouvant que $\boxed{P_k \text{ est un vecteur propre de } \varphi.}$

Remarque

Rétrospectivement, la valeur de λ_k n'a rien de surprenant : pour tout endomorphisme f, si x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors

$$\langle x, f(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle.$$

Et donc $\lambda = \dfrac{\langle x, f(x)\rangle}{\langle x, x\rangle}$.

Une étude un peu plus poussée prouve qu'en fait $\lambda_k = -2k$.

EXERCICE 2

1.a. 1 est une racine évidente de P, donc on peut factoriser P par $X - 1$:

$$P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1 = (X-1)(2X^2 - X - 1).$$

Mais les racines de $2X^2 - X - 1$ sont 1 et $-\frac{1}{2}$ de sorte que $2X^2 - X - 1 = 2(X-1)\left(X+\frac{1}{2}\right)$. Et donc

$$\boxed{P(X) = 2(X-1)^2\left(X+\frac{1}{2}\right).}$$

Coeff. dominant Attention à ne pas oublier le coefficient dominant lorsqu'on factorise un polynôme qui n'est pas unitaire !

1.b. La fonction sin est dérivable sur $\mathbf{R}$ et tan est dérivable sur I, donc f est dérivable sur I. Puisque $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, la fonction u est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I. On a alors

$$\forall x \in I, u'(x) = \frac{1}{3}\left(2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) - 1 = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{3\cos^2 x} \boxed{= \frac{P(\cos x)}{3\cos^2 x}.}$$

Signe La factorisation de P obtenue précédemment permet d'en déduire son signe : il est positif sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et négatif sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$.

1.c. Sur I, $\cos(x) \in]0,1[$, et donc $P(\cos(x)) \geqslant 0$.

Par conséquent, $u'(x) \geqslant 0$ sur I, et donc $\boxed{u \text{ est croissante sur } I.}$

1.d. v est dérivable car somme et quotient de fonctions dérivables, avec $\forall x \in I, 2 + \cos(x) \neq 0$. On a alors

$$\forall x \in I, v'(x) = 1 - \frac{3\cos(x)(2+\cos x) + 3\sin^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{(2+\cos x)^2 - 6\cos(x) - 3\cos^2(x) - 3(1-\cos^2(x))}{(2+\cos(x))^2}$$
$$= \frac{1 - 2\cos(x) + \cos^2(x)}{(2+\cos(x))^2}.$$

$$\boxed{\text{Si on pose } Q(X) = X^2 - 2X + 1 \in \mathbf{R}_2[X], \text{ alors } \forall x \in I, v'(x) = \frac{Q(\cos x)}{(2+\cos(x))^2}.}$$

1.e. On a $Q(X) = (X-1)^2$, de sorte que $\forall x \in I, Q(\cos(x)) > 0$, car $\cos(x) < 1$.

Donc v' est strictement positive sur I, et donc $\boxed{v \text{ est strictement croissante sur } I.}$

1.f. On a $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, et u est croissante strictement sur I de sorte que $\forall x \in I, u(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > x$.

De même, v est strictement croissante sur I et $\lim\limits_{x\to 0} v(x) = 0$, de sorte que

$$\forall x \in I, v(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) < x.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in I, g(x) < x < f(x).}$$

2.a. On a

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.}$$

De même,

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$$

On en déduit que

$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{\sqrt{6}^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = \boxed{2-\sqrt{3}.}$$

Méthode Pour simplifier des fractions avec des racines au dénominateur, on pensera à multiplier par la quantité conjuguée.

2.b. De la question 1.f, on déduit que

$$g\left(\frac{\pi}{12}\right) < \frac{\pi}{12} < f\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

soit

$$\frac{3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8+\sqrt{6}+\sqrt{2}} < \frac{\pi}{12} < \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + 2 - \sqrt{3}\right)$$

et donc

$$\boxed{36\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8+\sqrt{6}+\sqrt{2}} < \pi < 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 8 - 4\sqrt{3}.}$$

En pratique Un calcul numérique donne $3.14151 < \pi < 3.1424$ à comparer avec $\pi \simeq 3.14159$.

3.a. Pour tout réel θ, on a

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \boxed{1 - 2\sin^2(\theta).}$$

On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) = \cos\left(2\times\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3\times 2^{n+1}}\right) = 1 - 2a_{n+1}^2.$$

Soit encore $a_{n+1}^2 = \dfrac{1-b_n}{2}$.

Mais $0 \leqslant \dfrac{\pi}{3\times 2^n} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, de sorte que $a_{n+1} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^n}\right) \geqslant 0$ et donc

$$\boxed{a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}}.}$$

Danger ! Ne pas oublier d'étudier le signe pour enlever le carré.

De plus, on a $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^n}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^n}\right) = 1$ soit

$b_{n+1}^2 = 1 - \dfrac{1-b_n}{2} = \dfrac{1+b_n}{2}$.

Mais $b_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^n}\right) \geqslant 0$ car $0 \leqslant \dfrac{\pi}{3\times 2^n} \leqslant \pi$ et donc

$$\boxed{b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}}.}$$

3.b. En utilisant le résultat de la question 1.f, on a, pour tout entier naturel n,

$$g\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) < \frac{\pi}{3\times 2^n} < f\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right)$$

soit

$$3\frac{a_n}{2+b_n} < \frac{\pi}{3\times 2^n} < \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right) \Leftrightarrow \boxed{9\times 2^n\frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).}$$

3.c. Lorsque $n \to +\infty$, $\dfrac{\pi}{3\times 2^n} \to 0$, de sorte que

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3\times 2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{3\times 2^n} \text{ et } b_n \to 1.$$

On en déduit que

$$9\times 2^n\frac{a_n}{2+b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 9\times 2^n\frac{\pi}{3\times 2^n}\frac{1}{3} \sim \pi.$$

De même, $2a_n + \dfrac{a_n}{b_n} = a_n\dfrac{2b_n+1}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3a_n$ de sorte que

$$2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n\times 3a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\times 2^n\frac{\pi}{3\times 2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi.$$

Détails $b_n \to 1$, de sorte que $\frac{2b_n+1}{b_n} \to 3$.

Donc les deux termes de l'encadrement de la question précédente tendent bien tous deux vers π lorsque $n \to +\infty$.

3.d.

```
function [x,k] = h(e)
  k=0
  a = sqrt(3)/2
  b = 1/2
  while (2^k*(2*a+a/b) - 9*2^k*a/(2+b))>e
    a = sqrt((1-b)/2)
    b = sqrt((1+b)/2)
    k = k+1
  end
  x = 2^k *(2*a+a/b)
endfunction
```

Expliquons rapidement ce programme : tant que la différence entre les deux termes extrémaux de l'inégalité précédente est supérieure à e, nous calculons le terme suivant.
Le programme s'arrête lorsque la différence entre les deux est inférieure à e, et alors nécessairement l'écart entre π et $2^k\left(2a_k+\frac{a_k}{b_k}\right)$ est lui aussi inférieur à e.
On retourne alors $x=2^k\left(2a_k+\frac{a_k}{b_k}\right)$ (qui est une approximation par excès de π).

Valeurs retournées
Notons que le programme retourne en fait deux nombres : x qui est l'approximation de π, et k qui est le nombre d'itérations qui ont été nécessaires pour obtenir cette approximation.

3.e. Il s'agit d'exploiter le programme précédent en donnant à e les valeurs successives $10^{-1},10^{-2},\dots,10^{-p}$, et à chaque fois, de conserver non pas l'approximation de π ainsi obtenue, mais le nombre d'étapes qui ont été nécessaires, c'est-à-dire la valeur k renvoyée par la fonction h.

```
function v = precision(p)
  v = zeros(1,p)
  for i = 1 :p
    [x,k] = h(10^(-i)) ;
    v(i) = k ;
  end
endfunction
```

3.f. On observe que pour gagner une décimale en précision, jusqu'à la 16ᵉ décimale, il faut globalement ajouter une itération au programme précédent.
En revanche, à partir de la 13ᵉ itération, l'approximation de π obtenue est correcte au moins jusqu'à la 30ᵉ décimale.
En fait, une étude plus poussée semble prouver que les 300 premières décimales de π ainsi obtenues sont bonnes ! En réalité, seules les 16 premières le sont, mais `Scilab` ne travaille qu'avec 16 chiffres significatifs, et donc considère que deux nombres sont égaux dès qu'ils ont 16 chiffres en commun.
La conclusion est que `Scilab` n'est probablement pas le logiciel le plus adapté pour calculer un grand nombre de décimales de π.

Problème

Partie A : Résultats préliminaires

1. Soit $x\in\mathbf{R}$. Alors

$$[Y_n>x]=\bigcap_{i=1}^{n}[X_i>x]$$

de sorte que, par indépendance des X_i, il vient

$$P(Y_n>x)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i>x]\right)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i>x)=\prod_{i=1}^{n}(1-P(X_i\leqslant x))=(1-F(x))^n\,.$$

Et donc en passant à l'événement contraire,

$$F_n(x)=P(Y_n\leqslant x)=1-P(Y_n>x)=\boxed{1-(1-F(x))^n\,.}$$

Rédaction ✎
On fera systématiquement apparaître l'égalité d'événements

$$[Y_n>x]=\bigcap_{i=1}^{n}[X_i\geqslant x]$$

soit toute seule telle que nous venons de le faire, soit dans les probabilités.
On ne peut se contenter d'écrire

$$P(Y_n>x)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i>x).$$

2. Si X admet une densité, alors F est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points. Il en est donc de même de F_n, et donc Y_n admet une densité.
De plus, là où F_n est dérivable, alors sa dérivée est donnée par $F_n'(x)=nF'(x)(1-F(x))^{n-1}$.
Puisque la dérivée de F' est égale à f sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors, sauf en un nombre fini de points,

$$F_n'(x)=nf(x)\,(1-F(x))^{n-1}\,.$$

Ainsi, la fonction $f_n:x\mapsto nf(x)\,(1-F(x))^{n-1}$ ne diffère de F_n' qu'au plus en un nombre fini de points : $\boxed{\text{c'est une densité de } Y_n.}$

Remarque
Puisque φ est continue et que

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt,$$

par le théorème fondamental de l'analyse, Φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et $\Phi'=\varphi$.

3.a. Soit $x\geqslant 0$. Procédons à une intégration par parties sur le segment $[0,x]$, en posant $u(t)=t$, $v(t)=\Phi(t)-1$, qui sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et vérifient $u'(t)=1$ et $v'(t)=\varphi(t)$.

$$\int_0^x t\varphi(t)\,dt=[t(\Phi(t)-1)]_0^x-\int_0^x(\Phi(t)-1)\,dt=\int_0^x(1-\Phi(t))\,dt+x(\Phi(x)-1)=\boxed{\int_0^x(1-\Phi(t))\,dt-x(1-\Phi(x)).}$$

3.b. Notons que $1-\Phi(x) = P(V > x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,dt$.
Mais si $A \geqslant x$, alors $\forall t \geqslant x$, $t\varphi(t) \geqslant x\varphi(t)$ et donc

$$0 \leqslant x\int_x^A \varphi(t)\,dt \leqslant \int_x^A t\varphi(t)\,dt.$$

Lorsque $A \to +\infty$, il vient alors

$$0 \leqslant x\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,dt.$$

Précision
Cette dernière intégrale converge car V admet une espérance et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\,dt$$

converge.

Mais, $\displaystyle\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty} x(1-\Phi(x)) = 0.$$

Reste
Si cette dernière intégrale tend vers 0, c'est car il s'agit du reste d'une intégrale convergente.

Si V admet une espérance, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\,dt$ converge absolument et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,dt$ converge. Par conséquent,

$$\int_0^x (1-\Phi(t))\,dt = \int_0^x t\varphi(t)\,dt + x(1-\Phi(x))$$

admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$, et donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\,dt \text{ converge.}}$$

3.c. On a

$$\int_0^x tf(t)\,dt + x(1-\Phi(x)) = \int_0^x (1-\Phi(t))\,dt$$

et puisque $1-\Phi(x) \geqslant 0$, alors

$$\forall x \geqslant 0,\ \int_0^x tf(t)\,dt \leqslant \int_0^x (1-\Phi(t))\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\,dt.$$

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt$ est croissante[1] sur $]0;+\infty[$, car f est positive.
Puisque nous venons de montrer qu'elle est majorée, par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite en $+\infty$.
Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge, et puisque $t \mapsto tf(t)$ est une fonction positive, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge absolument : $\boxed{V \text{ admet une espérance.}}$

[1] Réfléchir en terme d'aire, à l'aide d'un dessin, pour s'en convaincre.

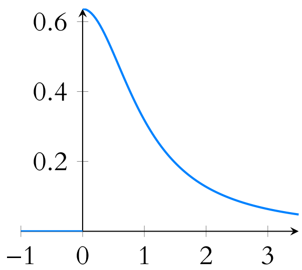


FIGURE 1– La densité f

3.d. D'après les deux questions précédentes, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\,dt$ converge si et seulement si V admet une espérance.
De plus, on a alors prouvé à la question 3.b que dans ce cas,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (1-\Phi(t))\,dt = \int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,dt = E(V).}$$

Plus généralement
Si f est une fonction positive, continue sauf en un nombre fini de points, et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$

converge, alors il existe une seule constante k telle que kf soit une densité. Cette constante vérifie

$$\frac{1}{k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

C'est la seule constante qui rende l'aire totale sous la courbe de kf égale à 1.

Partie B : Quelques exemples

4.a. Pour $A > 0$, on a

$$\int_{-\infty}^A f(x)\,dx = \int_0^A f(x)\,dx = \alpha\int_0^A \frac{1}{1+x^2}\,dx = \alpha\mathrm{Arctan}(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha\frac{\pi}{2}.$$

Donc si X admet f pour densité, nécessairement $\boxed{\alpha = \dfrac{2}{\pi}.}$

4.b. Pour $x \geqslant 0$, nous venons de prouver que $F(x) = \alpha \text{Arctan}(x) = \frac{2}{\pi}\text{Arctan}(x)$.
Et pour $x < 0$, alors

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0.$$

Donc la fonction de répartition de X est donnée par

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{2}{\pi}\text{Arctan}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

4.c. D'après la formule prouvée à la question 1, la fonction de répartition de Y_2 est donnée par

$$F_2(x) = 1 - (1 - F(x))^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\text{Arctan}(x)\right)^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Par la question 2, Y_2 admet une densité, et une de ses densités est

$$\boxed{f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}\left(1 - \dfrac{2}{\pi}\text{Arctan}(x)\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

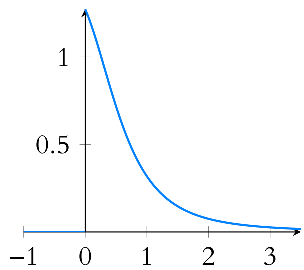


FIGURE 2– La densité f_2

4.d. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.
Alors g est dérivable, et on a

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

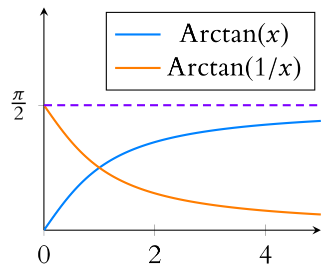
Ainsi, g est constante sur $]0; +\infty[$. De plus, on a

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}(0) = \frac{\pi}{2}$$

de sorte que g est la fonction constante, égale à $\frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$\boxed{\forall x > 0,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

Alternative
Pour déterminer la constante à laquelle g est égale, on peut également évaluer g en $x = 1$.



4.e. D'après la question précédente, on a

$$\forall x > 0, \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or, pour $x > 0$, on a

$$f_2(x) = \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)\right) = \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{1+x^2}\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Au voisinage de 0, on a $\text{Arctan}(x) \sim x$, et donc au voisinage de $+\infty$, $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$. Et alors

$$f_2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{x+x^3} \boxed{\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{x^3}}.$$

Équivalent
On sait qu'au voisinage de 0,

$$\text{Arctan}(t) \sim t.$$

Et puisque $\frac{1}{x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, on a bien l'équivalent indiqué.

4.f. On a $tf(t) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{t}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{t}$.
Mais $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}$ diverge, et donc par le critère de comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ diverge. Ainsi, X n'admet pas d'espérance.
La fonction $t \mapsto tf_2(t)$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$, et au voisinage de $+\infty$, $tf_2(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{8}{\pi t^2}$, de sorte que $\displaystyle\int_1^{+\infty} tf_2(t)\,dt$ converge (par comparaison à une intégrale de Riemann convergente). Et donc elle converge absolument car $tf_2(t)$ est positive.
Donc Y_2 admet une espérance, ce qui prouve que $\boxed{\text{la loi de } X \text{ est implosive, d'indice d'implosion égal à 2.}}$

5.a. Pour $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} P(X=k) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\\ &= \left(1-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{N}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{N+1}}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{N+1}}} - \frac{1}{\sqrt{N+2}}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{N+2}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1.\end{aligned}$$

Ainsi, la série de terme général $P(X=k)$ converge et on a

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1.}$$

5.b. Par définition, X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X=k)$ converge[2].Or

[2] Absolument, mais il s'agit d'une série à termes positifs.

$$kP(X=k) = \frac{k}{\sqrt{k+1}} - \frac{k}{\sqrt{k+2}} = \frac{k}{\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}}\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}.$$

Mais $\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1} = \sqrt{k}\left(\sqrt{1+\frac{2}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}}\right)$.

Et alors, puisque $\frac{1}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{2}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}} &= \left(1+\frac{1}{k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right) - \left(1+\frac{1}{2k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\\ &\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k}.\end{aligned}$$

Dév. limité

Pour x au voisinage de 0,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

Attention !

Les termes en $o\left(\frac{1}{k}\right)$ ne se simplifient pas, tout simplement car ils n'ont pas de raison d'être égaux, on sait uniquement qu'il s'agit de deux quantités négligeables devant $\frac{1}{k}$.

On en déduit donc que $kP(X=k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \sqrt{k}\frac{1}{2k} = \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

Puisque la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge[3], par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum_k kP(X=k)$ diverge, et donc $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

[3] C'est une série de Riemann avec $\alpha < 1$.

5.c. Le calcul a été fait au cours de la question 5.a : pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$F(k) = P(X \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i) = \boxed{1 - \frac{1}{\sqrt{k+2}}}.$$

5.d. On a, d'après la question A.1,

$$\forall k \in \mathbf{N}, F_2(k) = 1 - (1-F(k))^2 = 1 - \frac{1}{k+2}.$$

Notons d'ailleurs que cette formule reste valable pour $k=-1$. Mais pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$P(Y_2=k) = P(Y_2 \leqslant k) - P(Y_2 \leqslant k-1) = F_2(k) - F_2(k-1) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

On a alors $kP(Y_2=k) = \frac{k}{(k+1)(k+2)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k}{k^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$.

Mais la série de terme général $\frac{1}{k}$ est divergente, et puisqu'il s'agit de séries à termes positifs, il en est de même de la série de terme général $kP(Y_2=k)$. $\boxed{\text{Ainsi, } Y_2 \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

Détails

Y_2 étant à valeurs dans $\mathbf{N}$,

$$[Y_2 \leqslant k] = [Y_2 \leqslant k-1] \cup [Y_2 = k]$$

et ces événements sont évidemment incompatibles. Notons que pour une variable qui ne prendrait pas que des valeurs entières, puisqu'elle serait alors suceptible de prendre des valeurs entre $k-1$ et k.

5.e. De même que précédemment, on a

$$\forall k \in \mathbf{N},\ F_3(k) = 1-(1-F(k))^3 = 1-\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)^3$$

et alors

$$\forall k \in \mathbf{N}, P(Y_3=k) = F_3(k)-F_3(k-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)^3.$$

Pour $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} kP(Y_3=k) &= \sum_{k=0}^{N}\frac{k}{\left(\sqrt{k+1}\right)^3} - \sum_{k=0}^{N}\frac{k}{\left(\sqrt{k+2}\right)^3}\\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{k}{\left(\sqrt{k+1}\right)^3} - \sum_{\ell=2}^{N+1}\frac{\ell-1}{\left(\sqrt{\ell+1}\right)^3}\\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\left(\sqrt{k+1}\right)^3} - \frac{N}{\left(\sqrt{N+2}\right)^3}\end{aligned}$$

Chgt d'indice
$\ell = k+1$

Mais $\dfrac{1}{(\sqrt{k+1})^3} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^{3/2}}$ et donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général $\dfrac{1}{\left(\sqrt{k+1}\right)^3}$ converge.

Rappel
$\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente car $3/2 > 1$.

Et puisque $\dfrac{N}{(\sqrt{N+2})^3} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors la série de terme général $kP(Y_3=k)$ converge, et donc Y_3 admet une espérance.

5.f. De ce qui précède, on déduit que $\boxed{\text{la loi de } X \text{ est implosive, et que son indice d'implosion est égal à } 3.}$

Partie C : Loi implosive d'indice fixé

6.a. Pour $a>0$, la fonction f est positive et continue sauf en $x=1$. De plus, pour $A>1$, on a

$$\int_{-\infty}^{A} f(t)\,dt = \int_{1}^{A}\frac{a}{t^\alpha}dt = a\left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^A = \frac{a}{\alpha-1}\left(1-\frac{1}{A^{\alpha-1}}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{1-\alpha}.$$

Donc on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow a = \alpha-1$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est une densité si et seulement si } a=\alpha-1.}$

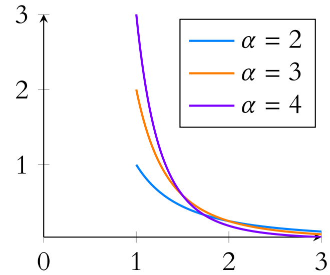


FIGURE 3– La densité f pour quelques valeurs de α

6.b. Pour $x>1$, nous avons montré précédemment que

$$F(x) = P(X\leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 1-\frac{1}{x^{\alpha-1}}.$$

Et pour $x \leqslant 1$, alors

$$F(x) = P(X\leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

Ainsi, la fonction de répartition de X est

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant 1\\ 1-\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} & \text{si } x>1\end{cases}}$$

Terminologie
La loi suivie par X est alors appelée une loi de Pareto.

6.c. X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge[4], soit si et seulement si $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge.

Mais pour $t \geqslant 1$, $tf(t) = \dfrac{\alpha-1}{t^{\alpha-1}}$, qui est d'intégrale convergente si et seulement si $\alpha-1>1$.

$\boxed{\text{Donc } X \text{ admet une espérance si et seulement si } \alpha > 2.}$

[4] absolument, mais il s'agit d'une fonction positive, donc la convergence est équivalente à la convergence absolue.

6.d. D'après la question 2, une densité de Y_n est

$$f_n(x) = nf(x)(1-F(x))^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ n\dfrac{\alpha-1}{x^\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\right)^{n-1} & \text{si } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{n(\alpha-1)}{x^{n\alpha-n+1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Donc Y_n admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} t f_n(t)\,dt$ converge. Mais il s'agit là d'une intégrale de Riemann, qui converge si et seulement si

$$n\alpha - n > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\alpha-1}.$$

6.e. Soit $m \geqslant 2$. Soit alors $\alpha = 1 + \frac{1}{m-1}$, et soit f la densité correspondante.
Alors X n'admet pas d'espérance car $\alpha \leqslant 2$, et Y_n admet une espérance si et seulement si

$$n > \frac{1}{\alpha-1} = m-1 \Leftrightarrow n \geqslant m.$$

En particulier, la loi de X est implosive, et son indice d'implosion est égal à m.

Donc pour tout $m \geqslant 2$, il existe une loi implosive d'indice d'implosion m.

> **Méthode**
> On n'a certainement pas choisi ce α au hasard.
> On cherche à déterminer s'il existe une loi telle que Y_m admet une espérance, et pas Y_{m-1}.
> On veut donc $\frac{1}{\alpha-1} \geqslant m-1$ mais $\frac{1}{\alpha-1} < m$.
> Il y a plusieurs valeurs de α qui conviennent, mais le plus simple est de prendre $\frac{1}{\alpha-1} = \frac{1}{m-1}$.

Partie D : Lois non implosives

7.a. Pour $a \geqslant 0$, la fonction f est positive et continue sauf en $x = 2$.
De plus, pour $A > 2$, on a

$$\int_{-\infty}^{A} f(t)\,dt = \int_2^A \frac{a}{t\ln^2(t)}dt = a\left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^A = a\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(A)}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{\ln(2)}.$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow a = \ln(2)$.

On en déduit que pour $\boxed{a = \ln(2)}$ (qui est bien positif), f est une densité de probabilité

7.b. Pour $x \leqslant 2$, on a

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

Et pour $x > 2$, alors

$$F(x) = \int_2^x \frac{\ln 2}{t\ln^2 t}dt = \ln 2\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x}\right) = 1 - \frac{\ln 2}{\ln x}.$$

Ainsi, la fonction de répartition F de X est donnée par

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 1 - \frac{\ln 2}{\ln x} & \text{si } x > 2 \end{cases}}$$

7.c. X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 t}dt$ converge.
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln^2 t}$ est continue sur $[1, +\infty[$, et au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{\ln^2 t}} = \frac{\ln^2 t}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

de sorte que $\dfrac{1}{t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\ln^2 t}\right)$.
Ainsi, si $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 t}dt$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t}$, ce qui est absurde.
Par conséquent, $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

7.d. D'après la question 2, Y_n admet pour densité la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = nf(x)(1-F(x))^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 2 \\ \frac{n\ln(2)}{x\ln^2(x)}\left(\frac{\ln 2}{\ln(x)}\right)^{n-1} & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 2 \\ \frac{n\ln^n(2)}{x\ln^{n+1}(x)} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Ainsi, Y_n admet une espérance si et seulement si $\int_2^{+\infty} tf_n(t)\,dt = \int_2^{+\infty} \frac{n\ln^n(2)}{\ln^{n+1}(t)}dt$ converge.

Mais comme précédemment, on prouve que

$$\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln^{n+1}(t)}\right)$$

et donc $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln^{n+1}(t)}dt$ diverge.
Ainsi, Y_n n'admet pas d'espérance, et ce quel que soit $n \geqslant 2$.

7.e. Nous venons de prouver qu'il existe bien une loi n'admettant pas d'espérance et non implosive.

Partie E : Variables implosant sur une autre

8. Notons F_X la fonction de répartition de X et F_Y la fonction de répartition de Y.
Si Y_n et Y ont même loi, alors elles ont même fonction de répartition, et donc d'après la question A.1

$$\forall x \in \mathbf{R}, F_Y(x) = 1-(1-F_X(x))^n \Leftrightarrow \boxed{\forall x \in \mathbf{R}, F_X(x) = 1-(1-F_Y(x))^{1/n}.}$$

9. Rappelons que la fonction de répartition de Y vérifie $F_Y(x) = 0$ si $x < 1$ et

$$\forall x \geqslant 1, F_Y(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor-1}(1-p)^k = p\frac{1-(1-p)^{\lfloor x\rfloor}}{p} = 1-(1-p)^{\lfloor x\rfloor}.$$

Supposons que X implose sur Y, avec m pour indice d'implosion, alors

$$\forall x \geqslant 1, F_X(x) = 1-(1-F_Y(x))^{1/m} = 1-(1-p)^{\lfloor n\rfloor/m}.$$

Mais on reconnaît[5] alors la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^{1/m}$. Ainsi, X suit une loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^{1/m}$ (qui est bien compris strictement entre 0 et 1), et en particulier admet une espérance, car toute loi géométrique admet une espérance.
Par conséquent, la loi de X n'est pas implosive, et il n'existe donc pas de variable aléatoire X implosive et implosant sur Y.

Fonction de rep.
Pour une variable à valeurs dans $\mathbf{Z}$, on a

$$P(X \leqslant x) = P(X \leqslant \lfloor x\rfloor).$$

Et cette dernière probabilité peut se calculer à l'aide d'une somme.

[5] Car on vient de calculer la fonction de répartition d'une loi géométrique, on n'est pas tenu de la connaître sinon !

10. Le résultat a déjà été prouvé à la partie C : soit X une variable aléatoire implosive d'indice d'implosion m.
Soient $X_1,\dots,X_m$ des variables indépendantes, de même loi que X, et soit $Y = \min(X_1,\dots,X_m)$.
Alors Y admet une espérance (car m est l'indice d'implosion de X) et X implose sur Y par définition.

11. Soit X une variable implosive, d'indice d'implosion m qui implose sur Y.
Alors nous avons prouvé à la question 8 que

$$\forall x \in \mathbf{R}, F_X(x) = 1-(1-G(x))^{1/n}.$$

Soit à présent $k \in [\![2,m]\!]$. Si Z est une variable aléatoire implosive, d'indice d'implosion k implosant sur Y, alors sa fonction de répartition doit vérifier

$$\forall x \in \mathbf{R}, F_Z(x) = 1-(1-G(x))^{1/k}.$$

Définissons donc une fonction H par $H(x) = 1-(1-G(x))^{1/k}$.
Alors H est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points car G l'est, elle est croissante car G l'est et

$$\lim_{x\to-\infty} H(x) = 1-(1-0)^{1/k} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} H(x) = 1-(1-1)^{1/k} = 1.$$

Donc H est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
De plus, $\forall x \leqslant 0$,
$$H(x) = 1-(1-G(x))^{1/k} = 1-(1-0)^{1/k} = 0$$
de sorte que H est la fonction de répartition d'une variable aléatoire positive.
Notons Z une variable aléatoire de fonction de répartition H, et soient $Z_1,\dots,Z_k$ des variables indépendantes de même loi que Z.
Pour $i \in [\![1,k]\!]$, posons
$$U_i = \min(Z_1,\dots,Z_i).$$
Nous savons que U_k a même loi que Y puisque par définition de H, U_k a même fonction de répartition que Y. Par conséquent, U_k admet une espérance car Y admet une espérance.
Prouvons à présent que U_{k-1} n'admet pas d'espérance.
La fonction de répartition de U_{k-1} est
$$F_{U_{k-1}} : x \mapsto 1-(1-H(x))^{k-1} = 1-(1-G(x))^{\frac{k-1}{k}}$$
De plus, le résultat de la question 3 nous indique que U_{k-1} admet une espérance si et seulement si
$\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-F_{U_{k-1}}(x))\,dx$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-G(x))^{\frac{k-1}{k}}\,dx$ converge.
Mais m étant l'indice d'implosion de X, Y_{m-1} n'admet pas d'espérance. Or la fonction de répartition de Y_{m-1} est
$$x \mapsto 1-(1-F_X(x))^{m-1} = 1-(1-G(x))^{\frac{m-1}{m}}$$
donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-G(x))^{\frac{m-1}{m}}\,dx$ diverge.
Notons que $k \leqslant m$ donc
$$-k \geqslant -m \Leftrightarrow -k+mk \geqslant -m+mk \Leftrightarrow k(m-1) \geqslant m(k-1) \Leftrightarrow \frac{m-1}{m} \geqslant \frac{k-1}{k}.$$
Alors pour tout $x \geqslant 0$, on a
$$0 \leqslant G(x) \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 1-G(x) \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant (1-G(x))^{\frac{m-1}{m}} \leqslant (1-G(x))^{\frac{k-1}{k}}.$$
Et donc comme $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-G(x))^{\frac{m-1}{m}}\,dx$ diverge, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-G(x))^{\frac{k-1}{k}}\,dx$.
Par conséquent, U_{k-1} n'admet pas d'espérance.

> **Détail**
> Pour $\alpha \in]0,1]$, la fonction $x \mapsto \alpha^x$ est décroissante. Pour s'en convaincre, on peut remarquer que
> $$\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$$
> et que $\ln\alpha < 0$.

Enfin, pour $i \in [\![2,k-1]\!]$, $U_i \geqslant U_{k-1} \geqslant 0$, et puisque U_{k-1} n'admet pas d'espérance, il en est de même de U_i. Ceci achève de prouver que Z est implosive, d'indice d'implosion k, et implose sur Y.

$\boxed{\text{Il existe donc une variable aléatoire implosive, d'indice d'implosion } k \text{, implosant sur } Y.}$

Partie F : Variables explosives

12. Supposons que X soit explosive d'indice d'explosion $m \geqslant 2$.
Alors $0 \leqslant X_1 \leqslant Z_{m-1}$. Et puisque Z_{m-1} possède une espérance, il en est de même de X_1.
Mais alors
$$0 \leqslant Z_m \leqslant X_1+\cdots+X_m$$
et toutes les X_i possèdent une espérance, car de même loi que X_1. Alors $X_1+\cdots+X_m$ possède une espérance, et donc par domination, Z_m possède une espérance, ce qui est absurde.
Ainsi, $\boxed{\text{il n'existe pas de variable explosive d'indice d'explosion } m \geqslant 2.}$

> **Vague**
> L'énoncé n'est pas totalement clair quant à la définition d'explosive. Doit-on supposer que X admet une espérance ou non ?

13. Le raisonnement de la question précédente prouve que si X admet une espérance, alors pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, Z_m possède une espérance.
Donc toute variable aléatoire positive possédant une espérance n'est pas explosive. Autrement dit, si les (X_i) sont i.i.d. et de même loi, possédant une espérance, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, la variable $Z_n = \max(X_1,\dots,X_n)$ possède une espérance.

EXTRAITS COMMENTÉS DU RAPPORT DU JURY

Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.

✎ Lorsque ces hypothèses sont faciles à vérifier (par exemple la continuité d'une fonction usuelle lors d'une application du théorème de la bijection, ou du caractère $\mathscr{C}^{n+1}$ lors de l'application de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n), on ne perdra pas de temps à détailler les raisons pour lesquelles elles sont vraies, mais on n'oubliera pas de le mentionner, afin de prouver qu'on connaît les hypothèses d'application du théorème.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

✎ L'informatique devrait progressivement prendre une place de plus en plus importante dans les années à venir, et le message est clair : il y a des points faciles à prendre, et de nombreux candidats y arrivent, donc ne vous laisser pas doubler sur ce terrain !

Exercice 2

Utilisant principalement des résultats élémentaires d'analyse, cet exercice a été plutôt malmené par les candidats qui semblent être peu à l'aise avec les manipulations de polynômes ou de formules trigonométriques simples.

✎ Concernant la trigonométrie, peu de formules sont à savoir si on est un peu dégourdi. En pratique, la connaissance des trois relations :

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

suffit à retrouver en deux minutes toutes les formules de trigonométrie au programme, notamment les expressions de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
Notons que des méthodes utilisant les complexes (via les formules d'Euler) ont également été vues en première année.

1.a — Cette question a, de manière surprenante, été mal traitée par de nombreux candidats, ou alors de façon incomplète. Certains candidats ne savent pas ce que signifie factoriser : ainsi certains candidats ont proposé $P(X) = X\left(2X^2 - 3X + \frac{1}{X}\right)$ ou encore $P(X) = X(2X^2 - 3X) + 1$. Une large majorité de candidats a bien remarqué que 1 était racine évidente mais se contentait alors de factoriser par $(X-1)$. Ceux qui ont continué ont souvent oublié le coefficient dominant du polynôme dans la factorisation finale.

✎ Factoriser un polynôme, c'est l'écrire comme produit de deux **polynômes**. Or, une expression contenant des $\dfrac{1}{X}$ n'est pas un polynôme, donc ne saurait convenir.
Même si la formulation «factoriser» n'est pas complètement claire, en général on entend par là «décomposer en produit de polynômes irréductibles», et donc il ne faut pas s'arrêter à l'obtention d'une racine.
L'erreur concernant le coefficient dominant est classique : si $P \in \mathbf{R}_n[X]$ admet n racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors on n'a pas nécessairement $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, mais plutôt $P = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$, où λ est le coefficient dominant de P.

2.a — Une part non négligeable de candidats ne connait pas les valeurs remarquables de cos et sin, ce qui les empêche de répondre à cette question.

✎ Aucune excuse, il s'agit de valeurs qui devraient être connues depuis la terminale !
Savoir que les trois valeurs possibles sont $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et savoir placer $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ sur un cercle trigonométrique permet de retrouver toutes les valeurs usuelles en une minute.

Problème

Le problème proposait ici l'étude de variables aléatoires dont la loi est implosive (ou explosive), nouvelle notion définie dans l'énoncé. Le but était donc ici de tester la réactivité des candidats face à l'appropriation d'une définition nouvelle, et la bonne mobilisation des connaissances pour retrouver des schémas déjà vus dans le cours de probabilités du programme.

Parties E et F — Très peu de candidats ont abordé ces dernières parties, destinées à terminer le sujet sur des questions plus ouvertes pour éventuellement départager les excellentes copies.

✎ Pas de panique si on n'a pas le temps d'aborder la fin du problème, les concepteurs ont volontairement proposé un sujet long, et ces parties serviront probablement à départager des candidats ayant 18 ou plus. Ceci arrive fréquemment à ECRICOME : la fin du problème est probablement bien plus dure que le reste, et, sauf si l'on a traité tout le reste du sujet, mieux vaut ne pas y consacrer trop de temps.

ECRICOME 2014

Exercice 1

Sujet : Étude d'un endomorphisme d'un espace de fonctions de dimension finie. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ (questions 1 à 4) **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire, fonctions d'une variable, diagonalisation.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ telles qu'il existe deux polynômes P, Q appartenant à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ avec :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f(x) = xP(x) + x\ln(x)Q(x).$$

Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose :

$$u_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^k \ln(x) \end{array} \right.$$

Pour toute fonction f appartenant à E, on note $\varphi(f)$ la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

et on note φ l'application qui à $f \in E$ associe $\varphi(f)$.

1. Prouver que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et que $E = \text{Vect}(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ (*c'est-à-dire que E est l'espace vectoriel engendré par les fonctions $u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n$*).

   On admettra que la famille $\mathscr{B} = (u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ est une base de E.
2. Justifier que chaque fonction f de E se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ et, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, calculer $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$.
3. Démontrer que φ est linéaire. En déduire que $\varphi(f) \in E$ lorsque $f \in E$.
4. Écrire la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.
5. L'endomorphisme φ est-il bijectif ? Quelles sont ses valeurs propres ?
6. Soit $f \in E$ un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ. On suppose que λ est non nul et on considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :
$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ g(x) = x^{-1/\lambda}\int_0^x f(t)\,dt.$$
   Montrer que g est constante sur $\mathbf{R}_+^*$. En déduire l'expression de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ puis celle de f.
7. Pour chaque valeur propre λ de φ, déterminer la dimension de l'espace propre de φ associé à la valeur propre λ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Sujet : Calcul de la somme d'une série à l'aide de la fonction Γ. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : séries numériques, intégrales impropres, inégalité de Cauchy-Schwarz.

On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

On admettra que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad \forall x \in]0, +\infty[, \qquad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$L(x) = \ln(\Gamma(x)) \text{ et } \Psi(x) = L'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

1. Justifier que, pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbf{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1}\, dt$ est convergente.
2. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$. En déduire que :
$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}$$
puis préciser la valeur de $\Psi(n+2) - \Psi(n)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
3. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que :
$$\forall (x, A) \in (\mathbf{R}_+^*)^2, \qquad \left(\int_0^A \ln(t) e^{-t} t^{x-1}\, dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^A (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1}\, dt\right)\left(\int_0^A e^{-t} t^{x-1}\, dt\right).$$
4. Démontrer que :
$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad (\Gamma'(x))^2 \leqslant \Gamma(x)\Gamma''(x)$$
puis justifier que la fonction Ψ est croissante sur $]0, +\infty[$.
5. Soit $a \in]0, 1[$.
   a. Prouver que pour tout $n \geqslant 1$:
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a}(\Psi(1+a) - \Psi(1-a)) - \frac{1}{2a}(\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a))$$
   et :
   $$0 \leqslant \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leqslant \Psi(n+2) - \Psi(n).$$
   b. Établir que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2 - a^2}$ est convergente et calculer sa somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$ en fonction de Ψ et de a.

Problème

Sujet : Étude d'une suite de duels à pile ou face. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★☆☆

Thèmes du programme abordés : `Scilab` , probabilités discrètes, suites et séries, algèbre linéaire.

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Modifications apportées au sujet d'origine : ajout du coefficient dominant de Q dans la factorisation en produit de facteurs de degré un (question 14).

Commentaires : assez calculatoire, on comprend assez peu ce que l'on fait. Nécessite de prendre des initiatives de rédaction en probabilités discrètes.

Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0; 1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$.

On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

- A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel numéro 1. Le perdant est éliminé du tournoi, le gagnant reste en jeu ;
- Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2. Ce duel se déroule de manière analogue et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2. Le perdant est éliminé du tournoi, et la gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3 et ainsi de suite ;
- Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k, qu'il peut remporter avec une probabilité p, son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1 - p$.
- Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N jeux successifs lors du tournoi.

Pour tout entier naturel n, on considère l'événement E_n : «le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n».

Partie I : Étude d'un cas particulier

On suppose dans cette partie que $N = 3$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.

1. Simulation des duels. Rappelons que la commande `rand()` crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$ (*qui suit en outre la loi uniforme sur* $[0; 1]$).

a. Écrire une fonction `Scilab duel()` qui simule un duel en simulant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

b. Écrire une fonction `Scilab test_victoire(a,b,c)` qui prend en paramètre trois nombres `a,b,c` et renvoie 1 si les trois sont égaux, et 0 sinon.

c. Écrire une fonction `Scilab tournoi()` qui simule un tournoi et renvoie le nombre de duels nécessaires pour que le tournoi dispose d'un vainqueur (c'est-à-dire un candidat ayant remporté trois victoires successives).
Indication : *Si on souhaite, on pourra utiliser les fonctions* `duel()` *et* `test_victoire()` *en les répètant convenablement jusqu'à ce que* `test_victoire()` *sur trois* `duel()` *consécutifs renvoie* 1.

2. Donner la liste des gagnants possibles pour chacun des trois premiers duels.
Déterminer les probabilités $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_3)$. Vérifier que :

$$P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1)$$

3. En considérant le nombre de victoires déjà obtenues par le vainqueur du duel numéro n, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on a :

$$(\mathscr{R}_1) \;:\; P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).$$

4. Justifier l'existence de quatre réels λ, μ, r_1, r_2 tels que

$$\forall n \geqslant 2,\ P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Le calcul explicite de λ et μ n'est pas demandé.
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(E_n)$.

5. Que vaut la probabilité $P\left(\bigcap\limits_{n=2}^{+\infty} E_n\right)$? Quelle est la probabilité de l'événement «le tournoi désignera un vainqueur »?

Partie II : Étude du cas général

On revient au cas général : p désigne un réel quelconque de $]0;1[$ et N est un entier supérieur ou égal à 3. On considère le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}X^k\right) - 1.$$

6. Pour tout entier $k \in \{1,\dots,N-1\}$, on note $A_k^{(n)}$ l'événement : «à l'issue du n-ième duel, le vainqueur du n-ième duel a obtenu exactement k victoires».
Justifier l'égalité :

$$\forall n \geqslant N,\ P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k}).$$

7. Établir que pour tout $n \geqslant N$, on a

$$(\mathscr{R}_2) \;:\; P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}).$$

8. Calculer $P(E_1)$, ..., $P(E_{N-1})$. En déduire que :

$$P(E_N) = 1 - q^{N-1}.$$

9. Soit $n \geqslant N$. Démontrer la relation

$$(\mathscr{R}_3) \;:\; P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1}P(E_{n-N+1}).$$

10. Prouver que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
On note désormais r_N cette solution. Justifier que :

$$r_N > 1 \text{ et } Q'(r_N) > 0.$$

11. A l'aide de la relation $(\mathscr{R}_2)$ (*question* 7), établir que :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad P(E_n) \leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}.$$

12. Établir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} P(E_n)$ puis, en sommant la relation $(\mathscr{R}_3)$ (*question* 9) sur tous les entiers $n \geqslant N$, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$.

13. On définit X la variable aléatoire égale au nombre de duels qui ont eu lieu au moment de la proclamation du vainqueur du tournoi. On conviendra que $X = 0$ si le tournoi n'a pas de vainqueur.
    a. Soit $n \geqslant 2$. Justifier que les événements $(E_{n-1} \cap \overline{E_n})$ et $(X = n)$ sont égaux.
    b. Démontrer que X admet une espérance et exprimer $E(X)$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$. En déduire la valeur de $E(X)$.

Partie III : Calcul de $P(E_n)$.

Les hypothèses et définitions introduites à la partie **II** sont conservées. Les résultats de la question 10 pourront être utilisés librement (même si la preuve n'a pas été effectuée).

14. On considère le polynôme : $R(X) = 1 - X + pq^{N-1}X^N$ et on admet que :

$$(qX-1)Q(X) = R(X) \text{ et } XR'(X) - NR(X) = (N-1)X - N.$$

Soit z un complexe tel que $Q(z) = 0$ et $Q'(z) = 0$.
Montrer que $R(z) = 0$ et $R'(z) = 0$. En déduire que $z \in [0, +\infty[$ puis obtenir une contradiction.
Par conséquent chaque racine complexe de Q est de multiplicité 1 donc, d'après le théorème de d'Alembert Gauss, il existe $N-1$ complexes non nuls et distincts $z_1, \ldots, z_{N-1}$ tels que :

$$Q(X) = pq^{N-2}(X - z_1)\cdots(X - z_{N-1}).$$

15. On considère l'application linéaire

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{C}_{N-2}[X] & \to & \mathbf{C}^{N-1} \\ S & \mapsto & \left(S\left(\frac{1}{z_1}\right), \ldots, S\left(\frac{1}{z_{N-1}}\right)\right) \end{array} \right.$$

où $z_1, \ldots, z_{N-1}$ sont les $N-1$ racines distinctes de Q.
    a. Prouver que f est un isomorphisme.
    b. Exprimer sa matrice A dans les bases canoniques de $\mathbf{C}_{N-2}[X]$ et $\mathbf{C}^{N-1}$. Expliciter ${}^tA$ (*la transposée de A*).
    c. En déduire que le système :

$$(\mathscr{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + \cdots + x_{N-1} & = & P(E_1) \\ \frac{x_1}{z_1} + \cdots + \frac{x_{N-1}}{z_{N-1}} & = & P(E_2) \\ \frac{x_1}{(z_1)^{N-2}} + \cdots + \frac{x_{N-1}}{(z_{N-1})^{N-2}} & = & P(E_{N-1}) \end{array} \right.$$

admet une unique solution $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

16. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ l'unique solution du système $(\mathscr{S})$ (cf. question 15.c), on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad u_n = \frac{\alpha_1}{(z_1)^{n-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{N-1}}{(z_{N-1})^{n-1}} = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1}.$$

Montrer que pour tout $n \geqslant N$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n-k}.$$

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$P(E_n) = u_n.$$

ECRICOME 2014 : Corrigé

Exercice 1

1. Nous allons prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}_+^*$.
E est clairement formé de fonctions continues, donc inclus dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$, et la fonction nulle est dans E : elle correspond à $P = Q = 0$.
Soient f, g deux éléments de E et $\lambda \in \mathbf{R}$. Il existe donc quatre polynômes P_1, P_2, Q_1, Q_2 de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,
$$f(x) = xP_1(x) + xQ_1(x)\ln(x) \text{ et } g(x) = xP_2(x) + xQ_2(x)\ln(x).$$
Et donc, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a
$$(\lambda f + g)(x) = x(\lambda P_1(x) + P_2(x)) + x(\lambda Q_1(x) + Q_2(x))\ln(x).$$
Puisque $\lambda P_1 + P_2$ et $\lambda Q_1 + Q_2$ sont encore dans $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, on a bien $\lambda f + g \in E$.
Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$, et donc est un espace vectoriel.

Si $f \in E$, soient $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ tels que
$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f(x) = xP(x) + xQ(x)\ln(x).$$
Alors, pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a
$$f(x) = x\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right) + x\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k\right)\ln(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_{k+1}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k v_{k+1}(x).$$
Donc $f = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k v_{k+1} \in \operatorname{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$.
Et donc $E \subset \operatorname{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$.
Inversement, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il est clair que $u_k \in E$ et $v_k \in E$, de sorte que $\operatorname{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \subset E$.
On a alors[1], $\boxed{E = \operatorname{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n).}$

2. Soit $f = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k + \sum_{k=1}^{n} b_k v_k \in E$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\lim_{x \to 0^+} u_k(x) = 0$ et par croissances comparées, $\lim_{x \to 0^+} v_k(x) = 0$.
Ainsi, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, et donc f se prolonge par continuité en 0.
Puisque f est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ en tant que combinaison linéaire de fonctions continues, f est donc prolongeable par continuité en une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a
$$\varphi(u_k)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^k\,dt = \frac{1}{x}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \frac{x^k}{k+1} = \frac{1}{k+1}u_k(x).$$
De même, pour $A \in]0, x[$, par une intégration par parties, en posant $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$, qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A, x]$, avec $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = t^k$, il vient
$$\begin{aligned}\int_A^x v_k(t)\,dt = \int_A^x t^k \ln(t)\,dt &= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\right]_A^x - \int_A^x \frac{t^{k+1}}{k+1}\frac{1}{t}\,dt \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x) - \frac{A^{k+1}}{k+1}\ln(A) - \int_A^x \frac{t^k}{k+1}\,dt \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x) - \frac{A^{k+1}}{k+1}\ln(A) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{A^{k+1}}{(k+1)^2}.\end{aligned}$$

Méthode
A priori, pour prouver qu'un ensemble E est un espace vectoriel, il faudrait vérifier les huit propriétés d'un espace vectoriel (les connaissez-vous les huit ?).
Ceci est très fastidieux, et en pratique, dans les sujets de concours, il est toujours possible de s'en passer en montrant que E est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence.
Ici E est inclus dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}_+^*$, dont nous savons déjà que c'est un espace vectoriel. Nous nous contentons donc de prouver que E en est un sous-espace vectoriel, ce qui ne nécessite de vérifier que trois propriétés.

Vect
Rappelons que
$$\operatorname{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$$
est l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$.

[1] Par double inclusion.

Remarque
Notons que ceci justifie la convergence de l'intégrale définissant φ : il s'agit d'une intégrale faussement impropre, donc convergente.

Bornes
On ne sait procéder à une intégration par parties que sur un **segment**. Or la fonction $t \mapsto t^k \ln(t)$ n'est définie que sur $]0, x]$, qui n'est pas un segment (intervalle ouvert en 0). Et donc on ne peut faire une IPP directement sur l'intervalle $]0, x]$: on commence donc par la faire sur un segment $[A, x]$, puis on fait tendre A vers 0.

Lorsque $A \to 0^+$, il vient, par croissances comparées,

$$\int_0^x v_k(t)\,dt = \lim_{A \to 0^+} \int_A^x v_k(t)\,dt = \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

On en déduit que

$$\varphi(v_k)(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{k+1}v_k(x) - \frac{1}{(k+1)^2}u_k(x).$$

Et donc $\boxed{\varphi(u_k) = \frac{1}{k+1}u_k \text{ et } \varphi(v_k) = -\frac{1}{(k+1)^2}u_k + \frac{1}{k+1}v_k.}$

3. Si $f, g \in E$, et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\varphi(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (\lambda f(t)+g(t))\,dt = \lambda\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt = \lambda\varphi(f)(x) + \varphi(g)(x).$$

On a donc $\varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$: $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

Si $f \in E$, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des réels tels que $f = \sum_{i=1}^n (\lambda_i u_i + \mu_i v_i)$.

Par linéarité de f, on a alors

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i\varphi(u_i) + \mu_i\varphi(v_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{1}{i+1}u_i + \sum_{i=1}^n \mu_i\left(\frac{1}{i+1}v_i - \frac{1}{(i+1)^2}u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{i+1} - \frac{\mu_i}{(i+1)^2}\right)u_i + \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{i+1}v_i \in \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) = E.\end{aligned}$$

4. D'après les calculs effectués à la question 2, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \varphi(u_1) & \varphi(v_1) & \varphi(u_2) & \varphi(v_2) & \dots & \dots & \varphi(u_n) & \varphi(v_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \frac{1}{n+1} & -\frac{1}{(n+1)^2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \\ \\ u_n \\ v_n \end{array}$$

5. La matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure, et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc elle est inversible : $\boxed{\varphi \text{ est bijectif.}}$

Puisque $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux :

$$\boxed{\mathrm{Spec}(\varphi) = \left\{\frac{1}{k+1},\ k \in [\![1, n]\!]\right\}.}$$

6. Notons que si f est un vecteur propre de φ, alors $\varphi(f) = \lambda f$, de sorte que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \lambda f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

La fonction $x \mapsto x^{-1/\lambda}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, et par le théorème fondamental de l'analyse, il en est de même de $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$, qui possède f pour dérivée.

Égalité

Deux fonctions sont égales sur $\mathbf{R}_+^*$ si et seulement si elles prennent la même valeur en **tout** $x \in \mathbf{R}_+^*$.
Et puisque pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned}&\varphi(\lambda f + g)(x) \\ &\quad = \lambda\varphi(f)(x) + \varphi(g)(x)\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g).$$

Endomorphisme

Ceci prouve que φ, qui est définie sur E prend également ses valeurs dans E (a priori, on savait uniquement que φ prenait ses valeurs dans l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbf{R}_+^*$).
Et comme de plus φ est linéaire, ceci prouve que c'est un endomorphisme de E.

Thm fondam. analyse.

Rappelons que si f est continue sur un intervalle I contenant a, alors

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est une primitive de f sur I.
Autrement dit, F est $\mathscr{C}^1$ et $F' = f$.
Il s'applique ici car nous avons mentionné que f est prolongeable par continuité en 0.

Donc g est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car produit de fonctions dérivables, et on a

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ g'(x) = x^{-1/\lambda} f(x) - \frac{1}{\lambda} x^{-1/\lambda-1} \int_0^x f(t)\,dt = x^{-1/\lambda} f(x) - \frac{x^{-1/\lambda}}{\lambda x} \lambda f(x) = 0.$$

Ainsi, $\boxed{g \text{ est constante sur } \mathbf{R}_+^*.}$

Si on note μ la valeur de la fonction constante g, alors $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \mu x^{1/\lambda}$, et en dérivant cette relation, il vient

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f(x) = \frac{\mu}{\lambda} x^{1/\lambda - 1}.}$$

7. D'après la question précédente, pour $k \in [\![1, n]\!]$, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = \dfrac{1}{k+1}$ est inclus dans l'espace engendré par $x \mapsto x^k$, c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(u_k)$.
Il est donc au plus de dimension 1. Puisque $\dfrac{1}{k+1}$ est bien valeur propre de φ, ce sous-espace propre est de dimension au moins 1, et donc est exactement de dimension 1
Ainsi, on a

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\varphi)} \dim E_\lambda(\varphi) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\dim E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi)}_{=1} = n.$$

Puisque $\dim E = 2n > n$, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ n'est pas un endomorphisme diagonalisable.}}$

> **Remarque**
> Notons que nous n'avons pas seulement déterminé la dimension de $E_{\frac{1}{k+1}}(\varphi)$, nous venons même de prouver qu'il est égal à $\mathrm{Vect}(u_k)$.

Exercice 2

1. Notons que pour $k = 0$, l'intégrale étudiée n'est autre que $\Gamma(x)$ dont nous savons déjà qu'elle converge.
Pour $x > 0$ et $k \in \mathbf{N}^*$, la fonction $t \mapsto (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc les éventuels problèmes de convergence sont en 0 et en $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, on a, par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to+\infty} (\ln t)^k t^{-1} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} t^{x+2} = 0$ de sorte que

$$t^2 (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} = \underbrace{(\ln t)^k t^{-1}}_{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underbrace{e^{-t} t^{x+2}}_{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $(\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge absolument, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1}\,dt$.
Alternative : on peut aussi noter que puisque $(\ln t)^k \underset{t\to+\infty}{=} o(t)$, alors

$$(\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(t^x e^{-t}\right).$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt$ converge car c'est le cas de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = \Gamma(x+1)$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}\,dt$ converge.

> **Méthode**
> Commencer systématiquement l'étude d'une intégrale impropre par l'étude du domaine de continuité de l'intégrande permet d'identifier rapidement les bornes où une étude de convergence s'impose.

Au voisinage de 0, nous pouvons commencer par remarquer que si $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$, alors $(\ln t)^k t^{x-1} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, et donc $t \mapsto (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}$ est prolongeable par continuité en 0. Et donc $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1}\,dt$ converge.
En revanche, si $x \leqslant 1$, ce raisonnement n'est plus valable car $t^{x-1} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

Cherchons alors un $\alpha < 1$ tel que $(\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$.

On a alors

$$t^\alpha (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} = t^{x-1+\alpha} (\ln t)^k e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1+\alpha} (\ln t)^k.$$

Par croissances comparées, nous savons que pour $x-1+\alpha>0$, ceci tend vers 0 lorsque $t\to 0^+$.
Et donc si α vérifie à la fois $x-1+\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha>1-x$ et $\alpha<1$, alors $t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge.
Et donc dans ce cas $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^k e^{-t}t^{x-1}\,dt$ converge.
Il reste juste à remarquer qu'il existe bien des α vérifiant $1-x<\alpha<1$, car $x>0$ et donc $1-x<1$.
On peut par exemple prendre $\alpha=\dfrac{1-x+1}{2}$, le milieu de l'intervalle $]1-x,1[$.

Et donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln t)^k e^{-t}t^{x-1}\,dt \text{ converge.}}$

Remarque

Mieux : la limite est nulle **si et seulement si** $x-1+\alpha>0$.
En effet, si $x-1+\alpha<0$, alors $t^{x-1+\alpha}\underset{t\to 0^+}{\longrightarrow}+\infty$ et donc le produit tend vers $\pm\infty$ (suivant la parité de k).
Le cas où $x-1+\alpha=0$ est encore plus facile : il ne reste que $(\ln t)^k$.

2. Nous savons que $\boxed{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).}$ Et donc en dérivant cette relation, il vient, pour tout $x>0$, $\Gamma'(x+1)=\Gamma(x)+x\Gamma'(x)$.
Ainsi,

$$\Psi(x+1)-\Psi(x)=\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\frac{\Gamma(x)+x\Gamma'(x)}{x\Gamma(x)}-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\frac{1}{x}.$$

En particulier, pour $n\in\mathbf{N}^*$, on a

$$\Psi(n+2)-\Psi(n)=(\Psi(n+2)-\Psi(n+1))+(\Psi(n+1)-\Psi(n))=\boxed{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}.}$$

3. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales, on a, pour tout $A\in\mathbf{R}_+^*$, pour tout $B\in]0,A[$ et pour tout $x\in\mathbf{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}\left(\int_B^A \ln(t)e^{-t}t^{x-1}\,dt\right)^2 &= \left(\int_B^A \left(\ln(t)e^{-t/2}t^{(x-1)/2}\right)\left(e^{-t/2}t^{(x-1)/2}\right)dt\right)^2\\ &\leqslant \left(\int_B^A (\ln(t))^2e^{-t}t^{x-1}\,dt\right)\left(\int_B^A e^{-t}t^{x-1}\,dt\right).\end{aligned}$$

⚠Bornes

Il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire

$$\langle f,g\rangle=\int_B^A f(t)g(t)\,dt$$

défini sur $\mathscr{C}^0([B,A],\mathbf{R})$.
Notons que sur $\mathscr{C}(]0,A])$, ce produit scalaire n'est pas bien défini, car il se peut que l'intégrale diverge. Nous avons donc obligation de commencer par travailler sur un segment, puis de passer à la limite.

Mais lorsque $B\to 0^+$, on a, puisque toutes les intégrales qui suivent sont convergentes d'après la question 1 :

$$\int_B^A \ln t e^{-t}t^{k-1}\,dt \underset{B\to 0^+}{\longrightarrow}\int_0^A \ln t e^{-t}t^{x-1}\,dt,\quad \int_B^A(\ln t)^2e^{-t}t^{x-1}\,dt\underset{B\to 0^+}{\longrightarrow}\int_0^A(\ln t)^2e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

$$\text{et}\quad \int_B^A t^{x-1}e^{-t}\,dt\underset{B\to 0^+}{\longrightarrow}\int_0^A t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Et donc, par conservation des inégalités par passage à la limite, il vient

$$\boxed{\left(\int_0^A \ln(t)e^{-t}t^{x-1}\,dt\right)^2\leqslant\left(\int_0^A(\ln(t))^2e^{-t}t^{x-1}\,dt\right)\left(\int_0^A e^{-t}t^{x-1}\,dt\right).}$$

4. De même, en faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'inégalité précédemment obtenue, on obtient

$$\left(\int_0^{+\infty}\ln(t)e^{-t}t^{x-1}\,dt\right)^2\leqslant\left(\int_0^{+\infty}(\ln(t))^2e^{-t}t^{x-1}\,dt\right)\left(\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\,dt\right).$$

Soit encore $\boxed{(\Gamma'(x))^2\leqslant\Gamma''(x)\Gamma(x).}$
La fonction Ψ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et donc Γ' est dérivable, de même que Γ, et on a $\forall x>0,\ \Psi'(x)=\dfrac{\Gamma''(x)\Gamma(x)-\Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2}\geqslant 0$.
Et donc $\boxed{\Psi \text{ est une fonction croissante sur } \mathbf{R}_+^*.}$

5.a. Pour tout $k\geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{k^2-a^2}=\dfrac{1}{(k-a)(k+a)}=\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{k-a}-\dfrac{1}{k+a}\right)$.
Et donc il vient

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2-a^2}=\frac{1}{2a}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k-a}-\frac{1}{2a}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k+a}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2a}\sum_{k=1}^{n}(\Psi(k-a+1)-\Psi(k-a)) - \frac{1}{2a}\sum_{k=1}^{n}(\Psi(k+a+1)-\Psi(k+a)) \\
&= \frac{1}{2a}\left(\sum_{k=1}^{n}\Psi(k-a+1) - \sum_{k=1}^{n}\Psi(k-a) - \sum_{k=1}^{n}\Psi(k+a+1) + \sum_{k=1}^{n}\Psi(k+a)\right) \\
&= \frac{1}{2a}\left(\sum_{i=2}^{n+1}\Psi(i-a) - \sum_{k=1}^{n}\Psi(k-a) - \sum_{i=2}^{n+1}\Psi(i+a) + \sum_{k=1}^{n}\Psi(k+a)\right) \\
&= \frac{1}{2a}(\Psi(n+1-a)-\Psi(1-a)-\Psi(n+1+a)+\Psi(1+a)) \\
&= \boxed{\frac{1}{2a}(\Psi(1+a)-\Psi(1-a)) - \frac{1}{2a}(\Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a)).}
\end{aligned}$$

Chgt d'indice
$i = k+1$.

Étant donné que $a \in]0,1[$, on a $n+1+a \leqslant n+2$ et $n+1-a \geqslant n$. Par croissance de la fonction Ψ, il vient donc $\Psi(n+1+a) \leqslant \Psi(n+2)$ et $\Psi(n+1-a) \geqslant \Psi(n)$. On en déduit donc que

$$\Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a) \leqslant \Psi(n+2)-\Psi(n).$$

Enfin, toujours par croissance de Ψ, on a évidemment

$$\Psi(n+1+a) \geqslant \Psi(n+1-a) \Leftrightarrow \Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a) \geqslant 0.$$

5.b. D'après le résultat de question 2, nous savons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\Psi(n+2)-\Psi(n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1} = 0$, et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to\infty}\Psi(n+1+a)-\Psi(n+1-a) = 0$.
On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2-a^2} = \frac{1}{2a}(\Psi(1+a)-\Psi(1-a)).$$

Ceci prouve que la série de terme général $\frac{1}{k^2-a^2}$ est convergente, et que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-a^2} = \frac{1}{2a}(\Psi(1+a)-\Psi(1-a)).}$$

Rappel
Une série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge. La limite de cette suite est alors la somme de la série.

Problème

Dans toute la suite, on note B_k^n l'événement «le joueur A_k a remporté le duel numéro n.»

Partie I : Étude d'un cas particulier

1. Simulation des duels

1.a. C'est très classique : une variable suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, simulée avec `rand()` prend une valeur supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ avec probabilité $\frac{1}{2}$.

```
function y = duel()
        y = 0
        if rand()>0.5 then
                y= 1
        end
endfunction
```

Autrement dit
Il s'agit de la méthode d'inversion vue dans le TP2 dans le cas très particulier d'une loi de Bernoulli.

1.b. Il suffit de vérifier si les trois nombres sont égaux :

```
function y = test_victoire(a,b,c)
        y= 0
        if (a==b) & (b==c) then
                y= 1
        end
endfunction
```

1.c. Pour qu'un joueur gagne le tournoi, il faut qu'il gagne trois duels successifs. On peut donc utiliser la fonction `duel` jusqu'à ce qu'elle donne trois fois de suite le même résultat.

```
function k = tournoi()
        a = -1 ;
        b = -1 ;
        c = duel() ;
        k = 1 ;
        while test_victoire(a,b,c)<>1
                k = k+1 ;
                a = b ;
                b = c ;
                if duel() == 1 then
                        c = k
                end
        end
endfunction
```

Les variables `c`, `b` et `a` servent à stocker respectivement le vainqueur du dernier duel, de l'avant dernier et de l'antépénultième[2].
Au départ, le vainqueur du premier duel est obtenu avec `duel()`, qui vaut donc 0 ou 1.
Puis, jusqu'à ce que le gagnant des trois derniers duels soit le même, on effectue un nouveau duel (le k-ème) : si c'est le joueur entré en jeu[3] qui le gagne, `c` prend la valeur k. Sinon, la valeur de `c` ne change pas : le joueur qui vient de gagner ce duel est celui qui avait gagné le précédent.

[2] Pas facile à placer dans une copie !

[3] C'est-à-dire A_k.

2. Les listes des gagnants possibles des trois premiers tournois sont :

$$(A_0, A_0, A_0), (A_0, A_0, A_3), (A_0, A_2, A_2), (A_0, A_2, A_3), (A_1, A_1, A_1), (A_1, A_1, A_3), (A_1, A_2, A_2), (A_1, A_2, A_3).$$

Il est évident qu'il ne peut y avoir de gagnant à l'issue du premier duel, ni à l'issue du second duel, car alors aucun joueur n'a gagné trois duels de suite.
Donc $\boxed{P(E_1) = P(E_2) = 1.}$
Enfin, on ne peut avoir un gagnant lors du troisième duel que si le gagnant du premier duel a également remporté les deux suivants. Donc

$$P(\overline{E_3}) = P\left(\left(B_0^1 \cap B_0^2 \cap B_0^3\right) \cup \left(B_1^1 \cap B_1^2 \cap B_1^3\right)\right).$$

Mais les deux événements $(B_0^1 \cap B_0^2 \cap B_0^3)$ et $(B_1^1 \cap B_1^2 \cap B_1^3)$ sont incompatibles, de sorte que

$$P(\overline{E_3}) = P\left(B_0^1 \cap B_0^2 \cap B_0^3\right) + P\left(B_1^1 \cap B_1^2 \cap B_1^3\right).$$

Or, par la formule des probabilités composées, on a

$$P\left(B_0^1 \cap B_0^2 \cap B_0^3\right) = P\left(B_0^1\right) P_{B_0^1}\left(B_0^2\right) P_{B_0^1 \cap B_0^2}\left(B_0^3\right) = \frac{1}{2^3}.$$

De même, $P\left(B_1^1 \cap B_1^2 \cap B_1^3\right) = \frac{1}{8}$ et donc

$$P(\overline{E_3}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}.$$

Et donc $P(E_3) = 1 - P(\overline{E_3}) = \boxed{\frac{3}{4}.}$

On a donc bien $\boxed{P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1).}$

Danger !
L'indépendance des duels n'implique pas que les B_i^j soient indépendants.
Par exemple,

$$P(B_1^2 \cap B_0^1) = 0$$

car si le joueur A_0 a gagné le premier duel, alors A_1 ne disputera pas le second et donc ne pourra pas le gagner. Pourtant chacun de ces deux événements est de probabilité non nulle.

3. Notons $A_i^{(n)}$ l'événement «le vainqueur du $n^{\text{ème}}$ duel a gagné i duels à l'issue du $n^{\text{ème}}$ duel».
Alors $\left\{A_i^{(n)},\ i \in [\![1, n]\!]\right\}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales, on a alors

$$P(E_n) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i^{(n)}}(E_n) = P\left(A_1^{(n)}\right) P_{A_1^{(n)}}(E_n) + P\left(A_2^{(n)}\right) P_{A_2^{(n)}}(E_n).$$

Détails
Puisqu'il n'y a pas de vainqueur à l'issue du $n^{\text{ème}}$ duel, celui qui a gagné ce duel ne peut en avoir déjà gagné plus de deux.

Or, $A_1^{(n)} = B_n^n$ et donc $P\left(A_1^{()}\right) = P\left(B_n^n\right) = \dfrac{1}{2}$.
Et sachant que A_n a gagné le $n^{\text{ème}}$ duel, il n'y a pas de gagnant au bout de n duels si et seulement si il n'y en avait pas au bout de $n-1$. Et donc $P_{A_1^{(n)}}(E_n) = P_{A_1^{(n)}}(E_{n-1})$.
Mais E_{n-1} et $A_1^{(n)}$ sont indépendants, de sorte que $P_{A_1^{(n)}}(E_{n-1}) = P(E_{n-1})$.
De même, on prouve que $P\left(A_2^{(n)}\right) = \dfrac{1}{4}$ et que $P_{A_2^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-2})$. Et donc

$$\boxed{P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).}$$

4. La relation précédemment obtenue montre que la suite $(P(E_n))_{n\geqslant 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, de polynôme caractéristique $X^2 - \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{4}$.
Le discriminant de ce polynôme est $\dfrac{1}{4} + 1 > 0$.
Et donc le polynôme caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$, et alors il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \geqslant 2,\ P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Notons que $2 < \sqrt{5} < 3$, de sorte que r_1 et r_2 sont toutes deux dans $]-1,1[$.
Et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0.}$

5. Pour tout $n \geqslant 2$, on a $\bigcap_{k=2}^{+\infty} E_k \subset E_n$. Et donc

$$0 \leqslant P\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} E_k\right) \leqslant P(E_n).$$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient

$$\boxed{P\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} E_k\right) = 0.}$$

Or, l'événement $\bigcap_{k=2}^{+\infty} E_k$ est l'événement «le tournoi ne désigne pas de vainqueur». Et donc, par passage à l'événement contraire, le tournoi désigne un vainqueur avec probabilité 1.

Partie II : Étude du cas général.

6. Sachant que le joueur qui a remporté le $n^{\text{ème}}$ duel a remporté les k dernier duels, avec $k < N$, il n'y a pu y avoir de gagnant du tournoi lors des duels $n-k+1, n-k+2, \dots, n+1, n$.
Et donc E_n est réalisé si et seulement si il n'y avait pas non plus de gagnant du tournoi lors des $n-k$ premiers duels.
Et donc $P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P_{A_k^{(n)}}(E_{n-k})$.
Or, les événements $A_k^{(n)}$ et E_{n-k} sont indépendants car E_{n-k} ne dépend que des résultats des $(n-k)$ premiers duels, alors que $A_k^{(n)}$ de dépend que des résultats des duels $n-k+1, \dots, n$.
Et donc $P_{A_k^{(n)}}(E_{n-k}) = \dfrac{P\left(A_k^{(n)} \cap E_{n-k}\right)}{P\left(A_n^{(k)}\right)} = \dfrac{P\left(A_n^{(k)}\right)P(E_{n-k})}{P\left(A_n^{(k)}\right)} = P(E_{n-k})$.
Ainsi, on a bien

$$\boxed{P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k}).}$$

7. Notons que $\left\{A_k^{(n)},\ k \in [\![1,n]\!]\right\}$ est un système complet d'événements.
Par la formule des probabilités totales, on a

$$P(E_n) = \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k^{(n)}\right) P_{A_k^{(n)}}(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} P\left(A_k^{(n)}\right) P_{A_k^{(n)}}(E_n).$$

Détails
Pour $k \geqslant N$, on a

$$P_{A_k^{(n)}}(E_n) = 0$$

car si un joueur a gagné $k \geqslant N$ duels, le tournoi a désigné un vainqueur.

Mais $A_k^{(n)} = B_{n-k+1}^{n-k+1} \cap B_{n-k+1}^{n-k+2} \cap \cdots \cap B_{n-k+1}^{n}$.
Et donc, par la formule des probabilités composées,

$$P(A_k^{(n)}) = P\left(B_{n-k+1}^{n-k+1}\right) P_{B_{n-k+1}^{n-k+1}}\left(B_{n-k+1}^{n-k+2}\right) \cdots P_{B_{n-k+1}^{n-k+1}\cap B_{n-k+1}^{n-k+2}\cap\cdots\cap B_{n-k+1}^{n-1}}\left(B_{n-k+1}^{n}\right).$$

Et on a $P(B_{n-k+1}^{n-k+1}) = p$ car le joueur A_{n-k+1} est rentré en jeu lors du $(n-k+1)^{\text{ème}}$ duel, et toutes les autres probabilités conditionnelles valent q.
Et donc $P(A_k^{(n)}) = pq^{k-1}$.
On en déduit donc que

$$P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P_{A_k^{(n)}}(E_n) = \boxed{\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}).}$$

Détails
Si le vainqueur du $n^{\text{ème}}$ duel en est à sa $k^{\text{ème}}$ victoire, c'est qu'il s'agit du joueur entré en jeu lors du $(n-k+1)^{\text{ème}}$ duel et qu'il a remporté tous les duels de numéro compris entre $n-k+1$ et n (soit k duels).

8. Comme à la question 2, il ne peut y avoir de vainqueur du tournoi en strictement moins de N duels, donc

$$\boxed{P(E_1) = P(E_2) = \cdots = P(E_{N-1}) = 1.}$$

On en déduit, en utilisant la relation $(\mathscr{R}_2)$, que

$$P(E_N) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{N-1} q^{k-1} = p\sum_{i=0}^{N-2} q^i = p\frac{1-q^{N-1}}{1-q} = \boxed{1-q^{N-1}.}$$

Chgt d'indice
$i = k-1$.

9. Utilisons la relation $(\mathscr{R}_2)$: on a

$$\begin{aligned}
P(E_n) - P(E_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n+1-k})\\
&= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}(P(E_{n-k}) - P(E_{n+1-k}))\\
&= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n+1-k})\\
&= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{i=0}^{N-2} pq^{i}P(E_{n-i})\\
&= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k}P(E_{n-k}) - pP(E_n) + pq^{N-1}P(E_{n-N+1})\\
&= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}(1-q)P(E_{n-k}) - pP(E_n) + pq^{N-1}P(E_{n-N+1})\\
&= \sum_{k=1}^{N-1} p^2q^{k-1}P(E_{n-k}) - pP(E_n) + pq^{N-1}P(E_{n-N+1})\\
&= pq^{N-1}P(E_{n-N+1}) + p\left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}P(E_{n-k}) - P(E_n)\right)\\
&= \boxed{pq^{N-1}P(E_{n-N+1}).}
\end{aligned}$$

Chgt d'indice
$i = k-1$.

10. Le polynôme Q possède pour dérivée

$$Q'(x) = \sum_{k=1}^{N-1} kpq^{k-1}X^{k-1}$$

qui prend des valeurs strictement positives sur $]0; +\infty[$.
Donc la fonction $x \mapsto Q(x)$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
Elle est bien évidemment continue[4] sur cet intervalle, et on a $Q(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = +\infty$ car le coefficient dominant de Q est strictement positif.

[4] Car polynomiale.

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique $x \in]0;+\infty[$ tel que $Q(x) = 0$.
De plus, on a

$$Q(1) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} - 1 = 1 - q^{N-1} - 1 = -q^{N-1} < 0$$

de sorte que $r_N > 1$.
Et comme il a déjà été dit que Q' est strictement positif sur $]0;+\infty[$, on a également $Q'(r_N) > 0$.

11. Prouvons le résultat par récurrence forte sur n.

Pour $n \in [\![1, N-1]\!]$, on a $\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} = (r_N)^{N-n} \geqslant 1$.

Et puisque $P(E_n) \leqslant 1$, alors $P(E_n) \leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$.

Supposons donc que pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, $P(E_{n-k}) \leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-k-N}$.

Alors, d'après la relation $(\mathscr{R}_2)$,

$$\begin{aligned} P(E_n) &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} \left(\frac{1}{r_N}\right) n-k-N \\ &\leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} r_N^k \\ &\leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} (Q(r_N)+1) \\ &\leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}. \end{aligned}$$

$Q(r_N) = 0$.

Et donc, en vertu du principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ P(E_n) \leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}.}$

Réc. forte

Cela signifie qu'on ne suppose pas seulement l'hypothèse vérifiée au rang $n-1$ pour prouver qu'elle l'est au rang n, mais on suppose plutôt qu'elle est vérifiée à tous les rangs $0, 1, \dots, n-1$ pour prouver qu'elle est vraie au rang n.
Ici on n'a pas vraiment besoin d'une hypothèse aussi forte : il suffit de supposer qu'elle est vérifiée aux rangs $n-N, n-N+1, \dots, n-1$ pour prouver qu'elle est vraie au rang n.

12. La série de terme général $\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$ est géométrique, de raison $\frac{1}{r_N} \in]0,1[$, donc convergente.

Puisque pour tout n, $0 \leqslant P(E_n) \leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$, on en déduit que $\boxed{\text{la série de terme général } P(E_n) \text{ converge.}}$
De plus, en sommant, comme indiqué, la relation $(\mathscr{R}_3)$ sur les entiers $n \geqslant N$, il vient

$$\sum_{n=N}^{+\infty} (P(E_n) - P(E_{n+1})) = pq^{N-1} \sum_{n=N}^{+\infty} P(E_{n-N+1}).$$

Remarque

La convergence de ces séries est garantie car $\sum P(E_n)$ converge.

Or, on a

$$\sum_{n=N}^{+\infty} (P(E_n) - P(E_{n+1})) = \sum_{n=N}^{+\infty} P(E_n) - \sum_{n=N+1}^{+\infty} P(E_n) = P(E_N) = 1 - q^{N-1}.$$

Et d'autre part, le changement d'indice $i = n - N + 1$ montre que

$$pq^{N-1} \sum_{n=N}^{+\infty} P(E_{n-N+1}) = pq^{N-1} \sum_{i=1}^{+\infty} P(E_i).$$

On en déduit que

$$\boxed{\sum_{i=1}^{+\infty} P(E_i) = \frac{1-q^{N-1}}{pq^{N-1}}.}$$

13.a. $E_{n-1}\cap\overline{E_n}$ est l'événement : «il n'y a pas de gagnant après le $(n-1)^{\text{ème}}$ duel et il y en a un après le $n^{\text{ème}}$».
Il est donc réalisé si et seulement si la proclamation du vainqueur a eu lieu après le $n^{\text{ème}}$ duel, donc si et seulement si $[X=n]$ est réalisé.
Et donc $E_{n-1}\cap\overline{E_n}=[X=n]$.

13.b. Puisque $[X=n]=E_{n-1}\cap\overline{E_n}$, alors $[X=n]\subset E_{n-1}$, de sorte que

$$P(X=n)\leqslant P(E_{n-1})\leqslant\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-1-N}.$$

Et donc, pour tout $n\geqslant 1$, $0\leqslant nP(X=n)\leqslant n\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-1-N}$.

Mais la série de terme général $n\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-1-N}$ est une série géométrique dérivée convergente[5].
Par critère de comparaison, on en déduit que la $\sum\limits_{n\geqslant 1} nP(X=n)$ converge[6] et donc que X admet une espérance.
De plus, on a, par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{E_n,\overline{E_n}\}$, $P(E_{n-1})=P(E_{n-1}\cap E_n)+P(E_{n-1}\cap\overline{E_n})$.
Mais $E_n\subset E_{n-1}$, de sorte que $E_n\cap E_{n-1}=E_n$ et donc

$$P(E_{n-1}\cap\overline{E_n})=P(E_{n-1})-P(E_n).$$

Et donc il vient

$$\begin{aligned}
E(X)&=\sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n)\\
&=P(X=1)+\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(P(E_{n-1})-P(E_n)\right)\\
&=\sum_{n=2}^{+\infty} nP(E_{n-1})-\sum_{n=2}^{+\infty} nP(E_n)\\
&=\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)P(E_k)-\sum_{n=2}^{+\infty} nP(E_n)\\
&=2P(E_1)+\sum_{k=2}^{+\infty} kP(E_k)+\sum_{k=2}^{+\infty} P(E_k)-\sum_{n=2}^{+\infty} nP(E_n)\\
&=\boxed{1+\sum_{k=1}^{+\infty} P(E_n).}
\end{aligned}$$

La relation précédemment obtenue n'est valable que pour $n\geqslant 2$.

$P(X=1)=0$ car $N\geqslant 3$.

Chgt d'indice
$k=n-1$.

$P(E_n)=1$.

Et donc

$$\boxed{E(X)=1+\frac{1-q^{N-1}}{pq^{N-1}}.}$$

Partie III : Calcul de $P(E_n)$.

14. Si $Q(z)=Q'(z)=0$, alors z est racine double de Q, de sorte que Q est divisible par $(X-z)^2$.
Et donc R, qui est un multiple de Q est également divisible par $(X-z)^2$, de sorte que z est également racine double de R. Et donc $R(z)=R'(z)=0$.
Alors il vient

$$(N-1)z-N=zR'(z)-NR(z)=0\Leftrightarrow z=\frac{N}{N-1}\in]0;+\infty[.$$

Mais nous savons que Q ne possède qu'une seule racine dans $]0;+\infty[$, égale à r_N, et que $Q'(r_N)>0$. Ceci contredit l'hypothèse selon laquelle $Q'(z)=0$.

Racine double
Rappelons qu'une racine double α est une racine à la fois de Q et de Q', et que cela est équivalent à ce que Q soit divisible par $(X-\alpha)^2$.

15.a. f est linéaire d'après l'énoncé[7].
De plus, si $S\in\operatorname{Ker} f$, alors

$$S\left(\frac{1}{z_1}\right)=S\left(\frac{1}{z_2}\right)=\cdots=S\left(\frac{1}{z_{N-1}}\right)=0.$$

[5] Car de raison dans $]0,1[$.

[6] Et donc converge absolument car il s'agit d'une série à termes positifs.

[7] Même s'il n'y aurait aucune difficulté à le vérifier.

Puisque les z_i sont distincts, leurs inverses sont également distincts, et donc S possède $N-1$ racines distinctes. Sachant qu'il est de degré au plus $N-2$, c'est donc le polynôme nul. Et donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$: f est injectif.
Or $\dim \mathbf{C}_{N-2}[X] = N-1 = \dim \mathbf{C}^{N-1}$: $\boxed{f \text{ est donc un isomorphisme.}}$

Rappel
Une application linéaire entre deux espaces de même dimension est un isomorphisme si et seulement si elle est injective.

15.b. On a $S(1) = (1, 1, \ldots, 1)$, $S(X) = \left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \ldots, \frac{1}{z_{N-1}}\right)$ et plus généralement, pour tout $k \in [\![0, N-2]\!]$,

$$S(X^k) = \left(\left(\frac{1}{z_1}\right)^k, \ldots, \left(\frac{1}{z_{N-1}}\right)^k\right).$$

Donc la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{C}_{N-2}[X]$ et $\mathbf{C}^{N-1}$ est

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(1) & f(X) & \ldots & f(X^{N-2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z_1} & \cdots & \frac{1}{z_1^{N-2}} \\ 1 & \frac{1}{z_2} & \cdots & \frac{1}{z_2^{N-2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{z_{N-1}} & \cdots & \frac{1}{z_{N-1}^{N-2}} \end{pmatrix} \end{array}. \text{ Et donc } {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_2} & \cdots & \frac{1}{z_{N-2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{z_1^{N-2}} & \frac{1}{z_2^{N-2}} & \cdots & \frac{1}{z_{N-1}^{N-2}} \end{pmatrix}.$$

15.c. Puisque f est un isomorphisme, A est inversible. Et donc ${}^tA$ est également inversible. Or, il s'agit de la matrice du système $(\mathscr{S})$, qui est donc un système de Cramer. Il admet donc une unique solution[8].

Inversibilité
Puisque A est inversible, on a $\operatorname{rg}(A) = n$ et donc $\operatorname{rg}({}^tA) = n$, de sorte que ${}^tA$ est inversible.

[8] Indépendamment du choix du second membre.

16. On a, pour $n \geqslant N$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n-k} &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} z_j^k \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1} (Q(z_j)+1) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1} \\ &= \boxed{u_n.} \end{aligned}$$

z_j est une racine de Q.

Par définition des α_j, on a, pour $k \in [\![1, N-1]\!]$, $P(E_k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{k-1} = u_k$.

Procédons alors par récurrence[9] : supposons que

[9] Forte, comme à la question 11.

$$P(E_{n-1}) = u_{n-1}, P(E_{n-2}) = u_{n-2}, \ldots, P(E_{n-N+1}) = u_{n-N+1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} P(E_n) &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n-k} \\ &= \boxed{u_n.} \end{aligned}$$

C'est la relation $(\mathscr{R}_2)$.

Hypothèse de récurrence.

En vertu du principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $\boxed{P(E_n) = u_n.}$

ECRICOME 2013

Exercice 1

Sujet : Quelques propriétés des matrices dont une puissance est égale à la transposée. **Facile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : produits scalaires, matrices symétriques.

Commentaires : très classique (à l'exception de la dernière question), à faire au moins une fois.

On note :

- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices colonnes (à n lignes) à coefficients réels ;
- $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels;
- ${}^tU$ la transposée d'une matrice U;
- $\ker(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $MX = 0\}$ et $\mathrm{Im}(M) = \{MX,\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\}$ où M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$ et on note $\|\cdot\|$ sa norme associée.
On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et un entier naturel k non nul tels que $A^k = {}^tA$. On pose alors $B = {}^tAA \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1. Calculer ${}^tB$ et établir que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}),\ \langle BX, X\rangle = \|AX\|^2$.
2. Démontrer que toutes les valeurs propres de B sont réelles et positives.
3. Prouver que : $B^k = B$. Quelles sont les valeurs propres possibles de B ?
4. Justifier que : $B^2 = B$.
5. Montrer que : $\ker(B) = \ker(A)$ puis que : $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A)$.
6. Établir que : $\forall X \in \mathrm{Im}(A),\ \|AX\| = \|X\|$.

Exercice 2

Sujet : Étude d'une suite récurrente **Facile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★☆☆

Thèmes du programme abordés : suites, fonctions de plusieurs variables,calcul différentiel d'ordre 1.

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

On considère :

- la fonction f définie sur $\mathbf{R}^3$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x,y) = \frac{1}{5}\left[x^2(1-x^2) + y^2(1-y^2) + 2xy\right].$$

- la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \text{ avec } (u_0, u_1) \in [0,1]^2.$$

1. **Étude de f**
   a. Si (a,b) est un point critique de f, justifier que $a = b$ puis déterminer tous les points critiques de f ainsi que la valeur de f en chacun de ses points critiques.

   On admettra dans toute la suite que :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x,y) \leqslant \frac{2}{5}(x^2+y^2) - \frac{1}{10}(x^2+y^2)^2.$$

   b. Préciser le ou les extremums de la fonction $g : t \in \mathbf{R}_+ \mapsto \dfrac{2t}{5} - \dfrac{t^2}{10}$.

   c. Démontrer que la fonction f possède un maximum et qu'elle n'est pas minorée.
2. Écrire une fonction `Scilab` qui prend comme paramètres un entier N et les valeurs de u_0 et u_1 et retourne la valeur de u_N correspondante.
3. **Étude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$**
   On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+2} = \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1}) \text{ avec } a_0 = u_0 \text{ et } a_1 = u_1.$$

a. Démontrer que : $\forall n \geqslant 0,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
En déduire que : $\forall \in \mathbf{N},\ u_{n+2} \leqslant \dfrac{2}{5}\,(u_n + u_{n+1})$.

b. Justifier que : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leqslant a_n$.

c. Établir l'existence de quatre réels λ, μ, r, s tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = \lambda r^n + \mu s^n$$

puis étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Problème

Sujet : Discrétisées de variables aléatoires — Moyen

Abordable en première année : ✓ (sauf peut-être 5.d) — **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : variables discrètes, variables à densité, séries numériques, intégrales impropres

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : les deux premières parties sont plutôt faciles, la dernière est un peu plus technique.

Soit x un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est à dire l'unique entier N tel que : $N \leqslant x < N+1$.
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On définit X_d sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X_d(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor.$$

On admet que X_d est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, on l'appelle «la discrétisée de X».
Le problème consiste :

— à étudier quelques propriétés de la discrétisée de variables suivant quelques lois usuelles (**Partie I**) ;

— puis à étudier plus spécifiquement le cas où les variables possèdent une densité définie par un polynôme (**Partie II**) ;

— et enfin à établir qu'une variable discrète, satisfaisant à certaines conditions, est la variable discrétisée d'une variable à densité (**Partie III**).

Les parties **I**, **II** et **III** sont largement indépendantes.

Partie I : Calculs de discrétisées.

1. En `Scilab` :
• la commande `floor(x)` calcule la partie entière du réel x ;
• la commande `rand()` crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$ (qui suit la loi uniforme sur $[0,1]$).
On rappelle que si Z suit la loi uniforme sur $[0,1]$ alors, pour tout $a \in \mathbf{R}_+$, aZ suit la loi uniforme sur $[0,a]$.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,a]$ $(a \in \mathbf{R}_+)$ et X_d sa discrétisée. Écrire une fonction `Scilab` qui, à un réel a (positif) fourni par l'utilisateur, renvoie une réalisation de X_d.

2. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbf{Z},\ P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx.$$

3. Soit N un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,N]$. Déterminer la loi de X_d (on précisera les valeurs prises par X_d).

4. Établir que l'on définit bien une variable aléatoire discrète Y en posant :

$$\begin{cases} Y(\Omega) = \{1,2,\ldots,9\} \\ \forall k \in Y(\Omega),\ P(Y=k) = \dfrac{1}{\ln(10)} \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \end{cases}$$

Proposer une densité f telle que si une variable aléatoire X possède f pour densité alors sa discrétisée X_d suit la loi de Y.

5. Soient X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ et n un entier naturel non nul.
On pose : $Y_n = \dfrac{\lfloor nX \rfloor}{n}$.

a. Justifier que la variable nX possède une densité f_n que l'on précisera.

b. Donner la loi de la variable aléatoire $\lfloor nX \rfloor$.
Vérifier que $\lfloor nX \rfloor + 1$ suit une loi connue dont on donnera le nom et le paramètre.

c. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Prouver que : $P(Y_n \leqslant x) = 1 - \exp\left(-\dfrac{\lambda(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}\right)$.

d. Donner un encadrement simple de $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ puis montrer que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

Partie II : Discrétisées de lois «polynomiales».
On note $\mathbf{R}_n[X]$ l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels de degré au plus n et on pose :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ e_k : x \in \mathbf{R} \mapsto x^k.$$

Si Q appartient à $\mathbf{R}_n[X]$, on pose $u(Q)$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ u(Q)(x) = \int_x^{x+1} Q(t)\,dt.$$

6. Pour tout entier $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, calculer $u(e_k)$ puis exprimer $u(e_k)$ en fonction de $e_0, e_1, \ldots, e_n$.
7. Établir la linéarité de u et justifier que si $Q \in \mathbf{R}_n[X]$ alors $u(Q) \in \mathbf{R}_n[X]$.
8. Établir que la famille $(u(e_k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
9. Justifier que pour tout polynôme $R \in \mathbf{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme $Q_R \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ R(x) = \int_x^{x+1} Q_R(t)\,dt.$$

10. En considérant $n = 1$, expliciter Q_R lorsque : $\forall x \in \mathbf{R},\ R(x) = \dfrac{x}{6}$.
11. Soient N un entier naturel et X une variable aléatoire dont f est une densité.

a. On suppose qu'il existe un entier naturel n et un polynôme $Q \in \mathbf{R}_n[X]$ tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} Q(x) & \text{si } x \in [0, N+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Établir l'existence d'un polynôme $R \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que :

$$\begin{cases} X_d(\Omega) = \{0, 1, \ldots, N\} \\ \forall k \in X_d(\Omega),\ P(X_d = k) = R(k) \end{cases}$$

b. On considère la variable aléatoire discrète Y définie par :

$$\begin{cases} Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\} \\ \forall k \in Y(\Omega),\ P(Y = k) = \dfrac{k}{6} \end{cases}$$

Montrer qu'il n'existe aucun polynôme $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in [0, 4[,\ f(x) = Q(x)$$

et tel que Y soit la discrétisée de X.
Indication : procéder par l'absurde et constater que l'une des propriétés des densités n'est pas satisfaite.

Partie III : Variables dénombrables discrétisées.
On considère une variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ainsi qu'une fonction $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ qui soit de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$ et telle que $Y(\Omega) = \mathbf{N}$ et : $\forall k \in \mathbf{N},\ P(Y = k) = g(k)$.

En particulier, la série $\sum_{k\geqslant 0} g(k)$ converge et : $\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1$.

On suppose en outre que g est <u>décroissante</u> et qu'il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ |g'(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2} \text{ et } |g''(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2}.$$

Pour tout réel x, on pose : $f(x) = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

12. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Prouver la convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} g'(x+k)$. Quel est le signe de f ?

13. **a.** Établir que : $\forall (x,a) \in (\mathbf{R}_+)^2$, $\forall k \in \mathbf{N}$, $|g'(x+k) - g'(a+k)| \leqslant \dfrac{C|x-a|}{(k+1)^2}$.

b. Prouver l'existence d'un réel $D \geqslant 0$ tel que : $\forall (x,a) \in (\mathbf{R}_+)^2$, $|f(x) - f(a)| \leqslant D|x-a|$.
Justifier la continuité de f en tout réel $a \in \mathbf{R}_+$.

14. Soit t un réel positif. Pour tout entier naturel N, on pose :

$$S_N(t) = -\sum_{k=0}^{N} g'(t+k) \text{ et } R_N(t) = -\sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t+k).$$

a. Démontrer que : $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $\dfrac{1}{(t+k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{t+k} - \dfrac{1}{t+k+1}$.
En déduire que : $\forall N \in \mathbf{N}$, $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $|R_N(t)| \leqslant \dfrac{C}{N+1}$.

b. Prouver que : $\forall N \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)\,dt$.

c. Justifier que : $\lim\limits_{k\to+\infty} g(k) = 0$ et que : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = g(0)$.

15. **a.** Vérifier que : $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $f(t+1) - f(t) = g'(t)$.
En déduire que : $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $g(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt$.

b. Pour tout entier $N \geqslant 0$, on pose : $S_N = \displaystyle\int_0^N f(t)\,dt$.
Établir que : $\forall N \in \mathbf{N}^*$, $S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} g(k)$ puis que : $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $S_{\lfloor x\rfloor} \leqslant \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \leqslant S_{\lfloor x\rfloor+1}$.
En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et préciser sa valeur.

c. Démontrer que f peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X et que sa discrétisée X_d suit la même loi que Y.

ECRICOME 2013 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. On a ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA = \boxed{B.}$
On en déduit que pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on a

$$\langle BX, X\rangle = {}^t(BX)X = {}^tX\,{}^tBX = {}^tXBX = {}^tX\,{}^tAAX = {}^t(AX)(AX) = \boxed{\|AX\|^2.}$$

2. Puisque B est symétrique à coefficients réels, ses valeurs propres sont toutes réelles.
Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(B)$ et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ un vecteur propre associé. Alors

$$\langle BX, X\rangle = \langle \lambda X, X\rangle = \lambda\langle X, X\rangle = \lambda\|X\|^2.$$

D'autre part, on sait que $\langle BX, X\rangle = \|AX\|^2 \geqslant 0$.
Mais $\|X\|^2 > 0$ car X n'est pas le vecteur nul[1], de sorte que $\lambda = \dfrac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{toutes les valeurs propres de } B \text{ sont positives.}}$

Précision
Une matrice réelle pourrait avoir des valeurs propres complexes.
Nous savons que ce n'est pas le cas d'une matrice symétrique, qui est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

[1] C'est un vecteur propre !

3. On a $B^k = ({}^tAA)^k = (A^kA)^k = A^{k(k+1)} = (A^k)^{k+1} = A^{k+1} = A^kA = {}^tAA = \boxed{B.}$
Donc B est annulée par le polynôme $X^k - X = X(X^{k-1} - 1)$, qui possède pour racines réelles 0 et 1, ainsi que -1 si k est impair.
Or les valeurs propres de B sont des racines de $X^k - X$, et donc sont parmi $\{-1, 0, 1\}$.
Puisque de plus nous savons qu'elles sont positives, les seules valeurs propres possibles de B sont 0 et 1.

Racines de l'unité
Pour $k \geqslant 3$, il y a également des racines complexes non réelles, mais les valeurs propres de B étant toutes réelles, ces racines complexes ne sont pas des valeurs propres de B.

4. B est diagonalisable[2]. Donc il existe une matrice P inversible, et une matrice D diagonale, dont les coefficients diagonaux valent tous 0 ou 1, telles que $B = P^{-1}DP$.
Alors $B^2 = (P^{-1}DP) = P^{-1}D^2P$.
Mais D^2 est une matrice diagonale dont les coefficients sont les carrés de ceux de D. Puisque $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$, on en déduit que $D^2 = D$ et donc $\boxed{B^2 = B.}$

[2] Car symétrique réelle.

5. Il est évident que si $X \in \ker(A)$, alors $BX = {}^tAAX = {}^t \cdot A0 = 0$.
Donc $\ker(A) \subset \ker(B)$.
D'après ce qui a été prouvé à la question 1, si $X \in \ker(B)$, alors

$$\|AX\|^2 = \langle BX, X\rangle = \langle 0, X\rangle = 0.$$

Et donc $\|AX\| = 0$, de sorte que $AX = 0$: $X \in \ker(A)$.
On en déduit que $\ker(B) \subset \ker(A)$ et donc $\boxed{\ker(B) = \ker(A).}$
Soit f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ défini par $f_A(X) = AX$.
Alors $\ker(A) = \mathrm{Ker}(f_A)$ et $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(f_A)$.
Par le théorème du rang, on a donc

$$\dim\ker(A) + \dim\mathrm{Im}(A) = \dim\mathrm{Ker}(f_A) + \dim\mathrm{Im}(f_A) = \dim\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) = n.$$

De même, on a $\dim\ker(B) + \dim\mathrm{Im}(B) = n$.
Puisque $\ker(A) = \ker(B)$, on en déduit que $\dim\mathrm{Im}(A) = \dim\mathrm{Im}(B)$.
Or, si $Y \in \mathrm{Im}(B)$, alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $Y = BX$ et donc

$$Y = {}^tAAX = A^{k+1}X = A(A^kX) \in \mathrm{Im}(A).$$

Et donc $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A)$.
Ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ ayant même dimension, ils sont donc égaux : $\boxed{\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A).}$

6. Soit $X \in \mathrm{Im}(A)$. Alors $X \in \mathrm{Im}(B)$ et donc il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $X = BY$. Et donc

$$\|AX\|^2 = \langle BX, X\rangle = \langle B^2Y, BY\rangle = \langle BY, BY\rangle = \langle X, X\rangle = \|X\|^2.$$

Et donc en passant à la racine carrée[3], il vient $\boxed{\|AX\| = \|X\|.}$

[3] Une norme est toujours positive.

Exercice 2

1. Étude de f

1.a. f est de classe $\mathscr{C}^1$ car polynomiale, et on a

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{1}{5}\left(2x - 4x^3 + 2y\right), \partial_2 f(x,y) = \frac{1}{5}\left(2y - 4y^3 + 2x\right).$$

Donc (a,b) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} 2a - 4a^3 + 2b = 0 \\ 2b - 4b^3 + 2a = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2a - 4a^3 + 2b = 0 \\ 4a^3 - 4b^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2a^3 - b = 0 \\ a^3 = b^3 \end{cases}$$

Mais la fonction cube étant injective[4], la seconde équation est en fait équivalente à $a = b$. (a,a) est alors un point critique si et seulement si $2a - 4a^3 + 2a = 0 \Leftrightarrow a^3 - a = 0 \Leftrightarrow a(a+1)(a-1) = 0$.

Ainsi, $\boxed{f \text{ possède trois points critiques qui sont } (0,0), (1,1) \text{ et } (-1,-1).}$

On a alors $f(0,0) = 0$, $f(1,1) = \frac{2}{5}$, $f(-1,-1) = \frac{2}{5}$.

[4] car strictement croissante

1.b. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$, de dérivée égale à $g'(t) = \frac{1}{5}(2-t)$. Ainsi, g' s'annule en 2, et donc g est croissante sur $[0,2]$ et décroissante sur $[2,+\infty]$.

Puisque $g(2) = \frac{2}{5}$, alors g possède un maximum en $t = 2$, qui vaut $\frac{2}{5}$, et ne possède pas de minimum car $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = -\infty$.

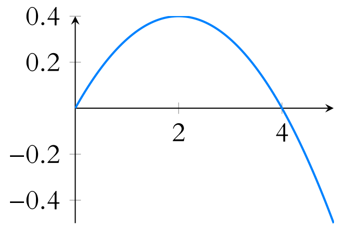


Figure 1– La fonction g

1.c. Notons que le résultat admis se traduit par

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x,y) \leqslant g(x^2+y^2).$$

Or g admet un maximum, égal à $g(2) = \frac{2}{5}$.

Et donc, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x,y) \leqslant \frac{2}{5} = f(1,1)$.

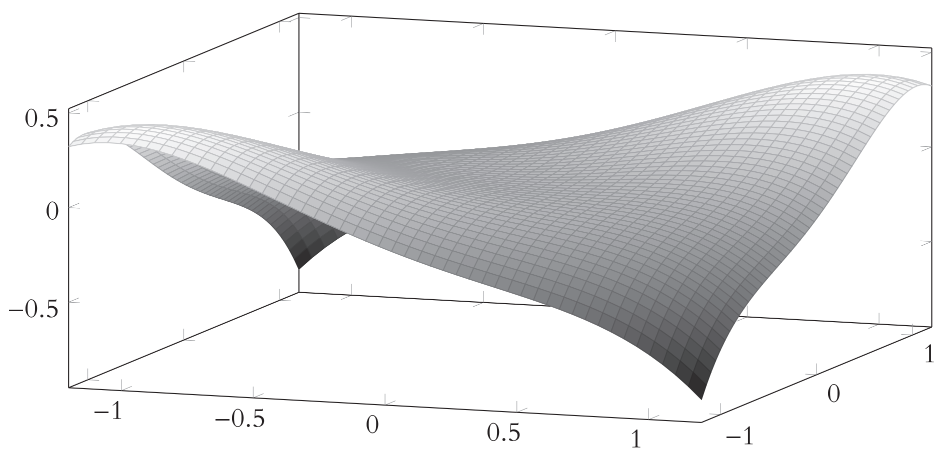
Ainsi, f possède un maximum, égal à $\frac{2}{5}$, atteint en $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

Enfin, f n'est pas minorée, par exemple car

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5}\left(-2x^4\right) = -\infty.$$

Points critiques

Il est certain que le maximum n'est pas atteint en d'autres points, car il est nécessairement atteint en un point critique.



2.

```
function y = suite(u,v,N)
  a = zeros(1,N+1) ;
  a(1) = u ;
  a(2) = v ;
  for i = 3  : N+1
    a(i) = 1/5*(a(i-1)^2*(1-a(i-1)^2) +
     a(i-2)^2*(1-a(i-2)^2)+2*a(i-1)*a(i-2)) ;
  end
 y = a(N+1) ;
endfunction
```

Explications

Le vecteur a contient tous les termes de la suite, en gardant en mémoire qu'en `Scilab` le premier coefficient est numéroté 1. Donc `a(i)` contient u_{i-1}.
On remplit alors les deux premiers coefficients grâce à u et v, qui sont les deux premiers termes de la suite, puis une boucle permet de remplir les autres coefficients.

3. Étude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$

3.a. Prouvons par récurrence double[5] sur n que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
Aux rangs $n = 0$ et $n = 1$, la propriété est vérifiée car il s'agit de l'une des hypothèses de l'énoncé.
Supposons donc que u_n et u_{n+1} soient tous deux dans $[0,1]$.
Alors on a $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \leqslant f(1,1) \leqslant \dfrac{2}{5} \leqslant 1$.
D'autre part, on a $1-u_n^2 \geqslant 0$ et $1-u_{n+1}^2 \geqslant 0$ de sorte que

$$u_{n+2} = \frac{1}{5}\left(u_n(1-u_n^2) + u_{n+1}(1-u_{n+1}^2) + 2u_nu_{n+1}\right) \geqslant 0.$$

Et donc $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$.
Par le principe de récurrence double, $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1.}$ Il vient alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+2} = f(u_n,u_{n+1}) \leqslant \frac{2}{5}\left(u_n^2+u_{n+1}^2\right) - \frac{1}{10}\left(u_n^2+u_{n+1}^2\right)^2 \leqslant \frac{2}{5}\left(u_n^2+u_{n+1}^2\right).$$

Mais u_n et u_{n+1} sont tous deux dans $[0,1]$, donc supérieurs à leurs carrés respectifs. Et donc

$$\boxed{u_{n+2} \leqslant \frac{2}{5}(u_n+u_{n+1}).}$$

[5] Puisque u_{n+2} dépend de u_{n+1} et de u_n, il est important de procéder à une récurrence double, une récurrence simple ne serait pas suffisante.

Carrés

Pour $x \in [0,1]$, on a $x \leqslant x^2$, alors que pour $x \geqslant 1$, on a $x^2 \geqslant x$.

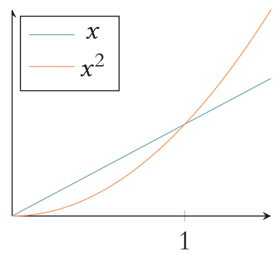


FIGURE 2– Comparaison entre x et x^2.

3.b. Prouvons ce résultat par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$. Il est évidemment vérifié aux rangs 0 et 1, par définition de a_0 et de a_1.
Supposons que $u_n \leqslant a_n$ et $u_{n+1} \leqslant a_{n+1}$. Alors

$$u_{n+2} \leqslant \frac{2}{5}(u_n+u_{n+1}) \leqslant \frac{2}{5}(a_n+a_{n+1}) = a_{n+2}.$$

Par le principe de récurrence double, la propriété est vérifiée pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leqslant a_n.}$$

3.c. La suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre deux.
Son polynôme caractéristique est $X^2 - \dfrac{2}{5}X - \dfrac{2}{5}$, de discriminant égal à $\Delta = \dfrac{4}{25} + \dfrac{8}{5} = \dfrac{44}{25} > 0$.
Ses deux racines sont alors $r = \dfrac{1+\sqrt{11}}{5}$ et $\dfrac{1-\sqrt{11}}{5}$.
Et alors il existe deux constantes λ et μ telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, a_n = \lambda r^n + \mu s^n.$$

De plus, $11 < 16$, et donc $\sqrt{11} < 4 \Rightarrow 1+\sqrt{11} < 5$, de sorte que $r = \dfrac{1+\sqrt{11}}{5} < 1$. Et il est évident que $r > 0$. De même

$$\sqrt{11} < 6 \Rightarrow -5 < 1-\sqrt{11} \Rightarrow -1 < \frac{1-\sqrt{11}}{5}.$$

Donc $r_2 \in]-1, 0[$.

Alors, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = \lim\limits_{n\to+\infty} s^n = 0$, de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
Comme on a $0 \leqslant u_n \leqslant a_n$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

Remarque

L'énoncé demande de prouver que de telles constantes existent, pas de les déterminer.
Toutefois, afin de calculer la limite de la suite, nous allons avoir besoin des valeurs de r et s.

Problème

Partie I : Calculs de discrétisées.

1. On simule une loi uniforme sur $[0, a]$ à partir de `rand` en utilisant l'indication fournie par l'énoncé, puis il suffit de prendre sa partie entière.

```
function y = question1(a)
        y = floor(a*rand()) ;
endfunction
```

2. On a $[X_d = k] = [\lfloor X \rfloor = k] = [k \leqslant X < k+1]$ et donc

$$P(X_d = k) = P(k \leqslant X < k+1) = \boxed{\int_k^{k+1} f(t)\,dt.}$$

3. Notons que X prend ses valeurs dans $[0, N]$ et donc X_d prend ses valeurs dans $[\![0, N]\!]$.
De plus, $P(X_d = N) = P(X = N) = 0$. Et pour $k \in [\![0, N-1]\!]$,

$$P(X_d = k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{N}\,dt = \frac{1}{N}.$$

Et donc $\boxed{X_d \text{ suit la loi uniforme sur } [\![0, N-1]\!].}$

Rappel
La densité d'une loi uniforme sur $[0, N]$ est

$$t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Les $P(Y = k)$ sont positifs, il s'agit donc de vérifier que $\sum_{k=1}^{9} P(Y = k) = 1$. Or

$$\sum_{k=1}^{9} \frac{1}{\ln(10)} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{\ln(10)} \sum_{k=1}^{9} \ln(k+1) - \frac{1}{\ln(10)} \sum_{k=1}^{9} \ln(k) = \frac{1}{\ln(10)} (\ln(10) - \ln(1)) = 1.$$

On aura reconnu une somme télescopique.

Cherchons donc une densité f telle que, pour tout $k \in [\![1, 9]\!]$,

$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt = \frac{1}{\ln(10)} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{\ln(10)} (\ln(k+1) - \ln(k))\,.$$

Remarque
Puisque de plus, on souhaite que $X_d(\Omega) = [\![1, 9]\!]$, il faut que pour $k \leqslant 0$ ou $k \geqslant 9$,

$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt = 0.$$

Par exemple, soit f la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{1}{\ln(10)} \dfrac{1}{t} & \text{si } 1 \leqslant t < 10 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 10 \end{cases}$$

Alors f est positive, continue sauf en 0 et en 10 et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{\ln(10)} \int_1^{10} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\ln(10)} [\ln(t)]_1^{10} = 1.$$

Donc f est bien une densité de probabilité, et on a, pour tout $k \in [\![1, 9]\!]$,

$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_k^{k+1} \frac{1}{\ln(10)} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\ln(10)} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \frac{1}{\ln(10)} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = P(Y = k).$$

Et bien entendu, pour $k \notin [\![1, 9]\!]$, $\int_k^{k+1} f(t)\,dt = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } X \text{ possède } f \text{ pour densité, alors } X_d \text{ a même loi que } Y.}$

Pour la culture
La loi de Y s'appelle loi de Benford. Elle est notamment utilisée dans la détection de fraude fiscale.

5.a. La variable nX est une transformée affine d'une variable à densité : elle possède donc une densité donnée par

$$f_n : t \mapsto \frac{1}{n} f_X\left(\frac{t}{n}\right) = \boxed{\begin{cases} \dfrac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n} t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Notons que l'on a là une loi exponentielle $\mathcal{E}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)$.

5.b. D'après la question 2, on a, pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$P(\lfloor nX \rfloor = k) = \int_k^{k+1} f_n(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ e^{-\lambda k/n} - e^{-\lambda(k+1)/n} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $k \geqslant 0$, on a $e^{-\lambda k/n} - e^{-\lambda(k+1)/n} = e^{-\lambda k/n}\left(1 - e^{-\lambda/n}\right)$.
En particulier, $\lfloor nX \rfloor + 1$ prend ses valeurs dans $\mathbf{N}^*$, et pour $k \geqslant 1$,

$$P(\lfloor nX \rfloor + 1 = k) = P(\lfloor nX \rfloor = k-1) = \left(e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)^{k-1}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right).$$

On reconnaît alors $\boxed{\text{une loi géométrique de paramètre } 1 - e^{-\lambda/n}.}$

5.c. On a

$$P(Y_n \leqslant x) = P\left(\frac{\lfloor nX \rfloor}{n} \leqslant x\right) = P(\lfloor nX \rfloor \leqslant nx) = P(nX < \lfloor nx \rfloor + 1).$$

Détails

Puisque $\lfloor nX \rfloor$ est un entier, il est inférieur ou égal à nx si et seulement si il est inférieur strictement à l'entier immédiatement supérieur à nx, qui est $\lfloor nx \rfloor + 1$.
Par exemple,

$$\lfloor x \rfloor \leqslant 3,5 \Leftrightarrow x < 4.$$

Mais puisque $nX \hookrightarrow \mathscr{E}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$, il vient donc

$$P(Y_n \leqslant x) = P(nX < \lfloor nX \rfloor + 1) = P(nX \leqslant \lfloor nx \rfloor + 1) = \boxed{1 - \exp\left(-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}\right).}$$

5.d. On a[6] $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1 \Leftrightarrow nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$.
Et donc

$$x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x.$$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.
Donc d'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

De plus, pour $x < 0$, on a $P(Y_n \leqslant x) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, si F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, alors

$$\forall x \in \mathbf{R}, \lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leqslant x) = F(x).$$

Et donc $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

[6] Par définition de la partie entière.

Partie II : Discrétisées de lois «polynomiales».

6. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, et $x \in \mathbf{R}$, on a

$$u(e_k)(x) = \int_x^{x+1} t^k\,dt = \boxed{\frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1}.}$$

Soit encore

$$u(e_k)(x) = \frac{1}{k+1}\left((x+1)^{k+1} - x^{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}x^i - x^{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}x^i = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}e_i(x).$$

Et donc $\boxed{u(e_k) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}e_i.}$

7. Soient $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$u(\lambda P + Q)(x) = \int_x^{x+1}(\lambda P(t) + Q(t))\,dt = \lambda\int_x^{x+1} P(t)\,dt + \int_x^{x+1} Q(t)\,dt = \lambda u(P)(x) + u(Q)(x).$$

Et donc $u(\lambda P + Q) = \lambda u(P) + u(Q)$: u est linéaire.

De plus, si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, alors il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k$.

Et donc par linéarité de u, $u(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k u(e_k)$.

Mais à la question précédente, nous avons prouvé que $u(e_k) \in \mathbf{R}_n[X]$, et donc, par stabilité de $\mathbf{R}_n[X]$ par combinaisons linéaires, $u(P) \in \mathbf{R}_n[X]$. Et donc $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } \mathbf{R}_n[X].}$

8. D'après le calcul de la question 6, $u(e_k)$ est de degré k. Et comme une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre, $(u(e_k))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre.
Elle est de cardinal $n + 1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$: $\boxed{\text{c'est une base de } \mathbf{R}_n[X].}$

9. Nous venons de prouver que l'image de la base $(e_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ par u est encore une base de $\mathbf{R}_n[X]$: u est donc un isomorphisme[7].
Et donc pour tout $R \in \mathbf{R}_n[X]$, il existe un unique $Q_R \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $u(Q_R) = R$. Soit encore :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ R(x) = \int_k^{k+1} Q_R(t)\, dt.$$

[7] Et même un automorphisme.

10. Puisque $Q_R \in \mathbf{R}_1[X]$, cherchons Q_R sous la forme $Q_R(x) = ax + b$.
On veut alors :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \frac{x}{6} = \int_x^{x+1} (at + b)\ dt = \left[a\frac{t^2}{2} + bt\right]_x^{x+1} = \frac{a}{2}\left((x+1)^2 - x^2\right) + b = ax + \frac{a}{2} + b.$$

Par identification des coefficients, il vient donc $a = \frac{1}{6}$ et $b + \frac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{12}$.

Et donc $\boxed{Q_R(x) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}.}$

11.a. Notons que $\forall k \notin [\![0, N]\!]$,

$$P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(t)\, dt = \int_k^{k+1} 0\, dt = 0.$$

Donc $X_d(\Omega) = [\![0, N]\!]$.
Soit R l'unique polynôme tel que $u(Q) = R$.
Alors, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$,

$$P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(t)\, dt = \int_k^{k+1} Q(t)\, dt = u(Q)(k) = \boxed{R(k).}$$

11.b. Supposons qu'un tel polynôme existe.
Alors, on doit avoir, pour tout $k \in [\![0, 3]\!]$, $u(Q)(k) = \frac{k}{6}$.
En particulier, $u(Q)(0) = \int_0^1 f(t)\, dt = 0$.
Or, puisque f est une densité, elle est positive, et donc pour tout $t \in [0, 1]$, $Q(t) = f(t) \geqslant 0$.
Mais l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle, donc $\forall t \in [0, 1]$, $Q(t) = 0$.
Ceci signifie donc que le polynôme Q possède une infinité[8] de racines, et donc que $Q = 0$.
Et donc, $\forall x \in [0, 4[$, $f(x) = Q(x) = 0$.
Mais alors $P(Y = 1) = \int_1^2 f(t)\, dt = 0$, contredisant $P(Y = 1) = \frac{1}{6}$.
Et donc notre hypothèse de départ est absurde : il n'existe pas de polynôme tel que $\forall x \in [0, 4[$, $f(x) = Q(x)$ et Y soit la discrétisée de X.

[8] Tous les réels de $[0, 1]$.

Partie III : Variables dénombrables discrétisées.

12. D'après les hypothèses, on a pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$|g'(x + k)| \leqslant \frac{C}{(1 + x + k)^2} \leqslant \frac{C}{(k + 1)^2}.$$

Mais la série de terme général $\dfrac{C}{(k+1)^2}$ converge, et donc $\sum g'(x+k)$ converge absolument donc converge.
De plus, g étant décroissante sur $\mathbf{R}_+$, alors pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on a $g'(t) \leqslant 0$.
Et en particulier, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $g'(x+k) \leqslant 0$.

On en déduit que $\boxed{f(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) \geqslant 0.}$

13.a. Puisque g est de classe $\mathscr{C}^2$, g' est de classe $\mathscr{C}^1$, et donc il est possible d'appliquer l'inégalité des accroissements finis[9] à g' entre $x+k$ et $a+k$.
Notons donc I l'intervalle d'extrémités $x+k$ et $a+k$.

Pour tout $t \in I$, on a $|g''(t)| \leqslant \dfrac{C}{(1+t)^2} \leqslant \dfrac{C}{(k+1)^2}$.

Et donc
$$|g'(x+k) - g'(a+k)| \leqslant C\frac{|(x+k)-(a+k)|}{(k+1)^2} \leqslant \frac{C|x-a|}{(k+1)^2}.$$

[9] Rappelons qu'il s'agit de Taylor-Lagrange à l'ordre 0.

Rédaction On serait tentés d'écrire $I = [x+k, a+k]$, mais x peut très bien être plus grand que a.

13.b. En sommant[10] les relations précédemment obtenues pour k variant dans $\mathbf{N}$, on obtient
$$\sum_{k=0}^{+\infty} |g'(x+k) - g'(a+k)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C}{(k+1)^2}|x-a|.$$

[10] Ce qui est légitime car la série de terme général $\dfrac{1}{(k+1)^2}$ converge.

Or, d'après l'inégalité triangulaire généralisée, on a
$$|f(x)-f(a)| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} g'(a+k) - g'(x+k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |g'(x+k)-g'(a+k)| \leqslant C\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}|x-a|.$$

Ainsi, en posant $D = C\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+1)^2} \geqslant 0$, on a bien
$$\boxed{\forall (x,a) \in \mathbf{R}_+^2,\ |f(x)-f(a)| \leqslant D|x-a|.}$$

En particulier, lorsque $x \to a$, il vient, par le théorème des gendarmes,
$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Donc $\boxed{f \text{ est continue en } a \text{, pour tout } a \in \mathbf{R}_+.}$

14.a. On a, pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$,
$$\frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1} = \frac{1}{(t+k)(t+k+1)} \geqslant \frac{1}{(t+k+1)^2}.$$

$t+k \leqslant t+k+1.$

D'autre part,
$$|R_N(t)| = \left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t+k)\right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} |g'(t+k)| \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{C}{(t+k+1)^2}.$$

D'après l'inégalité précédemment obtenue, on a alors, sous réserve de convergence[11]
$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{(t+k+1)^2} \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}\right).$$

Danger L'erreur à ne pas faire : séparer cette série en somme de deux séries... qui seront alors divergentes ! Pour éviter ceci, on travaille sur les sommes partielles.

Mais, pour $M \geqslant N+1$, on a
$$\begin{aligned}\sum_{k=N+1}^{M} \left(\frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}\right) &= \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{t+k} - \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{t+k+1} \\ &= \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{t+k} - \sum_{i=N+2}^{M+1} \frac{1}{t+i}\end{aligned}$$

Chgt d'indice $i = k+1$.

$$= \frac{1}{t+N+1} - \frac{1}{t+M+1}$$
$$\underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{t+N+1}.$$

On en déduit que la série de terme général $\left(\frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}\right)$ converge et que sa somme vaut $\frac{1}{t+N+1}$.

Or, pour $t \in \mathbf{R}_+$, on a $\frac{1}{t+N+1} \leqslant \frac{1}{N+1}$ et donc

$$\boxed{|R_N(t)| \leqslant \frac{C}{N+1}.}$$

14.b. Pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, et tout $N \in \mathbf{N}$ on a $f(t) = S_N(t) + R_N(t)$. Et donc

$$\int_0^1 f(t)\,dt = -\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^N g'(t+k)\right) dt + \int_0^1 R_N(t)\,dt = -\sum_{k=0}^N \int_0^1 g'(t+k)\,dt + \int_0^1 R_N(t)\,dt.$$

Mais pour $k \in [\![0, N]\!]$, on a

$$\int_0^1 g'(t+k)\,dt = [g(x+k)]_0^1 = g(k+1) - g(k).$$

Et donc

$$\sum_{k=0}^N \int_0^1 g'(t+k)\,dt = \sum_{k=0}^N (g(k+1) - g(k)) = g(N+1) - g(0).$$

Il s'agit encore d'une somme télescopique.

Et donc

$$\int_0^1 f(t)\,dt = -(g(N+1) - g(0)) + \int_0^1 R_N(t)\,dt = \boxed{g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)\,dt.}$$

14.c. Puisque par hypothèse, la série de terme général $g(k)$ converge, nécessairement $\boxed{\lim_{k\to+\infty} g(k) = 0.}$

Pour $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\left|\int_0^1 R_N(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |R_N(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{C}{N+1}\,dt \leqslant \frac{C}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans la relation précédente, il vient

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{N\to+\infty} g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)\,dt = \boxed{g(0).}$$

15.a. Soit $t \in \mathbf{R}$. Alors

$$f(t+1) - f(t) = -\sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k+1) + \sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k) = -\sum_{i=1}^{+\infty} g'(t+i) + \sum_{k=1}^{+\infty} g'(t+i) + g'(t) = \boxed{g'(t).}$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a

$$g(x) = \int_0^x g'(t)\,dt + g(0) = \int_0^x (f(t+1) - f(t)) + \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^x f(t+1)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Or, par le changement de variable $u = t+1$, on a $\int_0^x f(t+1)\,dt = \int_1^{x+1} f(u)\,du$.

Et donc par la relation de Chasles,

$$g(x) = \int_1^{x+1} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^1 f(t)\,dt = \boxed{\int_x^{x+1} f(t)\,dt.}$$

15.b. On a, pour $N \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} g(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} g(t)\,dt = \int_0^N g(t)\,dt.$$

Relation de Chasles

De plus, f étant positive, on a

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{\lfloor x\rfloor} f(t)\,dt + \int_{\lfloor x\rfloor}^x f(t)\,dt.$$

Mais, pas croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_x^{\lfloor x\rfloor} f(t)\,dt \geqslant 0$, car $\lfloor x\rfloor \leqslant x$.

Et donc $S_{\lfloor x\rfloor} = \displaystyle\int_0^{\lfloor x\rfloor} f(t)\,dt \leqslant \int_0^x f(t)\,dt$.

De même, on a

$$\int_0^{\lfloor x\rfloor+1} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt + \underbrace{\int_x^{\lfloor x\rfloor+1} f(t)\,dt}_{\geqslant 0}$$

et donc $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \leqslant \int_0^{\lfloor x\rfloor+1} f(t)\,dt = S_{\lfloor x\rfloor+1}$.

Nous avons donc bien $\boxed{S_{\lfloor x\rfloor} \leqslant \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \leqslant S_{\lfloor x\rfloor+1}.}$

Lorsque $x \to +\infty$, on a $\lfloor x\rfloor \to +\infty$, et puisque la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge[12] vers $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1$, on en déduit, par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = 1.$$

Et donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge et vaut } 1.}$

Rédaction ✎

La croissance de l'intégrale ne s'applique que si les bornes «sont dans le bon sens». Autrement dit, si $f \leqslant g$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$$

à condition que $a < b$.
En général c'est assez évident, mais lorsque la condition $a < b$ n'est pas immédiate, (par exemple car nous ne disposons pas de valeurs numériques), mieux vaut montrer clairement qu'on a vu (ou vérifié) que c'est le cas.

[12] C'est la suite des sommes partielles d'une série convergente.

15.c. f est continue sur $]-\infty, 0[$ car constante, et nous avons prouvé à la question 13.b qu'elle est continue sur $]0;+\infty[$.
Elle est donc continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en 0.
Elle est positive d'après la question 12, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est une densité de probabilités.}}$
Enfin, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(t)\,dt = g(k) = P(Y = k).$$

Donc $\boxed{X_d \text{ a même loi que } Y.}$

ECRICOME 2012

Exercice 1

Sujet : Étude et calcul d'une intégrale à paramètre **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, fonction d'une variable, suites, `Scilab` .

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Soient $x \in \mathbf{R}_+$ et $a \in \mathbf{R}_+^*$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t},\ g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2},\ I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt.$$

1. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Justifier que l'intégrale I_a converge et donner sa valeur.
   Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Justifier que l'intégrale $f(x)$ converge.

Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale $f(x)$ converge.

2. Établir que : $\forall x \in \mathbf{R}_+,\ \forall t \in \mathbf{R}_+,\ 2\sqrt{xe^t} \leqslant x + e^t$ puis que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. Soient $x, y \in \mathbf{R}_+$ tels que $x < y$. Établir que : $0 < f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{y-x}{2}$.
4. Montrer que f réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbf{R}_+$ sur $]0,1]$.
5. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}_+$. On note α cette solution. Justifier que $\alpha \in]0,1]$.
6. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Établir que : $\forall n \in \mathbf{N},\ |\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
   b. On suppose qu'une fonction `Ecricome` est déjà écrite en `Scilab` , qui à un réel x donné renvoie le réel $f(x)$. À l'aide de la fonction `Ecricome`, écrire une fonction `suite` en `Scilab` qui, à un réel $\varepsilon > 0$ fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier N tel que $\dfrac{1}{2^N} \leqslant \varepsilon$ et renvoie la valeur de u_N correspondante.
7. Soient $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $h \in \mathbf{R}$ tel que $x + h \in \mathbf{R}_+^*$. Démontrer que :

$$|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leqslant \frac{h^2}{3}.$$

   Justifier que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f'(x) = -g(x).$$

8. On considère la fonction T définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ T(x) = xf(x)$.
   Justifier que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ T'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ puis que : } \forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ T(x) = \ln(1+x).$$

Exercice 2 Non relu

Difficile

Intérêt : ☆☆☆

Commentaires : Horrible ! Ne présente vraiment pas d'intérêt en raison de calculs interminables. Je ne sais même pas si j'aurai un jour le courage de finir mon corrigé.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

— $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;

— I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Une matrice $W \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite nilpotente s'il existe $q \in \mathbf{N}^*$ tel que $W^q = 0_n$.

On admettra que si U et V sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui commutent, alors :
— U^k et V^q commutent pour tous entiers k et q ;
— U^{-1} commute avec V lorsque U est inversible.

1. **Deux résultats préliminaires.**
   a. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tel que $U^q = 0_n$.
   Prouver que $I_n - U$ est inversible et que $(I_n - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^k$.
   b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A(A - I_n) = 0_n$. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est A.
   Soit $x \in \mathbf{R}^n$. Vérifier que $x - f(x) \in \operatorname{Ker}(f)$ et $f(x) \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ puis établir que $\mathbf{R}^n = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.
   L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. **Étude d'une suite de matrices.**
   Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $N \in \mathbf{N}^*$ tels que :
   $$(B(B - I_n))^N = 0_n.$$
   On introduit la suite $(B_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :
   $$B_0 = B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \text{ et } \forall k \in \mathbf{N},\ B_{k+1} = (B_k)^2(2B_k - I_n)^{-1}.$$
   On considère pour tout entier $k \geqslant 0$ la proposition
   $(\mathcal{H}_k)$: «$2B_k - I_n$ est inversible, il existe $C_k, D_k \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $B_k - B = [B(B - I_n)]C_k$, et $B_k(B_k - I_n) = [B(B - I_n)]^{2^k} D_k$ avec $B_kB = BB_k, C_kB = BC_k$ et $D_kB = BD_k$»
   a. Justifier que $I_n - (2B - I_n)^2$ est nilpotente et que $2B - I_n$ est inversible.
   En déduire que la propriété $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
   b. On suppose la propriété $(\mathcal{H}_k)$ vraie pour un entier $k \geqslant 0$. Montrer que :
   $$\begin{aligned} 2B_{k+1} - I_n &= [I_n + 2B_k(B_k - I_n)] \times [2B_k - I_n]^{-1} \\ B_{k+1} - B &= [(B_k - B)^2 - (B^2 - B)] \times [2B_k - I_n]^{-1} \\ B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) &= [B_k(B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1}]^2 \end{aligned}$$
   En déduire que la propriété $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie.
   c. Prouver l'existence d'un entier p tel que : $B_p(B_p - I_n) = 0_n$.
   Établir que la matrice B_p est diagonalisable, que la matrice $B - B_p$ est nilpotente et que : $\forall k \geqslant p$, $B_{k+1} = B_k$.

Problème

Sujet : Étude d'une suite de tirages dans plusieurs urnes — Moyen
Abordable en première année : ✗ — **Intérêt** : ★★☆
Thèmes du programme abordés : variables aléatoires discrètes, diagonalisation
Modifications apportées au sujet d'origine : renumérotation des questions

L'objectif du problème est d'étudier une suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$.
Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties.
La partie I est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur $\mathbf{R}_n[X]$.
La partie II consiste à calculer l'espérance et la variance de Z_k ainsi qu'à calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$ sous réserve de convergence.
La partie III fournira la loi de Z_k ainsi que l'étude de la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} P(Z_k = r)$.

Partie I : Étude de deux endomorphismes.
Soit n un entier naturel. On note $\mathbf{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
Pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on désigne par e_k le polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par : $e_k = X^k$.
Rappelons que $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$. Si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, on définit les fonctions $f(P)$ et $g(P)$ par :
$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{1\},\ f(P)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,dt \text{ et } f(P)(1) = P(1)$$

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g(P)(x) = [(X-1)P]'(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

1. Prouver que g est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$. Calculer $f(g(P))$ puis justifier que $\operatorname{Ker}(g) = \{0\}$.
3. Démontrer que g est un isomorphisme, que $g^{-1} = f$ et que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
4. Écrire la matrice A de f dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ ainsi que la matrice B de g dans cette même base.
5. Montrer que f et g sont diagonalisables.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ urnes notées $U_0, U_1, \ldots, U_n$ et on suppose que $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, l'urne U_i contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, \ldots, i$. On s'intéresse au jeu suivant :

— Au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne U_n. Si la boule porte le numéro r alors on repose la boule dans l'urne U_n puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne U_r.

— Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, si la boule numéro s a été piochée au k-ième tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne puis on effectue le $(k+1)$-ième tirage dans l'urne U_s.

Pour tout entier naturel k, on note :

— Z_k est la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au k-ième tirage.
On convient que $Z_0 = n$.

— F_k est le polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par : $\forall x \in \mathbf{R},\ F_k(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)x^r$.

— $E(Z_k)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire Z_k.

6. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \forall r \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1}.$$

7. Établir les deux formules suivantes valables pour tous entiers $k \in \mathbf{N}$ et $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$:

$$\begin{cases} (\mathscr{R}_1) : \quad (n+1)P(Z_{k+1} = n) = P(Z_k = n) \\ (\mathscr{R}_2) : \quad (r+1)P(Z_{k+1} = r) - (r+1)P(Z_{k+1} = r+1) = P(Z_k = r) \end{cases}$$

8. On admet dans cette question que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = r)$ converge pour tout $r \in \{1, \ldots, n\}$ et on pose $S_r = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$.
En sommant les relations $(\mathscr{R}_1)$ sur tous les entiers $k \in \mathbf{N}$, donner la valeur de S_n.
En sommant les relations $(\mathscr{R}_2)$ sur tous les entiers $k \in \mathbf{N}$, donner la valeur de S_{n-1} et montrer que la suite $(rS_r)_{1 \leqslant r \leqslant n-1}$ est constante.
9. Soit $k \in \mathbf{N}$. Démontrer la relation :

$$(\mathscr{S}) : \ \forall x \in \mathbf{R}, \quad (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

10.
   a. Soit $k \in \mathbf{N}$. Établir que $F'_k(1) = E(Z_k)$ et $F''_k(1) = E(Z_k(Z_k - 1))$.
   b. En dérivant une fois puis deux fois la relation $(\mathscr{S})$, donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F'_k(1))_{k \in \mathbf{N}}$ ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F''_k(1))_{k \in \mathbf{N}}$.
   c. Donner la valeur de $F'_k(1)$ et de $F''_k(1)$ en fonction de k et n. Expliciter alors la variance $V(Z_k)$ de Z_k en fonction de k et n.

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

On reprend toutes les notations des parties I et II et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties.
Rappelons également qu'à la question 9 la relation $(\mathscr{S})$ est démontrée ce qui revient à écrire :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad g(F_{k+1}) = F_k.$$

Pour finir, pour tout entier $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on désigne par u_k le polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par : $u_k = (X-1)^k$.

11. Montrer que : $\forall k \in \mathbf{N},\ \displaystyle\sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)e_r = F_k = f^k(e_n)$.
12. Prouver que $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

13. Calculer $f(u_r)$ pour $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Retrouver ainsi que f est diagonalisable.

14. Justifier que : $e_n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u_r$ et que : $\forall r \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j$.

15. Démontrer que : $\forall k \in \mathbf{N}, \quad f^k(e_n) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} u_r$.

16. Soient $k \in \mathbf{N}$ et $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. À l'aide des questions précédentes, établir que :

$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

17. **Application.**

a. Soit $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Déterminer un réel $M_{j,n}$ tel que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad |P(Z_k = j)| \leqslant \frac{M_{j,n}}{(j+1)^k}$$

puis justifier que la série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = j)$ converge lorsque $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

b. Déterminer un réel C_n tel que : $\forall k \in \mathbf{N}, \quad |P(Z_k = 0) - 1| \leqslant \frac{C_n}{2^k}$.
La série $\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = 0)$ est-elle convergente ?

ECRICOME 2012 : Corrigé

Exercice 1

1. Soit $A > 0$. Alors

$$\int_0^A e^{-at}\,dt = \left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_0^A = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}e^{-aA} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}.$$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge et vaut $\boxed{\frac{1}{a}.}$

Pour $t > 0$, puisque $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant \frac{1}{x+e^t} \leqslant \frac{1}{e^t} = e^{-t}$.

Par critère de comparaison pour les fonctions positives, puisque $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge, il en est de même de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t}$.

Signes

N'oublions pas que le critère de comparaison ne s'applique que pour des fonctions positives, et qu'il est donc important de mentionner la positivité de $\frac{1}{x+e^t}$.

2. On a $(x-e^t)^2 \geqslant 0$ et donc

$$x^2 - 2xe^t + e^{2t} \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xe^t + e^{2t} \geqslant 4xe^t \Leftrightarrow (x+e^t)^2 \geqslant 4xe^t.$$

Par croissance de la fonction racine carrée, on a alors

$$\boxed{2\sqrt{xe^t} \leqslant \sqrt{(x+e^t)^2} = \left|x+e^t\right| = x+e^t.}$$

Astuce

On prouve ainsi que pour tous $a, b \in \mathbf{R}$,

$$2ab \leqslant a^2 + b^2.$$

On a alors, pour $t > 0$, $0 \leqslant \frac{1}{x+e^t} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{xe^t}} \leqslant \frac{e^{-t/2}}{2\sqrt{x}}$.

Et donc, par croissance de l'intégrale[1],

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} I_{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}.}$$

[1] L'intégrale de $e^{-t/2}$ converge.

3. On a $f(x) - f(y) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t}\right)dt$.

Mais pour tout $t \geqslant 0$, on a $x + e^t < y + e^t$ et donc $\frac{1}{x+e^t} > \frac{1}{y+e^t}$.

Ainsi, la fonction $t \mapsto \frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t}$ est continue, positive sur $\mathbf{R}_+$ et n'est pas la fonction nulle de sorte que

$$f(x) - f(y) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t}\right)dt > 0.$$

D'autre part, on a

$$f(x) - f(y) = \int_0^{+\infty} \frac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{y-x}{e^{2t}}\,dt \leqslant (y-x)\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,dt \boxed{\leqslant \frac{y-x}{2}.}$$

4. Soit $x_0 \in \mathbf{R}_+$, et soit $x \in \mathbf{R}_+$.
Si $x \geqslant x_0$, alors d'après la question précédente,

$$0 \leqslant f(x_0) - f(x) \leqslant \frac{x-x_0}{2}$$

et donc $|f(x_0) - f(x)| \leqslant \frac{|x-x_0|}{2}$.

En revanche, si $x < x_0$, alors, toujours par la question 3,

$$0 < f(x) - f(x_0) \leqslant \frac{x_0 - x}{2}$$

et donc $|f(x_0) - f(x)| \leqslant \dfrac{|x - x_0|}{2}$.
Dans tous les cas, on a

$$0 \leqslant |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{|x - x_0|}{2} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Ainsi, f est continue en x_0, et ceci étant vrai pour tout $x_0 \in \mathbf{R}_+$, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbf{R}_+.}$
Et si $x < y$, alors nous avons prouvé à la question 3 que $f(x) - f(y) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(y)$: $\boxed{f \text{ est strictement décroissante.}}$
Enfin, on a $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = I_1 = 1$ et d'après le théorème des gendarmes appliqué à l'inégalité obtenue à la question 2, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
D'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbf{R}_+ \text{ sur }]0,1].}$

5. Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. Alors g est continue car somme de fonctions continues, strictement décroissante car somme de deux[2] fonctions strictement décroissantes, et on a

$$g(0) = f(0) = 1 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty.$$

D'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $]-\infty, 1]$, et par conséquent, il existe un unique $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$.
Puisque f est à valeurs dans $]0,1]$, on a alors $\alpha = f(\alpha) \in]0,1]$.

[2] La fonction f et la fonction $x \mapsto -x$

6.a. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $|\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
Pour $n = 0$, on a $|\alpha - u_0| = |\alpha| \leqslant 1$, donc la propriété est vraie.
Supposons que $|\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Alors

$$|\alpha - u_{n+1}| = |f(\alpha) - f(u_n)|.$$

Mais comme prouvé à la question 4, on a alors

$$|f(\alpha) - f(u_n)| \leqslant \frac{|\alpha - u_n|}{2}.$$

Et donc

$$|\alpha - u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$, et par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
Par le théorème des gendarmes, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha - u_n = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha.}$

6.b. Le programme suivant convient :

```
function u = suite(epsilon)
        N = 0
        u = 0
        while 1/2^N>epsilon
                N = N+1
                u = Ecricome(u)
        end
endfunction
```

Détails
La variable u contient d'abord $0 = u_0$.
Puis après le premier passage dans la boucle, elle vaut $f(u_0) = u_1$.
Après un second passage, elle vaudra donc $f(u_1) = u_2$, etc.
À la fin du programme, après n passages dans la boucle while, elle vaut donc u_n.

7. On a, pour $x + h \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) + hg(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+h+e^t} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} + h\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+e^t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right) dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{(x+e^t)^2 - (x+e^t)(x+h+e^t) + h(x+h+e^t)}{(x+e^t)^2(x+h+e^t)}\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{x^2+2xe^t+e^{2t}-x^2-xh-xe^t-xe^t-he^t-e^{2t}+hx+h^2+he^t}{(x+e^t)^2(x+h+e^t)}\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{h^2}{(x+e^t)^2(x+h+e^t)}\,dt.$$

Donc il vient

$$|f(x+h)-f(x)+hg(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{h^2}{(x+e^t)^2(x+h+e^t)}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{h^2}{e^{3t}}\,dt \leqslant h^2 I_3 = \boxed{\frac{h^2}{3}}.$$

On en déduit que

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + g(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{3} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Et donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + g(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -g(x).$$

On en déduit que f est dérivable en x, et que $f'(x) = -g(x)$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}_+^* \text{ et } f' = -g.}$

Méthode
Pour prouver qu'une fonction est dérivable, si on ne peut utiliser les fonctions usuelles, il faut nécessairement revenir à la définition : f est dérivable en x si et seulement si le taux d'accroissement admet une limite finie.

8. T est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car produit de deux fonctions dérivables, et

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ T'(x) = -xg(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t} - \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+e^t)^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(x+e^t)^2}\,dt.$$

Mais on a, pour $A > 0$,

$$\int_0^A \frac{e^t}{(x+e^t)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{x+e^t}\right]_0^A = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x+e^A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{1+x}.$$

On en déduit donc que $\boxed{\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ T'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(x+e^t)^2}\,dt = \frac{1}{1+x}.}$

Ainsi, T est une primitive sur $\mathbf{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et donc de la forme $T(x) = \ln(1+x) + \lambda$, avec $\lambda \in \mathbf{R}$.
Mais, lorsque $x \to 0^+$, on a $f(x) \to f(0) = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} T(x) = 0$.
On en déduit[3] que $0 = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1+x) + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$.
Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ T(x) = \ln(1+x).}$

[3] Par unicité de la limite.

Exercice 2

1. **Deux résultats préliminaires**

1.a. On a

$$(I_n - U)\sum_{k=0}^{q-1} U^k = \sum_{k=0}^{q-1} U^k - \sum_{k=0}^{q-1} U^{k+1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^k - \sum_{k=1}^{q} U^k = I_n - U^q = I_n.$$

Ceci prouve donc à la fois que $\boxed{I_n - U \text{ est inversible et que son inverse est } \sum_{k=0}^{q-1} U^k.}$

Astuce
Ceci ressemble en fait énormément à l'identité :

$a^q - 1 =$
$(1 + a + \cdots + a^{q-1})$.

1.b. Puisque $A(A - I_n) = 0$, on a donc $f \circ (f - \mathrm{id}) = 0$.
Et donc $f(f(x) - x) = (f \circ (f - \mathrm{id}))(x) = 0$, de sorte que $f(x) - x \in \operatorname{Ker}(f)$.
Et $\operatorname{Ker} f$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, on a également

$$x - f(x) = -(f(x) - x) \boxed{\in \operatorname{Ker}(f).}$$

De plus, f et $f - \mathrm{id}$ commutent , et donc $(f - \mathrm{id}) \circ f = 0$.
Et donc $(f - \mathrm{id})(f(x)) = ((f - \mathrm{id}) \circ f)(x) = 0$, de sorte que $f(x) \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$.

Commutent
$f - \mathrm{id}$ est un polynôme en f, donc commute avec f.

En particulier, nous avons, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$x = \underbrace{x - f(x)}_{\in \operatorname{Ker} f} + \underbrace{f(x)}_{\in \operatorname{Ker}(f-\mathrm{id})} \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}).$$

Et donc $\mathbf{R}^n = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$. Il reste à voir que cette somme est directe.
Si l'un de ces deux espaces est $\{0\}$, alors c'est trivial. Et si ce n'est pas le cas, c'est que 0 et 1 sont deux valeurs propres de f.
Et alors $\operatorname{Ker}(f) = E_0(f)$ et $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) = E_1(f)$ sont deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes : il sont en somme directe.

Rappel
λ est valeur propre de f si et seulement si

$$\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}.$$

Ainsi, on a bien $\boxed{\mathbf{R}^n = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}).}$

Et donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$, avec $\operatorname{Spec}(f) \subset \{0, 1\}$.

2. Étude d'une suite de matrices.

2.a. Notons que $I_n - (2B - I_n)^2 = I_n - (4B^2 - 4B + I_n) = 4B - 4B^2 = 4B(I_n - B)$.
Et donc il vient

$$\left(I_n - (2B - I_n)^2\right)^N = 4^N (B(I_n - B))^N = (-4)^N (B(B - I_n))^N = 0.$$

Par conséquent, $\boxed{I_n - (2B - I_n)^2 \text{ est nilpotente.}}$
D'après la question 1.a, on en déduit que $(2B - I_n)^2 = I_n - \left(I_n - (2B - I_n)^2\right)$ est inversible.
Et alors nécessairement $2B - I_n$ est également inversible.
Si l'on pose alors $C_0 = 0$ et $D_0 = I_n$, on a alors

$$B_0 - B = B - B = 0 = B(B - I_n)C_0$$

$$B_0(B - I_n) = B(B - I_n) = [B(B - I_n)]^1 D_0$$

et bien entendu $B_0 B = B^2 = BB_0$, $C_0 B = 0 = BC_0$ et $D_0 B = B = BD_0$.
Ainsi, $\boxed{(\mathscr{H}_0) \text{ est vérifiée.}}$

Détails
Il n'est pas directement au programme que si A^2 est inversible, alors A est inversible (alors que nous connaissons bien la réciproque).
Un moyen «simples» de le voir est de remarquer que si A n'est pas inversible, alors il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul tel que $AX = 0$.
Et alors $A^2 X = 0$, et donc A^2 n'est pas non plus inversible.
Par contraposée, si A^2 est inversible, alors A est inversible.

2.b. On a

$$\begin{aligned} 2B_{k+1} - I_n &= 2B_k^2(2B_k - I_n)^{-1} - I_n \\ &= 2B_k^2(2B_k - I_n)^{-1} - (2B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1} \\ &= \left[2B_k^2 - (2B_k - I_n)\right](2B_k - I_n)^{-1} \\ &= [I_n + 2B_k(B_k - I_n)](2B_k - I_n)^{-1}. \end{aligned}$$

De même, il vient

$$\begin{aligned} B_{k+1} - B &= B_k^2(2B_k - I_n)^{-1} - B \\ &= B_k^2(2B_k - I_n)^{-1} - B(2B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1} \\ &= \left[B_k^2 - B(2B_k - I_n)\right](2B_k - I_n)^{-1} \\ &\boxed{= \left[B_k^2 - 2BB_k + B\right](2B_k - I_n)^{-1}.} \end{aligned}$$

Mais d'autre part, puisque B et B_k commutent car $(\mathscr{H}_k)$ est vérifiée,

$$(B_k - B)^2 - (B^2 - B) = B_k^2 - 2BB_k + B^2 - B^2 + B = B_k^2 - 2BB_k + B$$

et donc

$$\boxed{B_{k+1} - B = \left[(B_k - B)^2 - (B^2 - B)\right](2B_k - I_n)^{-1}.}$$

Danger !
Rappelons que la commutativité est une hypothèse indispensable pour appliquer le binôme matriciel. Même pour $n = 2$!
Si A et B ne commutent pas, on n'a pas

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Enfin, il vient

$$\begin{aligned} B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) &= B_k^2(2B_k - I_n)^{-1}\left(B_k^2(2B_k - I_n)^{-1} - I_n\right) \\ &= B_k^2(2B_k - I_n)^{-1}\left(B_k^2 - (2B_k - I_n)\right)(2B_k - I_n)^{-1} \\ &= B_k^2(2B_k - I_n)^{-1}\left(B_k^2 - 2B_k + I_n\right)(2B_k - I_n)^{-1} \\ &= B_k^2(2B_k - I_n)^{-1}(B_k - I_n)^2(2B_k - I_n)^{-1}. \end{aligned}$$

On a
$(B_k - I_n)^2 = B_k^2 - 2B_k + I_n$.

Mais B_k, $B_k - I_n$ et $2B_k - I_n$ commutent[4], et donc, par le résultat admis dans l'énoncé, $B_k, B_k - I_n$ et $(2B_k - I_n)^{-1}$ commutent également, de sorte que

$$\begin{aligned} B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) &= B_k(B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1}B_k(B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1} \\ &= \boxed{\left[B_k\,(B_k - I_n)\,(2B_k - I_n)^{-1}\right]^2.} \end{aligned}$$

[4] Car ce sont des polynômes en B_k.

Prouvons donc à présent que $(\mathscr{H}_{k+1})$ est vérifiée.
Puisque B et D_k commutent, on a

$$B(B - I_n)D_k = B^2D_k - BD_k = D_kB^2 - D_kB = D_kB(B - I_n)$$

de sorte que $B(B - I_n)$ et D_k commutent également.
Et donc, pour $q \in \mathbf{N}$,

$$(B_k(B_k - I_n))^q = \left([B(B - I_n)]^{2^k}\,D_k\right)^q = [B(B - I_n)]^{2^k q}\,D_k^q.$$

En particulier, si $2^k q \geqslant N$, alors $[B(B - I_n)]^{2^k q} = 0$ et donc $(B_k(B_k - I_n)^q = 0$.
Ainsi, $B_k(B_k - I_n)$ est nilpotente, et il en est donc de même de $-2B_k(B_k - I_n)$.
De la question 1.a, on déduit donc que $I_n + 2B_k(B_k - I_n)$ est inversible, et donc $2B_{k+1} - I_n = (I_n + 2B_k(B_k - I_n))\,(2B_k - I_n)^{-1}$ est inversible car produit de matrices inversibles.
D'autre part, on a

Détails

Si U est nilpotente, avec $U^q = 0$, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$(\lambda U)^q = \lambda^q U^q = 0$$

et donc λU est également nilpotente.

$$B_{k+1} - B = \left((B(B - I_n)C_k)^2 - B(B - I_n)\right)(2B_k - I_n)^{-1}.$$

Or, B et C_k commutent, donc $B(B - I_n)$ et C_k commutent car

$$B(B - I_n)C_k = B^2C_k - BC_k = C_kB^2 - C_kB = C_kB(B - I_n).$$

Et donc

$$B_{k+1} - B = B(B - I_n)\left[B(B - I_n)C_k^2 - I_n\right](2B_k - I_n)^{-1}.$$

Ainsi, en posant $C_{k+1} = \left[B(B - I_n)C_k^2 - I_n\right](2B_k - I_n)^{-1}$, on a bien $B_{k+1} - B = B(B - I_n)C_{k+1}$.
De plus, C_{k+1} et B commutent alors bien car

$$\begin{aligned} BC_{k+1} &= B\left[B(B - I_n)C_k^2 - I_n\right](2B_k - I_n)^{-1} \\ &= \left(B^2(B - I_n)C_k^2 - B\right)(2B_k - I_n)^{-1} \\ &= \left((B - I_n)C_k^2 - I_n\right)B(2B_k - I_n)^{-1} \\ &= \left((B - I_n)C_k^2 - I_n\right)(2B_k - I_n)^{-1}B \\ &= C_{k+1}B. \end{aligned}$$

B commute à la fois avec C_k et avec $B - I_n$.

B commute avec B_k et donc avec $2B_k - I_n$ et donc avec son inverse.

Enfin, $B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = \left([B(B - I_n)]^{2^k}\,D_k(2B_k - I_n)\right)^2$.
Mais B_k commute avec Finir.

2.c. Si p est tel que $2^p \geqslant N$, alors $B_p(B_p - I_n) = \underbrace{[B(B - I_n)]^{2^p}}_{=0} D_p = 0$.

Et alors, d'après la question 1.b, $\boxed{B_p \text{ est diagonalisable.}}$
D'autre part, $B_p - B = [B(B - I_n)]C_p$, dont il a été prouvé à la question précédente qu'il s'agit d'une matrice nilpotente. Et donc $\boxed{B - B_p \text{ est nilpotente.}}$
Enfin, puisque $B_p(B_p - I_n) = 0$, on a $B_p^2 - B_p = 0 \Leftrightarrow B_p^2 = B_p$.
Et donc $B_p^2 = B_p = 2B_p - B_p = 2B_p^2 - B_p = B_p(2B_p - I_n)$. Pa multiplication à gauche par $(2B_p - I_n)^{-1}$, il vient donc $B_p^2(2B_p - I_n)^{-1} = B_p^2(2B_p - I_n)^{-1}$.
On en déduit donc que $B_{p+1} = B_p$.
Et alors, $B_{p+2} = B_{p+1}^2(2B_{p+1} - I_n)^{-1} = B_p^2(2B_p - I_n)^{-1} = B_{p+1} = B_p$.
De proche en proche, on prouve alors que $\boxed{\text{pour tout } k \geqslant p,\ B_k = B_p.}$

PROBLÈME

Partie I : Étude de deux endomorphismes.

1. Pour $P \in \mathbf{R}_n[X]$, il est clair que $g(P)$ est encore un polynôme de $\mathbf{R}[X]$, et $\deg P' \leqslant n-1$, de sorte que $\deg (X-1)P' \leqslant n$ et donc $\deg g(P) \leqslant n$.
Ainsi, $g(P) \in \mathbf{R}_n[X]$.
Il reste donc à montrer que g est linéaire : soient $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$g(\lambda P + Q) = (X-1)(\lambda P+Q)' + (\lambda P + Q) = \lambda (X-1)P' + \lambda P + (X-1)Q' + Q = \lambda g(P) + g(Q).$$

Ainsi, g est linéaire, et c'est donc $\boxed{\text{un endomorphisme de } \mathbf{R}_n[X].}$

2. Si $x = 1$, alors $f(g(P))(1) = g(P)(1) = (1-1)P'(1) + P(1) = P(1)$.
Si $x \neq 1$, alors

$$f(g(P))(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x ((t-1)P'(t) + P(t))\,dt = \frac{1}{x-1}\left[(t-1)P(t)\right]_1^x = \frac{1}{x-1}(x-1)P(x) = P(x).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(g(P))(x) = P(x)$, et donc $\boxed{(f\circ g)(P) = P.}$
En particulier, si $g(P) = 0$, alors $P = f(g(P)) = 0$, de sorte que $\boxed{\operatorname{Ker} g = \{0_{\mathbf{R}_n[X]}\}.}$

3. La question précédente prouve que g est injectif. Puisque c'est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$, qui est de dimension finie, c'est un isomorphisme.
Nous venons de prouver que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]}$. Donc pour $P \in \mathbf{R}_n[X]$,

$$f(P) = (f\circ g)(g^{-1}(P)) = g^{-1}(P) \in \mathbf{R}_n[X].$$

Ceci prouve donc que f est à valeurs dans $\mathbf{R}_n[X]$, et que $g^{-1} = f$.
Et en particulier, $\boxed{f \text{ est un endomorphisme}^5 \text{ de } \mathbf{R}_n[X].}$

Remarque
Sans utiliser g et g^{-1}, il serait facile de prouver que f est linéaire, mais délicat de prouver que f est à valeurs dans $\mathbf{R}_n[X]$.

[5] Et même un isomorphisme.

4. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, et $x \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} f(e_k)(x) &= \frac{1}{x-1}\int_1^x t^k\,dt = \frac{1}{x-1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}-1}{x-1} = \frac{1}{k+1}\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^k\right) \\ &= \frac{1}{k+1}\left(e_0(x) + \cdots + e_n(x)\right). \end{aligned}$$

Factorisation
Rappelons que $a^n - b^n$ se factorise en

$$(a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Or, deux polynômes qui coïncident en une infinité de réels sont égaux, donc

$$f(e_k) = \frac{1}{k+1}\left(e_0 + e_1 + \cdots + e_n\right).$$

Et donc la matrice de f dans la base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ est

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_0) & f(e_1) & \dots & f(e_{n-1}) & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{array}.$$

De même, on a, pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$g(e_k) = (X-1)kX^{k-1} + X^k = (k+1)X^k - kX^{k-1}$$

de sorte que la matrice de f dans la base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ est

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} g(e_0) & g(e_1) & g(e_2) & \dots & g(e_{n-1}) & g(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & n & -n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{array}.$$

5. Les matrices A et B sont triangulaires supérieures, donc leurs valeurs propres sont leurs coefficients diagonaux.
Or, dans les deux cas, ces coefficients diagonaux sont deux à deux distincts, donc A et B possèdent $n+1$ valeurs propres, et par conséquent sont diagonalisables.
On en déduit que $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont diagonalisables.}}$

⚠ Attention !
A et B sont bien des matrices de taille $n+1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires.

6. Puisqu'à chaque étape, on ne peut obtenir qu'une boule portant un numéro entre 0 et n, $\{[Z_k = i],\ i \in [\![0, n]\!]\}$ est un système complet d'événements.
Et donc, par la formule des probabilités totales,

$$P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=1}^{n} P(Z_k = i) P_{[Z_k=i]}(Z_{k+1} = r).$$

Or, $P_{[Z_k=i]}(Z_{k+1} = r) = 0$ si $i < r$, car alors le $(k+1)$-ième tirage a lieu dans l'urne i qui ne contient que des boules portant un numéro inférieur ou égal à $r-1$.
En revanche, si $i \geqslant r$, puisque l'urne U_i contient $i+1$ boules numérotées de 0 à i, et que toutes ces boules sont équiprobables, $P_{[Z_k=i]}(Z_{k+1} = r) = \dfrac{1}{i+1}$.
Et donc on a bien

$$\boxed{P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1}.}$$

7. La formule précédente appliquée avec $r = n$ donne

$$P(Z_{k+1} = n) = \frac{P(Z_k = n)}{n+1} \Leftrightarrow \boxed{(n+1)P(Z_{k+1} = n) = P(Z_k = n).}$$

De même, on a, pour $r \in [\![, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned} (r+1)P(Z_{k+1} = r) - (r+1)P(Z_{k+1} = r+1) &= (r+1)\sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_{k+1} = i)}{i+1} - (r+1)\sum_{i=r+1}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1} \\ &= (r+1)\frac{P(Z_k = r)}{r+1} = \boxed{P(Z_k = r).} \end{aligned}$$

8. Par définition, on a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = n)$. Et alors, en utilisant les relations $(\mathscr{R}_1)$, il vient

$$S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = n) = (n+1)\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = n) = (n+1)\sum_{i=1}^{+\infty} P(Z_i = n) = (n+1)(S_n - P(Z_0 = n)).$$

Mais, comme indiqué dans l'énoncé, $P(Z_0 = n) = 1$, et donc

$$S_n = (n+1)(S_n - 1) \Leftrightarrow \boxed{S_n = \frac{n+1}{n}.}$$

Comme indiqué, sommons alors les relations $(\mathscr{R}_2)$ sur n :

$$\begin{aligned}
S_{n-1} &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = n-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} (nP(Z_{k+1} = n-1) - nP(Z_{k+1} = n)) \\
&= n\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = n-1) - n\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = n) \\
&= n\sum_{i=1}^{+\infty} P(Z_i = n-1) - n\sum_{i=1}^{+\infty} P(Z_i = n) \\
&= n\,(S_{n-1} - P(Z_0 = n-1)) - n\,(S_n - P(Z_0 = n)) \\
&= nS_{n-1} - n(S_n - 1).
\end{aligned}$$

Puisque Z_0 est certaine égale à n, $P(Z_0 = n-1) = 0$.

Donc $(n-1)S_{n-1} = nS_n - n = 1 \Leftrightarrow S_{n-1} = \dfrac{1}{n-1}$.

Sur le même principe, on a pour $r \leqslant n-2$,

$$\begin{aligned}
S_r &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_n = r) = (r+1)\sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k = r) - (r+1)\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r+1) \\
&= (r+1)(S_r - P(Z_0 = r)) - (r+1)(S_{r+1} - P(Z_0 = r+1)) \\
&= (r+1)Sr - (r+1)S_{r+1}.
\end{aligned}$$

Et donc $rS_r = (r+1)Sr + 1$: $\boxed{\text{la suite } (rS_r)_{1\leqslant n-1} \text{ est constante.}}$

Remarque

Bien que ça ne soit pas demandé, notons que puisque $(n-1)S_{n-1} = 1$, pour tout $r \in [\![1, n-1]\!]$, $rS_r = 1$.

9. On a $F'_{k+1}(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} P(Z_{k+1} = r)rx^{r-1}$ et donc

$$\begin{aligned}
(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) &= (x-1)\sum_{r=0}^{n} P(Z_{k+1} = r)rx^{r-1} + \sum_{r=0}^{n} P(Z_{k+1} = r)x^r \\
&= \sum_{r=0}^{n} rP(Z_{k+1} = r)x^r - F'_{k+1}(x) + \sum_{r=0}^{n} P(Z_{k+1} = r)x^r \\
&= \sum_{r=0}^{n} (r+1)P(Z_{k+1} = r)x^r - F'_{k+1}(x) \\
&= (n+1)P(Z_{k+1} = n)x^n + \sum_{r=0}^{n-1} (r+1)P(Z_{k+1} = r)x^r - F'_{k+1}(x) \\
&= P(Z_k = n)x^n + \sum_{r=0}^{n-1} (r+1)P(Z_{k+1} = r)x^r - F'_{k+1}(x) \\
&= P(Z_k = n)x^n + \sum_{r=0}^{n-1} (P(Z_k = r) + (r+1)P(Z_{k+1} = r+1))\,x^r - F'_{k+1}(x) \\
&= P(Z_k = n)x^n + \sum_{r=0}^{n-1} P(Z_k = r)x^r + \sum_{i=1}^{n} iP(Z_{k+1} = i)x^{i-1} - F'_{k+1}(x) \\
&= P(Z_k = n)x^n + \sum_{r=0}^{n-1} P(Z_k = r)x^r = \boxed{F_k(x).}
\end{aligned}$$

C'est la relation $(\mathscr{R}_1)$.

C'est la relation $(\mathscr{R}_2)$.

Chgt d'indice

$i = k+1$.

10.a. On a $F'_k(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} rP(Z_k = r)x^{r-1}$ et donc $F'_k(1) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} rP(Z_k = r) = \boxed{E(Z_k).}$

De même, on a $F''_k(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} r(r-1)P(Z_k = r)x^{r-2}$ et donc $F''_k(1) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} r(r-1)P(Z_k = r)$.

Mais par le théorème de transfert, nous reconnaissons là l'espérance de $Z_k(Z_k-1)$ et donc $\boxed{F''_k(1) = E(Z_k(Z_k-1)).}$

10.b. Comme indiqué, dérivons la relation $(\mathscr{S})$: il vient alors

$$\forall x \in \mathbf{R},\ (x-1)F''_{k+1}(x) + F'_{k+1}(x) + F'_{k+1}(x) = F'_k(x) \Leftrightarrow (x-1)F''_{k+1}(x) + 2F'_{k+1}(x) = F'_k(x).$$

En évaluant en $x = 1$, il vient donc $\boxed{2F'_{k+1}(1) = F'_k(1).}$
Et en dérivant une seconde fois :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ (x-1)F^{(3)}_{k+1}(x) + F''_{k+1}(x) + 2F''_{k+1}(x) = F''_k(x).$$

En évaluant en $x = 1$, il vient donc $\boxed{3F''_{k+1}(1) = F''_k(1).}$

10.c. Nous venons de prouver que la suite $(F'_k(1))_{k\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et donc

$$\forall k \in \mathbf{N},\ F'_k(1) = \frac{1}{2^k}F'_0(1) = \frac{1}{2^k}E(Z_0) = \boxed{\frac{n}{2^k}.}$$

Rappel
La variable Z_0 est certaine égale à n, donc $E(Z_0) = n$.

De même, la suite $(F''_k(1))_{k\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$, de sorte que

$$\forall k \in \mathbf{N},\ F''_k(1) = \frac{1}{3^k}F''_0(1) = \frac{1}{3^k}E(Z_0(Z_0-1)) = \frac{n(n-1)}{3^k}.$$

On a donc, par la formule de Huygens,

$$V(Z_k) = E\left(Z_k^2\right) - E(Z_k)^2 = E(Z_k(Z_k-1)) + E(Z_k) - E(Z_k)^2 = \boxed{\frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k}.}$$

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

11. Notons que la première égalité $\sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)e_r = F_k$ n'est rien d'autre que la définition de F_k.
D'autre part, la question 9 nous donne $g(F_{k+1}) = F_k$ et puisque $g = f^{-1}$, il vient $F_{k+1} = f(F_k)$.
Et donc de proche en proche, $F_k = f^k(F_0)$.
Mais $F_0 = \sum_{r=0}^{n} P(Z_0 = r)e_r = e_n$ car Z_0 est une variable certaine égale à n.

Et donc, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $F_k = f^k(F_0) = \boxed{f^k(e_n).}$

12. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, u_k est de degré k.
Et donc $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de polynômes à degrés deux à deux distincts, donc est libre.
Puisqu'elle est de cardinal $n+1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$, $\boxed{\text{c'est une base de } \mathbf{R}_n[X].}$

13. Revenons à la définition de f : pour $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, on a

$$f(u_r)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x (t-1)^r\,dt = \frac{1}{x-1}\left[\frac{(t-1)^{r+1}}{r+1}\right]_1^x = \frac{(x-1)^r}{r+1} = \frac{u_r}{r+1}.$$

Et pour $x = 1$, on a $f(u_k)(1) = u_k(1) = 0 = \frac{u_k(1)}{k+1}$.
Ainsi, u_r est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\frac{1}{r+1}$, et donc $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de f : $\boxed{f \text{ est donc diagonalisable.}}$

Rappel
C'est l'une des caractérisations de la diagonalisabilité : il existe une base formée de vecteurs propres.

14. On a $e_n = X^n = (X-1+1)^n$, et donc par la formule du binôme de Newton,

$$e_n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(X-1)^r 1^{n-r} = \boxed{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u_r.}$$

De même, toujours par la formule du binôme, pour $r \in [\![0, n]\!]$,

$$u_r = (X-1)^r = \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}X^j(-1)^{r-j} = \boxed{\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^{r-j}e_j.}$$

15. Par linéarité de f^k, on a $f^k(e_n)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}f^k(u_r)$. Mais u_r est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\frac{1}{r+1}$ et donc $f^k(u_r)=\frac{u_k}{(r+1)^k}$.

Ainsi, $\boxed{f^k(e_n)=\sum_{r=0}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}u_r.}$

> **Rappel**
> Si $f(x)=\lambda x$, alors pour tout $k\in\mathbf{N}$,
> $$f^k(x)=\lambda^k x.$$

16. En combinant les résultats des questions précédentes, nous avons

$$\begin{aligned}F_k=f^k(e_n)=\sum_{r=0}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}u_r&=\sum_{r=0}^{n}\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}e_j\\&=\sum_{0\leqslant j\leqslant r\leqslant n}(-1)^{r-j}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}e_j\\&=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{r=j}^{n}(-1)^{r-j}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}\right)e_j.\end{aligned}$$

Mais d'autre part, par définition, $F_k=\sum_{j=0}^{n}P(Z_k=j)e_j$.

Et donc, par unicité des coordonnées[6] de F_k dans la base $(e_0,e_1,\dots,e_n)$, on a

$$\boxed{\forall j\in[\![0,n]\!],\ P(Z_k=j)=\sum_{r=j}^{n}(-1)^{r-j}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.}$$

[6] Ce qui n'est rien d'autre que l'unicité des coefficients d'un polynôme.

17. Application

17.a. En appliquant l'inégalité triangulaire à la formule obtenue dans la question 16, il vient

$$|P(Z_k=j)|\leqslant\sum_{r=j}^{n}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

> **Remarque**
> Notons que la valeur absolue donnée dans l'énoncé est totalement inutile : une probabilité est toujours positive !

Or, pour $r\geqslant j$, on a $\frac{1}{(r+1)^k}\leqslant\frac{1}{(j+1)^k}$.

Et donc

$$|P(Z_k=j)|\leqslant\sum_{r=j}^{n}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(j+1)^k}.$$

On peut donc poser $M_{j,n}=\sum_{r=j}^{n}\binom{n}{r}\binom{r}{j}$.

Pour $j\in[\![1,n]\!]$ fixé, on a, pour $k\geqslant 0$, $\frac{1}{(j+1)^k}\leqslant\frac{1}{2^k}$.

Mais la série de terme général $\frac{1}{2^k}$ est une série géométrique convergente.

Donc par critère de domination pour les séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{M_{j,n}}{(j+1)^k}$ converge, et donc $\boxed{\text{la série de terme général } P(Z_k=j) \text{ converge également.}}$

> **Remarque**
> Il s'agit du résultat admis par l'énoncé à la question 8 : la série définissant S_n est bien convergente.

17.b. On a $P(Z_k=0)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}$.

Et donc $P(Z_k=0)-1=\sum_{r=1}^{n}(-1)^r\frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}$.

Par l'inégalité triangulaire, on a donc

$$|P(Z_k = 0) - 1| \leqslant \sum_{r=1}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}.$$

Mais pour $r \geqslant 1$, $\dfrac{1}{(r+1)^k} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ et donc

$$|P(Z_k = 0) - 1| \leqslant \frac{1}{2^k} \underbrace{\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r}}_{=C_n}.$$

On a donc $\lim\limits_{k\to+\infty} |P(Z_k = 0) - 1| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} P(Z_k = 0) = 1$.

Et donc $\boxed{\text{la série de terme général } P(Z_k = 0) \text{ diverge grossièrement.}}$

Rappel
Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 n'est **jamais** convergente.

Extraits commentés du rapport du jury

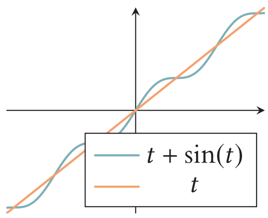
Exercice 1

Question 2 — La première inégalité est souvent établie. La majoration de $f(x)$ fut plus sélective car un nombre significatif de candidats bloque sur le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{xe^t}}$, la convergence des intégrales considérées étant relativement peu mentionnée.

✎ La dernière remarque concerne la croissance de l'intégrale : si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ **sous réserve de convergence des deux intégrales.** Généralement, si la majoration est bonne, il n'est pas très dur de prouver la convergence de cette intégrale, mais il peut être bon de mentionner, au moins une fois dans la copie, qu'on sait que la croissance de l'intégrale s'applique uniquement si toutes les intégrales en jeu convergent.

Question 5 — La plupart des candidats justifie l'existence et l'unicité du point fixe par la bijectivité de f.

✎ La bijectivité de f signifie que tout réel **fixé** de $]0, 1]$ possède un unique antécédent. Lorsqu'on écrit $f(x) = x$, x est une inconnue, et n'est donc pas fixé. Il n'est donc pas question d'appliquer le théorème de la bijection.
Par exemple, on peut vérifier que $f : t \mapsto t + \sin(t)$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
Mais l'équation $f(x) = x$ possède une infinité de solutions : tous les points $k\pi, k \in \mathbf{Z}$.



ECRICOME 2011

Exercice 1

Sujet : Algèbre linéaire et bilinéaire sur $\mathbf{R}_n[X]$, polynômes d'Abel. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ (question 1) **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : polynômes, diagonalisation, produits scalaires.

Commentaires : plutôt classique, mais un excellent entraînement à l'algèbre linéaire et bilinéaire sur les espaces de polynômes, sujet récurrent dans les énoncés de concours.

Soit n un entier naturel non nul, on considère $E = \mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout entier naturel j, on note $P^{(j)}$ la dérivée j-ième de P.
On définit la famille de polynômes $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ par :

$$P_0(X) = 1 \text{ et } \forall k \in \{1,\dots,n\},\ P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1. **a.** Prouver que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E.

   b. Montrer que pour tout entier k appartenant à $\{1,\dots,n\}$, on a :

   $$P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$$

   puis, pour tous les entiers k, j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$, donner une relation entre $P_k^{(j)}(X)$ et $P_{k-j}(X-j)$.

   c. Soit $P \in E$, justifier l'existence d'un $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

   $$P = a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_nP_n = \sum_{k=0}^{n} a_kP_k$$

   puis établir que :

   $$\forall j \in \{0,1,\dots,n\}, \quad P^{(j)}(j) = a_j.$$

   Ainsi, on a établi la relation :

   $$\forall P \in E,\ P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)P_k.$$

2. On considère l'application u définie sur E par :

   $$\forall P \in E,\ u(P)(X) = P'(X+1).$$

   a. Établir que u est un endomorphisme de E.

   b. Écrire la matrice A de l'endomorphisme u dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E.

   c. Déterminer le rang de A ainsi que ses valeurs propres.

   d. La matrice A est-elle diagonalisable ? *(Une réponse argumentée est attendue.)*

3. On définit sur $E \times E$ l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ par :

   $$\forall (P,Q) \in E\times E,\ \langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)Q^{(k)}(k).$$

   a. Démontrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

   b. Justifier que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 2

Sujet : Étude d'une fonction de deux variables **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : séries numériques, fonctions de plusieurs variables, calcul différentiel d'ordre 1, extrema locaux.

Commentaires : le sujet est très calculatoire mais son intérêt réside dans le fait qu'il propose une méthode «à la main» pour étudier la nature locale d'un point critique sans passer par le calcul des valeurs propres de la hessienne.

Dans cet exercice, on considère :

- la fonction φ définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par
$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*,\ \varphi(t) = \frac{e^t - 1}{t} - t\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right).$$
- la fonction ψ définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par
$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*,\ \psi(t) = t - \frac{1}{t} - \ln(t).$$
- U l'ouvert de $\mathbf{R}^2$ définie par
$$U =]0, +\infty[^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2\ :\ x > 0 \text{ et } y > 0\}.$$
- $f : U \to \mathbf{R}$ la fonction définie sur l'ouvert U et à valeurs réelles par
$$\forall (x, y) \in U,\ f(x, y) = x^y - y^x = e^{y\ln(x)} - e^{x\ln(y)}.$$

  On admet que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

L'objectif de cet exercice est de prouver que la fonction f n'admet aucun extremum sur U.

1. Étudier les variations de ψ sur $\mathbf{R}_+^*$, calculer $\psi(1)$ et préciser le signe de ψ.
2. Prouver la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n-1}{n!}$ et calculer sa somme.
3. Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$. Exprimer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ en fonction de $\varphi(t)$ et $\ln(t)$. *On admettra la convergence de cette série.*
4. Justifier que
$$\forall t \in]0, 1[,\ \varphi(t) < \ln(t) \text{ et } \forall t \in]1, +\infty[,\ \varphi(t) > \ln(t).$$
5. Soit $(x, y) \in U$. Montrer que (x, y) est un point critique de f si et seulement si
$$\begin{cases} x > 1, y > 1 \\ \ln(x)\ln(y) = 1 \\ y^{x-1} = x^{y-1}\ln(x) \end{cases}$$
6. Soit $(x, y) \in U$ un point critique de f. Justifier l'existence d'un réel $t \in \mathbf{R}_+^*$ tel que
$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{\frac{1}{t}} \\ \varphi(t) = \ln t \end{cases}$$
7. Prouver que (e, e) est l'unique point critique de f.
8. En comparant les signes des fonctions $t \mapsto f(e, e+t)$ et $t \mapsto f(e+t, e)$, justifier que f n'admet aucun extremum sur U.

Problème

Sujet : Étude d'une suite de variables aléatoires à densité et d'une équation différentielle **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Modifications apportées au sujet d'origine : suppression de la question 1 de la partie I, qui n'a aucun intérêt en `Scilab`. Ajout d'une indication à la question 13.c pour pallier à la disparition des équations différentielles d'ordre 1 du programme 2015.

Commentaires : la première partie est vraiment intéressante pour la manipulation de variables à densité. En revanche la suite est plus déroutante, et ressemble plus à un sujet facile d'ESSEC.

La partie I consiste à justifier que les variables $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}$ possèdent la même loi lorsque $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.

La partie II a pour objectif d'établir que, pour chaque variable aléatoire X possédant une densité f avec f continue sur $\mathbf{R}_+$ et f nulle sur $\mathbf{R}_-^*$, il n'existe aucune variable aléatoire Y à densité dérivable g sur $\mathbf{R}^*$, nulle sur $\mathbf{R}_-^*$ et vérifiant $g - g' = f$.

La partie III consistera à étudier les valeurs propres et vecteurs propres de l'application linéaire introduite à la partie II.

Les parties I,II et III sont largement indépendantes.

Partie I. Étude des variables Y_n et Z_n.
Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire, rappelons que :

- F_X désigne sa fonction de répartition définie par : $\forall t \in \mathbf{R}$, $F_X(t) = P(X \leqslant t)$.
- X suit la loi exponentielle de paramètre $a \in]0;+\infty[$ si et seulement si sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \exp(-at) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

où $\exp(y)$ désigne l'exponentielle du réel y c'est-à-dire que : $\exp(y) = e^y$.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n et Z_n les deux variables aléatoires définies respectivement par :

$$Y_n = \max(X_1, \dots, X_n) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i.$$

$$Z_n = \frac{X_1}{1} + \frac{X_2}{2} + \cdots + \frac{X_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i},$$

où $\max(X_1, \dots, X_n)$ désigne le maximum des valeurs de $X_1, \dots, X_n$.
Pour finir, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ n\exp(-t)\left(1 - \exp(-t)\right)^{n-1} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. a. Pour tout réel t, exprimer le réel $F_{Y_n}(t)$ à l'aide des réels $F_{X_1}(t), \dots, F_{X_n}(t)$.
   b. Pour tout réel t, donner alors l'expression de $F_{Y_n}(t)$ en fonction de n et de t en distinguant le cas $t < 0$ et le cas $t \geqslant 0$.
   c. Vérifier alors que la fonction f_n est une densité de probabilité de la variable aléatoire Y_n.
2. a. Préciser la fonction de répartition de la variable aléatoire $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.
   b. Démonter que $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable aléatoire à densité et proposer une densité d_{n+1}.
3. Pour tout réel x, vérifier que : $\displaystyle\int_0^x n\exp(nt)\left(1 - \exp(-t)\right)^{n-1} dt = \left(\exp(x) - 1\right)^n$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, Z_n est une variable aléatoire à densité dont f_n est une densité.
   Indication : pour l'hérédité, on remarquera que $Z_{n+1} = Z_n + \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

Partie II. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

On désigne par E l'ensemble des fonctions f continues de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge.
On admet que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
Pour toute fonction f appartenant à E, on considère l'équation différentielle

$$(\mathscr{D}_f) : \ y - y' = f$$

dont l'inconnue est la fonction $y : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ qui est dérivable sur $\mathbf{R}_+$. On fixé dans cette partie une fonction f appartenant à E. Pour tout réel positif x, on note :

$$k_f(x) = \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t)\, dt.$$

5. Soient φ, ψ deux fonctions appartenant à E, dérivables sur $\mathbf{R}_+$ et vérifiant l'équation $(\mathscr{D}_f)$. On introduit la fonction h définie sur $\mathbf{R}_+$ par :
$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ h(x) = (\varphi(x) - \psi(x)) \exp(-x).$$
   a. Prouver que la fonction h est constante sur $\mathbf{R}_+$.
   b. En utilisant le fait que la fonction $\varphi - \psi$ appartient à E, montrer que $\varphi = \psi$.
   Nous avons ainsi établir qu'il existe au plus une solution dans E à l'équation $(\mathscr{D}_f)$ lorsque $f \in E$.

6. Pour tout réel positif x, justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \exp(-t)f(t)\,dt$.

7. Établir que la fonction $k_f : x \mapsto \exp(x)\displaystyle\int_x^{+\infty} \exp(-t)f(t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et que :
$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ k_f(x) - k_f'(x) = f(x).$$

8. On suppose, uniquement dans cette question, que f est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, c'est-à-dire que :
$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ f(x) \geqslant 0.$$
   a. Vérifier les relations suivantes :
$$(\alpha) : \forall x \in \mathbf{R}_+,\ 0 \leqslant k_f(x) \leqslant \int_x^{+\infty} f(t)\,dt,$$
$$(\beta) : \forall A \in \mathbf{R}_+,\ \int_0^A k_f(x)\,dx = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x)\,dx.$$
   b. Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} k_f(x)\,dx$ converge et que :
$$\int_0^{+\infty} k_f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} (1-\exp(-x))f(x)\,dx.$$

9. On revient au cas général où $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ prend des valeurs non nécessairement positives.
Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |k_f(x)|\,dx$ converge.

10. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f avec f continue sur $\mathbf{R}_+$ et f nulle sur $\mathbf{R}_-^*$.
Justifier qu'il n'existe aucune densité g dérivable sur $\mathbf{R}_+$, nulle sur $\mathbf{R}_-^*$ et vérifiant $g - g' = f$ sur $\mathbf{R}_+$.

Partie III. Étude de l'application $f \mapsto k_f$.

À la partie II, on a établi que si f appartient à E, il existe une unique fonction
$$k_f : x \mapsto \exp(x)\int_x^{+\infty} \exp(-t)f(t)\,dt$$
appartenant à E telle que :
$$k_f - k_f' = f.$$
On considère alors l'application φ définie sur E par :
$$\forall f \in E,\ \varphi(f) = k_f.$$

11. Établir que φ est un endomorphisme de E.
Définition : *on dit que le réel λ est valeur propre de φ s'il existe une fonction f de E non identiquement nulle telle que $\varphi(f) = \lambda f$. On dit que f est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ et on appelle sous-espace propre de φ associé à λ l'espace vectoriel*
$$E_\lambda(\varphi) = \{f \in E \text{ telle que } \varphi(f) = \lambda f\}.$$
La suite de cette partie est consacrée à la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres de φ.

12. Pour tout réel $a > 0$, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbf{R}_+$ par :
$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ f_a(x) = \exp(-ax).$$
Vérifier que f_a appartient à E, que f_a est un vecteur propre de φ et préciser la valeur propre associée.

13. Soit λ une valeur propre de φ et $f \in E$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
   a. Montrer que λ est nécessairement non nul.
   b. Établir que f est dérivable et vérifie l'équation différentielle : $f' = \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) f$.
   c. On pose $g(x) = f(x)e^{-(1-\frac{1}{\lambda})x}$.
   Montrer que g est constante sur $\mathbf{R}_+$. En déduire, pour tout réel positif x, l'expression de $f(x)$ en fonction de λ, x et d'une certaine constante.
   d. Montrer que $\lambda \in]0,1[$.

14. Préciser l'ensemble $\mathrm{Sp}(\varphi)$ des valeurs propres de φ et, pour chaque valeur propre λ de φ, proposer une base de l'espace propre $E_\lambda(\varphi)$.

ECRICOME 2011 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1.a. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_k = k$.
Ainsi, $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts, donc est libre.

Elle est formée de $n+1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$ éléments : c'est donc $\boxed{\text{une base de } \mathbf{R}_n[X].}$

Méthode Le meilleur outil dont nous disposons pour prouver la liberté d'une famille de polynômes est le fait qu'une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre. On commencera donc systématiquement par vérifier si c'est le cas. **Attention :** il ne s'agit pas d'une équivalence, il existe des familles libres formées de polynômes qui sont tous de même degré.

1.b. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$P_k'(X) = \frac{(X-k)^{k-1}}{k!} + \frac{(k-1)X(X-k)^{k-2}}{k!}$$

et donc

$$\begin{aligned}
P_k'(X+1) &= \frac{(X+1-k)^{k-1}}{k!} + \frac{(k-1)(X+1)(X+1-k)^{k-2}}{k!} \\
&= \frac{(X-(k-1))^{k-1}}{k!} + \frac{(k-1)(X+1)(X-(k-1))^{k-2}}{k!} \\
&= \frac{(X-(k-1))^{k-2}\,(X-(k-1)+(k-1)X+(k-1))}{k!} \\
&= \frac{kX(X-(k-1))^{k-2}}{k!} = \frac{X(X-(k-1))^{k-2}}{(k-1)!} = \boxed{P_{k-1}(X).}
\end{aligned}$$

En remplaçant X par $X-1$, cette relation s'écrit encore $P_k'(X) = P_{k-1}(X-1)$.
En dérivant cette relation, il vient $P_k''(X) = P_{k-1}'(X-1)$.
Mais $P_{k-1}'(X) = P_{k-2}(X-1)$, de sorte que $P_{k-1}'(X-1) = P_{k-2}(X-2)$.
De proche en proche, on prouve donc que pour tous j, k vérifiant $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$, on a $\boxed{P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X-j).}$

Rédaction Une rédaction totalement rigoureuse nécessiterait sûrement une récurrence descendante (finie), plus laborieuse et pas beaucoup plus convaincant. Le faire pour $j=1$ et $j=2$ devrait suffire à convaincre le correcteur et à obtenir la majorité (et probablement l'intégralité) des points.

1.c. Soit $P \in E$. Puisque $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E, P s'écrit[1] comme combinaison linéaire de $(P_0, \dots, P_n)$: il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$.

En particulier, en évaluant cette relation en $X = 0$, il vient $P(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(0)$.

Mais pour $k \geqslant 1$, on a $P_k(0)$, de sorte que $P(0) = a_0 P_0(0) = a_0$.

Pour $j \geqslant 1$, en dérivant j fois la relation $P = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$, il vient $P^{(j)}(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k^{(j)}(X)$.

Puisque P_k est de degré k, pour $k < j$, on a $P_k^{(j)} = 0$, donc $P^{(j)}(X) = \sum_{k=j}^{n} a_k P_k^{(j)}(X)$.

Une utilisation de la question 1.b nous donne alors $P^{(j)}(X) = \sum_{k=j}^{n} a_k P_{k-j}(X-j)$.

En évaluant en $X = j$, il vient alors

$$P^{(j)}(j) = \sum_{k=j}^{n} a_k P_{k-j}(0).$$

Mais comme précédemment, $P_{k-j}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases}$ de sorte que $\boxed{P^{(j)}(j) = a_j.}$

[1] De manière unique, mais l'unicité n'est pas demandée ici.

2.a. Si $P \in E$, alors P' est un polynôme de degré au plus $n-1$, et donc il en est de même de $P'(X+1)$, de sorte que $u(P) \in E$.
Soient $P, Q \in E$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors

$$u(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q)'(X+1) = (\alpha P' + Q')(X+1) = \alpha P'(X+1) + Q'(X+1) = \alpha u(P) + u(Q).$$

Ainsi, u est linéaire et donc est $\boxed{\text{un endomorphisme de } E.}$

Degrés Rappelons que $P(X)$ et $P(X+1)$ sont de même degré. Le plus simple pour s'en convaincre est de remarquer que $(X+1)^k$ et X^k sont de même degrés, ce qui se voit aisément à l'aide de la formule du binôme.

2.b. On a $P_0' = 0$ et donc $u(P_0) = 0$.
Pour $k \geqslant 1$, d'après la question 1.b, on a $u(P_k) = P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$, de sorte que la matrice de u dans la base $(P_0, \dots, P_n)$ est

$$A = \operatorname{Mat}_{(P_0,\dots,P_n)}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(P_0) & u(P_1) & \dots & u(P_{n-1}) & u(P_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{array} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R}).$$

2.c. La matrice A est échelonnée et possède n lignes non nulles, donc $\boxed{\operatorname{rg}(A) = n.}$
De plus, A est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : 0 est la seule valeur propre de A.

Rappel
Une matrice est échelonnée si chaque ligne commence par strictement plus de zéros que la ligne précédente.
Les pivots sont alors les premiers coefficients de chaque ligne non nulle : ce ne sont pas nécessairement les coefficients diagonaux !

2.d. On a $\dim E_0(A) = n + 1 - \operatorname{rg}(A) = 1$.
Ainsi, on a $\displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Spec}(A)} \dim E_\lambda(A) = \dim E_0(A) = 1 < \dim E$.
Donc A n'est pas diagonalisable, et donc $\boxed{u \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Danger !
A est une matrice de taille $n+1 = \dim E$, et non n.

3.a. Si $(P, Q) \in E \times E$, alors

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)Q^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(k)P^{(k)}(k) = \langle Q, P\rangle.$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.
Soient $P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \langle \lambda P + Q, R\rangle &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda P + Q)^{(k)}(k) R^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda P^{(k)}(k) + Q^{(k)}(k)\right) R^{(k)}(k) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)R^{(k)}(k) + \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(k)R^{(k)}(k) \\ &= \boxed{\langle \lambda P, R\rangle + \langle Q, R\rangle.} \end{aligned}$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable. Puisqu'elle est symétrique, c'est une forme bilinéaire symétrique.
Soit $P \in E$. Alors

$$\langle P, P\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)P^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(k)\right)^2 \geqslant 0.$$

Enfin, si $P \in E$ est tel que $\langle P, P\rangle = 0$, une somme de nombre positifs étant nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul, il vient

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P^{(k)}(k)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ P^{(k)}(k) = 0.$$

Mais, d'après la question 1.c, on a alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k) P_k = 0.$$

Ainsi, on a bien $\langle P, P\rangle = 0 \Leftrightarrow P = 0$, et donc $\boxed{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

3.b. Soient $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, avec $i \neq j$.
Supposons par exemple que $i < j$. Alors

$$\langle P_i, P_j\rangle = \sum_{k=0}^{n} P_i^{(k)}(k) P_j^{(k)}(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{i} P_i^k(k) P_j^{(k)}(k)$$

Pour $k > i$, $P_i^{(k)} = 0$

$$= \sum_{k=0}^{i} P_{i-k}(k-k) P_{j-k}(k-k)$$

Question 1.c

$$= 0.$$

Pour $k < i$, on a $P_{i-k}(0) = 0$ et pour $k = i$, on a $P_{j-k}(0) = 0$.

Donc la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est orthogonale.
De même, pour $j = i$, on a

$$\langle P_i, P_i \rangle = \sum_{k=0}^{i} P_{i-k}(0)^2 = P_0(0)^2 = 1.$$

On en déduit que $\|P_i\| = \sqrt{\langle P_i, P_i \rangle} = 1$, et donc la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est orthonormée. Nous avons prouvé à la question 1.a qu'il s'agit d'une base de E, donc c'est $\boxed{\text{une base orthonormale de } E.}$

EXERCICE 2

1. ψ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et on a $\psi'(t) = 1 + \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2}$.
Or, $t^2 - t + 1$ ne s'annule pas[2] sur $\mathbf{R}$ et donc y est positif.
Ainsi, $\forall t \in \mathbf{R}_+^*$, $\psi'(t) > 0$, et donc ψ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.
De plus, $\psi(1) = 0$, et donc

$$\boxed{\forall t \in]0;1], \psi(t) \leqslant 0 \text{ et } \forall t \in [1;+\infty[, \psi(t) \geqslant 0.}$$

[2] Son discriminant est

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0.$$

2. On a $\dfrac{n-1}{n!} = 0$ si $n = 0$ et $\dfrac{n-1}{n!} = \dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!}$ si $n \geqslant 1$.
Or, la série de terme général $\dfrac{1}{(n-1)!}$ est convergente, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = e$$

Chgt d'indice
$i = n - 1$.

et de même, la série de terme général $\dfrac{1}{n!}$ est convergente avec

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1 = e - 1.$$

Donc la série de terme général $\dfrac{n-1}{n!}$ est convergente[3], et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - (e-1) = \boxed{1.}$$

[3] Car somme de deux séries convergentes.

3. Notons que pour $n \geqslant 1$ et $t > 0$, on a

$$\psi(t^{n-1}) = t^{n-1} - \frac{1}{t^{n-1}} - (n-1)\ln(t)$$

et donc

$$\frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \frac{t^{n-1}}{n!} - \frac{\frac{1}{t^{n-1}}}{n!} - \frac{n-1}{n!}\ln t = \frac{1}{t}\frac{t^n}{n!} - t\frac{\frac{1}{t^n}}{n!} - \frac{n-1}{n!}\ln(t).$$

Or, les séries de termes généraux $\dfrac{t^n}{n!}$ et $\dfrac{\frac{1}{t^n}}{n!}$ convergent puisqu'il s'agit de séries exponentielles, et on a alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} - 1 = e^t - 1 \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{t^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{t^n}}{n!} - 1 = e^{\frac{1}{t}} - 1.$$

Rappel
Pour **tout** $t \in \mathbf{R}$, la série de terme général $\frac{t^n}{n!}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

Enfin, la série de terme général $\frac{n-1}{n!}$ converge, donc il en est de même de la série de terme général $\frac{n-1}{n!}\ln(t)$, et alors

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}\ln(t)=\ln(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}=\ln(t).$$

Ainsi, la série de terme général $\frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ est convergente[4], et on a alors

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(t^{n-1})}{n!}=\frac{e^t-1}{t}-t\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-\ln(t)=\boxed{\varphi(t)-\ln(t).}$$

[4] Car somme de séries convergentes.

4. D'après la question 1, pour $t\in]0,1[$ et pour tout $n\geqslant 1$ on a $t^{n-1}\in]0,1[$, et donc $\psi(t^{n-1})<0$. Ainsi, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\psi(t^{n-1})}{n!}<0$. Et donc d'après la question 3,

$$\boxed{\forall t\in]0,1[,\ \psi(t)<\ln(t).}$$

De même, si $t\in]1;+\infty[$, alors pour tout $n\geqslant 1$, $t^{n-1}>1$, et donc $\psi(t^{n-1})>0$. Alors $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(t^{n-1})}{n!}>0$ et donc

$$\boxed{\forall t\in]1,+\infty[,\ \psi(t)>\ln(t).}$$

5. (x,y) est un point critique de f si et seulement si on a

$$\begin{cases}\frac{y}{x}e^{y\ln(x)}-\ln(y)e^{x\ln(y)}=0\\ \ln(x)e^{y\ln(x)}-\frac{x}{y}e^{x\ln(y)}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{y}{x}x^y=\ln(y)y^x\\ \frac{x}{y}=y^x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(y)=\frac{y^{x-1}}{x^{y-1}}\\ \ln(x)=\frac{y^{x-1}}{x^{y-1}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(x)>0\text{ et }\ln(y)>0\\ \ln(x)\ln(y)=1\\ \ln(x)=\frac{y^{x-1}}{x^{y-1}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\text{ et }y>1\\ \ln(x)\ln(y)=1\\ \ln(x)x^{y-1}=y^{x-1}\end{cases}$$

Remarque

La condition $x>1$ et $y>1$ découle automatiquement des autres : si x et y sont positifs, alors $\ln(x)=\frac{y^{x-1}}{x^{y-1}}$ est automatiquement positif, et donc $\ln(y)=\frac{1}{\ln(x)}$ également...

6. Notons $t=\ln(x)$. Alors puisque $x>1$, $t>0$, et alors

$$y=e^{\ln(y)}=e^{1/\ln(x)}=e^{\frac{1}{t}}.$$

Et alors, en prenant le logarithme des deux membres de la dernière équation, il vient

$$(x-1)\ln(y)=(y-1)\ln(x)+\ln(\ln(x))\text{ soit }(e^t-1)\frac{1}{t}=(e^{1/t}-1)t+\ln(t)\Leftrightarrow\varphi(t)=\ln(t).$$

7. D'après la question 4, pour $t\neq 1$, on a $\varphi(t)\neq\ln(t)$, et pour $t=1$, on a bien $\varphi(t)=0=\ln(t)$. Donc un point critique correspond nécessairement à $t=1$, et donc à

$$x=e^t=e\text{ et }y=e^{1/t}=e.$$

Inversement, on vérifie aisément qu'on a bien ici un point critique de f.
Donc $\boxed{\text{le seul point critique de } f \text{ est } (e,e).}$

8. Comme indiqué dans l'énoncé, étudions la fonction $t\mapsto f(e,e+t)$. On a

$$f(e,e+t)=e^{e\ln(e+t)}-e^{(e+t)\ln(e)}=e^{e(1+\ln(1+t/e))}-e^{e+t}.$$

Si (e,e) est un minimum local de f, alors pour t «suffisamment petit», on a

$$f(e,e+t)\geqslant f(e,e)=0\Leftrightarrow e^{e(1+\ln(1+t/e))}\geqslant e^{e+t}\Leftrightarrow 1+\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)\geqslant 1+\frac{t}{e}\Leftrightarrow\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)\geqslant\frac{t}{e}.$$

Mais au voisinage de 0, un petit développement limité nous donne

$$\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)=\frac{t}{e}-\frac{t^2}{2e^2}+\underset{t\to 0}{o}(t^2)\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{t}{e}\right)-\frac{t}{e}=-\frac{t^2}{2e^2}+\underset{t\to 0}{o}(t^2).$$

Ainsi, la fonction $g : t \mapsto \ln\left(1+\frac{t}{e}\right)-\frac{t}{e}$ admet un maximum local strict en 0, et donc pour t non nul suffisamment proche de 0, on a

$$\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)<\frac{t}{e}\Leftrightarrow f(e,e+t)<f(e,e).$$

Donc (e,e) ne peut être un minimum local de f.
é De même, en étudiant $t\mapsto f(e+t,e)$, on montrerait que (e,e) n'est pas non plus un maximum local de f.
Or, toute boule centrée en (e,e) contient des points de la forme $(e+t,e)$ et de la forme $(e,e+t)$. Donc dans toute boule centrée en (e,e), f prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives.

Méthode
Notons que nous avons choisi ici de faire un développement limité afin d'étudier le comportement de g au voisinage de 0, mais il n'aurait pas été plus dur d'en dresser le tableau de variation.

Calculs
Notons que ce sont exactement les mêmes calculs, et qu'il n'est pas nécessaire de les refaire une seconde fois ! En effet, $f(e+t,e)\leqslant 0 \Leftrightarrow f(e,e+t)\geqslant 0$.

Ainsi, f n'admet pas d'extremum local en (e,e), qui est le seul point critique. Puisque U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$, un extremum local sera forcément atteint en un point critique, et donc f ne possède pas d'extremum local.

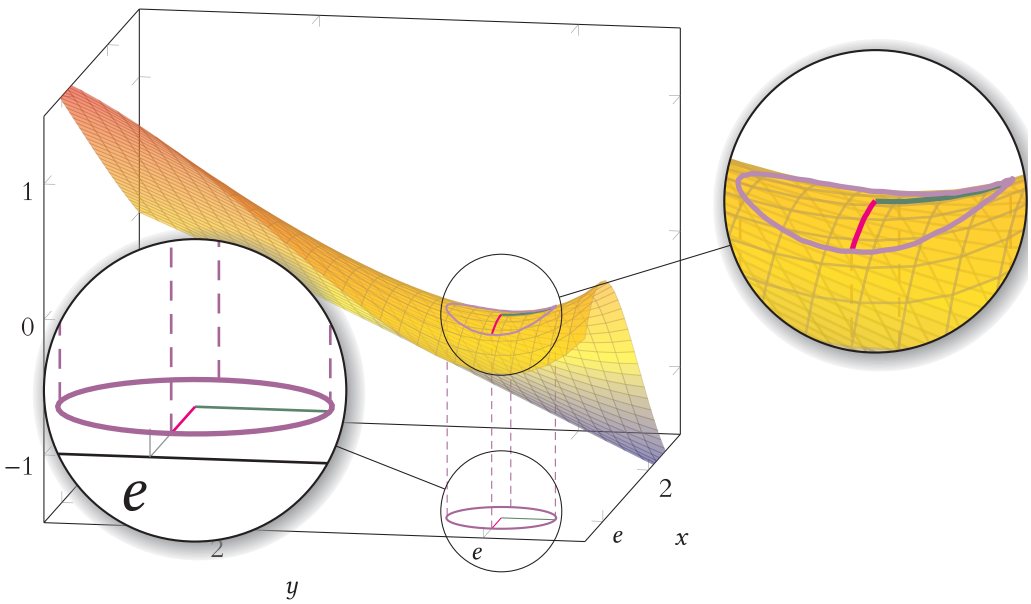


FIGURE 1 – Le graphe de f, avec un zoom sur le point selle. Toute boule centrée en (e,e) contient des points où f prend des valeurs positives (en vert) et des valeurs négatives (en rouge).

PROBLÈME

Partie I. Étude des variables Y_n et Z_n.

1.a. On a

$$F_{Y_n}(t)=P(Y_n\leqslant t)=P(\max(X_1,\dots,X_n)\leqslant t)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i\leqslant t]\right).$$

Mais les X_i étant indépendantes, il vient alors

$$F_{Y_n}(t)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leqslant t)=\boxed{\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(t).}$$

1.b. Puisque les X_i sont identiquement distribuées, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $F_{X_i}(t) = F_{X_1}(1)$ et donc

$$F_{Y_n}(t) = \left(F_{X_1}(t)\right)^n = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \left(1 - e^{-t}\right)^n & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}}$$

1.c. Puisque X_1 est une variable à densité, F_{X_1} est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. , et donc $F_{Y_n} = \left(F_{X_1}\right)^n$ est également continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Donc Y_n est une variable à densité.
D'autre part, toute fonction coïncidant avec F'_{Y_n} sauf éventuellement en un nombre fini de points est une densité de Y_n.
Mais F_{Y_n} est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et pour tout $t \in \mathbf{R}^*$,

$$F'_{Y_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ne^{-t}\left(1 - e^{-t}\right)^{n-1} & \text{si } t > 0 \end{cases} = f_n(t).$$

Et donc $\boxed{f_n \text{ est une densité de } Y_n.}$

Détails
Dans le cas d'une loi exponentielle, nous savons même que F_{X_1} est $\mathscr{C}^1$ sauf en 0.

Densité
Rappelons que si on change la valeur d'une densité en un nombre fini de points, on obtient encore une densité. Pour cette raison, nous ne nous préoccupons pas de la valeur de f_n en 0, où F_{Y_n} n'est pas dérivable.

2.a. Pour $t \in \mathbf{R}$, on a

$$P\left(\frac{X_{n+1}}{n+1} \leqslant t\right) = P(X_{n+1} \leqslant t(n+1)) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-(n+1)t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

2.b. La fonction de répartition de $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est clairement $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
De plus, on a

$$\lim_{t \to 0^-} P\left(\frac{X_{n+1}}{n+1} \leqslant t\right) = 0 = \lim_{t \to 0^+} P\left(\frac{X_{n+1}}{n+1} \leqslant t\right) = P\left(\frac{X_{n+1}}{n+1} \leqslant 0\right)$$

et donc la fonction de répartition de $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est continue en 0. Ainsi, elle est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 0 : $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable à densité, et une densité en est toute fonction qui coïncide avec $F'_{\frac{X_{n+1}}{n+1}}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Par exemple, on peut prendre $d_{n+1} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (n+1)e^{-(n+1)t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

Remarque
L'énoncé nous demandait de repasser par la fonction de répartition, mais c'est un résultat classique sur les lois exponentielles : si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$, alors $\lambda X \hookrightarrow \mathscr{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ et donc ici $\frac{X_{n+1}}{n+1} \hookrightarrow \mathscr{E}(n+1)$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors on a

$$\begin{aligned}\int_0^x ne^{nt}\left(1 - e^{-t}\right)^{n-1} dt &= \int_0^1 ne^{nt}\left(e^{-t}(e^t - 1)\right)^{n-1} dt \\ &= \int_0^1 ne^{nt}e^{-(n-1)t}\left(e^t - 1\right)^{n-1} = \int_0^x ne^t\left(e^t - 1\right)^{n-1} dt \\ &= \left[\left(e^t - 1\right)^n\right]_0^x = \boxed{\left(e^x - 1\right)^n.}\end{aligned}$$

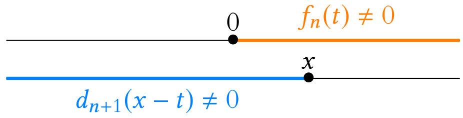
4. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$.
Pour $n = 1$, $Z_1 = X_1 = Y_1$. Donc f_1, qui est une densité de Y_1, est également une densité de Z_1.
Supposons que f_n soit une densité de Z_n.
Alors $Z_{n+1} = Z_n + \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$. Par le lemme des coalitions, Z_n, qui est une fonction de $X_1, \dots, X_n$ est indépendante de $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.
Puisque d_{n+1} est bornée[5] sur $\mathbf{R}$, on peut donc utiliser le produit de convolution : Z_{n+1} est une variable à densité, dont une densité est donnée par

$$g_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) d_{n+1}(x - t)\, dt.$$

Or, on a $f_n(t) \neq 0 \Leftrightarrow t \geqslant 0$ et $d_{n+1}(x - t) \neq 0 \Leftrightarrow x - t \geqslant 0 \Leftrightarrow t \leqslant x$.

[5] Par $n+1$.

Densité
La somme de deux variables à densité n'est pas toujours une variable à densité (penser à $X - X = 0$...).
En revanche, c'est le cas si les deux variables sont indépendantes, et c'est le théorème de convolution qui l'affirme : «$X + Y$ est une variable à densité, dont une densité est donnée par ...»



Ainsi, pour $x \leqslant 0$, on a $g_{n+1}(x) = 0 = f_{n+1}(x)$ et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= \int_0^x ne^{-t}\left(1-e^{-t}\right)^{n-1}(n+1)e^{-(n+1)(x-t)}\,dt \\ &= (n+1)e^{-(n+1)x}\int_0^x e^{nt}\left(1-e^{-t}\right)^{n-1}\,dt \\ &= (n+1)e^{-(n+1)x}\left(e^x-1\right)^n \\ &= (n+1)e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^n = f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Et donc f_{n+1} est une densité de Z_{n+1}.
D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ f_n \text{ est une densité de } Z_n.}$

Partie II. Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

5.a. h est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ par produit de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ h'(x) = -(\varphi(x)-\psi(x))e^{-x} + e^{-x}(\varphi'(x)-\psi'(x)).$$

Mais φ est solution de $(\mathscr{D}_f)$ et donc $\varphi - \varphi' = f \Leftrightarrow \varphi' = \varphi - f$.
De même, on a $\psi' = \psi - f$.
Et donc $\varphi' - \psi' = \varphi - \psi$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ h'(x) = e^{-x}\left(\varphi(x)-\psi(x)-\varphi(x)+\psi(x)\right) = 0.$$

Et donc $\boxed{h \text{ est constante sur } \mathbf{R}_+.}$

5.b. Puisque E est un espace vectoriel $\varphi - \psi \in E$, donc $\int_0^{+\infty} |\varphi(t)-\psi(t)|\,dt$ converge.
D'autre part, puisque $0 \leqslant |(\varphi(x)-\psi(x))e^{-x}| \leqslant |\varphi(x)-\psi(x)|$, $\int_0^{+\infty} |h(t)|\,dt$ converge également, de sorte que la fonction h est aussi dans E.
Mais h étant constante, $\int_0^{+\infty} |h(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} |h(0)|\,dt$.
Mais cette dernière intégrale converge si et seulement si $h(0) = 0$.
On en déduit donc que h est la fonction nulle. Et puisque pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $e^{-x} \neq 0$, c'est que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}_+,\ \varphi(x) = \psi(x).}$

> **Graphiquement**
> L'intégrale d'une fonction constante égale à a entre 0 et $+\infty$ est l'aire d'un rectangle de hauteur a et de longueur infinie. Cette aire n'est finie (et donc l'intégrale converge) que si $a = 0$.

6. La fonction $t \mapsto e^{-t}f(t)$ est continue sur $[x, +\infty[$, donc le seul problème de convergence se situe au voisinage de $+\infty$.
Or, pour $t \geqslant x$, on a $0 \leqslant |f(t)e^{-t}| \leqslant |f(t)|$.
Mais puisque $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge, il en est de même de $\int_x^{+\infty} |f(t)|\,dt$, et donc de $\int_x^{+\infty} |e^{-t}f(t)|\,dt$ converge.
Ainsi, $\boxed{\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt \text{ converge absolument et donc converge.}}$

7. La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable.
D'autre part, $\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\,dt - \int_0^x e^{-t}f(t)\,dt$, et par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)e^{-t}\,dt$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto e^{-x}f(x)$.
Donc k_f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ par produit de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$k_f'(x) = e^x(-e^{-x}f(x)) + e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)\,dt = -f(x) + k_f(x)$$

de sorte que $\boxed{k_f(x) - k_f'(x) = f(x).}$

> **Astuce**
> La version du théorème fondamental de l'analyse qui figure au dans le cours ne s'applique que pour des intégrales sur un segment.
> Pour une intégrale dont une borne est x, mais qui est impropre (mais convergente !) en l'autre borne (ici $+\infty$), on commencera par utiliser la relation de Chasles pour se ramener au cadre d'application du théorème du cours.

8.a. Par positivité de l'intégrale, on a $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,dt \geqslant 0$ et donc $f_k(x) \geqslant 0$.
D'autre part, pour $t \geqslant x$, on a $e^{-t} f(t) \leqslant e^{-x} f(t)$ et donc

$$k_f(x) \leqslant e^x \int_x^{+\infty} e^{-x} f(t)\,dt = e^x e^{-x} \int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt.$$

De plus, pour $A \in \mathbf{R}_+$, en utilisant la relation de la question 7,

$$\int_0^A k_f(x)\,dx = \int_0^A f(x)\,dx + \int_0^A k_f'(x)\,dx = [k_f(x)]_0^A + \int_0^A f(x)\,dx = \boxed{k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x)\,dx.}$$

8.b. Lorsque $x \to +\infty$, on a[6] $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(x)\,dx \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc, d'après la relation (α), par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} k_f(x) = 0$.
Ainsi, dans la relation (β), il vient, lorsque $A \to +\infty$,

$$\int_0^A k_f(x)\,dx \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} -k_f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Par conséquent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} k_f(x)\,dx$ converge et

$$\int_0^{+\infty} k_f(x)\,dx = -k_f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = -\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \boxed{\int_0^{+\infty} (1-e^{-x}) f(x)\,dx.}$$

[6] Car c'est le reste d'une intégrale convergente.

9. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $|k_f(x)| = e^x \left|\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,dt\right|$.
Mais par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)|\,dt.$$

Et donc, après multiplication par e^x,

$$0 \leqslant \left|e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\right| \leqslant e^x \int_x^{+\infty} |f(t)|\,dt \Leftrightarrow \boxed{0 \leqslant |k_f(x)| \leqslant k_{|f|}(x).}$$

Puisque $|f|$ est une fonction de E à valeurs positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} k_{|f|}(x)\,dx$ converge d'après la question précédente, et donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} |k_f(t)|\,dt \text{ converge.}}$

Remarque

Étant donnée la définition de f, on a

$$f \in E \Leftrightarrow |f| \in E.$$

Et donc $k_{|f|}$ est bien défini d'après la question 6.

10. Puisque f est positive[7], $|f| = f$, et comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, f appartient bien à E.
Donc par la question 5.b, il existe au plus une fonction g dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ vérifiant $g - g' = f$.

Mais par la question 7, une telle fonction existe : c'est k_f.
Donc s'il existe une densité g satisfaisant à toutes les hypothèses de l'énoncé, c'est nécessairement $g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ k_f(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
On a alors

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} k_f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} (1-e^{-t}) f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\,dt.$$

Mais f étant une densité, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1$, et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t)\,dt = 0$.
Puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[0, +\infty[$, l'intégrale est nulle si et seulement si $\forall t \in [0, +\infty[$, $e^{-t} f(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$.
Mais ceci vient alors contredire le fait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. Et donc il n'existe pas de densité g dérivable sur $\mathbf{R}_+$, nulle sur $\mathbf{R}_-^*$ et vérifiant $g - g' = f$ sur $\mathbf{R}_+$.

[7] Comme toute densité.

«Au plus»

Nous avons prouvé en 5.b qu'il ne peut y avoir deux fonctions distinctes vérifiant $g' - g = f$.
Et donc il y en a **au plus une.** Cela ne prouve pas qu'il en existe une !

Partie III. Étude de l'application $f \mapsto k_f$.

11. Il est clair par ce qui précède, que φ est à valeurs dans E.
Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$\varphi(\lambda f+g)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\left(\lambda f(t)+g(t)\right) dt = \lambda e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)\, dt + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} g(t)\, dt = \lambda\varphi(f)+\varphi(g).$$

Et donc $\varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$.
Ainsi, φ est linéaire et donc est $\boxed{\text{un endomorphisme de } E.}$

12. La fonction f_a est continue sur $\mathbf{R}_+$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_a(x)|\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\, dx$ est une intégrale de référence convergente, donc $f \in E$.
D'autre part, on a alors, pour $x \in \mathbf{R}_+$,

$$\varphi(f_a)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} e^{-at}\, dt = e^x \int_x^{+\infty} e^{-(a+1)t}\, dt.$$

Et pour $A > x$,

$$\int_x^A e^{-(a+1)t}\, dt = \left[\frac{-1}{a+1} e^{-(a+1)t}\right]_x^A = \frac{1}{a+1}\left(e^{-(a+1)x} - e^{-(a+1)A}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-(a+1)x}}{a+1}.$$

Et donc $\varphi(f_a)(x) = \dfrac{1}{a+1} e^{-(a+1)x} e^x = \dfrac{1}{a+1} e^{-ax} = \dfrac{1}{a+1} f_a(x)$.

Nous en déduisons donc que $\varphi(f_a) = \dfrac{1}{a+1} f_a$: f_a est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\dfrac{1}{a+1}$.

> **Valeurs propres**
> Vous avez probablement l'impression que la définition de valeur propre/vecteur propre donnée par l'énoncé est redondante avec celle vue en cours. Il existe toutefois une différence : ici E est de dimension infinie, alors que tout ce qui a été vu en cours n'est valable qu'en dimension finie.
> Donc la définition est bien la même, en revanche certaines propriétés vues en dimension finie ne le sont plus en dimension infinie !

13.a. Supposons par l'absurde que f soit un vecteur propre associé à la valeur propre 0.
Alors $\varphi(f) = k_f = 0 \times f = 0$.
Et donc $f = k_f - k_f' = 0$, ce qui est contraire à la définition de vecteur propre.
Donc nécessairement $\boxed{\lambda \neq 0.}$

13.b. Par hypothèse, on a $k_f = \varphi(f) = \lambda f$, avec $\lambda \neq 0$.
Or, par définition, $\varphi(f)$ est une fonction dérivable, donc f est également dérivable.
De plus, on a $k_f - k_f' = f \Leftrightarrow \lambda f - \lambda f' = f \Leftrightarrow \boxed{f' = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f.}$

13.c. La fonction g est dérivable car produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a

$$g'(x) = f'(x) e^{-\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)x} - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f(x)}_{=f'(x)} e^{-\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)x} = 0.$$

Donc g est constante sur $\mathbf{R}_+$: $\forall x \in \mathbf{R}_+, g(x) = g(0) = f(0)$.
Et donc $\boxed{f(x) = g(x) e^{\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)x} = f(0) e^{\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)x}.}$

13.d. Nous avons prouvé à la question 9 que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} |f(0)| e^{\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)t}\, dt$ converge.
Puisque f est non nulle, $f(0) \neq 0$ et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)t}\, dt$ converge.
Mais d'après un résultat du cours, c'est le cas si et seulement si

$$1 - \frac{1}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in]0,1[.$$

14. Nous avons prouvé à la question 13 que si λ est une valeur propre de φ, alors $\lambda \in]0,1[$ et tout vecteur propre f est de la forme $f(0) f_{1-\frac{1}{\lambda}}$. Donc $E_\lambda(\varphi) \subset \mathrm{Vect}\left(f_{1-\frac{1}{\lambda}}\right)$.

Inversement, si $\lambda \in]0,1[$, alors il existe $a > 0$ tel que $\lambda = \dfrac{1}{a+1}$ (il suffit de prendre $a = \dfrac{1}{\lambda} - 1$) et alors le résultat de la question 12 prouve que λ est valeur propre de φ et que $\mathrm{Vect}(f_a) \subset E_\lambda(\varphi)$. Et donc $\dim E_\lambda(\varphi) = 1$, de sorte que $E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}(f_a)$.
On en déduit donc que $\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi) =]0,1[}$ et que pour tout $\lambda \in]0,1[$, $\boxed{E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(f_{\frac{1}{\lambda}-1}\right).}$

> **Dimension infinie**
> Notons que, contrairement au cas d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, nous venons de prouver sur un exemple qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie peut avoir une infinité de valeurs propres.

ECRICOME 2010

Exercice 1

Sujet : Développement asymptotique d'une suite d'intégrales **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, suites numériques, fonctions d'une variable.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les intégrales :

$$u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} \text{ et } v_n = \int_0^1 \frac{u^{1/n}-u^{2/n}}{1-u}\,du.$$

1. **Convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.**
   a. Vérifier que :
   $$\forall n \geqslant 1, \quad \forall t \in [0,1[, \quad \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}.$$
   En déduire que : $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n - \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?
   b. En utilisant le changement de variable $u = t^n$, établir que :
   $$\forall n \geqslant 1,\ u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}.$$

2. **Résultats intermédiaires.**
   a. Pour tout entier $k \geqslant 1$, calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^k}{x-1}$.
   b. Soit k un entier naturel non nul.
   Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{x-1}\,dx$.
   c. On introduit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - e^{2x}$.
   À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 1 appliquée à la fonction f, montrer que
   $$\forall x \in]-\infty, 0],\ |e^x - e^{2x} + x| \leqslant \frac{3x^2}{2}.$$

3. **Application.**
   a. En utilisant la question 2, démontrer que
   $$\forall n \geqslant 1,\ \left| v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,du \right| \leqslant \frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,du.$$
   b. *On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,du$ que l'on ne cherchera pas à calculer.*
   Donner un équivalent de v_n puis un équivalent de $u_n - \dfrac{1}{2}$ en fonction de I.

Exercice 2

Sujet : Recherche de points critiques d'une fonction de trois variables **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : diagonalisation, fonctions de plusieurs variables

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Commentaires : calculatoire sur la fin, mais les méthodes mises en œuvre sont intéressantes.

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbf{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n. On considère l'application f qui à un polynôme P de $\mathbf{R}_n[X]$ associe le polynôme :

$$f(P) = P'' - 4XP'.$$

1. **Étude de f.** Soit n un entier naturel fixé uniquement dans cette question.
   a. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
   b. Calculer $f(1)$, $f(X)$, puis $f(X^k)$ pour $k \in \{2, \ldots, n\}$.
   Établir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ est triangulaire.
   c. Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses espaces propres est de dimension 1.
   d. Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
   Établir que : $\lambda = -4\deg(P)$.
   En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que
$$(\mathscr{E}_n)\ :\ f(H_n) = -4nH_n.$$
   Rappel : *un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant vaut* 1.
2. **Étude de la suite** $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   a. En dérivant la relation $(\mathscr{E}_n)$, démontrer que :
$$\forall n \geqslant 1,\ f(H_n') = -4(n-1)H_n'.$$
   En déduire que :
$$\forall n \geqslant 1,\ H_n' = nH_{n-1} \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ H_n - XH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0.$$
   b. Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = X$?
   Calculer alors H_2 et H_3.
   c. D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :
$$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ \forall n \geqslant 2,\ u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)u_{n-2}}{4}.$$
   Écrire un programme `Scilab` calculant u_{2010}.
3. **Application aux points critiques d'une fonction à trois variables.**
   On note U l'ouvert de $\mathbf{R}^3$ défini par :
$$U = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \text{ tel que } x \neq y \text{ et } y \neq z \text{ et } z \neq x\}$$
   ainsi que la fonction V définie sur U par :
$$\forall (x,y,z) \in U,\ V(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x-y| - \ln|y-z| - \ln|z-x|.$$
   Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in U$.
   a. Établir que (α,β,γ) est un point critique de V si et seulement si (α,β,γ) est solution du système
$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} 2\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta) = 2\alpha - \beta - \gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta - \alpha - \gamma \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma - \alpha - \beta \end{cases}$$
   b. On introduit le polynôme $Q(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$.
   Montrer que (α,β,γ) est solution de $(\mathscr{S})$ si et seulement si $Q'' - 4XQ'$ admet pour racines α, β, γ.
   c. Prouver que si (α,β,γ) est un point critique de V, alors
$$Q'' - 4XQ' = -12Q$$
   puis que $Q = H_3$ (cf. question 2.b).
   Donner alors les points critiques de V.

Problème

Sujet : Autour du problème du collectionneur de vignettes **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : probabilités discrètes, variables à densité, suites et séries, convergence des variables aléatoires

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Modifications apportées au sujet d'origine : la question 6 a été largement remaniée car la formule du crible n'est plus au programme

Commentaires : nécessite de l'aisance avec le raisonnement probabiliste, et en calcul

Soit r un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient r boules numérotées $1, 2, \ldots, r$. On pioche indéfiniment les boules avec remise, chaque boule pouvant être piochée de façon équiprobable.
Pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on note Y_i la variable aléatoire égale au «nombre de pioches nécessaires pour obtenir i boules distinctes». On convient que $Y_1 = 1$.
On désigne par X_r la variable aléatoire égale au «nombre de pioches nécessaires pour obtenir les r boules numérotées $1, 2, \ldots, r$». Il est immédiat que $X_r = Y_r$.
Par exemple, en supposant que $r = 4$, si les boules piochées successivement portent les numéros

$$3,\ 3,\ 3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 4,\ 1,\ \ldots$$

alors on a : $Y_1 = 1$, $Y_2 = 4$, $Y_3 = 8$, $Y_4 = X_4 = 11$.
La partie I établit certains résultats préliminaires qui seront utilisés dans d'autres parties.
La partie II se consacre à l'étude de la loi des variables discrètes $Y_{i+1} - Y_i$ afin d'en déduire l'espérance et la variance de la variable discrète X_r.
La partie III détermine la loi de la variable X_r puis étudie la distribution asymptotique de la variable X_r autour de sa moyenne.
On note exp la fonction exponentielle définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \exp(x) = e^x.$$

Partie I : Résultats préliminaires.

1. Étude d'une suite.

   On introduit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) - \ln(n)$.

   a. Écrire un programme `Scilab` permettant de calculer u_n pour un entier $n \geqslant 1$ donné.

   b. À l'aide d'un développement limité, justifier que $u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.
   En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}(u_n - u_{n+1})$ puis démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

   c. Montrer que la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge (*on ne demande pas le calcul de la limite*).

2. Loi de Gumbel.
   Soit Z une variable aléatoire. On suppose que Z suit la loi de Gumbel, c'est-à-dire que sa fonction de répartition F_Z est définie par :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ F_Z(t) = \exp(-\exp(-t)).$$

   a. Vérifier que la fonction F_Z est bien une fonction de répartition puis que Z possède une densité que l'on précisera.

   b. On considère la variable aléatoire $W = \exp(-Z)$.
   Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire W.
   En déduire que la variable aléatoire W suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètres.

   c. Pour tout entier k, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln(x))^k e^{-x}\,dx$ est absolument convergente.

   d. En justifiant le changement de variable $x = \exp(-t)$, démontrer que la variable Z admet un moment d'ordre k valant :

$$E(Z^k) = \int_0^{+\infty} (-\ln(x))^k e^{-x}\,dx.$$

Partie II : Étude de la variable X_r.

3. Étude du cas $r = 3$.
   On suppose uniquement dans cette question que $r = 3$, c'est-à-dire que l'urne ne contient que trois boules numérotées respectivement $1, 2, 3$, chacune pouvant être piochée avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

   a. Soit n un entier naturel non nul.
   Comparer les événements $[Y_2 > n]$ et C_n : «les n premières pioches fournissent des boules portant toutes le même numéro».
   Calculer la probabilité $P(C_n)$. En déduire la probabilité $P(Y_2 > n)$ puis donner la loi de la variable Y_2.

   b. Justifier que :

$$\forall n \geqslant 1,\ P(Y_3 - Y_2 = n) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([Y_3 = n+k] \cap [Y_2 = k])$$

puis que :

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall k \geqslant 2,\ P([Y_3 = n+k] \cap [Y_2 = k]) = \frac{1}{3^{k-1}}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

En déduire la loi de la variable $Y_3 - Y_2$.

Dans toute la suite du problème, r désignera un entier supérieur ou égal à 2.

4. Loi de $Y_{i+1} - Y_i$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$.
   - a. Justifier que :
   $$Y_i(\Omega) = \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \mathbf{N} \setminus \{0, 1, 2, \ldots, i-1\} \text{ et } (Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbf{N} \setminus \{0\}.$$
   - b. Démontrer que :
   $$\forall n \geqslant 1,\ \forall k \geqslant i,\ P_{[Y_i = k]}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right).$$
   - c. En déduire que $Y_{i+1} - Y_i$ suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètres puis établir que :
   $$E(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{r}{r-i} \text{ et } V(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{r \cdot i}{(r-i)^2}.$$

5. Espérance et variance de X_r.
   - a. Justifier que : $X_r = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{r-1}(Y_{r-i+1} - Y_{r-i})$.
   En admettant que les variables $Y_2 - Y_1, Y_3 - Y_2, \ldots, Y_r - Y_{r-1}$ sont indépendantes, vérifier que :
   $$E(X_r) = r\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i} \text{ et } V(X_r) = r^2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i^2} - r\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i}.$$
   - b. À l'aide de la question 1, prouver l'existence de deux réels α et β tels que :
   $$E(X_r) = r\ln(r) + \alpha r + \underset{r\to+\infty}{o}(r) \text{ et } V(X_r) \underset{r\to+\infty}{\sim} \beta r^2.$$

Partie III : Loi de X_r et de sa déviation asymptotique par rapport à sa moyenne.
Pour tout entier $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ et tout entier naturel $m \geqslant 1$, on considère l'événement $A_{k,m}$: «le numéro k n'a pas été pioché durant les m premières pioches».

6. Loi de X_r.
   Soit m un entier naturel non nul.
   - a. Pour tout entier $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$, calculer la probabilité de l'événement $A_{k,m}$,
   - b. On se fixé à présent k numéros $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Calculer la probabilité qu'aucun de ces numéros n'ait été pioché durant les m premiers tirages.
   - c. Justifier que :
   $$P(X_r > m) = P\left(A_{1,m} \cup A_{2,m} \cup \cdots \cup A_{r,m}\right).$$
   En déduire que $P(X_3 > m) = 3\left(1 - \frac{1}{3}\right)^m - 3\left(1 - \frac{2}{3}\right)^m$.
   On admet que plus généralement que
   $$P(X_r > m) = \sum_{k=1}^{r-1}(-1)^{k-1}\binom{r}{k}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^m.$$

7. Comportement de X_r au delà de sa moyenne.
   - a. À l'aide d'une récurrence sur m, montrer que, pour toute famille $(D_1, \ldots, D_m)$ d'événements, on a :
   $$P(D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_m) \leqslant P(D_1) + P(D_2) + \cdots + P(D_m).$$
   - b. Démontrer que pour tout réel x, on a : $\exp(x) \geqslant 1 + x$. En déduire que :
   $$\forall m \in \mathbf{N} \setminus \{0\},\ \forall k \in \{1, \ldots, r\},\ P\left(A_{k,m}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{m}{r}\right).$$

c. Soit $\varepsilon > 0$, on note M_r la partie entière de $(1+\varepsilon)r\ln(r)$, c'est-à-dire l'unique entier relatif tel que :

$$M_r \leqslant (1+\varepsilon)r\ln(r) < M_r + 1.$$

Comparer les événements $[X_r > M_r]$ et $[X_r > (1+\varepsilon)r\ln(r)]$.
En déduire que :

$$P(X_r > (1+\varepsilon)r\ln(r)) \leqslant \frac{e}{r^{\varepsilon}}.$$

Ainsi on vient d'établir que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{r\to+\infty} P(X_r > (1+\varepsilon)r\ln(r)) = 0$$

qui peut se traduire ainsi : l'événement «X_r est significativement supérieur à sa moyenne» est un événement asymptotiquement rare.

8. Distribution de X_r autour de sa moyenne.
On introduit la suite $(Z_r)_{r\geqslant 2}$ de variables aléatoires définie par :

$$\forall r \geqslant 2,\ Z_r = \frac{X_r - r\ln(r)}{r}.$$

Soit t un réel fixé, on note m_r la partie entière du réel $r\ln(r) + rt$, c'est-à-dire l'unique entier relatif tel que :

$$m_r \leqslant r\ln(r) + rt < m_r + 1.$$

a. Justifier l'existence d'un rang $r_0(t)$ tel que :

$$\forall r \geqslant r_0(t),\ m_r \geqslant 1$$

puis prouver l'égalité :

$$\forall r \geqslant r_0(t),\ P(Z_r > t) = P(X_r > m_r).$$

b. Soit k un entier naturel. À l'aide d'un développement limité, établir que :

$$m_r \ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) = -k\ln(r) - kt + \underset{r\to+\infty}{o}(1).$$

c. Démontrer que, pour tout entier k, on a : $\binom{r}{k} \underset{r\to+\infty}{\sim} \frac{r^k}{k!}$.
En déduire que :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \lim_{r\to+\infty} \binom{r}{k}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \frac{\exp(-kt)}{k!}.$$

d. En admettant que l'on a

$$\lim_{r\to+\infty} \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{k-1}\binom{r}{k}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\frac{\exp(-kt)}{k!},$$

exprimer la valeur de la limite $\lim_{r\to+\infty} P(Z_r \leqslant t)$ en fonction de $F_Z(t)$ (définie à la question 2).
Quel résultat vient-on d'établir sur la suite de variables aléatoires $(Z_r)_{r\geqslant 2}$?

ECRICOME 2010 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. Convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$

1.a. Pour $t \in [0,1[$, on a $1+t+\cdots+t^{n-1} = \dfrac{1-t^n}{1-t}$ et donc

$$\frac{1}{1+t+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = \frac{1-t}{1-t^n} - \frac{(1-t)(1-t^n)}{1-t^n} = \frac{(1-t)(1-1+t^n)}{1-t^n} = \boxed{\frac{(1-t)t^n}{1-t^n}}.$$

On en déduit que

$$u_n - \int_0^1 (1-t)\,dt = \int_0^1 \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}\,dt.$$

Remarque — Cette dernière intégrale est impropre en 1, mais converge car différence de deux intégrales convergentes.

Mais $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\,dt = \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$, de sorte que

$$u_n - \int_0^1 (1-t)\,dt = u_n - \frac{1}{2}.$$

Pour tout $t \in [0,1[$, on a $t \geqslant t^n$ et donc $1-t \leqslant 1-t^n$, de sorte que $\dfrac{1-t}{1-t^n} \leqslant 1$.
En particulier, par croissance de l'intégrale,

Puissance n — Attention au fait que pour $t \geqslant 1$, on a $t \leqslant t^n$, mais que pour $t \in [0,1]$, on a au contraire $t^n \leqslant t$.

$$\int_0^1 \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}\,dt \leqslant \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1} \text{ et donc } u_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

D'autre part, la fonction $t \mapsto \dfrac{(1-t)t^n}{1-t^n}$ étant positive sur $[0,1[$, on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}\,dt \geqslant 0$ et donc $0 \leqslant u_n - \dfrac{1}{2}$.
Au final, il vient donc

$$\boxed{0 \leqslant u_n - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{n+1}}.$$

Par le théorème des gendarmes, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n - \frac{1}{2} = 0$ et donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}}$.

1.b. D'après ce qui précède, on a donc $u_n - \dfrac{1}{2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}\,dt$.
Le changement de variable $u = t^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$, et strictement croissant, donc légitime. On a alors $u = t^n \Leftrightarrow t = u^{1/n}$ et donc $dt = \dfrac{1}{n}u^{1/n-1}\,du$. Il vient donc[1]

$$u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}\,dt = \int_0^1 \frac{(1-u^{1/n})u}{1-u}\frac{1}{n}u^{1/n-1}\,du = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}-u^{2/n}}{1-u}\,du = \boxed{\frac{v_n}{n}}.$$

[1] L'intégrale de départ est convergente, donc l'intégrale obtenue après changement de variable le sera automatiquement.

2. Résultats intermédiaires.

2.a. Lorsque $x \to 1$, on a $x - 1 \to 0$ et donc

$$\ln(x) = \ln(1+(x-1)) \underset{x\to 1}{\sim} x-1.$$

Et donc pour tout $k \geqslant 1$, $(\ln x)^k \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)^k$.
On en déduit que

$$\frac{(\ln x)^k}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{(x-1)^k}{x-1} = (x-1)^{k-1}.$$

Par conséquent,

$$\frac{(\ln x)^k}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)^{k-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \boxed{\begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}}$$

2.b. La fonction $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^k}{x-1}$ est continue sur $]0,1[$.

Par la question précédente, elle est prolongeable par continuité en 1, donc $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{(\ln x)^k}{x-1}\,dx$ converge.

Au voisinage de 0, on a $\dfrac{(\ln x)^k}{x-1} \underset{x\to 0}{\sim} -(\ln x)^k$.

Or, par croissances comparées, on a $\sqrt{x}(\ln x)^k \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, de sorte que $\ln(x)^k \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Puisque $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{1/2} (\ln x)^k\,dx$. Et alors, par le critère des équivalents pour les fonctions de signe constant $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{(\ln x)^k}{x-1}\,dx$ converge également.

Et donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{x-1}\,dx \text{ converge.}}$

> **Signe** — k étant fixé, la fonction $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^k}{x-1}$ est de signe constant sur $]0,1[$, bien que ce signe dépende de la parité de k.

2.c. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[x,0]$, avec

$$f'(t) = e^t - 2e^{2t} \text{ et } f''(x) = e^t - 4e^{2t} = e^t(1-4e^t).$$

En particulier, pour tout $t \in [x,0]$, on a

$$|f''(t)| \leqslant |e^t||1-4e^t| \leqslant |1-4e^t|.$$

Mais la fonction $t \mapsto 1-4e^t$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_-$, et on a $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} 1-4e^t = 1$ et $1-4e^0 = -3$.
Donc pour tout $t \in \mathbf{R}_-$, $-3 \leqslant 1-4e^t \leqslant 1 \leqslant 3$, de sorte que $|1-4e^t| \leqslant 3$.
D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre 0 et x, il vient

$$|f(x) - f'(0)x| \leqslant \frac{3|x|^2}{2!} \Leftrightarrow \boxed{|e^x - e^{2x} + x| \leqslant \frac{3x^2}{2}}.$$

> **Majorant** — Rappelons que pour appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre a et b, il faut disposer d'un majorant de $|f^{(n+1)}|$ **sur le segment d'extrémités a et b**, et pas nécessairement sur $\mathbf{R}$ tout entier.

3. Application

3.a. Pour tout $u \in]0,1]$, on a $\dfrac{1}{n}\ln(u) \leqslant 0$, et donc, d'après la question 2.c, appliquée avec $x = \dfrac{1}{n}\ln u$,

$$\left|e^{\frac{1}{n}\ln u} - e^{\frac{2}{n}\ln u} + \frac{1}{n}\ln u\right| \leqslant \frac{3}{2n^2}(\ln u)^2 \Leftrightarrow \left|u^{1/n} - u^{2/n} + \frac{1}{n}\ln u\right| \leqslant \frac{3}{2n}(\ln u)^2.$$

En divisant par $1-u$, il vient

$$\forall u \in]0,1[, \left|\frac{u^{1/n}-u^{2/n}}{1-u} + \frac{1}{n}\frac{\ln u}{1-u}\right| \leqslant \frac{3}{2n^2}\frac{(\ln u)^2}{1-u}.$$

Par croissance de l'intégrale[2], on a alors

$$\int_0^1 \left|\frac{u^{1/n}-u^{2/n}}{1-u} + \frac{1}{n}\frac{\ln u}{1-u}\right| du \leqslant \frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,du.$$

Et enfin, d'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales,

$$\left|\int_0^1 \frac{u^{1/n}-u^{2/n}}{1-u}\,du + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,du\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{u^{1/n}-u^{2/n}}{1-u} + \frac{1}{n}\frac{\ln u}{1-u}\right| du \leqslant \frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,du.$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\left|v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,du\right| \leqslant \frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,du.}$$

[2] Il a été prouvé précédemment que toutes les intégrales en jeu convergent.

3.b. Notons $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,du$, qui est une constante ne dépendant pas de n.
On a alors $\left|v_n + \dfrac{1}{n}I\right| \leqslant \dfrac{3}{2n^2}J$.
En particulier, $\dfrac{n}{I}\left|v_n + \dfrac{1}{n}I\right| \leqslant \dfrac{3}{2n}\dfrac{J}{I} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que

$$v_n + \frac{1}{n}I = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{I}{n}\right).$$

Et donc

$$v_n = -\frac{1}{n}I + \left(v_n + \frac{I}{n}\right) = -\frac{I}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{I}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{-\frac{I}{n}.}$$

Puisque $u_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{v_n}{n}$, on en déduit que

$$\boxed{u_n - \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{I}{n^2} = -\frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,du.}$$

o /∼
Par définition d'un équivalent, on a

$$u_n \sim v_n$$

si et seulement si

$$u_n = v_n + o(v_n).$$

EXERCICE 2

1. Étude de f

1.a. Si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, alors $\deg P' \leqslant n-1$ et $\deg P'' \leqslant n-2$, de sorte que $\deg XP' \leqslant n$ et donc $\deg f(P) \leqslant n$. Ainsi, f est bien à valeurs dans $\mathbf{R}_n[X]$.
Soient $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$f(\lambda P+Q) = (\lambda P+Q)''-4X(\lambda P+Q)' = \lambda P''+Q''-4\lambda XP'-4XQ' = \lambda(P''-4XP')+(Q''-4XQ') = \lambda f(P)+f(Q).$$

Donc f est linéaire : $\boxed{\text{c'est bien un endomorphisme de } \mathbf{R}_n[X].}$

1.b. On a $f(1) = 0 - 4X \times 0 = 0$, $f(X) = 0 - 4X \times 1 = -4X$ et pour $k \geqslant 2$,

$$f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 4XkX^{k-1} = -4kX^k + k(k-1)X^{k-2}.$$

Et donc

$$A_n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) & \dots & f(X^{n-1}) & f(X^n) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 6 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & -8 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -3 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & n(n-2) \\ \vdots & & & & & -4(n-1) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -4n \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \\ \vdots \\ X^{n-2} \\ X^{n-1} \\ X^n \end{matrix} \end{array}.$$

On constate alors que $\boxed{\text{cette matrice est triangulaire supérieure.}}$

1.c. Les valeurs propres de A_n sont donc ses coefficients diagonaux, qui sont les $-4k$, $k \in [\![0,n]\!]$, de sorte que $\mathrm{Spec}(f) = \mathrm{Spec}(A_n) = \{-4k,\ k \in [\![0,n]\!]\}$.
En particulier, puisque f possède $n+1 = \dim E$ valeurs propres distinctes, f est diagonalisable et tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

1.d. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, avec $a_d \neq 0$, de sorte que $d = \deg P$. Alors

$$f(P) = \sum_{k=2}^{d} k(k-1)a_k X^{k-2} - 4\sum_{k=1}^{d} k(k-1)a_k X^k.$$

Degré
Lorsqu'on dit qu'un polynôme est de degré d, c'est qu'il n'a pas de termes de degré supérieur à d, et que le coefficient en X^d est non nul.

En particulier, si $f(P) = \lambda P$, en identifiant les coefficients de degré d, il vient $-4da_d = \lambda a_d$, et puisque $a_d \neq 0$, on a donc $-4d = \lambda$, soit $\boxed{\lambda = -4 \deg P.}$

À présent, considérons P_n un vecteur propre de f associé à la valeur propre $-4n$.
Puisque $E_{-4n}(f)$ est de dimension 1, nécessairement $E_{-4n}(f) = \text{Vect}(P_n) = \{\mu P_n, \mu \in \mathbf{R}\}$.
En particulier, il existe dans $E_{-4n}(f)$ un unique polynôme unitaire : celui pour lequel μ est l'inverse du coefficient dominant de P_n, qui sera nécessairement de degré n.

Plus généralement
Tout sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$ de dimension 1 contient un unique polynôme unitaire.

Et donc $\boxed{\text{il existe bien un unique polynôme unitaire } H_n \text{ tel que } f(H_n) = -4nH_n}$, et ce polynôme est nécessairement de degré n.

2. Étude de la suite $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$

2.a. On a $H_n'' - 4XH_n' = -4nH_n$ et donc en dérivant

$$H_n^{(3)} - 4XH_n'' - 4H_n' = -4nH_n' \Leftrightarrow (H_n')'' - 4X(H_n')' = -4(n-1)H_n' \Leftrightarrow \boxed{f(H_n') = -4(n-1)H_n'.}$$

Autrement dit, H_n' est dans $E_{-4(n-1)}(f)$.
Or nous savons que $E_{-4(n-1)}(f)$ est de dimension 1 et contient $H_{n-1} \neq 0$, de sorte que $E_{-4(n-1)}(f) = \text{Vect}(H_{n-1})$.
Et donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $H_n' = \lambda H_{n-1}$.
Or H_{n-1} possède 1 comme coefficient dominant alors que H_n' possède n

Explication
Puisque le terme en X^n de H_n est X^n, le terme de degré $n-1$ de H_n' est nX^{n-1}.

Par identification des coefficients dominants, on a donc nécessairement $\boxed{H_n' = nH_{n-1}.}$
En particulier, $H_n'' = nH_{n-1}' = n(n-1)H_{n-2}$ et donc la relation $H_n'' - 4XH_n' = -4nH_n$ s'écrit

$$n(n-1)H_{n-2} - 4nXH_{n-1} + 4nH_n = 0 \Leftrightarrow \boxed{H_n - XH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0.}$$

2.b. Le polynôme constant égal à 1 est unitaire, de degré 0 et vérifie $f(1) = -4 \times 0 \times 1$.
Mais d'après la question 1.d, il y a unicité d'un tel polynôme : $\boxed{H_0 = 1.}$
De même, $f(X) = -4X$ et X est unitaire et de degré 1, donc $\boxed{H_1 = X.}$
Et donc

$$H_2 = XH_1 - \frac{H_0}{4} = \boxed{X^2 - \frac{1}{4}} \text{ et } H_3 = XH_2 - \frac{H_1}{2} = \boxed{X^3 - \frac{3X}{4}.}$$

2.c. Une possibilité est de créer un tableau `U` stockant les termes successifs de la suite, et de calculer la valeur de ces termes à l'aide d'une boucle `for`.
Dans ce cas, il faudra juste se méfier du fait que les coordonnées d'un vecteur sont numérotées à partir de 1, et donc `u(1)` contiendra u_0, `u(2)` contiendra u_1, etc.

```
u = zeros(1,2011) ;
u(1) = 1 ;
u(2) = 1 ;
for i = 3  : 2011
        u(i) = u(i-1) - (i-2)*u(i-2)/4 ;
end
disp(u(2011))
```

Notons que les termes de (u_n) deviennent tellement grands à partir d'un certain rang qu'ils dépassent les capacité de calcul de `Scilab` ...

3. Application aux points critiques d'une fonction de trois variables.

3.a. Les fonctions $(x,y,z) \mapsto x-y$, $(x,y,z) \mapsto y-z$ et $(x,y,z) \mapsto z-x$ sont $\mathscr{C}^1$ sur U car polynomiales, et de plus prennent leurs valeurs dans $\mathbf{R}^*$, par définition de U.

Détails
U est précisément défini comme l'ensemble des points où aucune de ces trois fonctions ne s'annule.

Par composition avec la fonction $t \mapsto \ln|t|$, qui est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$, les fonctions $(x,y,z) \mapsto \ln|x-y|$, $(x,y,z) \mapsto \ln|y-z|$ et $(x,y,z) \mapsto \ln|z-x|$ sont $\mathscr{C}^1$ sur U.
Enfin, $(x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur U car polynomiale. Et donc V est $\mathscr{C}^1$ sur U car somme de fonctions $\mathscr{C}^1$.

On a alors, pour tout $(x,y,z) \in V$,

$$\partial_1 V(x,y,z) = 2x - \frac{1}{x-y} + \frac{1}{z-x}$$

Rappel
La dérivée de $\ln|u|$ est $\frac{u'}{u}$.

$$\partial_2 V(x,y,z) = 2y - \frac{1}{y-z} + \frac{1}{x-y}$$
$$\partial_3 V(x,y,z) = 2z + \frac{1}{y-z} - \frac{1}{z-x}.$$

Et donc $(\alpha,\beta,\gamma) \in U$ est un point critique de V si et seulement si

$$\begin{cases} 2\alpha - \frac{1}{\alpha-\beta} + \frac{1}{\gamma-\alpha} = 0 \\ 2\beta - \frac{1}{\beta-\gamma} + \frac{1}{\alpha-\beta} = 0 \\ 2\gamma + \frac{1}{\beta-\gamma} - \frac{1}{\gamma-\alpha} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha) = \gamma-\alpha+\beta-\alpha \\ 2\beta(\beta-\gamma)(\alpha-\beta) = \alpha-\beta+\gamma-\beta \\ 2\gamma(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) = \beta-\gamma+\alpha-\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} 2\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta) = 2\alpha-\beta-\gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta-\alpha-\gamma \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma-\alpha-\beta \end{cases}}$$

3.b. On a $Q'(X) = (X-\alpha)(X-\beta) + (X-\alpha)(X-\gamma) + (X-\beta)(X-\gamma)$ et donc

$$Q''(X) = 2\left((X-\alpha)+(X-\beta)+(X-\gamma)\right) = 2(3X-\alpha-\beta-\gamma).$$

Et donc
$$Q''(\alpha) - 4\alpha Q'(\alpha) = 2(2\alpha-\beta-\gamma) - 4\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$$
est nul si et seulement si $2\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta) = 2\alpha-\beta-\gamma$, ce qui, ô miracle !, est la première équation de notre système de la question précédente.
On montre de la même manière que la seconde équation est satisfaite si et seulement si $Q''(\beta) - \beta Q'(\beta) = 0$ et que la dernière est satisfaite si et seulement si γ est racine de $Q'' - 4XQ'$.
Et donc (α,β,γ) est un point critique de V si et seulement si α,β,γ sont trois racines de $Q'' - XQ'$.

> **Racines**
> On peut même affirmer que α, β, γ sont **les trois** racines de $Q'' - 4XQ'$. En effet, celui-ci est de degré 3 donc possède au maximum trois racines distinctes, et α, β, γ sont distincts par hypothèse.

3.c. Si $Q''-4XQ'$ possède α,β,γ comme racines, alors il est divisible par $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = Q$.
Donc il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $Q'' - 4XQ' = PQ$. Or Q est de degré 3, tout comme $Q'' - 4XQ'$, de sorte que P est nécessairement de degré 0, donc une constante λ.
On a donc $Q'' - 4XQ' = \lambda Q$.
Le coefficient en X^3 de Q est clairement égal à 1.
Puisque Q'' est de degré 1, il ne possède pas de terme de degré 3, et donc le coefficient en X^3 de $Q'' - 4XQ'$ est celui de $-4XQ'$, qui est -12.
Et donc par identification des coefficients de degré 3 dans la relation $Q'' - 4XQ' = \lambda Q$, il vient $\lambda = -12$.
Ainsi, on a bien $\boxed{Q'' - 4XQ' = -12Q.}$

> **Détails**
> Le terme en X^2 de Q' est $3X^2$, dérivée de X^3.

Autrement dit, Q est un vecteur propre de f, pour la valeur propre -12. Comme de plus, il est unitaire, c'est forcément

$$H_3 = X^3 - \frac{3X}{4} = X\left(X^2 - \frac{3}{4}\right) = X\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Les racines de $H_3'' - 4XH_3' = -12H_3$ sont alors $0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc les points critiques de V sont parmi

$$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right).$$

Inversement, si (α,β,γ) est l'un des six points précédemment évoqués, alors

$$Q = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = H_3.$$

Et donc $Q'' - 4XQ' = -12H_3$, qui possède bien α,β et γ comme racines. Donc par la question 3.a, (α,β,γ) est un point critique de V.
Et donc $\boxed{V \text{ possède six points critiques, qui ont été listés ci-dessus.}}$

PROBLÈME

Partie I : Résultats préliminaires

1. **Étude d'une suite.**

1.a. Il s'agit de calculer la somme à l'aide d'une boucle, puis de lui retirer $\ln(n)$.

```
function u = suite(n)
        u = 0
        for i=1 :n
                u = u+1/i
        end
        u = u-log(n)
endfunction
```

1.b. On a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - \ln(n+1) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \ln(n) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.
\end{aligned}$$

> **o / $\sim$**
> Rappelons que $u_n \sim v_n$ si et seulement si
> $$u_n = v_n + o(v_n).$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente, d'après le critère de comparaison pour les séries à termes de signe constant, on en déduit que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

Mais pour $n \in \mathbf{N}^*$, la somme partielle d'ordre n de cette série est

$$\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{i=2}^{n+1} u_i - \sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+1} - u_1.$$

Puisque la série converge, la suite de ses sommes partielles converge également, et donc $(u_{n+1} - u_1)_n$ converge. C'est donc que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge.}}$

> **Pour la culture**
> La limite de cette suite est souvent notée γ et est appelée constante d'Euler.

1.c. Il s'agit de la suite des sommes partielles de la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{i^2}$.
Et donc[3] c'est une suite convergente.

[3] C'est la **définition** de la convergence d'une série.

2. **Loi de Gumbel.**

2.a. La fonction F_Z est continue sur $\mathbf{R}$ par composition de fonctions continues, et donc en particulier continue à droite en tout point. Mieux : elle est même $\mathscr{C}^1$.
Elle est croissante car sa dérivée, qui est $t \mapsto e^{-t}e^{-e^{-t}}$, est positive sur $\mathbf{R}$.
Enfin, on a $\lim\limits_{t\to-\infty} F_Z(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} F_Z(t) = e^0 = 1$.
Donc F_Z est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z.
Et puisque nous avons déjà mentionné que F_Z est continue sur $\mathbf{R}$, et même $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, $\boxed{Z \text{ est une variable à densité.}}$
Une densité en est par exemple $\boxed{F_Z' : t \mapsto e^{-t-e^{-t}}.}$

2.b. Il est évident[4] que W est à valeurs strictement positives, et donc pour $x \leqslant 0$, $P(W \leqslant x) = 0$.
Pour $x > 0$, on a

[4] En raison de la présence de l'exponentielle.

$$P(W \leqslant x) = P\left(e^{-Z} \leqslant x\right) = P(-Z \leqslant \ln(x)) = P(Z \geqslant -\ln(x)) = 1 - F_Z(\ln(x)) = 1 - e^{-x}.$$

Nous reconnaissons alors la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1 : $\boxed{W \hookrightarrow \mathscr{E}(1).}$

2.c. La fonction $x \mapsto (\ln x)^k e^{-x}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, puisque $(\ln(x))^k \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$, il vient $(\ln x)^k e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o(xe^{-x})$.
Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ est convergente, puisque nous savons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \Gamma(2)$ est convergente.
On en déduit donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\ln x)^k e^{-x}\,dx$ converge. Puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive, la convergence est équivalent à la convergence absolue.

Au voisinage de 0, on a $x^{1/2}(\ln x)^k e^{-x} \underset{x\to 0}{\sim} x^{1/2}(\ln(x))^k \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
Et donc $(\ln x)^k e^{-x} \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
Puisque l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^k e^{-x}\,dx$.
D'autre part, $x \mapsto (\ln x)^k e^{-x}$ est de signe constant[5] sur $]0,1]$, et donc la convergence de l'intégrale est équivalente à la convergence absolue.

[5] Il dépend de la parité de k, mais pas de t.

Et donc nous venons de prouver que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln x)^k e^{-x}\,dx \text{ est absolument convergente.}}$

2.d. Par le théorème de transfert, Z admet un moment d'ordre k si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t-e^{-t}}\,dt$ converge absolument.
La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$, et strictement décroissante, donc le théorème de changement de variable s'applique.
Posons alors $x = e^{-t} \Leftrightarrow t = -\ln(x)$, de sorte que $dt = -\dfrac{dx}{x}$. De plus, lorsque $t \to -\infty$, $x \to +\infty$ et lorsque $t \to +\infty$, $x \to 0$.
Le théorème de changement de variable nous garantit alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t-e^{-t}}\,dt$ et $\displaystyle\int_{+\infty}^{0} (-\ln(x))^k x e^{-x} \frac{-dx}{x} = \int_0^{+\infty} (-\ln x)^k e^{-x}\,dx$ sont de même nature, et en cas de convergence, sont égales.
Or nous avons prouvé à la question précédente que cette seconde intégrale est convergente, et donc $E(Z^k)$ existe, et

$$\boxed{E(Z^k) = \int_0^{+\infty} (-\ln x)^k e^{-x}\,dx.}$$

CV absolue

Le théorème de changement de variable ne dit rien de la convergence absolue.
En réalité, en remplaçant la fonction intégrée par sa valeur absolue, on montre aisément que l'intégrale avant changement de variable converge absolument si et seulement si l'intégrale après changement de variable converge absolument.

Partie II : Étude de la variable X_r.

3. Étude du cas $r = 3$.

3.a. L'événement $[Y_2 > n]$ est réalisé si et seulement si il faut strictement plus de n tirages pour obtenir deux numéros différents. C'est le cas si et seulement si les n premiers tirages ont fourni le même numéro.
Et donc $[Y_2 > n] = C_n$.
Nommons Z_i la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue lors du $i^{\text{ème}}$ tirage.
Alors $C_n = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{3}\bigcap_{i=1}^{n}[Z_i = r]$.
Et donc, par incompatibilité des événements de l'union, et indépendance des Z_i,

$$P(C_n) = \sum_{k=1}^{3} P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[Z_i = k]\right) = \sum_{k=1}^{r}\prod_{i=1}^{n} P(Z_i = k) = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \boxed{\frac{1}{3^{n-1}}}.$$

Enfin, puisque Y_2 est à valeur entières, pour tout $n \geqslant 2$,

$$P(Y_2 = n) = P(Y_2 > n-1) - P(Y_2 > n) = \frac{1}{3^{n-2}} - \frac{1}{3^{n-1}} = \boxed{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}}.$$

Remarque

Cela ressemble beaucoup à une loi géométrique de paramètre $2/3$, si ce n'est qu'on a un $n-2$ au lieu d'un $n-1$. Ce n'est pas une grosse surprise : Y_2 compte le nombre d'essais, après le premier, avant d'obtenir une boule différente du premier, ce qui se produit avec proba $\frac{2}{3}$. Donc si on ajoute le premier essai,

$$Y_2 + 1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{2}{3}\right).$$

3.b. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[Y_2 = k],\ k \geqslant 2\}$.
Il vient alors

$$\begin{aligned} P(Y_3 - Y_2 = n) &= \sum_{k=2}^{+\infty} P([Y_3 - Y_2 = n] \cap [Y_2 = k]) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} P([Y_3 - k = n] \cap [Y_2 = k]) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} P([Y_3 = n+k] \cap [Y_2 = k]). \end{aligned}$$

On a de plus, $P([Y_3 = n+k] \cap [Y_2 = k]) = P_{[Y_2=k]}P(Y_3 = n+k)$.
Or, cette probabilité conditionnelle est la probabilité que les tirages $k+1, k+2, \dots, k+n-1$ donnent une boule parmi les deux déjà sorties précédemment, ce qui se produit avec probabilité $\frac{2}{3}$, et que le tirage $n+k$ donne la troisième boule, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{3}$.
Et donc[6]

$$P([Y_3 = n+k] \cap [Y_2 = k]) = P(Y_2 = k)\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3} = \frac{1}{3^{k-1}}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

[6] Par indépendance des tirages successifs.

On en déduit donc que

$$P(Y_3 - Y_2 = n) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{3^{k-1}}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{3^{k-1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{3^i} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

On reconnaît alors une loi géométrique : $\boxed{Y_3 - Y_2 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right).}$

4. Loi de $Y_{i+1} - Y_i$.

4.a. Pour obtenir i boules portant des numéros différents, il faut au moins i essais. Et il est évident qu'il n'y a pas de limite au nombre d'essais nécessaires, puisque pour tout n, les n premiers tirages peuvent donner la boule numéro 1.
Donc $Y_i(\Omega) = \mathbf{N} \setminus \{1, 2, \dots, i-1\}$.

De plus, $Y_{i+1} - Y_i$ représente le nombre de tirages, une fois qu'on a i boules différentes, pour obtenir une boule portant un numéro non encore obtenu. Il faut au moins un tirage pour que ceci se produise, mais il n'y a pas de limite au nombre de tirages nécessaires, donc $(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbf{N}^*$.

4.b. Commençons par noter que

$$\begin{aligned} P_{[Y_i=k]}(Y_{i+1} - Y_i = n) &= \frac{P([Y_i = k] \cap [Y_{i+1} - Y_i = n])}{P(Y_i = k)} \\ &= \frac{P([Y_i = k] \cap [Y_{i+1} = n+k])}{P(Y_i = k)} = P_{[Y_i=k]}(Y_{i+1} = n+k). \end{aligned}$$

C'est le même principe qu'à la question 3.b : sachant que $[Y_i = k]$ est réalisé, alors $[Y_{i+1} = n+k]$ est réalisé si et seulement si les tirages $k+1, k+2, \dots, n+k-1$ donnent des boules qui ne sont pas parmi les i déjà précédemment obtenues, et si le tirage $n+k$ donne une nouvelle boule.
Et donc, par indépendance des tirages successifs,

$$\boxed{P_{[Y_i=k]}(Y_{i+1} - Y_i = k) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{i}{r}\right).}$$

Rédaction
Cette rédaction n'est pas tout à fait satisfaisante, mais on sent bien que si on commence à nommer des événements pour essayer de faire les choses correctement, on ne s'en sortira pas. Et donc il faut aussi accepter de se contenter d'un peu d'intuition probabiliste.

4.c. Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[Y_i = k],\ k \geqslant i\}$, on a

$$P(Y_{i+1} - Y_i = n) = \sum_{k=i}^{+\infty} P(Y_i = k) P_{[Y_i=k]}(Y_{i+1} - Y_i = n)$$

$$= \sum_{k=i}^{+\infty} P(Y_i = k) \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right)$$
$$= \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right) \underbrace{\sum_{i=k}^{+\infty} P(Y_i = k)}_{=1}$$
$$= \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right).$$

Ainsi, $\boxed{Y_{i+1} - Y_i \text{ suit la loi géométrique de paramètre } 1 - \frac{i}{r}.}$
Et donc en particulier,

$$E(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{1}{1 - \frac{i}{r}} = \boxed{\frac{r}{r-i}} \text{ et } V(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{\frac{i}{r}}{(1 - \frac{i}{r})^2} = \boxed{\frac{ir}{(r-i)^2}.}$$

5. Espérance et variance de X_r.

5.a. On a $X_r = Y_r$. Mais d'autre part,

$$\sum_{i=1}^{r-1} (Y_{i+1} - Y_i) = \sum_{i=1}^{r-1} Y_{i+1} - \sum_{i=1}^{r-1} Y_i = Y_r - Y_1 = Y_r - 1$$

et donc $X_r = Y_r = Y_r - 1 + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} (Y_{i+1} - Y_i)$.
Par linéarité de l'espérance, il vient donc

$$E(X_r) = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} E(Y_{i+1} - Y_i) = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{r}{r-i} = r \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{r-i} = \boxed{r \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k}.}$$

Chgt d'indice
On a posé $k = r - i$.

Et par indépendance des $Y_{i+1} - Y_i$, il vient

$$V(Y_r) = \underbrace{V(1)}_{=0} + \sum_{i=1}^{r-1} V(Y_{i+1} - Y_i) = \sum_{i=1}^{r-1} \frac{ri}{(r-i)^2}$$
$$= \sum_{k=1}^{r-1} \frac{r(r-k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{r} \frac{r(r-k)}{k^2}$$
$$= \boxed{r^2 \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2} - r \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k}.}$$

Indépendance
Bien qu'elle soit difficile à prouver, l'indépendance de $Y_{i+1} - Y_i$ est assez intuitive. En effet, $Y_{i+1} - Y_i$ représente le nombre de tirages nécessaires après l'obtention de la $i^{\text{ème}}$ boule pour obtenir la $(i+1)^{\text{ème}}$. Mais par indépendance des tirages, le nombre d'essais nécessaires est indépendant du nombre d'essais qui ont été nécessaires pour obtenir les i premières boules.

5.b. À la question 1, nous avons prouvé qu'il existe un réel α tel que

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha \Leftrightarrow u_n = \alpha + \underset{n \to +\infty}{o}(1).$$

Et donc $E(X_r) = r(u_r + \ln(r)) = r\left(\alpha + \underset{r \to +\infty}{o}(1) + \ln(r)\right) = \boxed{r\ln(r) + \alpha r + \underset{r \to +\infty}{o}(r).}$

D'autre part, on a $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = u_n + \ln(n)$, et puisque (u_n) converge, $u_n = \underset{n \to +\infty}{o}(\ln n)$.

Et donc $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln(n) + \underset{n \to +\infty}{o}(\ln n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$.

On en déduit donc que $r \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i} \underset{r \to +\infty}{\sim} r\ln(r)$.

D'autre part, il existe un réel β tel que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \beta$, et donc $r^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} r^2\beta$.

Puisque $\ln r = \underset{r \to +\infty}{o}(r^2)$, on en déduit que

$$V(X_r) = r^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} + \underset{r \to +\infty}{o}(r^2) \underset{r \to +\infty}{\sim} r^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} \underset{r \to +\infty}{\sim} \boxed{\beta r^2.}$$

Partie III : Loi de X_r et de sa déviation asymptotique par rapport à sa moyenne.

6. Loi de X_r.

6.a. Avec les notations précédentes, on a

$$A_{k,m} = [Z_1 \neq k] \cap [Z_2 \neq k] \cap \cdots \cap [Z_m \neq k].$$

Par indépendance des Z_i, il vient donc

$$P(A_{k,m}) = \prod_{i=1}^{m} P(Z_i \neq k) = \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{r-1}{r}\right) = \boxed{\left(\frac{r-1}{r}\right)^m.}$$

6.b. À chaque tirage, la probabilité de n'obtenir aucun des k numéros choisis est $1 - \frac{k}{r}$.

Et donc par indépendance des tirages, la probabilité souhaitée est $\boxed{\left(1 - \frac{k}{r}\right)^m.}$

6.c. L'événement $[X_r > m]$ est réalisé si et seulement si l'un **au moins** des r numéros n'est pas sorti lors des m premiers tirages.
Donc si et seulement si l'un des événements $A_{1,m}, A_{2,m}, \ldots, A_{r,m}$ est réalisé.
Et donc $\boxed{[X_r > m] = A_{1,m} \cup A_{2,m} \cup \cdots \cup A_{r,m}.}$

En particulier, il vient

$$\begin{aligned}
P(X_3 > m) &= P(A_{1,m} \cup A_{2,m} \cup A_{3,m}) = P\left((A_{1,m} \cup A_{2,m}) \cup A_{3,m}\right)\\
&= P(A_{1,m} \cup A_{2,m}) + P(A_{3,m}) - P\left((A_{1,m} \cup A_{2,m}) \cap A_{3,m}\right)\\
&= P(A_{1,m}) + P(A_{2,m}) - P(A_{1,m} \cap A_{2,m}) + P(A_{3,m}) - P\left((A_{1,m} \cap A_{3,m}) \cup (A_{2,m} \cap A_{3,m})\right)\\
&= P(A_{1,m}) + P(A_{2,m}) - P(A_{1,m} \cap A_{2,m}) + P(A_{3,m}) - P(A_{1,m} \cap A_{3,m}) - P(A_{2,m} \cap A_{3,m}) + P(A_{1,m} \cap A_{2,m} \cap A_{3,m})\\
&= \left(P(A_{1,m}) + P(A_{2,m}) + P(A_{3,m})\right) - \left(P(A_{1,m} \cap A_{2,m}) + P(A_{1,m} \cap A_{3,m}) + P(A_{2,m} \cap A_{3,m})\right) + P(A_{1,m} \cap A_{2,m} \cap A_{3,m})\\
&= 3\left(1 - \frac{1}{3}\right)^m - 3\left(1 - \frac{2}{3}\right)^m + 0.
\end{aligned}$$

Détails
Ces probabilités sont celles qui ont été calculées en 6.b.

7. Comportement de X_r au delà de sa moyenne.

7.a. Pour $m = 1$, la formule est évidente, c'est même une égalité !
Supposons que pour toute famille $(D_1, \ldots, D_m)$ de m événements, on ait

$$P(D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_m) \leqslant P(D_1) + \cdots + P(D_m)$$

et soit $(C_1, \ldots, C_{m+1})$ une famille de $m+1$ événements. Alors

$$\begin{aligned}
P(C_1 \cup \cdots \cup C_{m+1}) &= P\left((C_1 \cup \cdots \cup C_m) \cup C_{m+1}\right)\\
&= P(C_1 \cup \cdots \cup C_m) + P(C_{m+1}) - P((C_1 \cup \cdots \cup C_m) \cap C_{m+1})\\
&\leqslant P(C_1 \cup \cdots \cup C_m) + P(C_{m+1})\\
&\leqslant P(C_1) + \cdots + P(C_m) + P(C_{m+1}).
\end{aligned}$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Hypothèse de récurrence.

Donc la formule est encore vraie pour une famille de $m+1$ événements, et donc est vraie pour toute famille finie d'événements.

7.b. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbf{R}$. Et donc est située sous ses tangentes. Or, la tangente en 0 est la droite d'équation $y = x+1$, de sorte que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R},\ e^x \leqslant 1 + x.}$

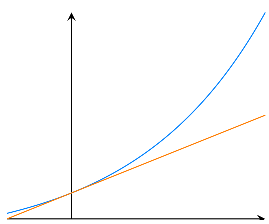


Figure 1– La fonction exponentielle et sa tangente en 0.

On a donc, pour $m \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![1, m]\!]$, $P(A_{k,m}) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^m$.

Appliquons l'inégalité précédente avec $x = -\frac{1}{r}$, de sorte que

$$1 + x = 1 - \frac{1}{r} \leqslant e^{-\frac{1}{r}}.$$

En élevant cette inégalité à la puissance m, il vient donc

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right)^m \leqslant \left(e^{-\frac{1}{r}}\right)^m = e^{-\frac{m}{r}} \Leftrightarrow \boxed{P(A_{k,m}) \leqslant e^{-\frac{m}{r}}.}$$

7.c. On a $[X_r > M_r] = [M_r < X_r \leqslant (1+\varepsilon) r \ln(n)] \cup [X_r > (1+\varepsilon) r \ln(n)]$.
Or, X_r ne prend que des valeurs entières, et par définition de M_r, il n'y a pas d'entier dans l'intervalle $]M_r, (1+\varepsilon) r \ln(n)]$.
Autrement dit, $[M_r < X_r \leqslant (1+\varepsilon) r \ln(r)] = \emptyset$, de sorte que $\boxed{[X_r > M_r] = [X_r > (1+\varepsilon) r \ln(r)].}$

On en déduit que $P(X_r > (1+\varepsilon) r \ln(r)) = P(X_r > M_r)$.
Mais d'après les questions 6.c et 7.a,

$$P(X_r > M_r) = P(A_{1,M_r} \cup A_{2,M_r} \cup \cdots \cup A_{r,M_r}) \leqslant P(A_{1,M_r}) + \cdots + P(A_{r,M_r}).$$

En utilisant la question 7.b, on a donc

$$P(X_r > M_r) \leqslant r \exp\left(-\frac{M_r}{r}\right).$$

Mais $M_r > (1+\varepsilon) r \ln(r) - 1$, donc

$$\exp\left(-\frac{M_r}{r}\right) \leqslant \exp\left((1+\varepsilon)\ln(r) + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^{1+\varepsilon}} \exp\left(\frac{1}{r}\right) \leqslant \frac{1}{r^{1+\varepsilon}} e^1.$$

Et donc finalement

$$P(X_r > (1+\varepsilon) r \ln(r)) = P(X_r > M_r) \leqslant r \frac{1}{r^{1+\varepsilon}} e \leqslant \boxed{\frac{e}{r^\varepsilon}.}$$

8. Distribution de X_r autour de sa moyenne.

8.a. Puisque $r\ln(r) + rt \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow}$, il existe $r_0(t)$ tel que pour $r \geqslant r_0(t)$, $r\ln(r) + rt \geqslant 1$, et donc[7]

$$\boxed{\forall r \geqslant r_0(t),\ m_r \geqslant 1.}$$

[7] Un réel supérieur à 1 possède une partie entière supérieure à 1.

On a alors, toujours pour $r \geqslant r_0(t)$,

$$P(Z_r > t) = P\left(\frac{X_r - r\ln(r)}{r} > t\right) = P(X_r > r\ln(r) + rt)$$

et X_r étant à valeurs entières, on prouve comme à la question 7.c que

$$P(Z_r > t) = P(X_r > r\ln(r) + rt) = P(X_r > m_r).$$

8.b. Puisque $\frac{k}{r} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) = -\frac{k}{r} - \frac{k^2}{2r^2} + \underset{r\to+\infty}{o}\left(\frac{k^2}{r^2}\right) = -\frac{k}{r} - \frac{k^2}{2r^2} + \underset{r\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Et donc

$$m_r \ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) = -\frac{m_r k}{r} - \frac{m_r k^2}{2r^2} + \underset{r\to+\infty}{o}\left(\frac{m_r}{r^2}\right).$$

Mais $m_r \underset{r\to+\infty}{\sim} r\ln(r) + rt$ et $rt = \underset{r\to+\infty}{o}(r\ln r)$, de sorte que $m_r \underset{r\to+\infty}{\sim} r\ln(n)$.

On en déduit que $\frac{m_r}{r^2} \underset{r\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(r)}{r} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc

$$m_r \ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) = -\frac{k m_r}{r} + \underset{r\to+\infty}{o}(1).$$

Enfin, par définition d'une partie entière, $0 \leqslant m_r - r\ln(r) - rt < 1$ donc $0 \leqslant \frac{m_r - r\ln(r) - rt}{r} < \frac{1}{r}$.

Par le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{m_r - r\ln(r) - rt}{r} = 0$ et donc

$$\frac{m_r}{r} = \frac{m_r - r\ln(r) - rt}{r} + \ln(r) + t = \ln(r) + t + \underset{r\to+\infty}{o}(1).$$

Nous avons donc enfin prouvé que

$$\boxed{m_r \ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) = -k\ln(r) - kt + \underset{r\to+\infty}{o}(1).}$$

Détails

Lorsque $x \to +\infty$,

$$\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$

Pour le prouver, le plus simple est sûrement de revenir à la définition de la partie entière :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

et d'utiliser un théorème des gendarmes.

$o(1)$

Rappelons que la notation $o(1)$ désigne toute suite de limite nulle.
En effet, on a

$$u_n = o(1) \Leftrightarrow \lim \frac{u_n}{1} = 0.$$

8.c. C'est très classique : par définition

$$\binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!} = \frac{r(r-1)\cdot(r-k+1)}{k!}.$$

Or le numérateur est un polynôme de degré k en r, de coefficient dominant égal à 1 : lorsque $r \to +\infty$, il est équivalent à r^k.

Et donc $\boxed{\binom{r}{k} \underset{r\to+\infty}{\sim} \frac{r^k}{k!}.}$

Nous avons

$$\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m_r} = \exp\left(m_r \ln\left(1-\frac{k}{r}\right)\right) = \exp\left(-k\ln(r) - kt\right)\exp(o(1))$$

$$\underset{r\to+\infty}{\sim} \exp(-k\ln(r) - kt) = \frac{1}{r^k}\exp(-kt).$$

Détails

Puisque $o(1)$ tend vers 0, $\exp(o(1))$ tend vers 1.

Et par conséquent,

$$\binom{r}{k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m_r} \underset{r\to+\infty}{\sim} \frac{r^k}{k!}\frac{1}{r^k}\exp(-kt) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{\frac{e^{-kt}}{k!}.}$$

8.d. On a donc, pour $t \in \mathbf{R}$ et pour $r \geqslant r_0(t)$,

$$P(Z_r \leqslant t) = 1-P(Z_r > t) = 1-P(X_r > m_r) = 1-\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\binom{r}{k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m_r} = 1-\sum_{k=1}^{r-1}(-1)^{k-1}\binom{r}{k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{m_r}.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+\infty} P(Z_r \leqslant t) &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{\exp(-kt)}{k!}\\ &= 1 + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\exp(-kt)}{k!} - 1\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(-\exp(-t)\right)^k}{k!}\\ &= \exp\left(-\exp(-t)\right) = F_Z(t).\end{aligned}$$

On ajoute et on retire le terme correspondant à $k = 0$.

Somme d'une série exponentielle.

Et donc nous venons de prouver que $\boxed{Z_r \xrightarrow{\mathscr{L}} Z.}$

ECRICOME 2009

Exercice 1

Sujet : Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : diagonalisation, produits scalaires, matrices et endomorphismes symétriques

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Modifications apportées au sujet d'origine : la trace est désormais au programme, sa définition et ses propriétés ont été enlevées de l'énoncé.

Commentaires : très joli, mais assez théorique et plutôt long. On retrouve le même thème, un peu plus détaillé dans le problème 2 de Lyon 2014.

$\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Pour tout élément $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de A et ${}^tA$ la transposée de A.
Pour toutes matrices M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on pose :

$$\langle M|N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}n_{i,j}$$

où $m_{i,j}$ (resp. $n_{i,j}$) désigne le coefficient de M (resp. N) situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne.
Soit A une matrice symétrique, on considère :

- l'application Φ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\Phi_A(M) = AM - MA$.
- l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ formé des valeurs propres de A.
- l'ensemble $\mathrm{Sp}(\Phi_A)$ formé des valeurs propres de Φ_A.
- l'ensemble $\Gamma = \{\lambda - \mu,\ (\lambda,\mu) \in \mathrm{Sp}(A)^2\}$ formé des différences de deux valeurs propres quelconques de A.

Le but de cet exercice est d'établir que les deux propriétés suivantes sont valables pour toute matrice symétrique à coefficients réels A :

- ⋆ Φ_A est un endomorphisme diagonalisable,
- ⋆ les valeurs propres de Φ_A forment l'ensemble Γ, c'est-à-dire que $\mathrm{Sp}(\Phi_A) = \Gamma$.

Partie I : Étude d'un cas particulier.

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on admet les deux propriétés suivantes :

- Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$,
- la famille (V_1, V_2, V_3, V_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ où l'on a posé :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que la matrice T de l'endomorphisme Φ_A dans la base (V_1, V_2, V_3, V_4) s'écrit

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   En déduire la diagonalisabilité de T.
2. Vérifier que $T^3 = 4T$. Qu'en déduit-on sur les valeurs propres de T ?
3. Déterminer une base de l'espace propre associé à la valeur propre 0 de la matrice T.
4. Calculer TX_1 et TX_2, où $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
5. Expliciter alors une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $T = PDP^{-1}$ (on ne demande pas le calcul de P^{-1}).

Partie II : Réduction de Φ_A dans le cas général.
On revient désormais au cas général, A étant une matrice symétrique quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

6. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
7. Prouver que l'application $(M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))^2 \mapsto \langle M|N\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
8. Établir que, pour toutes matrices M, N appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a :
$$\langle \Phi_A(M)|N\rangle = \langle M|\Phi_A(N)\rangle.$$
En déduire que Φ_A est un endomorphisme diagonalisable.
9. Soient
   - $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ,
   - $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.

   On pose alors
$$M_{X,Y} = X^tY \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$
   a. Justifier que $M_{X,Y} \neq 0$, puis que ${}^tYA = \mu{}^tY$.
   b. Établir que $\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda - \mu)M_{X,Y}$ puis que $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(\Phi_A)$.
10. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α.
   a. On suppose que pour tout vecteur propre Z de A, on a $MZ = 0$.
   Montrer alors que $M = 0$.
   En déduire qu'il existe au moins un vecteur propre Z_0 de A tel que $MZ_0 \neq 0$.
   On note μ la valeur propre associée à Z_0.
   b. En revenant à l'expression de $\Phi_A(M)$, justifier que MZ_0 est un vecteur propre de A pour une valeur propre dont on précisera l'expression à l'aide de α et μ.
   c. Conclure.

Exercice 2

Sujet : Étude d'une fonction définie par une intégrale. **Moyen**
Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★
Thèmes du programme abordés : intégrales impropres
Commentaires : un très bon exercice pour s'entraîner à la manipulation des intégrales impropres (étude de convergence, intégration par parties, changement de variable).

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par par la formule suivante :
$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,dt.$$

1. **Domaine de définition de f :**
   a. Justifier que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge, et donner sa valeur.
   b. Soit x un réel fixé. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,dt$.

   Par conséquent, f est définie sur $\mathbf{R}$, et elle est clairement paire. On va donc l'étudier sur $]0,+\infty[$.
2. **Branche infinie de la courbe représentative de f :**
   a. Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul :
$$xe^t \leqslant \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}.$$
   b. Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a :
$$x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}.$$
   c. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} |x - f(x)| = 0$.
   On dit alors que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f.
3. **Dérivabilité et monotonie de f :**

a. À l'aide du changement de variable $u = xe^t$, que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :

$$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\, du.$$

b. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif par :

$$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

c. Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :

$$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

4. **Étude locale de f et f' en 0 :**

a. Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :

$$\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\, du$$

et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\, du$ est convergente.

b. À l'aide des questions précédentes, démontrer alors que l'on a :

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x) \text{ et } f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$

c. En déduire que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

Problème

Sujet : Étude d'une urne bicolore à la composition évolutive et à nombre de boules fixé. Moyen

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : intéressant pour manipuler un peu des probas discrètes, et notamment des formules des probabilités totales. Mieux vaut être solide en calcul pour aborder la question 10.

Dans tout le problème, a et b désignent des entiers naturels non nuls et l'on note $N = a + b$.
On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au «hasard» et «avec remise» d'une boule, en procédant de la façon suivante :

- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant,
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

Partie I.
Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Préciser soigneusement l'ensemble des valeurs prises par la variable Y.
2. Pour tout entier k compris entre 1 et $b+1$, calculer la valeur de la probabilité $P(Y = k)$.
3. Vérifier que

$$P(Y = b+1) = \frac{b!}{N^b},$$

et que, pour tout entier k compris entre 1 et b, la formule suivant est vraie :

$$P(Y = k) = \frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k}.$$

4. Soient M un entier naturel non nul et $a_0, a_1, \ldots, a_M$ une famille de réels. Établir que :

$$\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k\right) - Ma_M.$$

5. En déduire que $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!N^k}$.

Partie II.

Dans cette partie on note :

- pour tout entier $n \geqslant 1$, q_n la probabilité de l'événement, noté N_n : «la n-ième boule tirée est noire».
- pour tout entier $n \geqslant 0$, X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages. Par convention, $X_0 = 0$.
- pour tous entiers $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$, $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement : «au cours des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules noires».

On remarquera que $p_{0,0} = 1$ et que $p_{n,k} = 0$ si $k > n$ ou si $k > b$.

6. Soit $n \in \mathbf{N}$, calculer $p_{n,0}$, puis $p_{n,n}$. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}$.

7. Démontrer la formule suivante, valable pour tous les entiers naturels n et k non nuls :

$$(\mathscr{A}) : N \cdot p_{n,k} = (a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1}.$$

8. **Calcul de l'espérance de X_n.**

   a. À l'aide de la formule $(\mathscr{A})$ obtenue dans la question 7, démontrer la formule pour $n \geqslant 1$:

   $$N \cdot E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} [b + k(N-1)]\, p_{n-1,k}$$

   puis justifier que :

   $$E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}.$$

   b. À l'aide de la formule ci-dessus, écrire une fonction `Scilab` fournissant le calcul de $E(X_{2009})$ lorsque $b = 10$ et $N = 100$.

   c. En utilisant la dernière formule établie à la question 8.a, prouver que, pour tout entier naturel n, on a :

   $$E(X_n) = b\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

9. **Calcul de q_n.**

   a. En utilisant une formule des probabilités totales, établir la formule suivante, valable pour tout entier naturel n :

   $$N \cdot q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (b-k)p_{n,k}.$$

   b. Pour tout entier naturel n, exprimer alors q_{n+1} en fonction de $E(X_n)$ et en déduire l'expression de q_{n+1} en fonction de n, b, N.

10. **Calcul de la variance de X_n.**

    On introduit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour tout entier naturel n par :

    $$u_n = E(X_n(X_n - 1)).$$

    a. À l'aide de la formule $(\mathscr{A})$ obtenue dans la question 7, montrer que l'on a :

    $$N \cdot u_n = \sum_{k=1}^{n-1} [k(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)k]\, p_{n-1,k}.$$

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait à la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right].$$

c. À l'aide d'une récurrence, démontrer que la formule suivante est valable pour tout entier naturel n :

$$u_n = b(b-1)\left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

d. Donner la valeur de $V(X_n)$ puis préciser sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

ECRICOME 2009 : Corrigé

Exercice 1

Partie I : Étude d'un cas particulier.

1. Des calculs de produits matriciels nous donnent

$$\Phi_A(V_1) = AV_1 - V_1A = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = -V_2 + V_3.$$

Et de même,

$$\Phi_A(V_2) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = -V_1 + V_4,\ \Phi_A(V_3) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} = V_1 - V_4,\ \Phi_A(V_4) = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} = V_2 - V_3.$$

Et donc

$$\mathrm{Mat}_{(V_1,V_2,V_3,V_4)}(\Phi_A) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc}\Phi_A(V_1) & \Phi_A(V_2) & \Phi_A(V_3) & \Phi_A(V_4)\end{array} \\ \begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\end{array} \begin{array}{c}V_1\\V_2\\V_3\\V_4\end{array}.$$

> **Remarque**
> (V_1, V_2, V_3, V_4) est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

2. Il s'agit encore d'un simple calcul :

$$T^2 = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & -2\\0 & 2 & -2 & 0\\0 & -2 & 2 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix},\ \text{puis } T^3 = \begin{pmatrix}0 & -4 & 4 & 0\\-4 & 0 & 0 & 4\\4 & 0 & 0 & -4\\0 & 4 & -4 & 0\end{pmatrix} = \boxed{4T.}$$

Ainsi, $X^3 - 4X = X(X-2)(X+2)$ est un polynôme annulateur de T.
On en déduit que $\mathrm{Sp}(T) \subset \{-2, 0, 2\}$.

> **Danger !**
> À ce stade, nous ne pouvons en dire plus sur les valeurs propres de T, et sûrement pas que 0, 2 et -2 sont tous trois valeurs propres de T.
> Nous savons juste que les valeurs propres sont parmi ses trois nombres, peut-être qu'aucun d'entre eux n'est valeur propre, peut-être le sont-ils les trois.

3. On a $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in E_0(T)$ si et seulement si

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}-y+z=0\\-x+t=0\\x-t=0\\y-z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=t\\y=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\y\\x\end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ est une famille génératrice de $E_0(T)$. Puisqu'elle est formée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre et donc est une base de $E_0(T)$.

4. Encore une fois, il s'agit de faire des calculs :

$$TX_1 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\-2\end{pmatrix}},\ \text{et } TX_2 = \boxed{\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\\2\end{pmatrix}}.$$

On a donc $TX_1 = 2X_1$ et $TX_2 = -2X_2$.
Puisque X_1 et X_2 sont non nuls, ce sont des vecteurs propres de T, et donc 2 et -2 sont valeurs propres de T.
De plus, à la question précédente, nous avons prouvé que $\dim E_0(T) = 2$.
Et donc on a

$$4 \geqslant \dim E_0(T) + \dim E_2(T) + \dim E_{-2}(T) \geqslant 2 + 1 + 1 = 4$$

de sorte que $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(T)} \dim E_\lambda(T) = 4$, et donc T est diagonalisable.

Et par conséquent, $\boxed{\Phi_A \text{ est également diagonalisable.}}$

5. Posons $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Alors P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ à la base de vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Par la formule de changement de base, on a donc $\boxed{T = PDP^{-1}.}$

Partie II : Réduction de Φ_A dans le cas général.

6. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\Phi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A = \lambda(AM - MA) + (AN - NA) = \lambda\Phi_A(M) + \Phi_A(N).$$

Donc Φ_A est linéaire, et elle est bien[1] à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$: c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

[1] Un produit de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est encore dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

7. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Alors

$$\langle M, N\rangle = \mathrm{tr}({}^tMN) = \mathrm{tr}({}^t({}^tMN)) = \mathrm{tr}({}^tNM) = \langle N, M\rangle.$$

Ainsi, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est symétrique.
Soient $M, N, P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\langle \lambda M + N|P\rangle = \mathrm{tr}({}^t(\lambda M + N)P) = \mathrm{tr}(\lambda {}^tMP + {}^tNP) = \lambda\mathrm{tr}({}^tMN) + \mathrm{tr}({}^tNP) = \lambda\langle M|P\rangle + \langle N|P\rangle.$$

Donc $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est linéaire à gauche, et donc, puisqu'elle est symétrique, c'est une forme bilinéaire symétrique.
Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Alors

$$\langle M, M\rangle = \mathrm{tr}({}^tMM) = \sum_{i=1}^n ({}^tMM)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m ({}^tM)_{i,j}M_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2.$$

Remarque

Ici le concepteur du sujet a été plutôt sympathique en donnant l'expression de $\langle M, N\rangle$ en fonction des $m_{i,j}$ et des $n_{i,j}$. Ce n'est pas toujours le cas et il faut savoir refaire ce calcul.

En particulier, $\langle M, M\rangle \geqslant 0$.
De plus, on a[2]

$$\langle M, M\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} = 0 \Leftrightarrow M = 0.$$

[2] Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul.

Ainsi, $\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$

8. Soient M, N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Alors

$$\langle \Phi_A(M)|N\rangle = \mathrm{tr}\left({}^t(AM - MA)N\right) = \mathrm{tr}({}^tMAN) - \mathrm{tr}(A{}^tMN).$$

D'autre part, on a

$$\langle M|\Phi_A(N)\rangle = \mathrm{tr}({}^tM(AN - NA)) = \mathrm{tr}({}^tMAN) - \mathrm{tr}({}^tMNA).$$

Mais on a

$$\mathrm{tr}({}^tMNA) = \mathrm{tr}(({}^tMN)A) = \mathrm{tr}(A{}^tMN).$$

Trace d'un produit

Nous savons que

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

et comme nous venons de le faire pour trois matrices, on peut prouver que la trace d'un produit de matrices ne dépend pas de l'ordre dans lequel on fait ce produit.

Et donc

$$\boxed{\langle M|\Phi_A(N)\rangle = \langle \Phi_A(M)|N\rangle.}$$

Ainsi, Φ_A est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Et donc $\boxed{\Phi_A \text{ est diagonalisable.}}$

9.a. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors

$$M_{X,Y} = X^tY = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \vdots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_2 \\ x_2y_1 & \dots & \dots & x_2y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & \dots & x_ny_n \end{pmatrix}.$$

Puisque X et Y sont des vecteurs propres, ils sont non nuls. Donc il existe i tel que $x_i \neq 0$ et j tel que $y_j \neq 0$.
Et alors, le coefficient (i,j) de X^tY est $x_iy_j \neq 0$, de sorte que $M_{X,Y} \neq 0$.
Puisque $AY = \mu Y$, en transposant cette relation, il vient $\boxed{{}^tY^tA = \mu^tY \Leftrightarrow {}^tYA = \mu^tY.}$

9.b. On a

$$\Phi_A(M_{X,Y}) = AM_{X,Y} - M_{X,Y}A = AX^tY - X^tYA = \lambda X^tY - X\mu^tY = (\lambda-\mu)X^tY = (\lambda-\mu)M_{X,Y}.$$

Ainsi, si $\alpha \in \Gamma$, il existe deux valeurs propres λ et μ de A telles que $\alpha = \lambda - \mu$.
Et alors si X et Y sont deux vecteurs propres respectivement associés à λ et μ, $M_{X,Y}$ est un vecteur propre de Φ_A, associé à la valeur propre $\alpha = \lambda - \mu$.
En particulier, $\alpha \in \mathrm{Sp}(\Phi_A)$ et donc $\boxed{\Gamma \subset \mathrm{Sp}(\Phi_A).}$

10.a. Puisque A est diagonalisable, il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de A. Notons $(Z_1, \dots, Z_n)$ une telle base.
Alors, pour tout $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $Z = \lambda_1 Z_1 + \dots + \lambda_n Z_n$.
Et alors $MZ = \sum_{i=1}^n \lambda_i MZ_i = 0$.
Ainsi, $MZ = 0$, pour tout $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$: $\boxed{M \text{ est la matrice nulle.}}$
Ceci contredit[3] le fait que M soit un vecteur propre de Φ_A, et donc, il existe au moins un vecteur propre Z_0 de A pour lequel $MZ_0 \neq 0$.

> **Explication**
> Si $MZ = 0$ pour tout $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, alors l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ qui à Z associe MZ est l'endomorphisme nul. Et donc sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}n$, $1(\mathbf{R})$, qui est M, est la matrice nulle.

[3] Un vecteur propre est non nul par définition.

10.b. On a $\Phi_A(M) = \alpha M$, soit $AM - MA = \alpha M$.
Et alors $AMZ_0 - MAZ_0 = \alpha MZ_0 \Leftrightarrow AMZ_0 - M\mu Z_0 = \alpha M_Z0 \Leftrightarrow A(MZ_0) = (\alpha+\mu)MZ_0$.
Autrement dit, MZ_0, qui est non nul, est un vecteur propre de A pour la valeur propre $\alpha + \mu$.

10.c. D'après ce qui précède, il existe une valeur propre λ de A telle que $\alpha + \mu = \lambda \Leftrightarrow \alpha = \lambda - \mu$.
Et donc toute valeur propre α de Φ_A est de la forme $\lambda - \mu$, où λ et μ sont deux éléments de $\mathrm{Sp}(A)$, donc $\alpha \in \Gamma$.
On a donc prouvé que $\mathrm{Sp}(\Phi_A) \subset \Gamma$ et l'inclusion réciproque ayant été prouvée à la question 9.b, on a $\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi_A) = \Gamma.}$

Exercice 2

1. Domaine de définition de f

1.a. Pour $A > 0$, on a

$$\int_0^A e^{-at}\,dt = \left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_0^A = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-aA}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}.$$

Donc $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{a}.}$

1.b. La fonction $t \mapsto e^{-2t}\sqrt{1+x^2t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc le seul éventuel problème de convergence est au voisinage de $+\infty$. Or, lorsque $t \to +\infty$, on a $1 + x^2e^{2t} \underset{t\to+\infty}{\sim} x^2e^{2t}$ et donc $\sqrt{1+x^2e^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{x^2e^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} |x|e^t$.
Et donc $e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-2t}e^t|x| \underset{t\to+\infty}{\sim} |x|e^{-t}$.

> **Détail**
> $e^{2t} = (e^t)^2$ et donc
> $$\sqrt{e^{2t}} = (e^{2t})^{1/2} = e^t.$$

Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge, par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,dt \text{ converge.}}$

2. Branche infinie de la courbe représentative de f

2.a. Soit $x>0$ et $t>0$. Alors $x^2e^{2t} \leqslant 1+x^2e^{2t}$, de sorte que $xe^t = \sqrt{x^2e^{2t}} \leqslant \sqrt{1+x^2e^{2t}}$.
D'autre part, on a $\left(xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}\right)^2 = x^2e^{2t}+1+\frac{e^{-2t}}{4x^2} \geqslant 1+x^2e^{2t}$, de sorte que par passage à la racine[4], il vient

$$\boxed{\sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}.}$$

[4] Pas besoin de valeur absolue en passant à la racine car tous les termes sont positifs.

2.b. En multipliant les trois termes de l'inégalité précédemment obtenue par e^{-2t}, il vient

$$\forall x>0, \forall t \geqslant 0,\ xe^{-t} \leqslant e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}} \leqslant xe^{-t} + \frac{e^{-3t}}{2x}.$$

Les trois termes de cet encadrement sont d'intégrale convergente sur $]0,+\infty[$. Par croissance de l'intégrale[5], on a donc

[5] Les trois termes sont d'intégrale convergente.

$$\int_0^{+\infty} xe^{-t}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,dt \leqslant x\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt + \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} e^{-3t}\,dt.$$

Mais en utilisant le résultat de la question 1.a, il vient alors

$$\boxed{x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}.}$$

2.c. On a $0 \leqslant f(x)-x \leqslant \frac{1}{6x}$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = 0$ et alors

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} |f(x)-x| = 0.}$$

3. Dérivabilité et monotonie de f

3.a. La fonction $t \mapsto xe^t$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, et de classe $\mathscr{C}^1$, donc le changement de variable est justifié. Notons que l'intégrale définissant f est convergente, donc l'intégrale obtenue après changement de variable l'est encore.
Lorsque $t\to 0$, alors $u\to x$, et lorsque $t\to+\infty$, alors $u\to+\infty$. On a alors $u = xe^t \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{u}{x}\right)$ et donc $dt = \frac{1}{x}\frac{x}{u}du = \frac{du}{u}$. Il vient donc

Méthode
Ne pas oublier que si on ne travaille pas sur un segment, il est important de vérifier la stricte monotonie du changement de variable.

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{x^2}{u^2}\sqrt{1+u^2}\frac{du}{u} = \boxed{x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du.}$$

3.b. Notons qu'on a

$$\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du = \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du - \int_1^{x}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du$$

Or, $x \mapsto \int_1^x \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du$ est une primitive[6], sur $]0,+\infty[$, de $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3}$, donc de classe $\mathscr{C}^1$.
On en déduit[7] donc que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et que sa dérivée est

[6] Et même **la** primitive qui s'annule en 1.

[7] $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du$ est une constante, qui ne dépend pas de x, donc sa dérivée est nulle.

$$f'(x) = 2x\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du - x^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3} = \boxed{\frac{2f(x)-\sqrt{1+x^2}}{x}.}$$

3.c. Soit $x > 0$ et $A > x$. Alors, en posant $g(u) = \sqrt{1+u^2}$ et $h(u) = -\dfrac{1}{2u^2}$, qui sont deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[x, A]$ avec $g'(u) = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ et $g'(u) = \dfrac{1}{u^3}$, une intégration par parties sur le segment $[x, A]$ nous donne

$$\int_x^A \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du = \left[-\frac{\sqrt{1+u^2}}{2u^2}\right]_x^A + \int_x^A \frac{du}{2u\sqrt{1+u^2}}\,du = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{\sqrt{1+A^2}}{2A^2} + \int_x^A \frac{du}{2u\sqrt{1+u^2}}.$$

Lorsque $A \to +\infty$, on a

$$\frac{\sqrt{1+A^2}}{2A^2} \underset{A\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{A^2}}{2A^2} \underset{A\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part, $\dfrac{1}{2u\sqrt{1+u^2}} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2u^{3/2}}$, de sorte que par comparaison à une intégrale de Riemann, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{du}{2u\sqrt{1+u^2}}\,du$ converge et donc

$$\lim_{A\to+\infty} \int_x^A \frac{du}{2u\sqrt{1+u^2}} = \int_x^{+\infty} \frac{du}{2u\sqrt{1+u^2}}.$$

On en déduit que

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du = \lim_{A\to+\infty} \int_x^A \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,du = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \int_x^{+\infty} \frac{du}{2u\sqrt{1+u^2}}.$$

Et donc, en multipliant par $2x^2$, $\boxed{2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}.}$

On en déduit que $f'(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$. La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u\sqrt{1+u^2}}$ est strictement positive sur $\mathbf{R}_+$, donc son intégrale sur $[x, +\infty[$ aussi. Puisqu'il en est de même de $\dfrac{1}{x}$, on en déduit que pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$, et donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbf{R}_+^*.}$

> **Convergence**
> Il n'est pas immédiat que l'intégrale
> $$\int_x^A \frac{du}{2u\sqrt{1+u^2}}$$
> admette une limite lorsque $A \to +\infty$, et donc il est impératif de vérifier que
> $$\int_x^{+\infty} \frac{du}{2u\sqrt{1+u^2}}$$
> converge avant de passer à la limite.

4. Étude locale de f et f' en 0

4.a. Soit $x > 0$ fixé, et soit $A > x$. Alors, en posant $g(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ et $h(u) = \ln u$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ avec $g'(u) = -\dfrac{u}{(1+u^2)^{3/2}}$ et $h'(u) = \dfrac{1}{u}$, une intégration par parties sur le segment $[x, A]$ nous donne

$$\int_x^A \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = \left[\frac{\ln(u)}{\sqrt{1+u^2}}\right]_x^A + \int_x^A \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du = \frac{\ln(A)}{\sqrt{1+A^2}} - \frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^A \frac{u\ln(u)}{\sqrt{1+u^2}}\,du.$$

Lorsque $A \to +\infty$, on a $\dfrac{\ln(A)}{\sqrt{1+A^2}} \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(A)}{A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

De plus, au voisinage de $+\infty$, on a $u^\alpha \dfrac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} \underset{u\to+\infty}{\sim} u^\alpha \dfrac{u\ln u}{u^3} \underset{u\to+\infty}{\sim} u^{\alpha-2}\ln u.$

En particulier, pour $\alpha = 3/2$, on a $u^{3/2}\dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que

$$\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}} = \underset{u\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u^{3/2}}\right).$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente[8], on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du$ converge.

Il en est donc de même de $\displaystyle\int_x^A \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du$, de sorte que lorsque $A \to +\infty$,

$$\int_x^A \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du.$$

> **Méthode**
> On souhaiterait prouver la convergence par comparaison à une série de Riemann, mais laquelle ? (On a peut-être remarqué que $\alpha = 2$ ne fonctionne pas).
> Pour trouver le bon α, on commence par écrire le quotient avec un α quelconque, puis on choisit α tel que le quotient tende vers 0.

[8] Car $\alpha = 3/2$.

On déduit donc de ce qui précède que

$$\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = \lim_{A\to+\infty} \int_x^A \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}\,du = \boxed{-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du.}$$

Une remarque concernant l'intégration par parties : on pourrait s'épargner une étude de convergence en remarquant que

$$\int_x^A \frac{u\ln(u)}{\sqrt{1+u^2}}\,du = \int_x^A \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} - \frac{\ln(A)}{\sqrt{1+A^2}} + \frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

et que $\dfrac{\ln(A)}{\sqrt{1+A^2}}$ et $\displaystyle\int_x^A \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ admettent tous deux[9] une limite lorsque $A\to+\infty$.
Et donc $\displaystyle\int_x^A \frac{u\ln(u)}{\sqrt{1+u^2}}\,du$ admet une limite lorsque $A\to+\infty$, de sorte que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{\sqrt{1+u^2}}\,du$ converge.
Le même raisonnement aurait pu être tenu à la question 3.c pour éviter de prouver la convergence de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{du}{2u\sqrt{1+u^2}}$.

Enfin, lorsque $u\to 0^+$, $\dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}} \underset{u\to0^+}{\sim} u\ln u \underset{u\to0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du$ est faussement impropre en 0, donc convergente.

Et donc[10] $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du \text{ converge}}$ également.

[9] L'intégrale admet une limite puisque nous savons déjà que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ converge.

[10] Nous avons déjà prouvé qu'elle convergeait au voisinage de $+\infty$.

4.b. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= x\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}\,du = -\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + x\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du \\ &= x\left(-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du\right). \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du$, qui est une constante, alors que $-\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x) \to +\infty$.

On en déduit que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du = \underset{x\to0^+}{o}\left(-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ et donc

$$-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln x.$$

Et donc $\boxed{f'(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -x\ln x.}$

Détails
Une fonction qui tend vers une constante est toujours négligeable devant une fonction qui tend vers $\pm\infty$ (écrire le quotient pour s'en convaincre).

o/ ∼
Rappelons que $f \sim g$ si et seulement si

$$f = g + o(g).$$

De même, en combinant les résultats des questions 3.c et 4.a, on a

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\left(-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,du\right).$$

Mais d'une part, nous savons[11] que le second terme est équivalent à $-\dfrac{x^2}{2}\ln x$.

Soit encore $f(x) = -\dfrac{x^2\ln x}{2} + o(x^2\ln x)$.
D'autre part,

$$\sqrt{1+x^2} - 1 = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right) - 1 = \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

de sorte que $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2} - \dfrac{1}{2} \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{x^2}{4}$.

Mais $\dfrac{x^2}{4} = \underset{x\to0^+}{o}(x^2\ln x)$ et donc on en déduit que $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2} - \dfrac{1}{2} = \underset{x\to0^+}{o}(x^2\ln x)$.

[11] C'est le calcul réalisé à la question précédente.

DL
On rappelle qu'une fonction est toujours équivalente au premier terme **non nul** de son développement limité.

Et donc

$$f(x)-\frac{1}{2} = -\frac{x^2\ln x}{2}+\underset{x\to 0^+}{o}\left(x^2\ln x\right)+\underset{x\to 0^+}{o}\left(x^2\ln x\right) = -\frac{x^2\ln x}{2}+\underset{x\to 0^+}{o}\left(x^2\ln x\right)\boxed{\underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln x}{2}}.$$

4.c. On a, par la question 1.a, $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}$ et donc

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-x\ln x}{2} = 0.$$

Donc f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = 0.}$

D'autre part, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -x\ln x = 0 = f'(0)$.

Donc f' est continue en 0. Puisque nous avions déjà prouvé que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[.}$

Problème

Partie I.

1. Il est évident qu'on peut obtenir une boule blanche dès le premier tirage. Dans le pire des cas, on commencera par tirer toutes les boules noires (qui sont au nombre de b), auquel cas après b tirages, l'urne ne contient que des boules blanches, de sorte que le $(b+1)^{\text{ème}}$ tirage donnera nécessairement une boule blanche.

Ainsi, on a déjà $Y(\Omega) \subset [\![1, b+1]\!]$.

Puisque l'énoncé nous demande une preuve soigneuse, soyons plus précis, et prouvons que pour tout $k \in [\![1, b+1]\!]$, Y peut prendre la valeur k.

C'est le cas si les $k-1$ premiers tirages donnent une boule noire, et que le $k^{\text{ème}}$ donne une boule blanche.

Et donc l'ensemble des valeurs que peut prendre Y est $\boxed{Y(\Omega) = [\![1, b+1]\!].}$

> **Inclusion**
> Ici, on a seulement prouvé une inclusion, mais pas encore une égalité. En effet, nous avons justifié que Y prend des valeurs entre 1 et $b+1$, mais pas que Y peut effectivement prendre les valeurs $2, 3, \dots, b$.

2. Notons N_k (respectivement B_k) l'événement «le $k^{\text{ème}}$ tirage donne une boule noire (resp. blanche)».

Alors $[Y = k] = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$.

Et donc, par la formule des probabilités composées,

$$P(Y=k) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)\cdots P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-2}}(N_{k-1})P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(B_k).$$

Or, $P(N_1) = \frac{b}{N}$, et pour $i \in [\![2, k-1]\!]$, $P_{N_1\cap\cdots\cap N_{i-1}}(N_i) = \frac{b-(i-1)}{N}$.

Enfin,

$$P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(B_k) = \frac{a+(k-1)}{N}.$$

On en déduit donc que

$$P(Y=k) = \frac{b}{N}\frac{b-1}{N}\cdots\frac{b-(k-1-1)}{N}\frac{a+k-1}{N} = \boxed{\frac{(a+k-1)b!}{N^k(b-k+1)!}.}$$

> **Détails**
> Si les $i-1$ premiers tirages ont donné une boule noire, il reste toujours N boules dans l'urne, dont $b-(i-1)$ sont noires.

> **Détails**
> L'urne contient toujours N boules, et en plus des a boules blanches initiales, il y en a $k-1$ qui ont été ajoutées lors des premiers tirages.

3. En particulier, pour $k = b+1$, on a

$$P(Y=b+1) = \frac{(a+b+1-1)b!}{N^{b+1}0!} = \frac{Nb!}{N^{b+1}} = \boxed{\frac{b!}{N^b}.}$$

Et pour $k \in [\![1, b]\!]$,

$$\begin{aligned}\frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k} &= \frac{b!\,(N-(b-k+1))}{(b-k+1)!N^k}\\ &= \frac{b!\,(a+b-(b-k+1))}{(b-k+1)!N^k}\\ &= \frac{(a+k-1)b!}{N^k(b-k+1)!} = P(Y=k).\end{aligned}$$

> **☠ Danger !**
> L'erreur à ne pas faire ici serait de penser que Y suit une loi géométrique.
> Si on attend bien le premier succès lors d'une répétition d'épreuves de Bernoulli, celles-ci ne sont pas indépendantes puisque le contenu de l'urne évolue au cours des tirages.

4. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1}-a_k) &= \sum_{k=1}^{M} ka_{k-1} - \sum_{k=1}^{M} ka_k \\
&= \sum_{i=0}^{M-1}(i+1)a_i - \sum_{k=1}^{M} ka_k \\
&= a_0 + \cancel{\sum_{i=1}^{M-1} ia_i} + \sum_{i=1}^{M-1} a_i - \cancel{\sum_{k=1}^{M-1} ka_k} - Ma_M \\
&= a_0 + \sum_{i=1}^{M-1} a_i - Ma_M \\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{M-1} a_k - Ma_M.}
\end{aligned}$$

5. Par définition de l'espérance, on a $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{b+1} kP(Y=k)$.

Mais alors, en prenant l'expression de $P(Y=k)$ obtenue à la question 3,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{b} k\left(\frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k}\right) + (b+1)\frac{b!}{N^b} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)!N^k}\right) - b\frac{b!}{(b-b)!N^b} + (b+1)\frac{b!}{N^b}. \\
&= \sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)!N^k} - \cancel{b\frac{b!}{N^b}} + \cancel{b\frac{b!}{N^b}} + \frac{b!}{N^b} \\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!N^k}.}
\end{aligned}$$

L'expression de la question 3 n'est pas valable pour $k = b+1$, donc on isole le dernier terme.

Question 4.

Partie II.

6. Avec les notations précédentes, on a $p_{n,0} = P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n)$.
Par la formule des probabilités composées, on a donc

$$p_{n,0} = P(B_1)P_{B_1}(B_2)\cdots P_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(B_n) = \frac{a}{N}\frac{a}{N}\cdots\frac{a}{N} = \left(\frac{a}{N}\right)^n.$$

Si $n > b$, alors $p_{n,n} = 0$ d'après la remarque faite dans l'énoncé.
Enfin, pour $k \leqslant n$, on a $p_{n,n} = P(N_1 \cap \cdots \cap N_n)$ et donc[12]

$$p_{n,n} = \frac{b}{N}\frac{b-1}{N}\cdots\frac{b-(n-1)}{N} = \frac{b!}{(b-n)!N^n}.$$

[12] Toujours par la formule des probabilités composées, en utilisant les calculs de la question 2.

Et puisque X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, $\{[X_n = k],\ k \in [\![0,n]\!]\}$ est un système complet d'événements, de sorte que

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1.$$

Détails

Par définition de X_n et des $p_{n,k}$, on a

$$p_{n,k} = P(X_n = k).$$

7. Notons que $\{N_n, B_n\}$ est un système complet d'événements, et donc par la formule des probabilités totales,

$$p_{n,k} = P(X_n = k) = P([X_n = k] \cap B_n) + P([X_n = k] \cap N_n).$$

Or, si on a eu exactement k boules noires lors des n premiers tirages et que le dernier tirage a donné une boule blanche, c'est que lors des $n-1$ premiers, on a obtenu exactement k boules noires. Autrement dit, $[X_n = k] \cap B_n = [X_{n-1} = k] \cap B_n$. Ainsi,

$$P([X_n = k] \cap B_n) = P([X_{n-1} = k] \cap B_n) = P(X_{n-1} = k)P_{[X_{n-1}=k]}(B_n) = p_{n-1,k}\frac{a+k}{N}.$$

De même, on a $[X_n = k] \cap N_n = [X_{n-1} = k-1] \cap N_n$ et donc

$$P([X_n = k] \cap N_n) = P([X_{n-1} = k-1] \cap N_n) = P(X_{n-1} = k-1) P_{[X_{n-1}=k-1]}(N_n) = p_{n-1,k-1} \frac{b-(k-1)}{N}.$$

On a donc bien

$$\boxed{N p_{n,k} = (a+k) p_{n-1,k} + (b-k+1) p_{n-1,k-1}.}$$

8. Calcul de l'espérance de X_n.

8.a. Par définition, $E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n} k p_{n,k}$.
Ainsi, en utilisant la formule $(\mathscr{A})$, il vient

Le terme correspondant à $k = 0$ est nul.

Chgt d'indice
Dans la deuxième somme, $i = k-1$.

$$\begin{aligned}
NE(X_n) &= \sum_{k=1}^{n} N k p_{n,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \left((a+k) p_{n-1,k} + (b-k+1) p_{n-1,k-1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(a+k) p_{n-1,k} + \sum_{k=1}^{n} k(b-(k-1)) p_{n-1,k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(a+k) p_{n-1,k} + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)(b-i) p_{n-1,i} \\
&= a \sum_{k=1}^{n} k p_{n-1,k} + \sum_{k=1}^{n} k^2 p_{n-1,k} + b \sum_{i=1}^{n-1} i p_{n-1,i} + b \sum_{i=0}^{n-1} p_{n-1,i} - \sum_{i=0}^{n-1} i^2 p_{n-1,i} - \sum_{i=1}^{n-1} i p_{n-1,i} \\
&= (a+b-1) \sum_{k=0}^{n-1} k p_{n-1,k} + an \underbrace{p_{n-1,n}}_{=0} + n^2 \underbrace{p_{n-1,n}}_{=0} + b \sum_{i=0}^{n-1} p_{n-1,i} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[b + k(\underbrace{a+b}_{=N} - 1) \right] p_{n-1,k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} [b + k(N-1)] \, p_{n-1,k}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$NE(X_n) = b \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k} + (N-1) \sum_{k=0}^{n-1} k p_{n-1,k} = b + (N-1) E(X_{n-1}).$$

Soit encore

$$E(X_n) = \frac{N-1}{N} E(X_{n-1}) + \frac{b}{N} = \boxed{\left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}.}$$

8.b. Puisque par convention $X_0 = 0$, on a $E(X_0) = 0$ et donc $E(X_1) = \frac{b}{N} = \frac{1}{10}$.
Il s'agit ensuite d'exploiter la relation de la question précédente, qui permet de calculer $E(X_n)$ en fonction de $E(X_{n-1})$.

```
E = 1/10 ;
for i=2 :2009
        E = (1-1/100)*E+1/10
```

8.c. La relation de la question 8.a prouve que $(E(X_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
Cherchons $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que la suite (u_n) définie par $u_n = E(X_n) + \lambda$ soit une suite géométrique.
On a

$$u_{n+1} = E(X_{n+1}) + \lambda = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_n) + \frac{b}{N} + \lambda = \left(1 - \frac{1}{N}\right) (E(X_n) + \lambda) + \frac{b}{N} + \frac{\lambda}{N}.$$

Et donc $u_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) u_n$ si et seulement si $\frac{b}{N} + \frac{\lambda}{N} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -b$.

Ainsi, pour $\lambda = -b$, (u_n) est une suite géométrique de raison $\left(1 - \frac{1}{N}\right)$ de sorte que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n u_0 = -b\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

Et donc

$$\forall n \in \mathbf{N},\ E(X_n) = u_n - \lambda = b - b\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = \boxed{b\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].}$$

Alternative

Notons que, le résultat étant donné dans l'énoncé, il est possible de le prouver par récurrence sur n, évitant ainsi le recours aux suites arithmético-géométrique.

9. Calcul de q_n.

9.a. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[X_n = k],\ k \in [\![0, n]\!]\}$. Alors

$$q_{n+1} = P(N_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) P_{[X_n=k]}(N_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} P_{[X_n=k]}(N_{n+1}).$$

Or, sachant que lors des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules noires, à l'issue de ces n tirages, l'urne contient toujours n boules, dont $b - k$ sont noires. Et donc $P_{[X_n=k]}(N_{n+1}) = \frac{b-k}{N}$. Ainsi,

$$Nq_{n+1} = N\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}\frac{b-k}{N} = \boxed{\sum_{k=0}^{n}(b-k)p_{n,k}.}$$

9.b. Il vient donc

$$Nq_{n+1} = b\underbrace{\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}}_{=1} - \sum_{k=0}^{n} kp_{n,k} = b - E(X_n)$$

et donc $\boxed{q_{n+1} = \frac{b}{N} - \frac{E(X_n)}{N}.}$

En utilisant le résultat de la question 8.c, on obtient

$$q_{n+1} = b\left(\frac{1}{N} - \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]\right) = \boxed{b\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left[\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} - 1\right].}$$

Convergence

Notons que X_n étant une variable aléatoire à support fini, il n'y a aucun soucis de convergence dans ce qui suit : les sommes sont finies.

10. Calcul de la variance de X_n.

10.a. Par le théorème de transfert , on a

$$\begin{aligned}
Nu_n &= NE(X_n(X_n-1)) = N\sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X_n = k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)Np_{n,k}\\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=0}^{n} k(k-1)(b+1-k)p_{n-1,k-1}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=2}^{n} k(k-1)(b+1-k)p_{n-1,k-1}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{i=1}^{n-1} i\underbrace{(i+1)}_{=(i-1)+2}(b-i)p_{n-1,i}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{i=1}^{n-1} i(i-1)(b-i)p_{n-1,i} + \sum_{i=1}^{n-1} 2i\underbrace{(b-i)}_{=(b-1)-(i-1)}p_{n-1,i}
\end{aligned}$$

C'est la formule de la question 7.c.

Les termes correspondants à $k = 0$ et $k = 1$ sont nuls.

$p_{n-1,n} = 0$.

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)(a+b)p_{n-1,k} - 2\sum_{i=1}^{n-1} i(i-1)p_{n-1,i} + 2\sum_{i=1}^{n-1} i(b-1)p_{n-1,i})$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{n-1}[k(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)k]p_{n-1,k}.}$$

10.b. On a donc

$$u_n = \frac{1}{N}\underbrace{(a+b-2)}_{=N-2}\sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)p_{n-1,k} + \frac{2}{N}(b-1)\sum_{k=1}^{n-1} kp_{n-1,k}$$

$$= \frac{1}{N}(N-2)E\left(X_{n-1}(X_{n-1}-1)\right) + \frac{2(b-1)}{N}E(X_{n-1})$$ Théorème de transfert.

$$= \frac{1}{N}(N-2)u_{n-1} + \frac{2(b-1)}{N}b\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right]$$ C'est le résultat de 8.c.

$$= \boxed{\left(1-\frac{2}{N}\right)u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N}\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right].}$$

10.c. Prouvons par récurrence sur n la formule donnée par l'énoncé.

Pour $n=0$, on a $u_0 = E(X_0(X_0-1)) = E(0) = 0 = b(b-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^0 - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^0\right]$.

Supposons que la formule est valable pour u_n. Alors

$$u_{n+1} = \left(1-\frac{2}{N}\right)u_n + \frac{2b(b-1)}{N}\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]$$

$$= \left(1-\frac{2}{N}\right)b(b-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right] + \frac{2b(b-1)}{N}\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]$$

$$= b(b-1)\left[1-\cancel{\frac{2}{N}} + \left(1-\frac{2}{N}\right)^{n+1} \cancel{-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n} + \cancel{4\left(1-\frac{1}{N}\right)^n} + \cancel{\frac{2}{N}} \cancel{-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n}\right]$$

$$= b(b-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{N}-2\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]$$

$$= b(b-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n+1} - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n+1}\right].$$

Et donc la formule est vraie pour u_{n+1}. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{u_n = b(b-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right].}$$

10.d. Notons que $u_n = E(X_n(X_n-1)) = E(X_n^2) - E(X_n)$, et donc par la formule de Huygens,

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = u_n + E(X_n) - E(X_n)^2$$

$$= \boxed{b(b-1)\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right] + b\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right] - b^2\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]^2.}$$

Puisque $\left|1-\frac{1}{N}\right| < 1$ et $\left|1-\frac{2}{N}\right| < 1$, on a donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0.}$

ECRICOME 2008

Exercice 1

Sujet : Étude d'une famille d'endomorphismes d'un espace euclidien — Facile

Abordable en première année : ✗ — **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire, espaces euclidiens, diagonalisation, projecteur orthogonaux.

Modifications apportées au sujet d'origine : suppression des flèches sur les vecteurs (on n'est plus au collège !)

Soit u un vecteur **unitaire** de $\mathbf{R}^3$, de coordonnées (a, b, c) dans la base canonique $\mathscr{B} = (i, j, k)$ de $\mathbf{R}^3$. On a donc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
On note p le projecteur orthogonal sur la droite $\mathscr{D} = \mathrm{Vect}(u)$ de vecteur directeur u et q le projecteur orthogonal sur $\mathscr{D}^\perp$.
Id désigne l'application identité de $\mathbf{R}^3$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^3$.

1. Que vaut $p + q$?
2. Exprimer, pour $v \in \mathbf{R}^3$, $p(v)$ à l'aide de $\langle v, u \rangle$ et de u.
   Calculer alors $p(i), p(j)$ et $p(k)$. En déduire les matrices P et Q de p et q dans la base $\mathscr{B}$.
3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.
   a. Montrer que $M^2 = -Q$.
   b. Calculer $f(u)$. En déduire que $\mathrm{rg}(f) \leqslant 2$.
   Déterminer le noyau et l'image de f et les exprimer en fonction de $\mathscr{D}$.
   c. Déduire de la question précédente la valeur de $f \circ p$.
   Montrer alors que $X + X^3$ est un polynôme annulateur de f.
   d. Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ?
4. Pour tout réel θ, on définit l'endomorphisme g_θ par
$$g_\theta = \mathrm{Id} + (\sin\theta) f + (1 - \cos\theta) f^2$$
   où $f^2 = f \circ f$.
   a. Pour θ et θ' réels, calculer $g_\theta \circ g_{\theta'}$ et montrer qu'il se met sous la forme $g_{\theta''}$, avec θ'' réel.
   b. En déduire que, pour tout réel θ, g_θ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 2

Sujet : Étude d'une fonction définie par une série. — Moyen

Abordable en première année : ✓ — **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : séries numériques, fonctions d'une variable

Commentaires : un thème récurrent : l'étude d'une fonction définie par une série ou une intégrale, en utilisant Taylor-Lagrange. Très semblable à EML 2005.

On considère, pour $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}^+$ par :
$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}^+,\ f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + x}.$$

1. a. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.
   b. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.
2. Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n'(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.
3. **Étude de la dérivabilité de** F.
   a. Soit φ la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$.
   Soit $n \in \mathbf{N}^*$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $(x, x_0) \in [n; +\infty[^2$,
$$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$

b. En déduire, pour $x \in \mathbf{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x+h \in \mathbf{R}_+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.

c. Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour $x \in \mathbf{R}_+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x+h \in \mathbf{R}_+$,

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K|h|.$$

d. En déduire que F est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et que $F' = G$.

4. **Recherche d'un équivalent en $+\infty$**
Soit $x \in \mathbf{R}_+$.

a. Justifier que, pour $k \in \mathbf{N}^*$,

$$f_{k+1}(x) \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \leqslant f_k(x).$$

b. En déduire que, pour $n \geqslant 2$,

$$\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \leqslant \sum_{k=1}^n f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt.$$

c. En déduire que :

$$\ln(1+x) \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).$$

d. Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Problème

Sujet : calcul approché d'une intégrale par la méthode de Monte-Carlo. **Difficile**
Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★
Thèmes du programme abordés : variables à densité, convergence en probabilité, estimation par intervalle de confiance, intégrales impropres, fonction de plusieurs variables, optimisation sous contrainte d'égalité linéaire.
Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.
La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.
Modifications apportées au sujet d'origine : question 2.a : remplacement de «pour n assez grand» par un intervalle de confiance asymptotique.
ajout de la question 7 pour pallier à la disparition du programme de l'égalité de Taylor-Lagrange pour les fonctions d'une ou plusieurs variables.
Commentaires : un sujet calculatoire, mais qui met en œuvre un grand nombre de techniques différentes.

L'objet du problème est la présentation d'une méthode probabiliste de calcul d'une intégrale (méthode de Monte-Carlo), et de deux façons de l'améliorer.
Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, g une fonction continue sur $[0,1]$ et on pose $J = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$.
L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$ (si elles existent).
On admet que, pour tout entier naturel non nul n, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires à densité, mutuellement indépendantes, alors des variables aléatoires de la forme $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ où les f_i sont des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, distinctes ou non, sont également mutuellement indépendantes.

I. Méthode de Monte-Carlo

1. a. Rappeler une densité de U.

b. Justifier que la variable aléatoire $g(U)$ admet une espérance égale à J.

2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U.
On pose $\sigma^2 = V(g(U)) \neq 0$ et on note, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^n g(U_i)$.

a. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers J.

b. *Recherche d'un intervalle de confiance pour J.*

i. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

ii. On donne $\Phi(1.96) = 0.975$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique pour J, au niveau de confiance 95%, faisant intervenir S_n.

3. *Application* :

   a. À l'aide du changement de variable $t = \sin u$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,dt = \pi$.

   b. **i.** Écrire en `Scilab` une fonction `G`, de paramètre `t`, qui pour une valeur t du paramètre renvoie la valeur $4\sqrt{1-t^2}$.

   ii. On rappelle qu'en `Scilab` , la fonction `rand()` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.
   On suppose que `n` est un entier préalablement entré dans `Scilab` . En utilisant le résultat de la question 2.a et la fonction `G`, compléter le programme suivant, de manière à ce qu'il calcule une valeur approchée de π.

```
J = 0 ;
for i =1 :n
  ....
end
J = ....
```

II. Réduction de la variance par variables antithétiques

4. Reconnaître la loi de $1 - U$.
   On définit la variable aléatoire Y par $Y = \dfrac{1}{2}[g(U) + g(1-U)]$. Que vaut $E(Y)$?

5. On suppose g strictement croissante et on admet l'existence des espérances intervenant dans cette question.

   a. Justifier que, pour tout $(u, w) \in [0, 1]^2$,
   $$(g(u) - g(w))(g(1-u) - g(1-w) \leqslant 0.$$

   b. Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de U.
   Quel est le signe de $E\left[(g(U) - g(W))(g(1-U) - g(1-W))\right]$?
   En remarquant que $g(U)g(1-U)$ et $g(W)g(1-W)$ ont même espérance, en déduire que :
   $$E\left[g(U)g(1-U)\right] \leqslant (E[g(U)])^2 .$$
   On admet que l'on obtiendrait le même résultat pour g strictement décroissante.

   c. Montrer alors que, lorsque g est strictement monotone, $V(Y) \leqslant \dfrac{1}{2}V(g(U))$.

6. Donner un nouvel intervalle de confiance asymptotique pour J au niveau de confiance 95%, basé sur cette méthode.
   On note ℓ_n la longueur de l'intervalle de confiance obtenu dans la partie I pour une valeur fixée de n.
   Avec cette nouvelle méthode, combien de tirages N de la variable aléatoire uniforme suffit-il de faire pour obtenir la même longueur ℓ_n d'intervalle de confiance.

III. Réduction de la variance par stratification.

7. **Formule de Taylor-Lagrange pour une fonction de plusieurs variables**

   a. Soit φ une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$.

   i. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ et $x_1 \in [a, b]$ tels que $\forall t \in [a, b]$, $\varphi(x_0) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(x_1)$.

   ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\varphi(x_0) \leqslant \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\varphi(t)\,dt \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\varphi(x_1)$.

   iii. En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\varphi(t)\,dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\varphi(c)$.

   b. Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$, $a < b$. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que
   $$g(b) = g(a) + g'(a)(b-a) + g''(c)\frac{(b-a)^2}{2}.$$

   c. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, et soit $a \in \Omega$. Soit $h \in \mathbf{R}^n$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$, $a + th \in \Omega$.
   En considérant la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = f(a + th)$, montrer qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que
   $$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2}q_{a+\theta h}(h)$$
   où q_x désigne la forme quadratique associée à la matrice hessienne de f au point $x \in \Omega$.

8. Étude d'une fonction de plusieurs variables.
On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[^3$ par :

$$\forall (x_1,x_2,x_3)\in]0,+\infty[^3,\ f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{4x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{9x_3}.$$

a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

b. On note :

$$\nabla^2 f(A)=\left[\partial^2_{i,j}f(A)\right]_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$$

la matrice hessienne de f en $A=(a_1,a_2,a_3)$.
Justifier que, pour tout $A\in]0,+\infty[^3$, pour toute matrice colonne H à trois lignes non nulle, on a :

$$^tH\nabla^2 f(A)H>0.$$

c. f admet-elle des extremums sur $]0;+\infty[^3$?

d. On cherche désormais les extremums de f sous la contrainte $x_1+x_2+x_3=110$.
Montrer que f admet un unique point critique sous cette contrainte, que l'on déterminera.
En utilisant le résultat de la question 7.c, montrer qu'il s'agit d'un minimum global sous contrainte.

9. Méthode de stratification
Soit a et b deux réels tels que $0<a<b<1$. On définit les trois intervalles I_1, I_2 et I_3 par

$$I_1=[0,a[,\ I_2=[a,b[,\ I_3=[b,1],$$

et on considère quatre variables aléatoires indépendantes U_1,U_2,U_3 et T, de lois uniformes respectivement sur I_1,I_2,I_3 et $[0,1]$.
On définit la variable aléatoire $\widetilde{U}$ par $\widetilde{U}=U_1\mathbb{1}_{[T\in I_1]}+U_2\mathbb{1}_{[T\in I_2]}+U_3+\mathbb{1}_{[T\in I_3]}$ où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice d'un événement A. $\widetilde{U}$ est donc la variable aléatoire définie, pour tout élément ω de l'univers Ω par :

$$\widetilde{U}(\omega)=\begin{cases}U_1(\omega) & \text{si } T(\omega)\in I_1\\ U_2(\omega) & \text{si } T(\omega)\in I_2\\ U_3(\omega) & \text{si } T(\omega)\in I_3\end{cases}$$

a. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout réel x,

$$P(g(\widetilde{U})\leqslant x)=aP(g(U_1)\leqslant x)+(b-a)P(g(U_2)\leqslant x)+(1-b)P(g(U_3)\leqslant x).$$

En admettant que $g(U_1),g(U_2),g(U_3)$ sont des variables aléatoires à densité, montrer que $g(\widetilde{U})$ est elle-même une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité $f_{g(\widetilde{U})}$ en fonction de densités de $g(U_1),g(U_2),g(U_3)$, que l'on pourra noter $f_{g(U_1)},f_{g(U_2)},f_{g(U_3)}$.
Vérifier, en prenant la fonction identité pour g, que $\widetilde{U}$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

b. Déduire de ce qui précède que

$$E(g(\widetilde{U}))=aE(g(U_1))+(b-a)E(g(U_2))+(1-b)E(g(U_3)).$$

c. On tire de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles, n_1 points dans I_1, n_2 points de I_2, n_3 points dans I_3. On considère donc la famille de variables aléatoires indépendantes
$(U_{1,1},\dots,U_{1,n_1},U_{2,1},\dots,U_{2,n_2},U_{3,1},\dots,U_{3,n_3})$ telles que

- $U_{1,1},\dots,U_{1,n_1}$ ont même loi que U_1,
- $U_{2,1},\dots,U_{2,n_2}$ ont même loi que U_2,
- $U_{3,1},\dots,U_{3,n_3}$ ont même loi que U_3,

et on note Z la variable aléatoire définie par :

$$Z=a\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}g(U_{1,i})+(b-a)\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}g(U_{2,j})+(1-b)\frac{1}{n_3}\sum_{k=1}^{n_3}g(U_{3,k}).$$

Montrer que

$$V(Z)=a^2\frac{1}{n_1}V(g(U_1))+(b-a)^2\frac{1}{n_2}V(g(U_2))+(1-b)^2\frac{1}{n_3}V(g(U_3)).$$

d. *Application numérique* :
On suppose que pour un certain choix de la fonction g et des réels a et b, on a

$$a^2V(g(U_1))=\frac{1}{4},\ (b-a)^2V(g(U_2))=1,\ (1-b)^2V(g(U_3))=\frac{1}{9}.$$

On suppose que l'on tire 110 points, de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles (n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3). Quelles valeurs faut-il donner à n_1,n_2,n_3 pour que $E(Z)$ fournisse une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode ?

ECRICOME 2008 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. Si $x \in \mathbf{R}^3$, alors, de manière unique, $x = x_{\mathcal{D}} + x_{\mathcal{D}^\perp}$, avec $x_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}$ et $x_{\mathcal{D}^\perp} \in \mathcal{D}^\perp$.
Par définition des projections orthogonales, on a alors $p(x) = x_{\mathcal{D}}$ et $q(x) = x_{\mathcal{D}^\perp}$, de sorte que $p(x) + q(x) = x = \mathrm{Id}(x)$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbf{R}^3$, on en déduit que $\boxed{p + q = \mathrm{Id}.}$

2. Puisque u est unitaire, la famille formée du seul vecteur u est une base orthonormée de $\mathcal{D}$.
On en déduit alors que

$$p(x) = \langle x, u\rangle u.$$

En particulier, on a

$$p(i) = \langle i, u\rangle u = a \cdot u,\ p(j) = b \cdot u \text{ et } p(k) = c \cdot u.$$

Mais $u = a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k$ et donc la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\boxed{P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p(i) & p(j) & p(k) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ k \end{array}.}$$

Remarque
On constate qu'on obtient une matrice symétrique, ce qui n'est pas surprenant, car p est un endomorphisme symétrique et $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$.

On en déduit que $Q = I_3 - P = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -cb \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -cb \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}.}$

3.a. Un calcul direct prouve que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2-b^2 & ab & ac \\ ab & -a^2-b^2 & bc \\ ac & bc & -a^2-b^2 \end{pmatrix} = \boxed{-Q.}$$

3.b. Le vecteur colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, donc le vecteur colonne des coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\boxed{f(u) = 0.}$
Comme u est non nul, on a donc $\mathcal{D} \subset \operatorname{Ker} f$ et ainsi $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 1$.
D'après le théorème du rang, on a alors

$$\operatorname{rg}(f) = \dim \mathbf{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f \leqslant 2.$$

Image
A priori, on a juste

$$\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im}(-q).$$

Mais multiplier un endomorphisme par un scalaire ne change ni son image, ni son noyau.

Puisque $M^2 = -Q$, alors $f^2 = -q$. En particulier, $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} q$.
Or $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$. Et donc $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} f$.
Mais $\operatorname{Im} q$ étant la projection orthogonale sur $\mathcal{D}^\perp$, on a $\operatorname{Im} q = \mathcal{D}^\perp$. Et donc $\mathcal{D}^\perp \subset \operatorname{Im} f$.
Puisque $\dim \operatorname{Im} f \leqslant 2$ et que $\dim \mathcal{D}^\perp = 3 - \dim \mathcal{D} = 2$, on en déduit que $\boxed{\operatorname{Im} f = \mathcal{D}^\perp.}$
Par le théorème du rang, on a alors $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, et comme nous avons déjà prouvé que $\mathcal{D} \subset \operatorname{Ker} f$, on a $\boxed{\operatorname{Ker} f = \mathcal{D}.}$

3.c. Pour $x \in \mathbf{R}^3$, on a $p(x) \in \mathcal{D} = \operatorname{Ker} f$, et donc $f(p(x)) = 0$. Ainsi, $\boxed{f \circ p = 0.}$
On a

$$f + f^3 = f \circ (\mathrm{Id} + f^2) = f \circ (\mathrm{Id} - q) = f \circ p = 0.$$

Ainsi, $\boxed{X + X^3 \text{ est bien un polynôme annulateur de } f.}$

3.d. La seule racine réelle de $X + X^3 = X(1+X^2)$ est 0, donc il s'agit de la seule valeur propre possible de f.
Puisque f n'est pas injectif, 0 est bien valeur propre de f, et donc $\boxed{\mathrm{Spec}(f) = \{0\}.}$
Et puisque $\dim E_0(f) < \dim \mathbf{R}^3$, f n'est pas diagonalisable.

4.a. Soient $\theta, \theta' \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
g_\theta \circ g_{\theta'} =& (\mathrm{Id} + (\sin\theta) f + (1-\cos\theta) f^2) \circ (\mathrm{Id} + (\sin\theta') f + (1-\cos\theta') f^2)\\
=& \mathrm{Id} + (\sin\theta + \sin\theta') f + (2 - \cos\theta - \cos\theta' + \sin\theta\sin\theta') f^2\\
&+ [(\sin\theta)(1-\cos\theta') + (\sin\theta')(1-\cos\theta)] f^3 + (1-\cos\theta)(1-\cos\theta') f^4\\
=& \mathrm{Id} + (\sin\theta + \sin\theta') f + (2 - \cos\theta - \cos\theta' + \sin\theta\sin\theta') f^2\\
&- [(\sin\theta)(1-\cos\theta') + (\sin\theta')(1-\cos\theta)] f - (1-\cos\theta)(1-\cos\theta') f^2\\
=& \mathrm{Id} + (\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta) f + (1 - \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta') f^2\\
=& \mathrm{Id} + \sin(\theta+\theta') f + (1 - \cos(\theta+\theta')) f^2\\
=& \boxed{g_{\theta+\theta'}.}
\end{aligned}$$

Détails
On a $f^3 = -f$ et donc
$$f^4 = f^3 \circ f = -f^2.$$

Trigonométrie
Rappelons que
$$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$$
et
$$\sin(\theta+\theta') = \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'$$

4.b. Notons qu'en particulier, $g_0 = \mathrm{Id}$. Et donc $g_\theta \circ g_{-\theta} = \mathrm{Id}$, ce qui prouve que g_θ est inversible et que $\boxed{g_\theta^{-1} = g_{-\theta}.}$

Exercice 2

1.a. On a $f_n(x) = \dfrac{n+x}{n(n+x)} - \dfrac{n}{n(n+x)} = \dfrac{x}{n(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$.
Mais puisque la série de terme général $\dfrac{x}{n^2}$ converge, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, il en est de même de la série de terme général $f_n(x)$.

Positivité
Il est facile de voir que $f_n(x)$ est positif, mais il est encore plus facile de remarquer que $\dfrac{x}{n^2} \geqslant 0$, ce qui suffit.

1.b. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $f_n(0) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} = 0$ et donc $\boxed{F(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = 0.}$

De même, pour $N \geqslant 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(1) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Et donc $F(1) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(1) = \lim\limits_{N\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{N+1}\right) = \boxed{1.}$

Méthode
Même si on reconnait facilement une somme télescopique, il est indispensable de repasser par les sommes partielles pour étudier une telle série.

2. f_n est dérivable sur $\mathbf{R}^+$, de dérivée égale à $f_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

On a alors $f_n'(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, et donc, comme à la question 1.a, la série de terme général $f_n'(x)$ converge.

3. **Étude de la dérivabilité de F.**

3.a. φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^*$, avec $\varphi''(x) = \dfrac{2}{x^3}$.
Cette fonction est positive et décroissante sur $[n;+\infty[$, de sorte que pour $x, x_0 \in [n,+\infty[$, on a $\max\limits_{t\in[x,x_0]} |\varphi''(t)| \leqslant \varphi''(n) \leqslant \dfrac{2}{n^3}$.
Et donc, par l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 au voisinage de x_0, il vient

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - \varphi'(x_0)(x-x_0)| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{2!}\frac{2}{n^3} \leqslant \boxed{\frac{(x-x_0)^3}{n^3}.}$$

Remarque
Pour appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange, il suffit d'obtenir un majorant de $|\varphi''|$ sur le segment d'extrémités x et x_0.
Si $x < x_0$, il s'agit du segment $[x, x_0]$ et sinon, du segment $[x_0, x]$.
Dans tous les cas, ce segment est inclus dans $[n, +\infty[$, et donc nous nous contentons de majorer $|\varphi''|$ sur $[n, +\infty[$, ce qui est a priori moins précis, mais suffit ici.

3.b. On a $f_n(x+h) - f_n(x) = \dfrac{1}{n+x} - \dfrac{1}{n+x+h} = \varphi(n+x) - \varphi(n+x+h)$.
De même, on a $f_n'(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2} = -\varphi'(n+x)$.
Et donc, d'après le résultat de la question précédente[1], il vient

$$0 \leqslant |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)| = |\varphi(n+x) - \varphi(n+x+h) - ((n+x)-(n+x+h))\,\varphi'(n+h)| \leqslant \frac{h^2}{n^3}.$$

[1] Qui s'applique car $n+x+h$ et $n+x$ sont supérieurs à n.

Puisque la série de terme général $\dfrac{h^2}{n^3}$ est convergente, on en déduit qu'il en est de même de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.

3.c. En divisant par $|h|$ la relation précédemment obtenue, on obtient

$$\left|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f_n'(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{n^3}.$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f_n'(x)\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f_n'(x)\right| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|h|}{n^3} = |h|\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}}_{=K}.
\end{aligned}$$

Inégalité triangulaire.

3.d. Lorsque $h \to 0$, on a $K|h| \to 0$, et donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = G(x).$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, F est dérivable en x, et que $F'(x) = G(x)$.
Et donc $\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}_+ \text{ et } F' = G.}$

Valeur absolue
Rappelons que
$$f(x) \to \ell \Leftrightarrow f(x) - \ell \to 0 \Leftrightarrow |f(x) - \ell| \to 0.$$

4. Recherche d'un équivalent en $+\infty$

4.a. Pour x fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+$, de dérivée $t \mapsto \dfrac{1}{(t+x)^2} - \dfrac{1}{t^2}$.
En particulier, elle est décroissante sur $[k, k+1]$, de sorte que

$$\forall t \in [k, k+1],\ f_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1+x} \leqslant \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = f_k(x).$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$f_{k+1}(x) = \int_k^{k+1} f_{k+1}(x)\,dt \leqslant \int_k^{k+1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)dt \leqslant \int_k^{k+1} f_k(x)\,dt = f_k(x).$$

Classique
Les deux intégrales de gauche et de droite sont des intégrales d'une **constante** (ne dépendant pas de la variable d'intégration t) sur un segment.
Graphiquement il s'agit de l'aire d'un rectangle, et donc si le segment est de longueur 1, l'intégrale est simplement égale à la constante intégrée.

4.b. En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 1 à $n-1$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x).$$

Par la relation de Chasles, le terme central est $\displaystyle\int_1^n\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)dt$ et donc

$$\boxed{\int_1^n\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x).}$$

D'autre part, un changement d'indice prouve que

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x) = \sum_{i=2}^{n} f_i(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f_1(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \frac{x}{x+1}.$$

Et donc on a

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \frac{x}{x+1} \leqslant \int_1^n\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)dt \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{1+x} + \int_1^n\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right)dt.}$$

4.c. On a

$$\int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt = [\ln(t) - \ln(t+x)]_1^n = \left[\ln\left(\frac{t}{t+x}\right)\right]_1^n = \ln\left(\frac{n}{n+x}\right) - \ln\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

Mais lorsque $n \to +\infty$, on a $\frac{n}{n+x} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Par continuité de la fonction ln, il vient donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n+x}\right) = 0$.

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt = -\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = \ln(1+x)$.

Ainsi, en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'inégalité de la question 4.b, il vient

$$\ln(1+x) \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)}_{=F(x)} \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).$$

Continuité

La continuité est nécessaire pour composer des limites :

$$\lim u_n = 1 \Rightarrow \lim \ln(u_n) = 0$$

car la fonction ln est continue en 1.

4.d. En divisant l'inégalité précédente par $\ln(1+x) > 0$, on a

$$1 \leqslant \frac{F(x)}{\ln(1+x)} \leqslant \frac{x}{x+1}\frac{1}{\ln(1+x)} + 1.$$

Mais $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(1+x)} = 0$.

Donc par le théorème des gendarmes, il vient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{\ln(1+x)} = 1 \Leftrightarrow \boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(1+x).}$$

Remarque

On pourrait même prouver que $F(x) \sim \ln(x)$.
Mais rappelons que ceci ne vient pas uniquement du fait que $x+1 \sim x$: on n'a pas le droit de composer les équivalents à gauche !

Problème

I. Méthode de Monte-Carlo

1.a. Une densité de U est $\boxed{f_U : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

1.b. Par le théorème de transfert, $g(U)$ admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_U(t)\, dt =$ $\int_0^1 g(t)\, dt$ converge absolument.

Mais g est continue sur le segment $[0,1]$, et donc il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment : elle converge.

Ainsi, $g(U)$ admet une espérance et

$$\boxed{E(g(U)) = \int_0^1 g(t)\, dt = J.}$$

2.a. Les U_i étant indépendantes et de même loi, il en est de même des $g(U_i)$. Or, d'après l'énoncé, celles-ci admettent une variance, et donc par la loi faible des grands nombres,

$$\boxed{\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} J.}$$

Variance

Les $g(U_i)$ admettent un moment d'ordre 2 (et donc une variance) pour les mêmes raisons que J admet une espérance :

$$\int_0^1 g(t)^2\, dt$$

converge car intégrale d'une fonction continue sur un segment.

2.b. *Recherche d'un intervalle de confiance pour J.*

2.b.i. Les $g(U_i)$ sont i.i.d. et admettent une variance. Donc $\frac{S_n}{n}$ admet une espérance égale à J et une variance égale à

$$\frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n g(U_i)\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \underbrace{V(g(U_i))}_{=\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Les $g(U_i)$ sont indépendantes.

Par le théorème central limite, $\dfrac{\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\sqrt{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}} = \dfrac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ converge en loi vers X, où X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Rédaction ✎

Ne pas oublier de vérifier les hypothèses pour appliquer le TCL : il faut que les variables soient i.i.d. et admettent une variance.

2.b.ii. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, on a

$$P(-1.96 \leqslant X \leqslant 1.96) = \Phi(1.96) - \Phi(-1.96) = 2\Phi(1.96) - 1 = 0.95.$$

De plus, on a

$$P\left(-1.96 \leqslant \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant 1.96\right) = P\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{S_n}{n} \leqslant -J \leqslant 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{S_n}{n}\right) = P\left(\frac{S_n}{n} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant J \leqslant \frac{S_n}{n} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Mais d'après le résultat de la question précédente,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(-1.96 \leqslant \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant 1.96\right) = P(-1.96 \leqslant X \leqslant 1.96) = 0.95.$$

On en déduit que $\left[\frac{S_n}{n} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de J au niveau de confiance 95%.

> **Inconvénient**
> Le principal inconvénient de cette méthode est que l'on ne connaît pas nécessairement la valeur de σ, dont on aurait pourtant besoin pour construire l'intervalle de confiance.

3. *Application* :

3.a. La fonction $\varphi : u \mapsto \sin u$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de dérivée égale à $\varphi'(u) = \cos(u)$.

De plus, on a $\varphi(0) = 0$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. On a donc, par le théorème de changement de variable[2]

$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,du = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 u}\cos u\,du = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,du.$$

[2] Sur un **segment**. On ne se préoccupe donc pas de la monotonie de φ.

> **Cosinus**
> La relation
> $$\cos(u) = \sqrt{1-\sin^2}$$
> n'est pas valable sur tout $\mathbf{R}$, mais uniquement si $\cos(u) \geqslant 0$. Ce qui est le cas sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Mais, quel que soit $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\cos^2(u) = \left(\frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2iu} + e^{-2iu} + 2\right) = \frac{1}{4}(2\cos(2u) + 2) = \frac{\cos(2u) + 1}{2}.$$

On en déduit que

$$4\int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,du = 2\int_0^{\pi/2} (\cos(2u) + 1)\,du = 2\left[\frac{\sin(2u)}{2} + u\right]_0^{\pi/2} = \pi.$$

Et donc

$$\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,dt = \boxed{\pi.}$$

3.b.i.

```
function y = G(t)
  y = 4*sqrt(1-t^2)
endfunction
```

3.b.ii. On suppose que n est «grand», de sorte que par la question 2.a, $\frac{S_n}{n}$ est «probablement» proche de J.

```
J = 0 ;
for i=1 :n
  J = J + G(rand()) ;
end
J = J/n ;
```

> **Incertitude**
> La convergence en probabilité ne nous met pas totalement à l'abri d'un «mauvais» tirage, et il se peut donc que le programme retourne une valeur totalement fantaisiste de J.

Réduction de la variance par variables antithétiques

4. Il s'agit d'une transformation affine de loi uniforme : nous savons que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, alors $(b-a)U + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.
Si on pose ici $a = 1$ et $b = 0$, on en déduit que U suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
Puisque U et $1-U$ ont même loi, c'est également le cas de $g(U)$ et de $g(1-U)$. En particulier, $E(g(1-U)) = E(g(U)) = J$.
Et donc

$$E(Y) = E\left(\frac{1}{2}(g(U)+g(1-U))\right) = \frac{1}{2}\left(E(g(U)) + E(g(1-U))\right) = \frac{2J}{2} = \boxed{J.}$$

Remarque

Si l'on ne souhaite pas utiliser la transformation affine de lois uniformes, on peut, au choix :
- travailler sur les densités, en remarquant que $1-U$ est une transformation affine de U
- travailler directement sur la fonction de répartition de $1-U$ et prouver que c'est la même que la fonction de répartition de U.

5.a. Soient $(u,w) \in [0,1]^2$.
Si $u \leqslant w$, alors, par croissance de g, $g(u) \leqslant g(w)$ et donc $g(u) - g(w) \leqslant 0$.
En revanche, $1-u \geqslant 1-w$ et donc, $g(1-u) \geqslant g(1-w)$, de sorte que $g(1-u) - g(1-w) \geqslant 0$.
Et alors $((g(u)-g(w))(g(1-u)-g(1-w)) \leqslant 0$.

Au contraire si $u \geqslant w$, alors $g(u) - g(w) \geqslant 0$ et $g(1-u) - g(1-x) \leqslant 0$. Et alors

$$((g(u)-g(w))(g(1-u)-g(1-w)) \leqslant 0.$$

5.b. D'après la question précédente, la variable aléatoire $(g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))$ est à valeurs négatives, donc son espérance est négative. Or on a

$$(g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W)) = g(U)g(1-U) - g(W)g(1-U) - g(U)g(1-W) + g(W)g(1-W)$$

et donc

$$\begin{aligned} E\left[(g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))\right] \leqslant 0 &\Leftrightarrow E\left[g(U)g(1-U) - g(W)g(1-U) - g(U)g(1-W) + g(W)g(1-W)\right] \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow E(g(U)g(1-U)) - E(g(U)g(1-W)) - E(g(W)g(1-U)) + E(g(W)g(1-W)) \leqslant 0 \end{aligned}$$

Puisque U et W sont indépendantes, $g(U)$ et $g(1-W)$ le sont également[3] et donc

$$E(g(U)g(1-W)) = E(g(U))E(g(1-W)) = E(g(U))^2$$

et de même $E(g(W)g(1-U)) = E(g(U))^2$.
Enfin, comme indiqué dans l'énoncé, $g(U)g(1-U)$ et $g(W)g(1-W)$ sont de même loi, donc de même espérance. Il vient donc

$$2E(g(U)g(1-U)) - 2E(g(U))^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{E(g(U)g(1-U)) \leqslant E(g(U))^2.}$$

[3] Et sont de même loi.

5.c. On a $E(Y^2) = \frac{1}{4}E\left[(g(U)+g(1-U))^2\right] = \frac{1}{4}E\left[g(U)^2 + 2g(U)g(1-U) + g(1-U)^2\right] = \frac{1}{2}\left[E(g(U)^2) + E(g(U)g(1-U))\right]$.
Et alors, par la formule de Huygens, on en déduit que

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{2}\left(E(g(U)^2) + E(g(U)g(1-U)) - 2E(g(U))^2\right).$$

D'autre part, $V(g(U)) = E(g(U)^2) - E(g(U))^2$, et donc

$$V(Y) \leqslant \frac{1}{2}\left(E(g(U)^2) + E(g(U))^2 - 2E(g(U))^2\right) = \frac{1}{2}\left(E(g(U)^2) - E(g(U))^2\right) = \boxed{\frac{1}{2}V(g(U)).}$$

6. Il s'agit de refaire le raisonnement tenu à la question 2.b.ii en remplaçant S_n par $S'_n = \sum_{i=1}^{n}(g(U_i) + g(1-U_i))$, et donc les σ par des $\sigma' = \sqrt{V(Y)}$.
On obtient alors comme intervalle de confiance asymptotique de J l'intervalle

$$\left[\frac{S'_n}{n} - 1.96\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}, \frac{S'_n}{n} + 1.96\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}\right].$$

La longueur de cet intervalle pour un échantillon de taille n est alors $\ell'_n = 2 \times 1.96\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$, alors que la longueur de l'intervalle obtenu en 2.b.ii était $\ell_n = 2 \times 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

La question posée est alors : à n fixé, combien doit valoir N pour que $\ell'_N \leqslant \ell_n$?
Il suffit alors de faire le calcul :

$$\ell'_N \leqslant \ell_n \Leftrightarrow \frac{\sigma'}{\sqrt{N}} \leqslant \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{N} \geqslant \sqrt{n}\frac{\sigma'}{\sigma}.$$

En utilisant le résultat de 5.c, on a $\sigma'^2 \leqslant \frac{\sigma^2}{2}$ et donc $\frac{\sigma'}{\sigma} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ainsi, si $\sqrt{N} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$, on a bien $\sqrt{N} \geqslant \sqrt{n}\frac{\sigma'}{\sigma}$ et donc $\ell'_N \leqslant \ell_n$.

Autrement dit, il suffit de prendre $\boxed{N \geqslant \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1.}$

III. Réduction de la variance par stratification

7. Formule de Taylor-Lagrange pour une fonction de plusieurs variables

7.a.i. La fonction φ est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle admet un maximum et un minimum.
Et donc si on note m (respectivement M) le minimum (resp. le maximum) de φ sur $[a, b]$, ces valeurs sont atteintes : il existe $x_0 \in [a, b]$ et $x_1 \in [a, b]$ tels que $\varphi(x_0) = m$ et $\varphi(x_1) = M$.
Et donc $\boxed{\forall t \in [a, b],\ \varphi(x_0) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(x_1).}$

> **Min/max**
> Lorsqu'on dit que φ admet un maximum et un minimum, cela ne signifie pas seulement qu'elle est bornée, mais également qu'elle atteint ses valeurs extrémales.
> À titre de comparaison, la fonction arctangente est bornée sur **R**, mais n'admet ni maximum ni minimum.

7.a.ii. Pour tout $t \in [a, b]$, $(b-t)^n \geqslant 0$, de sorte que

$$\frac{(b-t)^n}{n!}\varphi(x_0) \leqslant \frac{(b-t)^n}{n!}\varphi(t) \leqslant \frac{(b-t)^n}{n!}\varphi(x_1).$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit donc que

$$\varphi(x_0)\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,dt \leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\varphi(t)\,dt \leqslant \varphi(x_1)\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\,dt.$$

Et donc, après calcul de ces deux intégrales,

$$\boxed{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\varphi(x_0) \leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\varphi(t)\,dt \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\varphi(x_1).}$$

7.a.iii. On a, d'après la question précédente,

$$\varphi(x_0) \leqslant \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\varphi(t)\,dt \leqslant \varphi(x_1).$$

La fonction φ étant continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\varphi(c) = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\varphi(t)\,dt$ soit encore

$$\boxed{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\varphi(t)\,dt = \varphi(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.}$$

7.b. Puisque g est $\mathscr{C}^2$, la formule de Taylor avec reste intégral montre que

$$g(b) = g(a) + (b-a)g'(a) + \int_a^b (b-t)g''(t)\,dt.$$

Et par la question précédente appliquée à la fonction continue g'' avec $n = 1$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b (b-t)g''(t)\,dt = g''(c)\frac{(b-a)^2}{2}$. Et alors

$$\boxed{g(b) = g(a) + g'(a)(b-a) + g''(c)\frac{(b-a)^2}{2}.}$$

> **Taylor-Lagrange**
> Cette formule est appelée égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. Elle est plus forte que l'inégalité du même nom, qui en est une conséquence immédiate si l'on majore $g''(c)$ par M, où M est un majorant de g'' sur $[a, b]$.

7.c. Il a été prouvé en cours que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ car f l'est, et que $g'(t) = \langle \nabla f(a+th), h\rangle$ et $g''(t) = q_{x+th}(h)$.
En lui appliquant le résultat de la question 7.b, il existe $\theta \in [0,1]$ tel que

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(\theta) \Leftrightarrow \boxed{f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2}q_{x+\theta h}(h).}$$

8. Étude d'une fonction de plusieurs variables

8.a. Les fonctions

$$(x_1,x_2,x_3) \mapsto 4x_1,\ (x_1,x_2,x_3) \mapsto x_2,\ (x_1,x_2,x_3) \mapsto 9x_3$$

sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^3$ et à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$. La fonction inverse étant $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^*$, on en déduit, par composition et par somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ que f est $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^3$. On a alors

$$\boxed{\nabla f(x_1,x_2,x_3) = \left(-\frac{1}{4x_1^2}, -\frac{1}{x_2^2}, -\frac{1}{9x_3^2}\right).}$$

De même, on a

$$\boxed{\partial^2_{1,1} f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2x_1^3},\ \partial^2_{2,2} f(x_1,x_2,x_3) = \frac{2}{x_2^3},\ \partial^2_{3,3} f(x_1,x_2,x_3) = \frac{2}{9x_3^3}.}$$

Et pour $\boxed{i \neq j,\ \partial^2_{i,j} f(x_1,x_2,x_3) = 0.}$

8.b. D'après ce qui précède, on a

$$\nabla^2 f(a_1,a_2,a_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9a_3^3} \end{pmatrix}$$

et donc si $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \neq 0$, il vient

$${}^tH\nabla^2 f(a_1,a_2,a_3)H = (h_1,h_2,h_3)\begin{pmatrix} \frac{h_1}{2a_1^3} \\ \frac{2h_2}{a_2^3} \\ \frac{2h_3}{9a_3^3} \end{pmatrix} = \frac{h_1^2}{2a_1^3} + \frac{2h_2^2}{a_2^3} + \frac{2h_3^2}{a_3^3} > 0.$$

Forme quadratique
On peut aussi remarquer que la hessienne de f en a n'a que des valeurs propres strictement positives, et donc pour $h \neq 0$, $q_a(h) > 0$.

8.c. (a_1,a_2,a_3) est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(a_1,a_2,a_3) = 0$.
Or nous avons calculé précédemment le gradient de f, qui ne peut s'annuler sur $]0,+\infty[^3$.
Donc f n'admet aucun point critique sur $]0,+\infty[^3$, et donc n'admet pas d'extremums locaux.

8.d. (a_1,a_2,a_3) est un point critique de f sous la contrainte $x_1+x_2+x_3 = 110$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3 = 110 \\ \nabla f(a_1,a_2,a_3) = \lambda(1,1,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+a_2+a_3 = 110 \\ -\frac{1}{4a_1^2} = \lambda \\ -\frac{1}{a_2^2} = \lambda \\ -\frac{1}{9a_3^2} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+a_2+a_3 = 110 \\ 4a_1^2 = a_2^2 = 9a_3^2 \end{cases}$$

Puisque a_1,a_2,a_3 sont positifs, on en déduit que $2a_1 = a_2 = 3a_3$.
Et donc la première équation devient $\frac{a_2}{2} + a_2 + \frac{a_2}{3} = 110 \Leftrightarrow a_2 = 60$.
Et donc f admet un unique point critique sous la contrainte $a_1+a_2+a_3 = 100$, qui est $(30,60,20)$.

Nous savons que $x = (x_1, x_2, x_3)$ vérifie la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$ si et seulement si

$$(x_1, x_2, x_3) = (30 + h_1, 60 + h_2, 20 + h_3) \text{ avec } h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathrm{Vect}(1, 1, 1)^{\perp}.$$

Notons $a = (30, 60, 20)$ le point critique de f sous la contrainte.
Ainsi, si $(x_1, x_2, x_3) = (30+h_1, 60+h_2, 20+h_3)$ vérifie $x_1+x_2+x_3 = 110$, d'après le résultat de la question 7.c, il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(30 + h_1, 60 + h_2, 20 + h_3) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2} q_{a+\theta h}(h).$$

Or, $\langle \nabla f(a), h\rangle = 0$ et par la question 8.b, $q_{a+\theta h} \geqslant 0$.
On en déduit que $f(x) \geqslant f(a)$, et donc f admet un minimum global en $a = (30, 60, 20)$ sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$.

Hypothèses

Le résultat de 7.c s'applique car pour tout $t \in [0, 1]$, $a + th \in]0, +\infty[^3$.

Remarque

Cette méthode prouve que le minimum est global sous la contrainte car la forme quadratique associée à la hessienne est positive **en tout point** de $]0, +\infty[^3$.
Le fait qu'elle soit positive en (30, 60, 20) ne permet de déterminer que la nature locale du minimum.

9. Méthode de stratification

9.a. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[T \in I_1], [T \in I_2], [T \in I_3]\}$, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$P(g(\tilde{U}) \leqslant x) = P(T \in I_1)P_{[T\in I_1]}(g(\tilde{U}) \leqslant x)+P(T \in I_2)P_{[T\in I_2]}(g(\tilde{U}) \leqslant x)+P(T \in I_3)P_{[T\in I_3]}(g(\tilde{U}) \leqslant x).$$

Or T suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, de sorte que

$$P(T \in I_1) = P(0 \leqslant T < a) = a,\ P(T \in I_2) = b - a,\ P(T \in I_3) = 1 - b.$$

De plus, la loi de $g(\tilde{U})$ sachant $[T \in I_1]$ est la loi de $g(U_1)$.
Donc $P_{[T\in I_1]}(g(\tilde{U}) \leqslant x) = P(g(U_1) \leqslant x)$.
De même, on a $P_{[T\in I_2]}(g(\tilde{U}) \leqslant x) = P(g(U_2) \leqslant x)$ et $P_{[T\in I_3]}(g(\tilde{U}) \leqslant x) = P(g(U_3) \leqslant x)$. On a donc

$$P(g(\tilde{U}) \leqslant x) = aP(g(U_1) \leqslant x) + (b - a)P(g(U_2) \leqslant x) + (1 - b)P(g(U_3) \leqslant x).$$

Si $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$ sont des variables à densité, alors leurs fonctions de répartition sont continues sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Et donc

$$x \mapsto F_{g(\tilde{U})}(x) = aF_{g(U_1)}(x) + (b - a)F_{g(U_2)}(x) + (1 - b)F_{g(U_3)}(x)$$

est également continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. On en déduit que $g(\tilde{U})$ est une variable à densité.
Si on dérive cette expression là où elle est dérivable[4], il vient

$$F'_{g(\tilde{U})}(x) = af_{g(U_1)}(x) + (b - a)f_{g(U_2)}(x) + (1 - b)f_{g(U_3)}(x).$$

[4] C'est-à-dire sauf en un nombre fini de points.

Puisqu'il est toujours possible de choisir arbitrairement la valeur d'une densité de $g(\tilde{U})$ là où $F_{g(\tilde{U})}$ n'est pas dérivable, on peut prendre pour densité de $g(\tilde{U})$ la fonction

$$f_{g(\tilde{U})} = af_{g(U_1)}(x) + (b - a)f_{g(U_2)}(x) + (1 - b)f_{g(U_3)}(x).$$

En particulier, si g est la fonction identité, alors les variables $g(U_1), g(U_2)$ et $g(U_3)$ suivent des lois uniformes sur respectivement $[0, a[$, $[a, b[$ et $[b, 1]$. On peut alors prendre comme densités respectives de U_1, U_2, U_3 les fonctions,

$$f_{U_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } 0 \leqslant x < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},\ f_{U_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant x < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},\ f_{U_3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-b} & \text{si } b \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et alors, $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f_{\tilde{U}}(x) = \begin{cases} a\dfrac{1}{a} & \text{si } 0 \leqslant x < a \\ (b-a)\dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant x < b \\ (1-b)\dfrac{1}{1-b} & \text{si } b \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît là la densité d'une loi uniforme sur $[0, 1]$, donc $\boxed{\tilde{U} \hookrightarrow \mathscr{U}([0, 1])}$.

9.b. Sous réserve de convergence, on a

$$E(g(\tilde{U})) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{g(\tilde{U})}(x)\,dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(U_1)}(x)\,dx + (b-a)\int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(U_2)}(x)\,dx + (1-b)\int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(U_3)}(x)\,dx.$$

Mais les $g(U_i)$ possèdent une espérance pour les mêmes raisons qu'à la question 1.a, et $E(g(U_i)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(U_i)}(x)\,dx$.
Donc $g(\tilde{U})$ possède bien une espérance, et on a

$$\boxed{E(g(\tilde{U})) = aE(g(U_1)) + (b-a)E(g(U_2)) + (1-b)E(g(U_3)).}$$

9.c. Les $U_{i,j}$ étant mutuellement indépendantes, il en est de même des $g(U_{i,j})$. Et donc

$$V(Z) = a^2\frac{1}{n_1^2}\sum_{i=1}^{n_1} V(g(U_{1,i})) + (b-a)^2\frac{1}{n_2^2}\sum_{i=1}^{n_2} V(g(U_{2,i})) + (1-b)^2\frac{1}{n_3^2}\sum_{i=1}^{n_3} V(g(U_{3,i})).$$

Mais pour tout $i \in [\![1, n_1]\!]$, $g(U_{1,i})$ a même loi que $g(U_1)$ et donc

$$\sum_{i=1}^{n_1} V(g(U_{1,i})) = n_1 V(g(U_1)).$$

En procédant de même pour les $g(U_{2,i})$ et $g(U_{3,i})$ on en conclut que

$$\boxed{V(Z) = a^2\frac{1}{n_1}V(g(U_1)) + (b-a)^2\frac{1}{n_2}V(g(U_2)) + (1-b)^2\frac{1}{n_3}V(g(U_3)).}$$

9.d. *Application numérique*
Notons que

$$\begin{aligned} E(Z) &= a\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} E(g(U_{1,i})) + (b-a)\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} E(g(U_{2,i})) + (1-b)\frac{1}{n_3}\sum_{i=1}^{n_3} E(g(U_{3,i})) \\ &= aE(g(U_1)) + (b-a)E(g(U_2))) + (1-b)E(g(U_3)) = E(g(U)) = J. \end{aligned}$$

Ainsi, Z est un estimateur sans biais de J, de sorte que son risque quadratique est égal à sa variance.

Cette variance vaut donc $V(Z) = \dfrac{1}{4n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{9n_3}$.
Puisque l'on tire 110 points, il faut donc avoir $n_1 + n_2 + n_3 = 110$.
Par le résultat de la question 8.d, la valeur de $V(Z)$ est alors minimale pour $n_1 = 30, n_2 = 60$ et $n_3 = 20$.

Précision
L'énoncé est relativement vague lorsqu'il évoque «le plus petit risque d'erreur possible». Interprétons donc cela comme le risque quadratique de Z en tant qu'estimateur de J.

ECRICOME 2007

Exercice 1

Sujet : Étude d'une série alternée.

Abordable en première année : ✓ **Moyen**

Intérêt : ★★★

Thèmes du programme abordés : suites et séries numériques, développements limités.

Commentaires : très bon exercice pour s'entraîner à l'étude des séries.

1. Montrer que lorsque x est au voisinage de 0 on a :

$$\ln(2-e^x) = -x - x^2 + o(x^2)$$

2. a. Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$2 - e^{1/k} \in]0,1[$$

   b. En déduire le signe de $\ln(2-e^{1/k})$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2.

   c. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(2-e^{1/k})$?

   d. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose :

$$V_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(2-e^{1/k}) \text{ et } u_n = \exp V_n.$$

   Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. a. Montrer que :

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n}\left[\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]$$

   b. Déterminer un équivalent, quand k tend vers $+\infty$, de $\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

   c. En déduire que u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à $\frac{K}{n}$ avec $K>0$.
   Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

4. On pose

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k u_k.$$

   a. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

   b. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont deux suites adjacentes.

   c. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Exercice 2

Sujet : Sous-multiplicativité de la norme canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Abordable en première année : ✗ **Moyen**

Intérêt : ★★☆

Thèmes du programme abordés : produit scalaire, matrices, réduction des matrices symétriques.

Commentaires : le résultat pourrait se prouver par d'autres moyens, mais la preuve proposée est assez jolie. Bon entraînement à la manipulation de la trace et de la formule du produit matriciel pour des matrices qui ne sont pas toujours carrées.

$\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$, à coefficients réels.
Pour tout élément $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de A et ${}^tA$ la transposée de A.

1. Soit φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ \varphi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) \text{ (où } {}^tAB = {}^tA \times B).$$

   Exprimer $\varphi(A,B)$ en fonction des coefficients de A et de B et montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   On note N la norme associée à ce produit scalaire.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Le but de cette question est prouver que

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

a. Justifier l'existence de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que

$$^tP(^tAA)P = D$$

où P est une matrice orthogonale et D une matrice diagonale.
On notera par la suite λ_i le coefficient $d_{i,i}$ de la matrice $D = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

b. Soit λ une valeur propre de ^tAA et X un vecteur propre associé.
En calculant $^tX^tAAX$ de deux manières différentes, montrer que $\lambda \geqslant 0$.

c. On pose $S = {}^tP(B^tB)P = (s_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que :

$$[N(A)]^2 = \mathrm{Tr}(D),\ [N(B)]^2 = \mathrm{Tr}(S),\ [N(AB)]^2 = \mathrm{Tr}(SD).$$

d. Montrer que

$$\mathrm{Tr}(SD) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,i}.$$

e. On note E_i le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, espace des matrices à n lignes et une colonne à coefficients réels. Montrer que

$$^tE_iSE_i = \|^tBPE_i\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, puis calculer $^tE_iSE_i$ en fonction des coefficients de S.
Qu'en déduit-on, pour i entier compris entre 1 et n, sur le signe de $s_{i,i}$?

f. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,i} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} s_{i,i}\right)$$

puis conclure que

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

Problème

Sujet : Méthode du maximum de vraisemblance pour l'étude des paramètres d'une loi exponentielle décalée. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : variables à densité, fonctions de plusieurs variables, estimation ponctuelle, `Scilab` .

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Le préliminaire, les parties I et II sont indépendants.

Préliminaire

On considère deux variables aléatoires à densité X et Y définies sur un même espace probabilisé, admettant des variances $V(X)$ et $V(Y)$. On suppose $V(X) > 0$. On définit alors la covariance de X et Y par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

On admet que sous les conditions de l'énoncé, $E(XY)$ existe bien.

1. Montrer que pour tout nombre réel λ,

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y).$$

2. a. En étudiant le signe du trinôme précédent, montrer que

$$(\mathrm{Cov}(X,Y))^2 \leqslant V(X)V(Y).$$

b. À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité

$$(\mathrm{Cov}(X,Y))^2 = V(X)V(Y)\,?$$

Partie I : Étude d'une fonction de plusieurs variables
n désigne un entier naturel non nul, A et S deux réels positifs vérifiant $S > nA$.
On définit sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ la fonction L_n par

$$\begin{cases} L_n(a,b) = \dfrac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(-na+S)} & \text{si } 0 \leqslant a \leqslant A \\ L_n(a,b) = 0 & \text{si } a > A \end{cases}$$

3. Justifier que L_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $]0, A[\times]0; +\infty[$. Montrer que L_n n'admet pas d'extremum sur cet ouvert.
4. Montrer que
$$\forall a \in [0, A[, \forall b \in]0, +\infty[, L_n(a,b) < L_n(A,b).$$
Montrer que ce résultat est encore vrai pour tout a de $]A, +\infty[$.
5. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(b) = L_n(A,b)$.
Montrer que g admet un maximum absolu sur $]0, +\infty[$, atteint en un point b_0 que l'on exprimera en fonction de A, S et n.
6. Déduire de ce qui précède que L_n admet sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ un maximum absolu atteint en un unique point (a_0, b_0) que l'on précisera.

Partie II : Étude d'une loi
Soit $a \geqslant 0$ et $b > 0$. On considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}} & \text{si } x \geqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

7. Vérifier que $f_{a,b}$ est bien une densité de variable aléatoire. On note $\mathscr{E}(a,b)$ la loi associée.

   On considère désormais une variable aléatoire X de loi $\mathscr{E}(a,b)$.
8. Déterminer la fonction de répartition de X.
9. On pose $Y = X - a$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.
En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
10. Soit $p \in \mathbf{N}$. Montrer que X admet un moment d'ordre p, $E(X^p)$, et pour $p > 0$, déterminer une relation liant $E(X^p)$ et $E(X^{p-1})$.
11. **Simulation de la loi** $\mathscr{E}(a,b)$
    a. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$. Montrer que la variable aléatoire $-b\ln(1-U) + a$ suit une loi $\mathscr{E}(a,b)$.
    b. On rappelle qu'en `Scilab`, la fonction `rand()` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$.
    Écrire une fonction `tirage`, de paramètres `a` et `b` simulant une variable aléatoire de loi $\mathscr{E}(a,b)$.

Partie III : Estimation des paramètres a et b
a et b désignent toujours deux réels tels que $a \geqslant 0$ et $b > 0$. On considère désormais une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \geqslant 1}$, indépendantes, identiquement distribuées, de loi $\mathscr{E}(a,b)$.
Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère les variables aléatoires S_n et Y_n définies par

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \text{ et } Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n).$$

Le but de cette partie est de déterminer des estimateurs de a et b.

12. On suppose que la fonction `tirage` de la question 11.b est bien définie, et que `a`,`b` et `n` sont également déjà définies.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule les variables aléatoires S_n et Y_n, les résultats étant stockés respectivement dans les variables `S` et `Y`.

```
X = tirage(a,b) ;
S = ....
Y = ....
for i = 1 :n-1
  ....
  ....
  ....
end
```

13. Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

14. Quelle est la loi suivie par chacune des variables $\dfrac{X_i - a}{b}$?

En déduire la loi suivie par $U_n = \dfrac{X_1 - a}{b} + \dfrac{X_2 - a}{b} + \cdots + \dfrac{X_n - a}{b}$.

Déterminer une densité de U_n et en déduire une densité de S_n.

15. **a.** Déterminer la fonction de répartition de Y_n. En déduire que Y_n suit une loi $\mathcal{E}(a_n, b_n)$ (on précisera a_n et b_n). Donner les valeurs de $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

b. Calculer le biais ainsi que le risque quadratique de Y_n en tant qu'estimateur de a.

c. À l'aide de ce qui précède, prouver que (Y_n) est une suite d'estimateurs de a, asymptotiquement sans biais et convergente.

16. On pose $Z_n = \dfrac{S_n}{n} - Y_n$.

a. Calculer le biais de Z_n en tant qu'estimateur de b.

b. On note $r_{Z_n}(b)$ le risque quadratique de Z_n en tant qu'estimateur de b. Montrer que

$$r_{Z_n}(b) = \frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n}\mathrm{Cov}(S_n, Y_n).$$

c. À l'aide du préliminaire, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} r_{Z_n}(b) = 0$$

et en déduire que (Z_n) est une suite d'estimateurs de b, asymptotiquement sans biais et convergente.

17. Pour un échantillon donné $(x_1, \ldots, x_n)$ avec $\min(x_1, \ldots, x_n) \neq \max(x_1, \ldots, x_n)$, correspondant à une réalisation des n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, on définit la fonction L sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^{n} f_{a,b}(x_i).$$

a. Montrer que L est la fonction L_n définie dans la partie I, pour des valeurs de A et S que l'on précisera en fonction des x_i.

b. Comparer les estimations de a et b obtenues sur l'échantillon $(x_1, \ldots, x_n)$ à partir de Y_n et Z_n avec les valeurs a_0 et b_0 obtenues dans la partie I.

ECRICOME 2007 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. La fonction $\varphi : x \mapsto \ln(2-e^x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0, avec

$$\varphi'(x) = \frac{e^x}{e^x-2} \text{ et } \varphi''(x) = \frac{-2e^x}{(e^x-2)^2}.$$

D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, on a alors

$$\ln(2-e^x) \underset{0}{=} \varphi(0) + \varphi'(0)x + \varphi''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2) = \boxed{-x-x^2+o(x^2).}$$

2.a. Pour $k \geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{k} > 0$, donc $e^{\frac{1}{k}} > 1$ et donc $2-e^{1/k} < 1$.
D'autre part, $\dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{2}$ et donc $e^{1/k} \leqslant e^{1/2}$.
Puisque $e < 4$, $e^{1/2} < 2$, et donc $e^{1/k} < 2$, de sorte que $2-e^{1/k} > 0$.

2.b. Nous savons que pour $x \in]0,1[$, $\ln(x) < 0$, donc pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $\boxed{\ln(2-e^{1/k}) < 0}$.

2.c. Lorsque $k \to +\infty$, alors $\dfrac{1}{k} \to 0$, donc on peut utiliser l'équivalent fourni par la première question : $\ln(2-e^{1/k}) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{k}$.
Mais nous savons que la série de terme général $\frac{1}{k}$ diverge, et donc par critère de comparaison pour les séries de signe constant[1], $\boxed{\text{la série de terme général } \ln(2-e^{1/k}) \text{ diverge.}}$

2.d. (V_n) est une suite décroissante car suite des sommes partielles d'une série dont le terme général est toujours négatif. De plus, cette série diverge, donc (V_n) est divergente. Mais une suite décroissante et divergente admet nécessairement $-\infty$ comme limite : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty.}$

Et alors, par composition de limites, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

3.a. D'une part, on a $\ln(nu_n) = \ln(n) + \ln(u_n) = \ln(n) + V_n$.
D'autre part, notons que

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - \ln(k).$$

Nous reconnaissons là une somme télescopique :

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \ln(1)-\ln(2)+\ln(2)-\ln(3)+\cdots+\ln(n-2)-\ln(n-1)+\ln(n-1)-\ln(n) = -\ln(n).$$

Et donc

$$\sum_{k=2}^{n}\left[\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right] = V_n - (-\ln(n)) = V_n + \ln(n) = \boxed{\ln(nu_n).}$$

3.b. Nous savons que $\ln(2-e^{1/k}) = -\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k^2} + o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) = -\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{k^2} + o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$, donc on en déduit que

$$\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ et donc } \boxed{\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^2}.}$$

DL/équivalents
Un développement limité fourni un équivalent : il suffit de prendre le premier terme **non nul** de la partie principale, donc ici
$$\ln(2-e^x) \underset{0}{\sim} -x$$

[1] $-\frac{1}{k}$ est de signe constant !

Terminologie
Une suite qui a une limite égale à $\pm\infty$ est divergente (même si elle admet une limite) !

☠ Danger !
On n'ajoute pas les équivalents ! Si l'on cherche un équivalent d'une somme, on passe par des développements limités.

3.c. Grâce à l'équivalent obtenu à la question précédente, par critère de comparaison pour les séries de signe constant (négatif ici car $-\frac{1}{2k^2} \leqslant 0$), on en déduit que la série de terme général $\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ converge, et donc il existe une constante A telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right] = A.$$

Notons que cette constante A n'est autre que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \left[\ln(2-e^{1/k}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]$.

Ainsi, $\ln(nu_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$, donc $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^A$.

Ceci signifie alors que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^A$ et donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^A}{n}.}$

On retrouve bien le résultat cherché avec $K = e^A > 0$.

Comme la série de terme général $\frac{K}{n}$ est divergente, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ est divergente.}}$

> **Rappel**
> Une série converge si et seulement si la **suite** de ses sommes partielles converge.

4.a. Nous avons déjà expliqué précédemment que (V_n) est décroissante, donc par croissance de l'exponentielle, $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

4.b. On a

$$S_{2n} - S_{2(n+1)} = \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n+2} (-1)^k u_k = u_{2n+1} - u_{2n+2} \geqslant 0$$

et donc $(S_{2n})_n$ est décroissante. De même, on a

$$S_{2n+1} - S_{2(n+1)+1} = \sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n+3} (-1)^k u_k = u_{2n+3} - u_{2n+2} \leqslant 0$$

donc $(S_{2n+1})_n$ est croissante. Enfin, on a

$$S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci achève bien de prouver que $\boxed{\text{les deux suite } (S_{2n})_n \text{ et } (S_{2n+1})_n \text{ sont adjacentes.}}$

> **Définition**
> Deux suite (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :
> • l'une est croissante
> • l'autre est décroissante
> • $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$

4.c. Deux suites adjacentes sont toutes deux convergentes et convergent vers une même limite.
Soit donc ℓ la limite commune aux deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).
Ainsi, les deux suites extraites de (S_n) formées respectivement des termes d'ordre pair et des termes d'ordre impair convergent vers la même limite ℓ, donc (S_n) converge également vers ℓ.
Mais (S_n) est la suite des sommes partielles de la série de terme général $(-1)^n u_n$. Par définition, ceci signifie que $\boxed{\text{la série de terme général } (-1)^n u_n \text{ est convergente.}}$

Exercice 2

1. Notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(A,B) = \operatorname{Tr}({}^tAB) &= \sum_{i=1}^{n} ({}^tAB)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} ({}^tA)_{i,k} b_{k,i} \\ &= \boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i} b_{k,i}.}\end{aligned}$$

> Le coefficient (i,j) de ${}^tA$ est, par définition de la transposée, le coefficient (j,i) de A.

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a alors

$$\varphi(A,B) = \operatorname{Tr}({}^tAB) = \operatorname{Tr}({}^t({}^tAB)) = \operatorname{Tr}({}^tBA) = \varphi(B,A).$$

Donc φ est symétrique.
Pour $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\varphi(\lambda A+B, C) = \mathrm{Tr}({}^t(\lambda A+B)C) = \mathrm{Tr}(\lambda {}^tAC+{}^tBC) = \lambda\mathrm{Tr}({}^tAC)+\mathrm{Tr}({}^tBC) = \lambda\varphi(A,C)+\varphi(B,C).$$

Donc φ est linéaire à gauche, et étant symétrique, elle est bilinéaire symétrique.
Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a

$$\varphi(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \geqslant 0.$$

Enfin, une somme de nombres positifs étant nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul, on a

$$\varphi(A,A) = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Et donc $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$

2.a. La matrice ${}^tAA$ est symétrique car ${}^t({}^tAA) = {}^tAA$.
Et donc elle est diagonalisable en base orthonormée : il existe P orthogonale et D diagonale telles que ${}^tAA = PD{}^tP \Leftrightarrow \boxed{{}^tP({}^tAA)P = D.}$

2.b. D'une part, on a

$${}^tX{}^tAAX = {}^tX\lambda X = \lambda {}^tXX = \lambda\|X\|^2.$$

D'autre part, on a

$${}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2.$$

Donc déjà, ${}^tX{}^tAAX \geqslant 0$, et donc $\lambda\|X\|^2 \geqslant 0$.
Mais X est un vecteur propre, donc n'est pas nul : $\|X\| > 0$.
Et donc, en divisant $\lambda\|X\|^2 \geqslant 0$ par $\|X\|^2 > 0$, il vient $\boxed{\lambda \geqslant 0.}$

Détail
Ici $\|\cdot\|$ désigne la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Autrement dit, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors

$$\|X\|^2 = {}^tXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

2.c. On a $N(A)^2 = \varphi(A,A) = \boxed{\mathrm{Tr}({}^tAA).}$
Or nous avons prouvé en 2.a que ${}^tAA$ et D sont semblables, et deux matrices semblables ont même trace, donc $N(A)^2 = \boxed{\mathrm{Tr}(D).}$
De même, S et $B{}^tB$ sont semblables, donc

$$\mathrm{Tr}(S) = \mathrm{Tr}(B{}^tB) = \mathrm{Tr}({}^tBB) = \varphi({}^tBB) = N(B)^2.$$

Enfin, ${}^t(AB)AB = {}^tB{}^tAAB = {}^tBPD{}^tPB$ et donc

$$N(AB)^2 = \varphi(AB,AB) = \mathrm{Tr}({}^t(AB)AB) = \mathrm{Tr}({}^tBPD{}^tPB) = \mathrm{Tr}({}^tP(B{}^tB)PD) = \boxed{\mathrm{Tr}(SD).}$$

Rappel
La trace d'un produit ne dépend pas de l'ordre dans lequel on fait ce produit : $\mathrm{Tr}({}^tBB) = \mathrm{Tr}(B{}^tB)$.

2.d. Utilisons le calcul effectué à la question 1 :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(SD) = \mathrm{Tr}({}^tDS) &= \varphi(D,S)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{k,i}s_{k,i}\\ &= \sum_{i=1}^{n} d_{i,i}s_{i,i}\\ &= \boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,i}.}\end{aligned}$$

D est diagonale, donc $d_{k,i} = 0$ si $k \neq i$.

2.e. Revenons à la définition de S :

$${}^tE_iSE_i = {}^tE_i{}^tPB{}^tBPE_i = {}^t({}^tBPE_i){}^tBPE_i = \|{}^tBPE_i\|^2.$$

Notons que SE_i est un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, que ${}^tE_i$ est un vecteur de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ et donc ${}^tE_iSE_i \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.
On a

$$(SE_i)_j = (SE_i)_{j,1} = \sum_{k=1}^{n} s_{j,k}(E_i)_{k,1} = s_{j,i}.$$

Détails

$$(E_i)_{k,1} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}$$

Autrement dit, $SE_i = \begin{pmatrix} s_{1,i} \\ s_{2,i} \\ \vdots \\ s_{n,i} \end{pmatrix}$.

Puis il vient

$$^tE_iSE_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{1,i} \\ s_{2,i} \\ \vdots \\ s_{n,i} \end{pmatrix} = \boxed{s_{i,i}.}$$

Puisque $\|^tBPE_i\|^2 \geqslant 0$ on a donc $\boxed{s_{i,i} \geqslant 0.}$

2.f. On a

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^n s_{i,i}\right) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{j=1}^n s_{j,j}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i s_{j,j} = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{i,i} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n \lambda_i s_{j,j}.$$

Or, les λ_i sont les valeurs propres de ^tAA, donc par la question 2.b sont positifs.
D'autre part, les $s_{j,j}$ sont positifs d'après la question 2.e, et donc

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n \lambda_i s_{j,j} \geqslant 0.$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^n s_{i,i}\right) \geqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{i,i}.}$$

D'après la question 2.c, on a $N(AB)^2 = \mathrm{Tr}(SD)$, $N(A)^2 = \mathrm{Tr}(D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et $N(B)^2 = \mathrm{Tr}(S) = \sum_{i=1}^n s_{i,i}$. Et donc on a

$$N(AB)^2 \leqslant N(A)^2 N(B)^2.$$

Une norme étant positive, il vient donc

$$\boxed{N(AB) \leqslant N(A)N(B).}$$

Problème

Préliminaire

1. Si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors par la formule de Huygens,

$$\begin{aligned} V(\lambda X + Y) =& E((\lambda X + Y)^2) - E(\lambda X + Y)^2 \\ =& \lambda^2 E(X^2) + 2\lambda E(XY) + E(Y^2) - (\lambda E(X) + E(Y))^2 \\ =& \lambda^2 E(X^2) + 2\lambda E(XY) + E(Y^2) - \lambda^2 E(X)^2 - 2\lambda E(X)E(Y) - E(Y)^2 \\ =& \lambda^2 (E(X^2) - E(X)^2) + 2\lambda (E(XY) - E(X)E(Y)) + (E(Y^2) - E(Y)^2) \\ =& \boxed{\lambda^2 V(X) + 2\lambda \mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y).} \end{aligned}$$

2.a. Puisqu'une variance est toujours positive, le trinôme en λ obtenu à la question précédente est toujours positif ou nul, de sorte que son discriminant est négatif ou nul.
Mais ce discriminant vaut : $4\mathrm{Cov}(X,Y)^2 - 4V(X)V(Y)$, et donc

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y)^2 \leqslant V(X)V(Y).}$$

Remarque

Puisque X est à densité, ce n'est pas une variable certaine et donc $V(X) \neq 0$. Ainsi, nous avons bien ici un polynôme en λ de degré exactement deux.

2.b. On a égalité dans la question précédente si et seulement si le discriminant du trinôme est nul.
Alors c'est qu'il possède une unique racine $\lambda = -\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)}$.
Et alors pour ce λ, $V(\lambda X + Y) = 0$.
Mais une variable aléatoire est de variance nulle si et seulement si elle est constante presque sûrement, c'est-à-dire s'il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que

$$P(\lambda X + Y = b) = 1.$$

Inversement, s'il existe un b tel que $P(\lambda X + Y = b) = 1$, alors $V(\lambda X + Y) = 0$, et donc le trinôme en λ des questions précédentes possède au moins une racine. Comme il en possède au plus une, c'est que son discriminant est nul, et donc $\mathrm{Cov}(X,Y)^2 = V(X)V(Y)$.

Ainsi, $\mathrm{Cov}(X,Y)^2 = V(X)V(Y)$ si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $P(aX + Y = b) = 1$.

Remarque
La preuve est essentiellement la même que celle qu'on a donné du même résultat (formulé en termes de corrélation linéaire) pour des variables discrètes.

Partie I : Étude d'une fonction de plusieurs variables

3. La fonction $(a,b) \mapsto \dfrac{1}{b^n}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,A[\times]0,+\infty[$ car inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas.
De même, la fonction $(a,b) \mapsto -\dfrac{1}{b}(-na+S)$ est polynomiale donc $\mathscr{C}^1$, et par composition avec la fonction exponentielle qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, $(a,b) \mapsto e^{-\frac{1}{b}(-na+S)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,A[\times]0,+\infty[$.

Alors L_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,A[\times]0,+\infty[$ comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

On a alors

$$\partial_1 L_n(a,b) = \frac{n}{b^{n+1}} e^{-\frac{1}{n}(-na+S)}$$

qui ne s'annule pas[2] sur l'ouvert $]0,A[\times]0,+\infty[$, donc L_n n'y admet pas de point critique, et par conséquent pas d'extremum[3].

[2] Car une exponentielle n'est jamais nulle.

[3] Ni local, ni global.

4. Pour $b \in]0,+\infty[$ fixé, la fonction $a \mapsto e^{-\frac{1}{b}(-na+S)}$ est strictement croissante sur $]0,A]$, et donc

$$\forall a \in]0,A[, e^{-\frac{1}{b}(-na+S)} < e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}.$$

Et donc, par multiplication par $\dfrac{1}{b^n} > 0$,

$$\boxed{\forall a \in]0,A[, \forall b \in]0,+\infty[, L_n(a,b) = \frac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(-na+S)} < \frac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)} = L_n(A,b).}$$

Enfin, si $a > A$, alors $\forall b \in]0,+\infty[$, $L_n(a,b) = 0$ et $L_n(A,b) > 0$, donc

$$\boxed{\forall a > A, \forall b \in]0,+\infty[, L_n(a,b) < L_n(A,b).}$$

5. g est donc la fonction d'une seule variable réelle définie par $g(b) = \dfrac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}$.
Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et sa dérivée vaut

$$g'(b) = \left(-\frac{n}{b^{n+1}} + \frac{-nA+S}{b^{n+2}}\right) e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}.$$

On a alors

$$g'(b) = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{b^{n+1}} = \frac{-nA+S}{b^{n+2}} \Leftrightarrow nb = -nA + S \Leftrightarrow b = -A + \frac{S}{n}.$$

Posons alors $b_0 = -A + \dfrac{S}{n}$. Pour $b < b_0$, on a $g'(b) > 0$ et pour $b > b_0$, $g'(b) < 0$.
Donc g est strictement croissante sur $]0, b_0[$ et strictement décroissante sur $]b_0, +\infty[$: elle possède un unique maximum global en b_0.

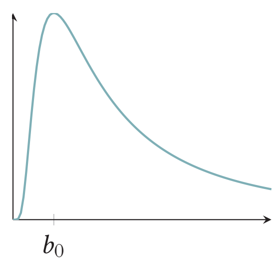


FIGURE 1– La fonction g.

6. Nous venons de prouver que $\forall b \in]0, \infty[, L_n(A, b) \leqslant L_n(A, b_0)$.
Et donc en reprenant le résultat de la question 4,

$$\forall a \in]0, +\infty[, \forall b \in]0, +\infty[, L_n(a, b) \leqslant L_n(A, b) \leqslant L_n(A, b_0).$$

$\boxed{\text{Ainsi } L_n \text{ possède en } (A, b_0) \text{ un maximum global.}}$

De plus, si $a \neq A$, alors nous avons déjà prouvé que $L_n(a, b) < L_n(A, b) \leqslant L_n(A, b_0)$, et si $b \neq b_0$, alors $L_n(a, b) \leqslant L_n(A, b) < L_n(a, b_0)$.

$\boxed{\text{Donc le minimum de } L_n \text{ est bien atteint en un unique point } \left(A, -A + \frac{S}{n}\right).}$

Unicité

Si $(a, b) \neq (A, b_0)$, alors $a \neq A$ et/ou $b \neq b_0$ et donc $L_n(a, b) < L_n(A, b_0)$.

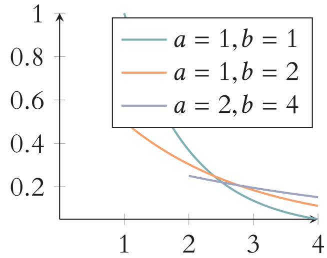


FIGURE 2– La densité $f_{a,b}$ pour différentes valeurs de a et b.

Partie II : Étude d'une loi

7. La fonction f_n est clairement positive sur $\mathbf{R}$, et elle est continue sur $]-\infty, a[$, et sur $]a, +\infty[$.
De plus, pour $X > a$, on a

$$\int_{-\infty}^{X} f_{a,b}(x)\, dx = \int_a^X \frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}}\, dx = \left[-e^{-\frac{x-a}{b}}\right]_a^X = 1 - e^{-\frac{X-a}{b}} \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc on a $\int_{-\infty}^{\infty} f_{a,b}(x)\, dx = 1$ et par conséquent, $\boxed{f_{a,b} \text{ est bien une densité de probabilités.}}$

8. Soit $x \in \mathbf{R}$. Par définition, on a

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Si $x \leqslant a$, alors $F_X(x) = 0$.
Si $x \geqslant a$, alors en reprenant le calcul de la question précédente,

$$F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b} e^{-\frac{t-a}{b}}\, dt = 1 - e^{-\frac{x-a}{b}}.$$

Ainsi, la fonction de répartition de X est

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ 1 - e^{-\frac{x-a}{b}} & \text{sinon} \end{cases}}$$

9. Si $x \in \mathbf{R}$, alors

$$P(Y \leqslant x) = P(X - a \leqslant x) = P(X \leqslant x + a) = \begin{cases} 0 & \text{si } x + a \leqslant a \Leftrightarrow x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{b}} & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît alors la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$, donc

$$\boxed{Y = X - a \hookrightarrow \mathscr{E}\left(\frac{1}{b}\right).}$$

On en déduit que $\boxed{E(X) = E(Y) + a = a + b \text{ et } V(X) = V(Y + a) = V(Y) = b^2.}$

10. Nous allons prouver cette propriété par récurrence sur p.
Notons que nous savons déjà que X admet une variance, donc admet des moments d'ordre 1 et 2.
Supposons donc que X admette un moment d'ordre p.
Alors, d'après le théorème de transfert X admet un moment d'ordre $p + 1$ si et seulement $\int_a^{+\infty} t^{p+1} \frac{1}{b} e^{-\frac{t-a}{b}}\, dt$ converge absolument[4], et si c'est le cas, $E(X^{p+1})$ est égal à la valeur de cette intégrale.
Procédons à une intégration par parties sur un segment de la forme $[a, X]$, en posant $u(t) = t^{p+1}$ et $v(t) = -e^{-\frac{t-a}{b}}$, qui sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a, X]$, avec $u'(t) = (p+1)t^p$ et $v'(t) = \frac{1}{b} e^{-\frac{t-a}{b}}$. Il vient alors

$$\int_a^X \frac{t^{p+1}}{b} e^{-\frac{t-a}{b}}\, dt = \left[-t^{p+1} e^{-\frac{t-a}{b}}\right]_a^X + (p+1) \int_a^X t^p e^{-\frac{t-a}{b}}\, dt = a^{p+1} - X^{p+1} e^{-\frac{X-a}{b}} + b(p+1) \int_a^X \frac{t^p}{b} e^{-\frac{t-a}{b}}\, dt.$$

[4] Mais puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive, la convergence absolue est équivalente à la convergence.

Mais par croissances comparées, $X^{p+1}e^{-\frac{X-a}{b}} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et par hypothèse de récurrence,

$$\int_a^X \frac{t^p}{b} e^{-\frac{t-a}{b}}\,dt = \int_{-\infty}^X t^p f_{a,b}(t)\,dt \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} E(X^p).$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{p+1} f_{a,b}(t)\,dt = \int_a^{+\infty} t^{p+1} f_{a,b}(t)\,dt$ converge, de sorte que $E(X^{p+1})$ existe, et on a

$$E(X^{p+1}) = a^{p+1} + b(p+1)E(X^p).$$

Par le principe de récurrence, $E(X^p)$ existe pour tout p, et on a $E(X^{p+1}) = a^{p+1} + b(p+1)E(X^p)$, soit encore

$$\boxed{E(X^p) = a^p + bpE(X^{p-1}).}$$

Notons que cette relation est encore valable pour $p = 2$ car

$$E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = b^2 + (a+b)^2 = 2b^2 + a^2 + 2ab = a^2 + 2bE(X).$$

11.a. Si l'on utilise la question 9, $-b\ln(1-U) + a$ suit une loi $\mathscr{E}(a,b)$ si et seulement si $Y = -b\ln(1-U)$ suit une loi $\mathscr{E}\left(\frac{1}{b}\right)$.

Or, pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$P(Y \leqslant x) = P(-b\ln(1-U) \leqslant x) = P\left(\ln(1-U) \geqslant \frac{-x}{b}\right) = P\left(1-U \geqslant e^{-\frac{x}{b}}\right) = P\left(U \leqslant 1-e^{-\frac{x}{b}}\right).$$

Mais U suivant une loi uniforme sur $[0,1[$, on sait que

$$P\left(U \leqslant 1-e^{-\frac{x}{b}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1-e^{-\frac{x}{b}} \leqslant 0 \\ 1-e^{-\frac{x}{b}} & \text{si } 1-e^{-\frac{x}{b}} \in [0,1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or pour $x < 0$, $1-e^{-\frac{x}{b}} \leqslant 0$. Et puisque $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^{-\frac{x}{b}} > 0$, on n'a jamais $1-e^{-\frac{x}{b}} \geqslant 1$.
Ainsi, on a bien,

$$P(Y \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1-e^{-\frac{x}{b}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ainsi, Y suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$, et donc $\boxed{Y + a = -b\ln(1-U) + a \text{ suit une loi } \mathscr{E}(a,b).}$

11.b. Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente :

```
function y = tirage(a,b)
   y =-b*log(1-rand())+a ;
endfunction
```

Partie III : Estimation des paramètres a et b

12. Notons que la boucle n'allant que de 1 à $n-1$, il faudra simuler X_1 avant l'entrée dans la boucle.

```
X = tirage(a,b) ;
S = X ;
Y = X ;
for i=1 :n-1
   r = tirage(a,b) ;
   S = S+r ;
   Y = min(Y,r) ;
end
```

13. Par linéarité de l'espérance, on a $\boxed{E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n(a+b).}$

Et par indépendance des X_i, il vient $\boxed{V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = nb^2.}$

14. Puisque $X_i - a$ suit une loi $\mathscr{E}\left(\frac{1}{b}\right)$, alors $\frac{1}{b}(X_i - a) = \frac{X_i - a}{b}$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Rappel
$X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ si et seulement si $\lambda X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.

Comme les X_i sont indépendantes, il en est de même des $\frac{X_i - a}{b}$. Et puisque ces dernières suivent une loi $\mathscr{E}(1) = \gamma(1)$, par stabilité des loi γ,

$$U_n = \frac{X_1 - a}{b} + \cdots + \frac{X_n - a}{b} \hookrightarrow \gamma(n).$$

Par conséquent une densité de U_n est

$$f_{U_n} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Et alors comme $S_n = bU_n + na$, par transformation affine, une densité de S_n est

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{b} f_{U_n}\left(\frac{x - na}{b}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x-na}{b} \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant na \\ \frac{1}{(n-1)!} \frac{(x-na)^{n-1}}{b^n} e^{-\frac{x-na}{b}} & \text{sinon} \end{cases}}$$

15.a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $[Y_n > x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]$. Et donc par indépendance des X_i, il vient

$$P(Y_n > x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = \left(1 - F_{X_1}(x)\right)^n$$

de sorte que, en passant à l'événement contraire

$$F_{Y_n}(x) = 1 - P(Y_n > x) = 1 - \left(1 - F_{X_1}(x)\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ 1 - e^{-\frac{n(x-a)}{b}} & \text{si } x \geqslant a \end{cases}$$

On reconnaît là la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{E}\left(a, \frac{b}{n}\right)$, donc

$$\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathscr{E}\left(a, \frac{b}{n}\right).}$$

Par conséquent, en utilisant les résultats de la partie II, on a

$$\boxed{E(Y_n) = a + \frac{b}{n} \text{ et } V(Y_n) = \frac{b^2}{n^2}.}$$

15.b. Par définition, le biais de Y_n en tant qu'estimateur de a est

$$b_a(Y_n) = E(Y_n) - a = \boxed{\frac{b}{n}.}$$

Et alors le risque quadratique de Y_n en a est

$$r_a(Y_n) = b_a(Y_n)^2 + V(Y_n) = \frac{b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n^2} = \boxed{\frac{2b^2}{n^2}.}$$

15.c. On a $b_a(Y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\boxed{Y_n \text{ est un estimateur asymptotiquement sans biais de } a.}$

Et puisque $r_a(Y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\boxed{Y_n \text{ est un estimateur convergent de } a.}$

16.a. Par linéarité de l'espérance,

$$E(Z_n) = \frac{1}{n} E(S_n) - E(Y_n) = a + b - a - \frac{b}{n} = \frac{n-1}{n} b.$$

Et donc le biais de Z_n en b est

$$\boxed{b_{Z_n}(b) = E(Z_n) - b = -\frac{b}{n}.}$$

16.b. En utilisant la décomposition biais-variance du risque quadratique, il vient

$$r_{Z_n}(b) = \frac{b^2}{n^2}+V(Z_n) = \frac{b^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}V(S_n)+V(Y_n)-\frac{2}{n}\mathrm{Cov}(S_n,Y_n) = \boxed{\frac{b^2}{n}+\frac{2b^2}{n^2}-\frac{2}{n}\mathrm{Cov}(S_n,Y_n).}$$

16.c. D'après le préliminaire, on a

$$-\sqrt{V(S_n)V(Y_n)} \leqslant \mathrm{Cov}(S_n,Y_n) \leqslant \sqrt{V(S_n)V(Y_n)}.$$

Soit encore

$$-\mathrm{Cov}(S_n,Y_n) \leqslant \sqrt{V(S_n)V(Y_n)} = \sqrt{\frac{b^2}{n^2}nb^2} = \frac{b^2}{\sqrt{n}}.$$

Et donc il vient

$$r_{Z_n}(b) \leqslant \frac{2b^2}{n^2}+\frac{b^2}{n}+\frac{2b^2}{n\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent[5], $\boxed{Z_n \text{ est un estimateur convergent de } b.}$

Il est asymptotiquement sans biais car $b_{Z_n}(b) = -\frac{b}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

[5] Un risque quadratique est toujours positif, et donc ici $r_{Z_n}(b) \to 0$ d'après le théorème des gendarmes.

17.a. Si l'un des x_i est inférieur à a, c'est-à-dire si $\min(x_1,\dots,x_n) < a$, alors $f_{a,b}(x_i) = 0$, et $L(a,b) = 0$.
Au contraire, si $\min(x_1,\dots,x_n) \geqslant a$, alors par définition de $L(a,b)$, il vient

$$\begin{aligned} L(a,b) &= \prod_{i=1}^{n} f_{a,b}(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b}e^{-\frac{x_i-a}{b}} \\ &= \frac{1}{b^n}e^{-\frac{x_1+\dots x_n-na}{b}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$L(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b^n}e^{-\frac{1}{b}(-na+(x_1+\cdots+x_n))} & \text{si } a \leqslant \min(x_1,\dots,x_n) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît alors l'expression de $L_n(a,b)$ pour $\boxed{A = \min(x_1,\dots,x_n) \text{ et } S = x_1+\cdots+x_n.}$

17.b. Dans la partie I, on avait obtenu $a_0 = A = \min(x_1,\dots,x_n)$.
Or, $\min(x_1,\dots,x_n)$ est l'estimation de a obtenue à l'aide de Y_n à partir de l'échantillon $(x_1,\dots,x_n)$.
Et nous avions $b_0 = \frac{S}{n}-A = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-\min(x_1,\dots,x_n)$, qui est la valeur de l'estimation de b obtenue grâce à Z_n sur l'échantillon $(x_1,\dots,x_n)$.

Remarque

Cette question était particulièrement mal posée (même pour une question d'Écricome !). En effet, si l'on suppose que les x_i sont des réalisations des variables X_i, alors il ne peuvent en aucun cas être inférieurs à a, puisque les X_i sont à valeurs dans $[a,+\infty[$.
En réalité, les estimateurs ainsi obtenus sont ceux du maximum de vraisemblance.

ECRICOME 2006

Exercice 1

Sujet : Réduction simultanée d'un ensemble d'endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ Facile

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : espaces euclidiens, valeurs propres.

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Modifications apportées au sujet d'origine : suppression de la question demandant une équation de $\mathscr{D}^\perp$

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathscr{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ on a donc : $\langle x, y\rangle = {}^tXY$ où X et Y désignent les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathscr{B}$.

Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$, $F^\perp$ désigne le supplémentaire orthogonal de F dans $\mathbf{R}^3$.

On note $\mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ et Id l'application identité de $\mathbf{R}^3$.

Pour f endomorphisme de $\mathbf{R}^3$, de matrice M dans la base canonique, on note f^* l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est ${}^tM$.

I. Quelques propriétés de f^*.

Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in \left(\mathbf{R}^3\right)^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.
2. Montrer que f^* est le seul endomorphisme g de $\mathbf{R}^3$ vérifiant :
$$\forall (x, y) \in \left(\mathbf{R}^3\right)^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle.$$
3. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ stable par f.
   a. Pour $x \in F$ et $y \in F^\perp$, calculer $\langle x, f^*(y)\rangle$.
   b. En déduire que $F^\perp$ est stable par f^*.

II. Réduction des matrices d'un ensemble $\mathscr{E}$.

On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des endomorphismes f_u de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme

$$M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

où $u = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.

4. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$.
5. Montrer que pour tout $u \in \mathbf{R}^3$, f_u^* appartient à $\mathscr{E}$.
6. On note $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$, $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$, $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(i + j - 2k)$ et $\mathscr{D}$ la droite de vecteur directeur e_1.
   a. Montrer que e_1 est un vecteur propre commun aux éléments f_u de $\mathscr{E}$.
   b. En déduire que, pour tout $u \in \mathbf{R}^3$, $\mathscr{D}$ est stable par f_u.
   c. Déduire des questions précédentes que, pour tout $u \in \mathbf{R}^3$, $\mathscr{D}^\perp$ est stable par f_u.
   d. Montrer que (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathscr{D}^\perp$ et que $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbf{R}^3$.
   e. Justifier alors que la matrice de f_u dans la base $\mathscr{B}'$ est de la forme
$$N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix}$$
   où e, f, g, h, ℓ sont des réels.

Exercice 2

Sujet : Étude d'une fonction définie par une intégrale **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : fonctions d'une variable réelle, intégrales impropres, calcul différentiel d'ordre 1 et 2

Modifications apportées au sujet d'origine : les notations pour les dérivées partielles ont été changées, en conformité avec le programme 2015

Commentaires : un thème assez classique, ne demandant pas trop de technicité, mais qui nécessite une bonne compréhension de la définition des dérivées partielles.

On considère la fonction f des deux variables réelles x, t définie par :

$$f(x,t) = e^{-t^2}\sqrt{1+xt}.$$

1. **Étude de f.**
   a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.
   b. Pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, calculer $\partial_1 f(x,t)$ et $\partial^2_{1,1} f(x,t)$.
   c. Montrer que pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$\left|\partial^2_{1,1} f(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{4}e^{-t^2}.$$

2. Montrer que pour tout réel α strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\,dt$ est convergente.
   En déduire que pour tout réel x positif, les intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}}\,dt.$$

3. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par

$$g(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,dt.$$

   a. Sans chercher à calculer la dérivée de g, montrer que g est croissante sur $[0,+\infty[$.
   b. Soit $x_0 \in [0,+\infty[$. Montrer que pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\partial_1 f(x_0,t)| \leqslant \frac{t^2}{8}e^{-t^2}|x-x_0|^2.$$

   c. En déduire que pour $x_0 \in [0,+\infty[$,

$$\left|g(x) - g(x_0) - (x-x_0)\int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t)\,dt\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt.$$

   d. Montrer que g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que g' est définie par

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x,t)\,dt.$$

   Retrouver le sens de variations de g.

Problème

Sujet : Étude d'une suite infinie de pile ou face **Facile**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : probabilités discrètes

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Modifications apportées au sujet d'origine : ajout d'une sous-question de `Scilab`

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.
On dit que la première série est de longueur $n \geqslant 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)^{\text{ème}}$ l'autre côté.
De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.
On définit de même les séries suivantes.
Ω désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face.
Pour $i \in \mathbf{N}^*$, on note P_i l'événement «le $i^{\text{ème}}$ lancer amène Pile» et F_i l'événement contraire.
Les trois parties sont indépendantes.

I. Étude des longueurs de séries

1. On note L_1 la longueur de la première série.
   Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+1$.
   En déduire que
   $$P(L_1 = n) = p^n q + q^n p.$$
   Vérifier que
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1.$$
2. On note L_2 la longueur de la deuxième série.
   a. Exprimer l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n+k+1$ puis calculer la probabilité de l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$.
   b. En déduire que, pour $k \in \mathbf{N}^*$,
   $$P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.$$
   On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = 1$.
   c. Montrer que la variable aléatoire L_2 admet une espérance égale à 2.

II. Étude du nombre de séries lors des n premiers lancers

On considère dans toute cette partie que la pièce est **équilibrée, c'est-à-dire que** $p = \dfrac{1}{2}$.
On note N_n le nombre de séries **lors des n premiers lancers** :

- La première série est donc de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)^{\text{ème}}$ l'autre côté et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce.
- La dernière série se termine nécessairement au $n^{\text{ème}}$ lancer.

Par exemple, si les lancers successifs donnent : $FFPPPPFFPPP\ldots$ (F désignant Face et P Pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$,

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1, N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2, N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3, N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4$$

les données précédentes ne permettant évidemment pas de déterminer $N_{12}(\omega)$.
On admettra que N_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

3. Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.
4. Dans le cas général où $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par N_n) puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.
5. *Simulation informatique* :
   Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le $k^{\text{ème}}$ lancer amène Pile et 0 sinon.
   Compléter le programme informatique suivant pour que, m étant une valeur entière, inférieure à 100, entrée par l'utilisateur, il simule les m variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_m$ (dont les valeurs seront placées dans la matrice `X`) et détermine les valeurs de $N_1, N_2, \ldots, N_m$ (qui seront stockées dans la matrice `N`).

```
function N = simulation(m)
  X = zeros(m,1) ;
  N = zeros(m,1) ;
  X(1) =floor(2*rand()) ;
  N(1) = 1 ;
  for i = 2 :m
    X(i) = ...
    ....
```

```
    ....
  end
endfunction
```

Proposer alors un programme qui, sur la base de 10 000 simulations de X_{20}, retourne une valeur approchée de $E(X_{20})$.

6. **Fonction génératrice de N_n**
On pose, pour $n \in \mathbf{N}^*$ et pour $s \in [0,1]$,

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) s^k.$$

a. Pour $s \in [0,1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.

b. Que représente $G_n'(1)$?

c. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \in \{1,\dots,n\}$ on a

$$P((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}).$$

On admet que l'on obtiendrait de même

$$P((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}).$$

Montrer alors que

$$P(N_n = k) = \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1).$$

d. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que

$$G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s).$$

Calculer $G_1(s)$ et en déduire que

$$G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.$$

e. Déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers.

III. Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs

7. Montrer que pour tout réel x on a $1 - x \leqslant e^{-x}$.

8. On considère dans cette question une suite $(A_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(A_i)$ diverge.
Soit $k \in \mathbf{N}^*$ fixé. Pour $n \geqslant k$, on note

$$C_n = \bigcup_{k \leqslant i \leqslant n} A_i = A_k \cup \cdots \cup A_n.$$

a. Justifier que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty.$$

b. Montrer que $P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})$ puis, en utilisant la question 7, que

$$P(C_n) \geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right).$$

En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} P(C_n) = 1.$$

c. Comparer pour l'inclusion les événements C_n et C_{n+1}. Que peut-on en déduire pour $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right)$?

d. Justifier que

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$$

et en déduire que $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$.

9. En considérant les événements A_n «on obtient Pile au $(2n)^{\text{ème}}$ et au $(2n+1)^{\text{ème}}$ lancers», montrer que la probabilité d'avoir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.

ECRICOME 2006 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

I. Quelques propriétés de f^*.

1. On a $\langle f(x), y\rangle = {}^t(AX)Y = {}^{X\,t}AY = {}^tX({}^tAY) = \boxed{\langle x, f^*(y)\rangle}.$

2. Soit g un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ vérifiant $\forall (x,y)\in (\mathbf{R}^3)^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$.
Alors, d'après la question précédente, on a, pour tout $(x,y)\in(\mathbf{R}^3)^2$,

$$\langle x, f^*(y)\rangle = \langle x, g(y)\rangle \Leftrightarrow \langle x, f^*(y)\rangle - \langle x, g(y)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, f^*(y) - g(y)\rangle = 0.$$

En particulier, si $y\in\mathbf{R}^3$ et si $x = f^*(y) - g(y)$, alors

$$\langle f^*(y) - g(y), f^*(y) - g(y)\rangle = 0 \Leftrightarrow \|f^*(y) - g(y)\|^2 = 0 \Leftrightarrow f^*(y) - g(y) = 0 \Leftrightarrow f^*(y) = g(y).$$

Rappel
Seul le vecteur nul est de norme nulle.

Ceci étant vrai pour tout $y\in\mathbf{R}^3$, on en déduit que $\boxed{f^* = g.}$

3.a. Soit $x\in F$ et $y\in F^\perp$. Alors

$$\langle x, f^*(y)\rangle = \langle \underbrace{f(x)}_{\in F}, \underbrace{y}_{\in F^\perp}\rangle = 0.$$

3.b. Si $y\in F^\perp$, alors la question précédente montre que pour tout $x\in F$, $\langle x, f^*(y)\rangle = 0$. Et donc $f^*(y)\in F^\perp$.
Ainsi, $\boxed{F^\perp \text{ est stable par } f^*.}$

II. Réduction des matrices d'un ensemble $\mathscr{E}$.

4. Il est clair que $\mathscr{E}\subset\mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ par définition, et l'endomorphisme nul de $\mathbf{R}^3$ est dans $\mathscr{E}$ car sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $M_{(0,0,0)}$.
Soient f et g deux éléments de $\mathscr{E}$, dont les matrices dans la base $\mathscr{B}$ sont respectivement
$M = \begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' & c'\\ c' & a' & b'\\ b' & c' & a'\end{pmatrix}$, et soit $\lambda\in\mathbf{R}$.
Alors la matrice de $\lambda f + g$ dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' & \lambda c + c'\\ \lambda c + c' & \lambda a + a' & \lambda b + b'\\ \lambda b + b' & \lambda c + c' & \lambda a + a'\end{pmatrix} = M_{\lambda(a,b,c)+(a',b',c')}.$$

Et donc $\lambda f + g\in\mathscr{E}$.
Ainsi, $\boxed{\mathscr{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(\mathbf{R}^3).}$

5. Soit $f_u\in\mathscr{E}$, où $u = (a,b,c)$. Alors la matrice de f dans la base canonique est

$${}^tM_u = \begin{pmatrix} a & c & b\\ b & a & c\\ c & b & a\end{pmatrix} = M_{(a,c,b)}.$$

Et donc $\boxed{f_u^*\in\mathscr{E}.}$

6.a. Soit $f_u\in\mathscr{E}$, avec $u = (a,b,c)$. Alors

$$M_u\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}a+b+c\\a+b+c\\a+b+c\end{pmatrix} = (a+b+c)\frac{1}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Ainsi, e_1 est un vecteur propre de f_u, et donc est un vecteur propre commun à tous les éléments de $\mathscr{E}$.

Remarque
Mieux : on a prouvé que e_1 est un vecteur propre de f_u pour la valeur propre $a+b+c$.

6.b. Soit $x\in\mathscr{D}$. Alors il existe $\lambda\in\mathbf{R}$ tel que $x = \lambda e_1$.
Et donc $f_u(x) = \lambda f_u(e_1) = \lambda(a+b+c)e_1\in\mathscr{D}$.
Et donc $\boxed{\mathscr{D} \text{ est stable par } f_u.}$

Exercice
Montrer que x est vecteur propre de f si et seulement si $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f.

6.c. Notons que pour tout $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$, on a $(f^*)^* = f$ car si $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^*) = {}^tM$ et donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}((f^*)^*) = {}^t({}^tM) = M$.
En particulier, si $f_u \in \mathscr{E}$, alors d'après les résultats des questions 5 et 6.b $\mathscr{D}$ est stable par f_u^*.
Mais alors, par la question 3.b, $\mathscr{D}^\perp$ est stable par $(f_u^*)^* = f_u$.

> **Rappel**
> Un vecteur est dans $F^\perp$ si et seulement si il est orthogonal à tous les éléments d'une base de F.
> Ici, une base de $\mathscr{D}$ est formée du seul vecteur e_1, donc $x \in \mathscr{D}^\perp \Leftrightarrow \langle x, e_1\rangle = 0$.

6.d. Puisque $\mathscr{D}$ est de dimension 1, $\dim \mathscr{D}^\perp = 3 - 1 = 2$.
De plus, $\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = 0$, de sorte que $e_2 \in \mathscr{D}^\perp$ et $e_3 \in \mathscr{D}^\perp$.
De plus, e_2 et e_3 ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre de $\mathscr{D}^\perp$, de cardinal 2, et donc une base de $\mathscr{D}^\perp$.
Enfin, il est facile de vérifier que $\langle e_2, e_3\rangle = 0$ et que $\|e_2\| = \|e_3\| = 1$, et donc (e_2, e_3) est une base orthonormée de $\mathscr{D}^\perp$.
Puisque $\|e_1\| = 1$, e_1 est une base orthonormée de $\mathscr{D}$.
Et alors $\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est une base orthonormée de } \mathbf{R}^3}$, car concaténation d'une base orthonormée de $\mathscr{D}$ et d'une base orthonormée de $\mathscr{D}^\perp$.

6.e. Puisque $\mathscr{D}$ est stable par f_u, $f_u(e_1) \in \mathscr{D}$. Et donc il existe un réel e tel que $f_u(e_1) = ee_1$.
De même, par stabilité de $\mathscr{D}^\perp$ par f_u, $f_u(e_2) \in \mathscr{D}^\perp$ et donc il existe deux réels f et h tels que $f_u(e_2) = fe_2 + he_3$.
Et de même, il existe g et ℓ tels que $f_u(e_3) = ge_2 + \ell e_3$.
Et donc la matrice de f_u dans la base $\mathscr{B}'$ est

$$N_u = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f_u(e_1) & f_u(e_2) & f_u(e_3) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}.$$

Exercice 2

1. **Étude de f.**

1.a. La fonction $(x,t) \mapsto t^2$ est $\mathscr{C}^2$ sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ car polynomiale.
Par composition avec la fonction $u \mapsto e^u$ qui est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, $(x,t) \mapsto e^{-t^2}$ est $\mathscr{C}^2$ sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.
La fonction $(x,t) \mapsto 1 + xt$ est polynomiale sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$, donc de classe $\mathscr{C}^2$, et à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.
Par composition avec la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$, qui est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^*$, $(x,t) \mapsto \sqrt{1+xt}$ est $\mathscr{C}^2$ sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$.
Et donc par produit de fonctions $\mathscr{C}^2$, $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^2 \text{ sur } [0,+\infty[\times[0,+\infty[.}$

> **Racine**
> Attention à ne pas dire que la fonction racine carrée est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$. Elle y est bien continue, mais n'est dérivable que sur $\mathbf{R}_+^*$.

1.b. On a

$$\boxed{\partial_1 f(x,t) = \frac{te^{-t^2}}{2\sqrt{1+xt}}.}$$

En dérivant de nouveau par rapport à x, il vient alors

$$\boxed{\partial_{1,1}^2 f(x,t) = -\frac{t^2e^{-t^2}}{4(1+xt)^{3/2}}.}$$

> **Rappel**
> La dérivée de
> $$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-1/2}$$
> est
> $$t \mapsto -\frac{1}{2}\frac{1}{t\sqrt{t}}.$$

1.c. Pour $(x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, on a $1 + xt \geqslant 1$ et donc $\dfrac{1}{(1+xt)^{3/2}} \leqslant 1$.
On en déduit donc que

$$|\partial_{1,1}^2 f(x,t)| = \frac{t^2e^{-t^2}}{4(1+xt)^{3/2}} \leqslant \boxed{\frac{t^2}{4}e^{-t^2}.}$$

2. La fonction $t \mapsto t^\alpha e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et donc le seul éventuel problème de convergence de l'intégrale est au voisinage de $+\infty$.
De plus, en posant $x = t^2$, on a

$$t^2t^\alpha e^{-t^2} = x^{1+\frac{\alpha}{2}}e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissances comparées}$$

de sorte que $t^\alpha e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, il en est de même de $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\,dt$ et donc de $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\,dt$.

De même, pour x positif fixé, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}\sqrt{1+xt}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et au voisinage de $+\infty$, on a

$$e^{-t^2}\sqrt{1+xt} \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}t^{1/2}e^{-t^2}.$$

D'après le critère des équivalents pour les intégrales de fonctions positives[1], $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,dt$ converge car $\int_0^{+\infty} t^{1/2}e^{-t^2}\,dt$ converge.

[1] Il est clair que la fonction intégrée est ici positive.

On conclut de même pour la seconde intégrale en remarquant que

$$\frac{te^{-t^2}}{2\sqrt{1+xt}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{x}}t^{1/2}e^{-t^2}.$$

3.a. Soient $(x,y) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, avec $x \leqslant y$.
Alors, pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a

$$1+xt \leqslant 1+yt \Rightarrow \sqrt{1+xt} \leqslant \sqrt{1+yt} \Rightarrow e^{-t^2}\sqrt{1+xt} \leqslant e^{-t^2}\sqrt{1+yt}.$$

Et donc par croissance de l'intégrale, il vient

$$g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+yt}\,dt = g(y).$$

On en déduit donc que $\boxed{g \text{ est une fonction croissante sur } [0,+\infty[.}$

3.b. Pour $t \geqslant 0$ **fixé**, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$, et sa dérivée n'est autre que $x \mapsto \partial_1 f(x,t)$.
De même, sa dérivée seconde est $x \mapsto \partial^2_{1,1} f(x,t)$, dont nous avons prouvé à la question 1.c qu'elle est bornée par $\frac{t^2}{4}e^{-t^2}$.
D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée entre x et x_0, on a alors

$$|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\partial_1 f(x_0,t)| \leqslant \frac{t^2}{4}e^{-t^2}\frac{|x-x_0|^2}{2} = \frac{t^2}{8}e^{-t^2}|x-x_0|^2.$$

3.c. Pour x_0 et x fixés, en intégrant la relation précédente[2], il vient

[2] Ce qui est légitime car l'intégrale du terme de droite converge d'après la question 2.

$$\int_0^{+\infty} |f(x_0,t) - f(x,t) - (x_0-x)\partial_1 f(x_0,t)|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{4}e^{-t^2}\frac{|x_0-x|^2}{2}\,dt = \frac{t^2}{8}e^{-t^2}|x_0-x|^2 = \frac{|x_0-x|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt.$$

Mais par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned}
\left|g(x) - g(x_0) - (x-x_0)\int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t)\,dt\right| &= \left|\int_0^{+\infty} (f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\partial_1 f(x_0,t))\,dt\right| \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} |f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\partial_1 f(x_0,t)|\,dt \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{|x-x_0|^2}{8}t^2e^{-t^2}\,dt \\
&\boxed{\leqslant \frac{|x_0-x|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt.}
\end{aligned}$$

3.d. Il s'agit de revenir à la définition de la dérivabilité : g est dérivable en x_0 si et seulement si la limite du taux d'accroissement existe. Or, en divisant la relation de la question précédente par $|x-x_0|$, il vient, pour $x \neq x_0$,

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t)\,dt\right| \leqslant \frac{|x-x_0|}{8}\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}\,dt.$$

Cette dernière intégrale est indépendante de x, et donc

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|x-x_0|}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{x\to x_0} \left| \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t)\,dt \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t)\,dt.$$

Ceci prouve donc que $\boxed{g \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et que } g'(x_0) = \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0,t)\,dt.}$

Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in [0,+\infty[$, g est donc dérivable sur cet intervalle.
Enfin, $t \mapsto \partial_1 f(x_0,t)$ est une fonction positive sur $\mathbf{R}_+$, et donc par croissance de l'intégrale, $g'(x_0) \geqslant 0$, ce qui permet de retrouver le fait que $\boxed{g \text{ est croissante.}}$

Problème

I. Étude des longueurs des séries

1. Si la première série est de longueur n, alors les n premiers lancers ont donné le même résultat, et le $(n+1)^{\text{ème}}$ a donné un résultat différent. Donc

$$[L_1 = n] = (P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1}).$$

Ces deux événements sont incompatibles, de sorte que

$$P(L_1 = n) = P(P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) + P(F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1}).$$

Par indépendance des lancers, il vient alors

$$P(L_1 = n) = \prod_{i=1}^{n} P(P_i) \times P(F_{n+1}) + \prod_{i=1}^{n} P(F_i) \times P(P_{n+1}) = \boxed{p^n q + q^n p.}$$

Notons que les séries de terme général $p^n q$ et $q^n p$ sont convergentes car géométriques de raison dans $]0,1[$. Et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^n q + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n p \\
&= q \sum_{n=1}^{+\infty} p^n + p \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \\
&= q \sum_{i=0}^{+\infty} p^{i+1} + p \sum_{i=0}^{+\infty} q^{i+1} \\
&= qp \sum_{i=0}^{+\infty} p^i + pq \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \\
&= qp \frac{1}{1-p} + pq \frac{1}{1-q} = p + q = \boxed{1.}
\end{aligned}$$

> **Danger !**
> Ne pas oublier de préciser que la série s'arrête, c'est-à-dire que le $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer donne un résultat des précédents.
> En effet, si l'on oublie ceci, on considère alors l'événement $[L_1 \geqslant n]$ et non $[L_1 = n]$.

> **Chgt d'indice**
> $i = n-1 \Leftrightarrow n = i+1$.

> **Remarque**
> Le fait que cette somme soit égale à 1 signifie que la probabilité que la première série soit infinie (i.e. la probabilité d'avoir une infinité de lancers identiques) est nulle.

2.a. On a $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$ si et seulement si les n premiers lancers donnent le même résultat, que les k suivants donnent l'autre résultat, et que le $(n+k+1)^{\text{eme}}$ lancer fournit de nouveau le même résultat que les n premiers. Soit

$$[L_1 = n] \cap [L_2 = k] = (P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \cdots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1}).$$

Ces deux événements sont clairement incompatibles, et par indépendance des lancers, il vient alors

$$P([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) = \prod_{i=1}^{n} P(P_i) \times \prod_{j=n+1}^{n+k} P(F_j) \times P(P_{n+1}) + \prod_{i=1}^{n} P(F_i) \times \prod_{j=n+1}^{n+k} P(P_j) \times P(F_{n+1}) = \boxed{p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k.}$$

2.b. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[L_1 = n], n \in \mathbf{N}^*\}$, il vient

$$P(L_2 = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(p^{n+1}q^k + q^{n+1}p^k\right) = q^k p^2 \sum_{i=0}^{+\infty} p^i + p^k q^2 \sum_{i=0}^{+\infty} q^i$$
$$= q^k p^2 \frac{1}{1-p} + p^k q^2 \frac{1}{1-q} = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.$$

Remarque
Le résultat admis, à savoir que la somme des $P(L_2 = k)$ vaut 1 signifie qu'il existe presque sûrement une troisième série, c'est-à-dire que la probabilité d'avoir une deuxième série infinie est nulle.

2.c. Sous réserve de convergence, on a $E(L_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(L_2 = k)$.

Or les séries de terme général kp^2q^{k-1} et kq^2p^{k-1} sont des séries géométriques dérivées de raisons respectives q et p, dans $]0, 1]$, et donc convergentes. On a alors

$$E(L_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^2p^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kp^2q^{k-1}$$
$$= q^2 \sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} + p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}$$
$$= q^2 \frac{1}{(1-p)^2} + p^2 \frac{1}{(1-q)^2} = 1 + 1 = \boxed{2.}$$

Rappel
Pour $|q| < 1$, on a
$$\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

II. Étude du nombre de séries

3. En un seul lancer, il y a forcément une seule série. Et donc $N_1 = 1$.
Par conséquent, $\boxed{E(N_1) = 1.}$

Autrement dit
N_1 est une variable certaine.

En deux lancers, il y a soit une seule soit deux séries, donc $N_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
De plus, $[N_2 = 2] = (P_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap P_2)$. Et par incompatibilité de ces deux événements, il vient

$$P(N_2 = 2) = P(P_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap P_2).$$

Par indépendance des lancers, on en déduit que

$$P(N_2 = 2) = P(P_1)P(F_2) + P(F_1)P(P_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Et donc $P(N_2 = 1) = 1 - P(N_2 = 2) = \frac{1}{2}$.

On en déduit que $E(N_2) = 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}.}$

Rédaction
Si l'on a correctement rédigé le cas de N_2, et que l'on a ainsi montré qu'on maitraisait le raisonnement, alors on peut se permettre quelques raccourcis sur le cas de N_3, qui est similaire.
En revanche, si le premier cas est mal rédigé, et que le second n'est pas davantage détaillé, ne comptez pas sur la bienveillance du correcteur....

Enfin, en trois lancers, on peut avoir une, deux ou trois séries, donc $N_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
On a

$$P(N_3 = 1) = P((F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3)) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} = \frac{1}{4}.$$

De même, $P(N_3 = 3) = P((P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)) = \frac{1}{4}$.

Et donc $P(N_3 = 2) = 1 - P(N_3 = 1) - P(N_3 = 3) = \frac{1}{2}$.

On en déduit que

$$E(N_3) = \frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} = \boxed{2.}$$

4. En n lancers, on peut avoir au minimum une série[3], et au maximum n séries[4].
Donc $\boxed{N_n(\Omega) = [\![1, n]\!].}$ De plus, on a

$$[N_n = 1] = \left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right).$$

Et donc, par incompatibilité de ces deux événements, et par indépendance des lancers,

$$P(N_n = 1) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) + P\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(P_i) + \prod_{i=1}^{n} P(F_i) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

[3] Si tous les lancers ont donné le même résultat.
[4] Si à chaque lancer on a obtenu un résultat différent du précédent.

De même, on a, si n est pair

$$[N_n = n] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap F_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n)$$

et donc $P(N_n = n) = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = \boxed{\dfrac{1}{2^{n-1}}}.$
On montrerait que le même résultat est valable pour n impair.

Détails
On a choisi ici de prendre n pair uniquement pour faciliter l'écriture : dans ce cas le dernier lancer doit donner un résultat différent du premier. Mais le principe et le calcul sont exactement les mêmes lorsque n est impair.

5. *Simulation informatique*
L'idée du programme qui suit est de simuler les lancers successifs, et d'utiliser le fait que le $k^{\text{ème}}$ lancer a débuté une nouvelle série si son résultat diffère du résultat du lancer précédent.

```
function N = simulation(m)
  X = zeros(m,1) ;
  N = zeros(m,1) ;
  X(1) =floor(2*rand()) ;
  N(1) = 1 ;
  for i = 2 :m
    X(i) = floor(2*rand()) ;
    if X(i)==X(i-1) then
      N(i) = N(i-1) ;
    else
      N(i) = N(i-1)+1 ;
    end
  end
endfunction
```

Loi de Bernoulli
Notons que `2*rand()` permet de tirer un nombre au hasard dans $[0, 2]$, et donc que `floor(2*rand())` retourne 0 ou 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour chacun.

On peut alors faire appel 10 000 fois à cette fonction pour simuler 10 000 réalisations de X_{20} et calculer la moyenne de ces 10 000 simulations, qui doit être une valeur approchée de $E(X_{20})$.

```
s =0
for i=1 :10 000
        X = simulation(20)
        s = s+X(20)
end
disp(s/10000)
```

6. Fonction génératrice de N_n

6.a. D'après le théorème de transfert, on a[5]

$$E\left(s^{N_n}\right) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k = \boxed{G_n(s).}$$

[5] Pas besoin de se soucier de la convergence : il s'agit d'une somme finie !

6.b. En dérivant la fonction $s \mapsto G_n(s)$, qui est bien dérivable car polynomiale, on a

$$\forall s \in [0, 1],\ G_n'(s) = \sum_{k=1}^{n} kP(N_n = k)s^{k-1}$$

de sorte que $G_n'(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(N_n = k) = \boxed{E(N_n).}$

6.c. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{P_{n-1}, F_{n-1}\}$:

$$P((N_n = k) \cap P_n) = P((N_n = k) \cap P_n \cap P_{n-1}) + P((N_n = k) \cap P_n \cap F_{n-1}).$$

Mais si P_n et P_{n-1} sont réalisés[6], alors $N_n = N_{n-1}$: une nouvelle série n'a pas été commencée au n-ème lancer.
Et donc $[N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n = [N_{n-1} = k] \cap P_{n-1} \cap P_n$.
De plus, l'événement $[N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}$, qui ne dépend que des résultats des $n-1$ premiers lancers, est indépendant de l'événement P_n. Et donc

$$P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1} \cap P_n) = P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1})P(P_n) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}).$$

[6] Autrement dit si les deux derniers lancers donnent tous les deux Pile.

De même, si F_{n-1} et P_n sont réalisés, alors une nouvelle série a été démarrée lors du $n^{\text{ème}}$ lancer, de sorte que $[N_n = k] \cap F_{n-1} \cap P_n = [N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1} \cap P_n$. Et alors, par le même argument d'indépendance que précédemment, il vient

$$P([N_n = k] \cap P_{n-1} \cap P_n) = P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1})P(P_n) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}).$$

Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{P_n, F_n\}$, on a

$$\begin{aligned}
P(N_n = k) =& P((N_n = k) \cap P_n) + P((N_n = k) \cap F_n) \\
=& \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}) \\
=& \frac{1}{2}\left(P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1})\right) + \frac{1}{2}\left(P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1}) + P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})\right) \\
=& \boxed{\frac{1}{2}P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1} = k-1).}
\end{aligned}$$

Formule des probabilités totales.

6.d. Soit $s \in [0, 1]$. Alors, par la question précédente,

$$\begin{aligned}
G_n(s) &= \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(P(N_{n-1} = k-1) + P(N_n = k)\right)s^k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k)s^k + \frac{s}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k-1)s^{k-1} = \frac{1}{2}G_{n-1}(s) + \frac{s}{2}G_{n-1}(s) \\
&= \boxed{\frac{1+s}{2}G_{n-1}(s).}
\end{aligned}$$

On a $G_1(s) = \sum_{k=1}^{1} P(N_1 = 1)s = P(N_1 = 1)s = s$.

Ainsi, pour s fixé, $(G_n(s))_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$ et de premier terme $G_1(s) = s$, de sorte que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} G_1(s) = \boxed{\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.}$$

⚠ Attention !

Ici le premier terme est pour $n = 1$ et non $n = 0$!
On prendra donc soin de décaler les indices en conséquence :

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

6.e. D'après la question 6.b, on a $E(N_n) = G_n'(1)$.
Or, si l'on dérive l'expression obtenue à la question précédente, on obtient

$$G_n'(s) = \frac{n-1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} s + \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}.$$

Et donc $E(N_n) = G_n'(1) = \frac{n-1}{2} + 1 = \boxed{\frac{n+1}{2}.}$

III. Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs

7. La fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, de dérivée seconde égale à $e^{-x} \geqslant 0$. Donc elle est convexe.
Or on a $f'(0) = -1$, de sorte que la tangente à sa courbe représentative en $x = 0$ est la droite d'équation $y = f'(0)x + f(0) = 1 - x$.
Mais puisque f est convexe, sa courbe est située au dessus de toutes ses tangentes. En particulier,

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ e^{-x} \geqslant 1 - x.}$$

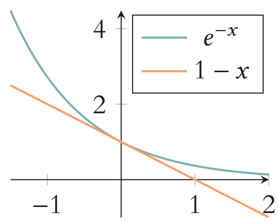


FIGURE 1– La fonction e^{-x} et sa tangente en 0.

8.a. Notons que la suite $(P(A_i))_{i\geqslant k}$ est positive, de sorte que $\left(\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right)_{n\geqslant k}$ est une suite croissante. Par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite finie, ou diverge

vers $+\infty$.
Supposons qu'elle converge vers $\ell \in \mathbf{R}$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) + \cdots + P(A_{k-1}) + \sum_{i=k}^{n} P(A_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P(A_1) + \cdots + P(A_{k-1}) + \ell.$$

Ceci contredit la divergence de la série $\sum_i P(A_i)$, donc nécessairement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty.}$$

Autrement dit La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est toujours croissante.

8.b. On a $\overline{C_n} = \overline{\bigcup_{i=k}^{n} A_i} = \bigcap_{i=k}^{n} \overline{A_i}$.
Et alors, les $\overline{A_i}$ étant indépendants[7]

$$P(C_n) = 1 - P(\overline{C_n}) = 1 - P\left(\bigcap_{i=k}^{n} \overline{A_i}\right) = \boxed{1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}).}$$

Danger ! Le complémentaire de $A \cup B$ est $\bar{A} \cap \bar{B}$, et non $\bar{A} \cup \bar{B}$.
En termes d'événements : la négation de «A ou B» est «ni A ni B ne sont réalisés», et non «A n'est pas réalisé ou B n'est pas réalisé».

[7] Car les A_i le sont.

On a $P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i)$, et donc, d'après la question 7, $P(\overline{A_i}) \leqslant \exp(-P(A_i))$.
Il vient donc $\prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}) \leqslant \prod_{i=k}^{n} \exp(-P(A_i)) = \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right)$. Et par conséquent

$$P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}) \geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right).$$

D'après la question 8.a, on a[8] $\lim_{n\to+\infty} 1 - exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
D'autre part, on a toujours $P(C_n) \leqslant 1$, et donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1.}$

[8] Par continuité de la fonction exponentielle.

8.c. On a $C_n \subset C_{n+1}$. En effet, si l'un des événements $A_k, A_{k+1}, \dots, A_n$ est réalisé, alors l'un des événements $A_k, A_{k+1}, \dots, A_{n+1}$ est réalisé, donc C_{n+1} est réalisé.
Et alors, pour tout $n \geqslant k$, on a $\bigcup_{i=k}^{n} C_i = C_n$.
Par le théorème de la limite monotone, on a alors

$$P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=k}^{n} C_i\right) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1.$$

8.d. On a toujours $A_i \subset C_i$, et donc $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset \bigcup_{i=k}^{n} C_i$.
Inversement, supposons que l'un des $C_n, n \geqslant k$ soit réalisé. Notons le C_{n_0}.
Alors $C_{n_0} = A_k \cup \cdots \cup A_{n_0}$.
Et donc l'un des événements $A_k, \dots, A_{n_0}$ est réalisé, de sorte que $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$ est réalisé.

Ainsi on a $\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_k \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$ et donc[9] $\boxed{\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_k = \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i.}$
Par la question précédente, ceci prouve donc que

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1.}$$

[9] Par double inclusion.

9. Soit donc A_n l'événement «on obtient Pile au $(2n)^{\text{ème}}$ et au $(2n+1)^{\text{ème}}$ lancers».
Alors on a $P(A_n) = P(P_{2n} \cap P_{2n+1}) = P(P_{2n})P(P_{2n+1}) = p^2$.

Ainsi, la série de terme général $P(A_n)$ diverge.

D'après ce qui précède, on a donc $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$, et ce pour tout k.

Or, à k fixé, l'événement $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$ est «obtenir Pile à un lancer d'ordre pair ainsi qu'au lancer suivant après le k-ème lancer», qui est inclus[10] dans l'événement «obtenir deux Piles consécutifs après le k-ème lancer». Notons D_k ce dernier événement.

[10] Et non égal, car il ne prend pas en compte le fait d'avoir deux Piles consécutifs lors d'un lancer d'ordre impair et du lancer suivant.

Alors $P(D_k) \geqslant P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$. Puisque d'autre part on a $P(D_k) \leqslant 1$, on en déduit que $P(D_k) = 1$, et ce pour tout k.
Autrement dit, la probabilité d'avoir deux Piles consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.

ECRICOME 2005

Exercice 1

Sujet : Diagonalisation d'une matrice symétrique à paramètres **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : diagonalisation, matrices symétriques, fonctions de plusieurs variables

Commentaires : bien que plutôt rébarbatif sur les calculs (et probablement trop long et pénible pour faire un sujet de concours intéressant), il y a un certain nombre de choses à apprendre ici, sur la diagonalisation dans les premières questions, sur des thèmes classiques (quotients de Rayleigh, racines carrées d'une matrice symétrique positive) dans la question 4.

L'espace $\mathbf{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Trois réels a, b, c étant donnés, on pose :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer trois matrices I, J, K dont les coefficients ne dépendent pas de a, b, c telles que :

$$M(a,b,c) = aI + bJ + cK.$$

   Calculer J^2, K^2 et K^3. Déterminer une relation entre I, J et K^2, ainsi qu'un polynôme annulateur de K.
   Quelles sont les valeurs propres possibles de K ?

2. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ inversible, telle que $D = ({}^tP)KP$ soit une matrice diagonale.
   Déterminer P et D vérifiant les conditions précédentes et telles que $d_{11} < d_{22} < d_{33}$ (où d_{ij} est le coefficient d'indices i, j de D).

3. En écrivant $M = M(a,b,c)$ en fonction de I, K, K^2, déterminer la matrice $({}^tP)MP$.
   En déduire les valeurs propres de la matrice M.
   Discuter suivant les valeurs de a, b, c le nombre de valeurs propres distinctes de M et préciser dans chaque cas les sous-espaces propres associés.

4. On suppose dans cette question $a = 4, b = 2, c = \sqrt{2}$, on note note $M = M(4, 2, \sqrt{2})$.
   On pose $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = ({}^tP)X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

   a. On définit la fonction f sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par :

$$f(x,y,z) = \frac{({}^tX)MX}{\|X\|^2}.$$

      i. Montrer que $\|X\|^2 = \|X'\|^2$ puis que

$$f(x,y,z) = \frac{4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

      ii. Montrer que 2 et 8 sont respectivement les minimum et maximum de f sur $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et déterminer les points en lesquels ils sont atteints.

   b. On cherche désormais à résoudre l'équation $B^2 = M$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

      i. Soit B une solution de l'équation (s'il en existe).
      Montrer que B et M commutent.
      En déduire que si X appartient au sous-espace propre E_λ de M attaché à la valeur propre λ, alors BX appartient aussi à E_λ.
      Montrer que les vecteurs propres de M sont également vecteurs propres de B.
      Justifier alors que $\Delta = ({}^tP)BP$ est une matrice diagonale.

      ii. Résoudre l'équation $\Delta^2 = ({}^tP)MP$ d'inconnue Δ et donner le nombre de solutions de l'équation $B^2 = M$.

Exercice 2

Sujet : Étude d'une suite récurrente. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : suites numériques

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Commentaires : très bien pour s'entraîner à la manipulation de suites

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par :

$$u_0 \geqslant 0 \text{ et , pour } n \geqslant 1,\ u_n = \sqrt{n+u_{n-1}}.$$

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
2. a. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(1+x).$$

   b. En déduire que pour tout entier n, $u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}$ puis que la suite $\left(\dfrac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

   c. Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, puis en remarquant que, pour tout entier n non nul, $1 \leqslant \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{1+\dfrac{u_{n-1}}{n}}$, en déduire un équivalent de u_n en$+\infty$.
3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$. À l'aide d'un développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite L que l'on précisera.
4. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) \text{ puis } \lim_{n\to+\infty}(u_n-u_{n-1}).$$

   Justifier alors qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n, si $n \geqslant N_0$ alors $u_n \geqslant u_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.
   Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
5. Écrire en `Scilab` une fonction `suite` qui calcule le terme d'indice n de la suite lorsque $u_0 = 1$.

Problème

Sujet : Loi de Student, loi de Cauchy et lois normales. **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, variables aléatoires à densité, produit de convolution.

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : nombreuses subtilités sur les variables à densité au début de la partie IV, mais le reste est plutôt classique, abordable, et le résultat final est très joli et présente une belle utilisation de la convolution.

Partie I : Un calcul d'intégrales

1. Déterminer pour quelles valeurs du réel α l'intégrale J_α converge, où

$$J_\alpha = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}.$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel α supérieur ou égal à 1, on a

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}dt = \frac{1}{2\alpha}J_\alpha.$$

   En déduire que pour tout réel α supérieur ou égal à 1, on a

$$J_{\alpha+1} = \frac{2\alpha-1}{2\alpha}J_\alpha.$$

3. Calculer J_1. Pour n entier supérieur ou égal à 1, calculer J_n.

Partie II : Loi de Student à n degrés de liberté
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit sur $\mathbf{R}$ la fonction g_n par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad g_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

4. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un réel k_n tel que la fonction $f_n = \frac{1}{k_n} g_n$ soit une densité de probabilité. Exprimer k_n à l'aide de $J_{\frac{n+1}{2}}$ (on pourra à cet effet utiliser le changement de variable $y = \frac{t}{\sqrt{n}}$.)
5. Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de densité f_n. On dit alors que X suit une loi de Student à n degrés de liberté.
   a. Montrer que X admet une espérance si et seulement si $n > 1$, et la calculer.
   b. Montrer que X admet une variance si et seulement si $n > 2$. Exprimer alors $V(X)$ en fonction de k_n, n et $J_{\frac{n-1}{2}}$, puis vérifier que
   $$V(X) = \frac{n}{n-2}.$$
   Lorsque $n = 1$, la loi de Student à 1 degré de liberté s'appelle loi de Cauchy, et une densité sur $\mathbf{R}$ est alors
   $$f_1 : t \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}.$$

Partie III : Simulation d'une loi
Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un rayon lumineux part de l'origine O et frappe un écran représenté par la droite d'équation $x = 1$ et un point M. On suppose que Θ, mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

6. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \tan \Theta$. En déduire que Y est une variable à densité, dont on précisera une densité. Reconnaître la loi de Y.
7. On considère la fonction `Scilab` suivante :

```
function y=simul()
  u = rand()
  y = sin(%pi*u - %pi/2)/cos(%pi*u - %pi/2)
endfunction
```

   Quelle est la loi simulée par cette fonction ? Expliquer votre démarche.

Partie IV : Obtention d'une loi de Cauchy à partir de lois normales
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

8. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de fonction de répartition F. On notera G la fonction de répartition de la variable aléatoire $|Y|$.
   a. On suppose dans cette question que Y est une variable aléatoire de densité f, continue sur $\mathbf{R}$.
   Exprimer une densité de $-Y$ à l'aide de f, et montrer que Y et $-Y$ ont même loi (c'est-à-dire même fonction de répartition) si et seulement si f est paire.
   On suppose cette condition vérifiée. Exprimer G à l'aide de F, et montrer que $|Y|$ est une variable aléatoire à densité. Exprimer une densité g de $|Y|$ en fonction de f.
   b. Inversement, on suppose dans cette question que $|Y|$ est une variable aléatoire de densité g et que Y et $-Y$ ont même loi.
   Montrer que pour tout réel x, $P(Y = x) = 0$, puis exprimer $F(x)$ en fonction de $F(-x)$.
   Exprimer $F(x)$ en fonction de G et de x (on pourra distinguer deux cas : $x < 0$ et $x \geqslant 0$).
   En déduire que Y est une variable à densité, et exprimer une densité f de Y en fonction de g.
9. Soit c un réel strictement positif. À l'aide du changement de variable $u = e^{2t}$, montrer que l'intégrale
   $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2t} e^{-\frac{ce^{2t}}{2}} \, dt \text{ converge et la calculer.}$$
10. Soient X et X' deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, **indépendantes**, à valeurs dans $\mathbf{R}^*$, de même densité φ définie par
   $$\forall x \in \mathbf{R}, \ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
   a. Montrer que la variable aléatoire $Z = \ln|X|$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité. Quelle est la densité de la variable aléatoire $-Z$?

b. Montrer qu'une densité h de la variable aléatoire $\ln\left|\frac{X}{X'}\right|$ est donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R},\ h(x) = \frac{2}{\pi}\frac{e^x}{e^{2x}+1}.$$

c. Déterminer une densité de la variable aléatoire $\left|\frac{X}{X'}\right|$, puis reconnaître la loi de $\frac{X}{X'}$.

ECRICOME 2005 : Corrigé

Exercice 1

1. Posons $I = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Alors

$$aI + bJ + cK = \begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&b\\0&b&0\\0&0&b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&c&0\\c&0&c\\0&c&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&c&b\\c&a+b&c\\b&c&a\end{pmatrix} = M(a,b,c).$$

On a alors $J^2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = I$, $K^2 = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ et $K^3 = \begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$.

En particulier, notons que $\boxed{K^2 = I + J}$ et $\boxed{K^3 = 2K.}$

On en déduit que $K^3 - 2K = 0$, et donc $\boxed{X^3 - 2X \text{ est un polynôme annulateur de } K.}$

Les valeurs propres possibles de K sont alors les racines de $X^3 - 2X = X(X^2 - 2)$, c'est-à-dire 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

2. K est une matrice symétrique réelle, donc elle est diagonalisable en base orthonormée : il existe D diagonale et P orthogonale telles que $K = PDP^{-1} = PD^tP \Leftrightarrow D = {}^tPKP$. Pour déterminer P et D, il nous faut donc les valeurs propres de K et une base orthonormée de vecteurs propres.
La première et la dernière colonne de K sont identiques, et non colinéaires à la troisième donc K est de rang 2, de sorte que 0 est valeur propre de K, avec un sous-espace propre de dimension 1.
Par conséquent, K possède au moins une autre valeur propre, qui est donc soit $\sqrt{2}$, soit $-\sqrt{2}$.
Puisque K est diagonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres, comptées avec multiplicité.
Si K ne possédait qu'une seule valeur propre non nulle, la dimension du sous-espace propre associé serait 2, et donc on aurait $\operatorname{tr}(K) = \pm 2\sqrt{2}$, contredisant le fait que K est de trace nulle.
Ainsi, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont toutes deux valeurs propres de K. Par conséquent,

$\boxed{\operatorname{Spec}(K) = \left\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\} \text{ et les trois sous-espaces propres sont de dimension 1.}}$

On a alors $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_0(K)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0\\ x + z = 0\\ y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0\\ x = -z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

De même, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_{\sqrt{2}}(K)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2}x\\ x + z = \sqrt{2}y\\ y = \sqrt{2}z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z\\ 2x = \sqrt{2}y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z\\ y = \sqrt{2}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}.$$

Enfin, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_{-\sqrt{2}}(K)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = -\sqrt{2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{2}x\\ x + z = -\sqrt{2}y\\ y = -\sqrt{2}z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z\\ 2x = -\sqrt{2}y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z\\ y = -\sqrt{2}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}.$$

⚠ Attention !
Il faut toujours bien lire le sujet : certains demandent P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale (soit encore $A = PDP^{-1}$), d'autres demandent P telle que PAP^{-1} soit diagonale ($A = P^{-1}DP$). Il faut alors être capable de décider si c'est P ou P^{-1} qui est la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres de A.

Alternative
On aurait bien évidemment pu calculer les rangs de $K - \sqrt{2}I$ et $K + \sqrt{2}I$ afin de constater qu'aucune de ces matrices n'est inversible. Mais il faut être certain de bien manipuler les racines carrées !

Notons que nous n'avons pas encore terminé : nous voulons P orthogonale, et donc il ne suffit pas d'avoir une base de vecteurs propres, mais il faut une base **orthonormée** de vecteurs propres.
Les sous-espaces propres étant deux à deux orthogonaux, et tous de dimension 1, il suffit donc de diviser chacun des vecteurs obtenus ci-dessus par leur norme.
Le premier est de norme $\sqrt{2}$, les deux autres sont de norme 2.

Ainsi, on a $K = PD^tP$ où

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}.}$$

3. Puisque $J = K^2 - I$, on a donc

$$M = aI + b(K^2 - I) + cK = (a-b)I + bK^2 + cK.$$

Et puisque ${}^tPKP = D$, alors

$$D^2 = ({}^tPKP)^2 = {}^tPK \underbrace{P{}^tP}_{=I} KP = {}^tPK^2P.$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} {}^tPMP &= {}^tP\left((a-b)I + bK^2 + cK\right)P = (a-b){}^tPIP + b{}^tPK^2P + c{}^tPKP \\ &= (a-b)I + bD^2 + cD = \begin{pmatrix} a-b+2b-\sqrt{2}c & 0 & 0 \\ 0 & (a-b) & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)+2b+\sqrt{2}c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent[1], on a

$$\mathrm{Spec}(M) = \{a+b-\sqrt{2}c, a-b, a+b+\sqrt{2}c\}.$$

[1] Nous venons de trouver une matrice diagonale semblable à M, ses coefficients diagonaux sont donc les valeurs propres de M.

Il serait tentant d'en déduire que M possède trois valeurs propres, mais il est encore possible que deux d'entre elles (voire les trois) soient égales.

• **Si** $c = 0$ **et** $b = 0$**.** Alors M ne possède qu'une seule valeur propre a, et étant diagonalisable, on a $E_a(M) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
• **Si** $c = 0$ **et** $b \neq 0$, alors M possède deux valeurs propres qui sont $a+b$ et $a-b$, avec $\dim E_{a+b} = 2$ et donc $\dim E_{a-b}(M) = 1$.
Plus précisément, remarquons que la matrice P est telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale : ses colonnes sont des vecteurs propres de M.
Autrement dit, en notant X_1, X_2, X_3 les trois colonnes de P, qui sont donc la base de vecteurs propres de K obtenue à la question 2, on a

$$E_{a+b}(M) = \mathrm{Vect}(X_1, X_3),\ E_{a-b}(M) = \mathrm{Vect}(X_2).$$

Détails
Ce n'est jamais dit très explicitement en cours, mais c'est bon à savoir : $P^{-1}AP$ est diagonale si et seulement si les colonnes de P sont des vecteurs propres de A.
Essayez de raisonner en termes de changement de base pour vous en convaincre.
C'est d'ailleurs exactement ce qu'on a utilisé pour trouver la matrice P de la question 2.

• **Si** $c = \sqrt{2}b$, $b \neq 0$**.**
Alors $a+b-\sqrt{2}c = a+b-2b = a-b$. Et donc M ne possède que deux valeurs propres distinctes : $a-b$ et $a+b+\sqrt{2}c = a+3b$.
On a alors $E_{a-b}(M) = \mathrm{Vect}(X_1, X_2)$ et $E_{a+3b}(M) = \mathrm{Vect}(X_3)$.
• **Si** $c = -\sqrt{2}b$, $b \neq 0$**.** Alors M ne possède que deux valeurs propres qui sont $a-b$ et $a+b-\sqrt{2}c = a+3b$, avec cette fois $E_{a-b}(M) = \mathrm{Vect}(X_2, X_3)$ et $E_{a+3b}(M) = \mathrm{Vect}(X_1)$.
• **Si** $c \notin \{0, -\sqrt{2}b, \sqrt{2}b\}$**.** Alors M possède trois valeurs propres, et on a

$$E_{a+b-\sqrt{2}c}(M) = E_{-\sqrt{2}}(M) = \mathrm{Vect}(X_1),\ E_{a-b}(M) = E_0(M) = \mathrm{Vect}(X_2),\ E_{a+b+\sqrt{2}c}(M) = E_{\sqrt{2}}(M) = \mathrm{Vect}(X_1).$$

4.a.i. Par définition,

$$\|X'\|^2 = {}^tX'X' = {}^t({}^tPX){}^tPX = {}^tX \underbrace{P{}^tP}_{I} X = {}^tXX = \boxed{\|X\|^2.}$$

D'après la question précédente[2], on a ${}^tPMP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Et alors

$$\begin{aligned} {}^tXMX &= {}^tXP\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}{}^tPX = {}^tX'\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}X' \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4x' \\ 2y' \\ 8z' \end{pmatrix} = 4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2. \end{aligned}$$

D'autre part, $\|X'\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ et donc

$$f(x, y, z) = \frac{{}^tXMX}{\|X'\|^2} = \boxed{\frac{4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}.}$$

4.a.ii. Il est évident que $2(x'^2 + y'^2 + z'^2) \leqslant 4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 \leqslant 8(x'^2 + y'^2 + z'^2)$, et donc, après division par $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$,

$$2 \leqslant f(x, y, z) \leqslant 8.$$

D'autre part, on a $2(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2$ si et seulement si

$$2x'^2 + 6z'^2 = 0 \Leftrightarrow x' = z' = 0.$$

Et donc $f(x, y, z) = 2$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit si et seulement si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} = y'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De même, on prouve que $f(x, y, z) = 8$ si et seulement si

$$x' = y' = 0 \Leftrightarrow x' = y' = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix} = z'\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque *: la fonction f que nous venons d'étudier est appelée quotient de Rayleigh, et c'est un exercice assez classique de TD.*
Le résultat généralement prouvé, est que, si M est une matrice symétrique, si $q : X \mapsto {}^tXMX$ est la forme quadratique associée, alors $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, le maximum (resp. le minimum) de q est égal à la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de M, et ce maximum (resp. minimum) est atteint uniquement en les vecteurs propres de M associés à la plus grande (resp. petite) valeur propre.

4.b.i. Si B est solution, alors $BM = BB^2 = B^3 = B^2B = MB$. Donc $\boxed{B \text{ et } M \text{ commutent.}}$

Par conséquent, si $X \in E_\lambda(M)$, alors $MX = \lambda X$ et donc

$$MBX = BMX = B\lambda X = \lambda BX$$

de sorte que $\boxed{BX \in E_\lambda(M).}$
Mais puisque M possède trois valeurs propres distinctes, ses sous-espaces propres sont de dimension 1. Et donc si X est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ, alors $E_\lambda(M) = \mathrm{Vect}(X)$.
Par conséquent, $BX \in \mathrm{Vect}(X)$, de sorte qu'il existe $\mu \in \mathbf{R}$ tel que $BX = \mu X$.
Et puisque[3] $X \neq 0$, $\boxed{X \text{ est donc un vecteur propre de } B.}$
Nous savons que P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ à une base $\mathcal{B}$ formée de vecteurs propres de M.
Mais alors $\mathcal{B}$ est également une base formée de vecteurs propres de B.
Notons également que si on note $f_B : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ l'application définie par $f_B(X) = BX$, alors $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f_B)$.
Et alors, par la formule de changement de base,

$$\Delta = {}^tPBP = P^{-1}BP = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{can}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f_B)P_{\mathcal{B}_{can},\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_B).$$

Mais $\mathcal{B}$ étant formée de vecteurs propres de B, $\boxed{\Delta \text{ est diagonale.}}$

[2] On a $c \notin \{0, \pm\sqrt{2}b\}$.

[3] C'est un vecteur propre de M.

Rappel
La matrice d'un endomorphisme dans une base est diagonale si et seulement si il s'agit d'une base formée de vecteurs propres.

4.b.ii. Il s'agit donc de résoudre $\Delta^2 = D$.
Si on note $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, on a donc

$$\Delta^2 = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Il y a donc $2^3 = 8$ solutions, correspondant à $\lambda_1 = \pm 2, \lambda_2 = \pm\sqrt{2}$ et $\lambda_3 = \pm 2\sqrt{2}$.
Et grâce à ce que nous avons dit précédemment, B vérifie $B^2 = M$ si et seulement si ${}^tPBP$ est l'une des 8 matrices diagonales que nous venons d'obtenir.
Et donc les solutions de $B^2 = M$ sont les

$$P \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2\sqrt{2} \end{pmatrix} {}^tP.$$

Notons que nous obtenons bien ainsi 8 matrices distinctes, puisqu'elles ont des valeurs propres différentes.
Donc $\boxed{\text{l'équation } B^2 = M \text{ possède exactement 8 solutions.}}$

EXERCICE 2

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant 0$.
Pour $n = 0$, c'est l'hypothèse faite pour u_0.
Supposons que $u_n \geqslant 0$. Alors $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \geqslant 0$.
Par le principe de récurrence, on a donc $u_n \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

En particulier, pour tout $n \geqslant 1$, $n + u_{n-1} \geqslant n$ et donc[4], $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \geqslant \sqrt{n}$.
De plus, il est évident que $u_0 \geqslant 0 = \sqrt{0}$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_n \geqslant \sqrt{n}.}$

[4] Par croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$.

2.a. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Alors

$$(1-\sqrt{x})^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{x} + x \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(1+x).}$$

2.b. Montrons par récurrence que pour tout n, $u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}$.
Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0 + \dfrac{u_0}{2^0}$, donc la propriété est vérifiée.
Supposons donc que $u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} &\leqslant \frac{1}{2}(n+1+u_n) && \text{C'est le résultat de 2.a.} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(n+1+n+\frac{u_0}{2^n}\right) && \text{Hypothèse de récurrence.} \\ &\leqslant \frac{2n+1}{2} + \frac{u_0}{2^{n+1}} \\ &\leqslant n+1+\frac{u_0}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vrai au rang $n+1$, et donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_n \leqslant n + \frac{u_0}{2^n}.}$

En particulier, pour $n \geqslant 1$, il vient

$$0 \leqslant \frac{u_{n-1}}{n^2} \leqslant \frac{n-1+\frac{u_0}{2^{n-1}}}{n^2} \leqslant \frac{n-1}{n^2} + \frac{u_0}{2^{n-1}n^2}.$$

Mais $\dfrac{n-1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{u_0}{2^{n-1}n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par le théorème des gendarmes, on a donc $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n-1}}{n^2} = 0.}$

2.c. On a, pour $n \geqslant 1$,

$$\frac{u_n}{n} = \frac{\sqrt{n+u_{n-1}}}{n} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après la question 1, on a $\frac{u_n}{\sqrt{n}} \geqslant 1$.

D'autre part, on a $\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$.

Mais $0 \leqslant \frac{u_{n-1}}{n} \leqslant \frac{u_{n-1}}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que $\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$, de sorte que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}.}$

3. On a $w_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}} - 1\right)$, avec $\frac{u_{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'autre part, nous savons que

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x) \text{ et donc } \sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}.$$

Ainsi,

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{u_{n-1}}{2n} = \frac{u_{n-1}}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_{n-1}}{2\sqrt{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{2}.}$

4. On a

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n}\left(1 - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right).$$

Mais[5]

$$1 - \sqrt{1-\frac{1}{n}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Et donc $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a alors

$$u_n - u_{n-1} = w_n + \sqrt{n} - w_{n-1} - \sqrt{n-1} = \underbrace{(w_n - w_{n-1})}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0} + \underbrace{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, il existe un entier $N_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant N_0$, $|u_n - u_{n-1}| \leqslant \frac{1}{2}$.

Et alors, pour $n \geqslant N_0$,

$$u_n - u_{n-1} \geqslant -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{u_n \geqslant u_{n-1} - \frac{1}{2}.}$$

On a, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{n+1+u_n} - \sqrt{n+u_{n-1}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{n+1+u_n} - \sqrt{n+u_{n-1}}\right)\left(\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}\right)}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}} \\ &= \frac{n+1+u_n-(n+u_{n-1})}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}} \\ &= \frac{1+u_n-u_{n-1}}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}}. \end{aligned}$$

Puisque le dénominateur est clairement positif, $\boxed{u_{n+1} - u_n \text{ est du signe de } 1 + u_n - u_{n-1}.}$

Mais pour $n \geqslant N_0$, $1 + u_n - u_{n-1} \geqslant 1 - \frac{1}{2} \geqslant 0$.

Et donc $u_{n+1} \geqslant u_n$.

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant N_0} \text{ est croissante.}}$

[5] À l'aide du même développement limité qu'à la question précédente.

Détails

C'est la définition de la convergence d'une suite : si (u_n) tend vers 0, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$|u_n| \leqslant \varepsilon.$$

Ici on a **choisi** de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Astuce

On a multiplié en haut et en bas par la quantité conjuguée.
L'intérêt est que les racines disparaissent au numérateur. Certes, elles apparaissent au dénominateur, mais avec un signe +, ce qui n'est plus un problème pour étudier le signe.

5. Il suffit d'utiliser une boucle pour calculer successivement tous les termes de la suite.

```
function u = suite(n)
        u = 1
        for i=1 :n
                u=sqrt(i+u)
        end
endfunction
```

PROBLÈME

Partie I : Un calcul d'intégrales

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+y^2)^\alpha}$ est continue et positive sur $\mathbf{R}_+$.

Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{(1+t^2)^\alpha} \sim \dfrac{1}{t^{2\alpha}}$.

Or, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^{2\alpha}}\,dt$ converge si et seulement si $2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$.

Donc $\boxed{J_\alpha \text{ converge si et seulement si } \alpha > \dfrac{1}{2}.}$

> **Méthode**
> Commencer par étudier le domaine de continuité nous permet de voir quels sont les points qui nécessiteront une étude de convergence.
> Ici la fonction est continue en 0, donc l'intégrale au voisinage de 0 converge : la seule étude nécessaire est au voisinage de $+\infty$.

2. Soit $A > 0$. Procédons à une intégration par parties sur le segment $[0, A]$, en posant $u(t) = t, v(t) = -\dfrac{1}{2\alpha}\dfrac{1}{(1+t^2)^\alpha}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0, A]$, avec $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^{\alpha+1}}$. Il vient donc

$$\int_0^A \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^{\alpha+1}} = \left[-\frac{1}{2\alpha}\frac{t}{(1+t^2)^\alpha}\right]_0^A + \int_0^A \frac{1}{2\alpha}\frac{dt}{(1+t^2)^\alpha} = -\frac{1}{2\alpha}\frac{A}{(1+A^2)^\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\int_0^A \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}.$$

Mais $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{(1+A^2)^\alpha} = 0$, et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}dt = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^\alpha} \boxed{= \frac{1}{2\alpha}J_\alpha.}$$

Notons que

$$\begin{aligned} J_{\alpha+1} &= \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha+1}} = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1+t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} - \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\right)dt \\ &= J_\alpha - \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}dt = J_\alpha - \frac{1}{2\alpha}J_\alpha = \boxed{\frac{2\alpha-1}{2\alpha}J_\alpha.} \end{aligned}$$

3. Soit $A > 0$. Alors

$$\int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan}(t)]_0^A = \operatorname{Arctan}(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},$$

de sorte que

$$J_1 = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \boxed{\frac{\pi}{2}.}$$

En utilisant la formule prouvée à la question précédente, il vient alors

$$J_2 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, J_3 = \frac{3\times 1}{4\times 2}\frac{\pi}{2}, \dots, J_n = \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\times 2}\frac{\pi}{2}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\times 2} &= \frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\times 2}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\times 2}\,\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\times 2} \\ &= \frac{(2n-2)!}{((2n-2)\times(2n-4)\times\cdots 4\times 2)^2} \end{aligned}$$

> **Méthode**
> L'expression du numérateur nous fait penser à $(2n-3)!$, mais il manque les termes pairs (de 2 à $2n-2$).
> Pour les faire apparaître, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par ces termes.

$$= \frac{(2n-2)!}{(2(n-1)\times 2(n-2)\times (2\times 2)\times 2)^2}$$
$$= \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2}.$$

On en déduit alors que

$$\boxed{J_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1)!^2}\frac{\pi}{2}.}$$

Remarque : si cela vous fait penser à un résultat déjà vu sur les intégrales de Wallis d'ordre pair $W_{2n} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)\,dx$, c'est normal[6].
En effet, on pourrait montrer par le changement de variable $t = \tan x$ que $W_{2n} = J_{n-1}$.

[6] Et même bon signe si vous les avez reconnues !

Partie II : Loi de Student à n degrés de liberté

La loi de Student a été découverte par un statisticien anglais du nom de William Gosset[7]. Il travaillait à Dublin pour le compte des brasseries Guinness, où son rôle était d'étudier l'influence des différentes variétés d'orge et de houblon sur le goût de la bière, le but étant de réduire au minimum cette influence afin de stabiliser la qualité du produit. Voici donc une application très concrète du bon usage des statistiques...

[7] Student étant le pseudonyme sous lequel il a publié la plupart de ses articles.

4. La fonction g_n est positive et continue sur $\mathbf{R}$.
De plus, elle est paire, et au voisinage de $+\infty$, on a

$$g_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\left(\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{t^{n+1}}.$$

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n+1}}$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(t)\,dt$ et donc de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$.

Mais alors par parité de g_n, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,dt$ converge.

Pour que f_n soit une densité, il faut que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_n} g_n(t)\,dt = 1$, et donc que $k_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,dt$.
k_n est non nul, car la fonction g_n est strictement positive sur $\mathbf{R}_+$, et donc $k_n > 0$.
Alors, la fonction $\dfrac{1}{k_n} g_n$ est continue, positive et son intégrale sur $\mathbf{R}$ converge et vaut 1.
$f_n = \frac{1}{k_n} g_n$ est donc bien $\boxed{\text{une densité de probabilité.}}$

Plus généralement

Pour toute fonction f positive et d'intégrale convergente sur $\mathbf{R}$, il existe une unique constante k telle que kf soit une densité, et cette constante est l'inverse de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$.

Pour calculer k_n, réalisons le changement de variable[8] $y = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$. On a alors

[8] Affine !

$$k_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,dt$$
$$= 2\sqrt{n}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,dy = \boxed{2\sqrt{n}J_{\frac{n+1}{2}}.}$$

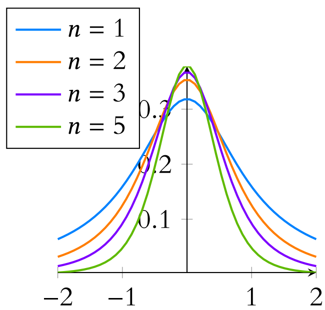


FIGURE 1– La densité f_n.

5.a. X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,dt$ converge absolument.
Mais la fonction $t \mapsto t f_n(t)$ est continue et impaire sur $\mathbf{R}$, donc il suffit d'étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_n(t)\,dt$.
Pour t au voisinage de $+\infty$, on a

$$t f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k_n}\frac{t}{t^{n+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k_n}\frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{t^n}.$$

On reconnaît alors une intégrale de Riemann, de la forme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n}$, qui converge si et seulement si $n > 1$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_n(t)\,dt$ converge $\boxed{\text{si et seulement si } n > 1.}$
Mais alors, par imparité de $t \mapsto t f_n(t)$, on a alors

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,dt = 0.}$$

Imparité
Par imparité de l'intégrande, on a donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,dt$ qui converge si et seulement si $n > 1$.

5.b. X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)dt$ converge[9].
La fonction $t \mapsto t^2 f_n(t)$ est continue et positive sur $\mathbf{R}$, et pour t au voisinage de $+\infty$, on a

$$t^2 f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2 \frac{1}{k_n}\frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{t^{n+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{k_n}\frac{1}{t^{n-2}}.$$

[9] Absolument, mais il s'agit d'une fonction positive, donc la convergence est équivalente à la convergence absolue.

Mais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n-2}}\,dt$ est une intégrale de Riemann qui converge si et seulement si $n > 2$, et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 f_n(t)dt$ converge $\boxed{\text{si et seulement si } n > 2.}$
On a alors, par la formule de Huygens,

Parité
Par parité de l'intégrande, on a donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)\,dt$ qui converge si et seulement si $n > 2$.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_n} \frac{t^2}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,dt = \frac{2}{2\sqrt{n}J_{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,dt.$$

Comme précédemment, procédons au changement de variable $y = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned}
V(X) &= \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n}J_{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,dy \\
&= \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n}J_{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{2\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} J_{\frac{n+1}{2}-1} \\
&= \frac{1}{J_{\frac{n+1}{2}}} \frac{n}{n-1} J_{\frac{n-1}{2}} \\
&= \frac{2\times\frac{n-1}{2}}{2\times\frac{n-1}{2}-1}\,\frac{n}{n-1} \\
&= \boxed{\frac{n}{n-2}.}
\end{aligned}$$

C'est le résultat de la question 2 avec

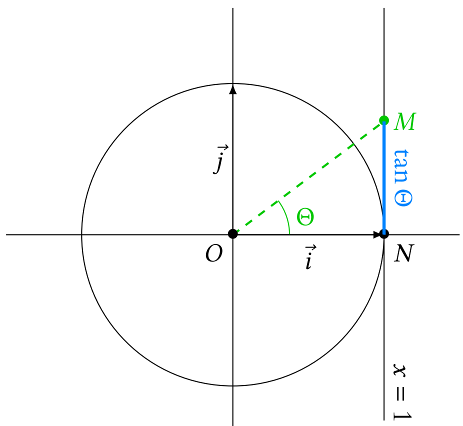
$$\alpha = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}.$$

C'est encore la question 2,

$$\frac{J_\alpha}{J_{\alpha+1}} = \frac{2\alpha}{2\alpha-1}.$$

Partie III : Simulation d'une loi

Commençons par expliquer la situation sur un dessin : l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ est choisi au hasard entre $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et M est situé sur la droite $x = 1$.
Si N est le point de coordonnée $(1, 0)$, nous savons alors que $MN = \tan\Theta$.
Et si vous ne le savez pas, revenez à la bonne vieille trigonométrie de collège : dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle est égale au côté opposé sur le côté adjacent. Or ici, nous connaissons la longueur de chacun de ces côtés en fonction de Θ !



6. Puisque Θ est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $Y = \tan\Theta$ est à valeurs dans $\mathbf{R}$.
Et par croissance de la fonction Arctan, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}, F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(\tan\Theta \leqslant x) = P(\Theta \leqslant \operatorname{Arctan}(x)) = F_\Theta(\operatorname{Arctan}(x)).$$

Rédaction
Ne pas oublier de mentionner la croissance de la fonction Arctan : c'est ce qui justifie qu'on préserve le sens des inégalités.

Or, Θ suit une loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, de sorte que

$$F_\Theta(t) = \frac{t+\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{t}{\pi} + \frac{1}{2} \text{ si } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Or, pour tout x réel, on a bien $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2}$. Donc

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F_Y(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(x) + \frac{1}{2}.$$

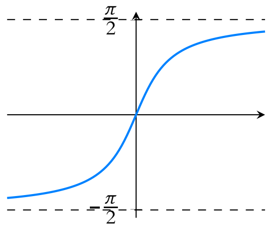


FIGURE 2– $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arctan}(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Donc la fonction de répartition de Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, avec

$$F_Y'(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Par conséquent[10], Y admet une densité, et l'une de ses densités est F_Y'. Nous reconnaissons alors la densité d'une $\boxed{\text{loi de Cauchy.}}$

[10] Puisque F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, elle y est en particulier continue.

7. Puisque u suit une loi uniforme sur $[0,1]$, `%pi*u - %pi/2` suit une loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et donc d'après la question qui précède sa tangente[11] suit une $\boxed{\text{loi de Cauchy.}}$
Donc la fonction `Scilab` proposée simule une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy.

[11] Qui rappelons le est égale au sinus divisé par le cosinus.

Partie IV : Obtention d'une loi de Cauchy à partir de lois normales

8.a. Par transformation affine, une densité de $-Y$ est $x \mapsto f(-x)$.
Ainsi, si f est paire, une densité de $-Y$ est $x \mapsto f(-x) = f(x)$.
Donc f est à la fois une densité de Y et de $-Y$, donc ces deux variables ont même loi.
Au contraire, supposons que Y et $-Y$ suivent la même loi, et donc que leur fonctions de répartition sont égales.
f étant continue, F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$, et a pour dérivée f. En effet,

Loi
Rappelons que la loi est caractérisée par la fonction de répartition, mais puisque la densité détermine de manière unique la fonction de répartition, deux variables de même densité ont nécessairement même loi.

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F_Y(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt}_{=\text{cste}} + \int_0^x f(t)\,dt$$

et donc par continuité de f, $F_Y'(x) = f(x)$.
De même, une densité de $-Y$ est $x \mapsto f(-x)$ qui est continue, et donc F_{-Y} est de classe $\mathscr{C}^1$, avec $F_{-Y}'(x) = f(-x)$.
Enfin, F_Y et F_{-Y} étant égales, elles ont même dérivée, et donc

Remarque
Notons que l'hypothèse de continuité de f est ici indispensable.

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = f(-x).$$

Ainsi, la fonction f est paire.

Nous avons donc bien prouvé que $\boxed{Y \text{ et } -Y \text{ ont même loi si et seulement si } f \text{ est paire.}}$

Soit $x \in \mathbf{R}$. Si $x < 0$, alors il est clair[12] que $P(|Y| \leqslant x) = 0$.
En revanche, si $x \geqslant 0$, alors

[12] Une valeur absolue est positive.

$$G(x) = P(|Y| \leqslant x) = P(-x \leqslant Y \leqslant x) = P(Y \leqslant x) - P(Y < -x).$$

Mais puisque la loi de Y et la loi de $-Y$ sont les mêmes,

$$P(Y < -x) = P(-Y < -x) = P(Y > x) = 1 - P(Y \leqslant x).$$

Et donc $P(|Y| \leqslant x) = P(Y \leqslant x) - (1 - P(Y \leqslant x)) = 2P(Y \leqslant x) - 1 = 2F(x) - 1$. Ainsi,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2F(x) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

La fonction G est donc continue sur $\mathbf{R}_+$ car F l'est, continue sur $\mathbf{R}_-^*$ car constante, et elle est continue en 0 car

$$G(0) = 0 = \lim_{x \to 0^-} G(x).$$

Continuité
Lorsqu'on dit que G est continue sur $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$ cela signifie en particulier qu'elle est continue à droite en 0.
Mais pas nécessairement qu'elle est continue en 0, la continuité à gauche devant encore être vérifiée.

De plus, F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ car fonction de répartition d'une variable à densité, donc G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et elle l'est évidemment sur $\mathbf{R}_-^*$.
Ainsi, G est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 0, et donc $\boxed{|Y| \text{ est une variable à densité.}}$
En particulier, G est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ de dérivée égale à

$$G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2f(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Puisque toute fonction coïncidant avec G' là où celle-ci est définie est une densité de $|Y|$, on peut par exemple prendre pour densité de Y la fonction

$$\boxed{x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2f(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Méthode
Une densité est en fait toute fonction qui coïncide avec G' sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Le plus simple est donc de prendre une fonction égale à G' là où celle-ci est définie (ici sur $\mathbf{R}^*$), et de choisir une valeur arbitraire ailleurs (ici on a choisi la densité qui vaut 0 en 0).

8.b. Puisque $|Y|$ est à densité, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a $P(|Y| = x) = 0$.
Or, on a également $P(|Y| = x) = P([Y = x] \cup [Y = -x])$.
<u>Si $x = 0$</u>, alors $[Y = x] = [Y = -x]$ et donc $P(Y = 0) = P(|Y| = 0) = 0$ car $|Y|$ est à densité.
<u>Si $x > 0$</u>, alors $[Y = x]$ et $[Y = -x]$ sont incompatibles, et donc

$$0 = P(|Y| = x) = P(Y = x) + P(Y = -x)$$

Rappel
Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls.

Mais $P(Y = x)$ et $P(Y = -x)$ sont des nombres positifs, donc sont tous deux nuls.
On en déduit que $\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, P(Y = x) = 0.}$

Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) &= P(Y \leqslant x) = P(Y < x) + P(Y = x) \\ &= P(Y < x) = 1 - P(Y \geqslant x) = 1 - P(-Y \geqslant x) \\ &= 1 - P(Y \leqslant -x) = \boxed{1 - F(-x).} \end{aligned}$$

Y et $-Y$ ont la même loi.

Si $x \geqslant 0$, alors

$$\begin{aligned} G(x) &= P(|Y| \leqslant x) = P(-x \leqslant Y \leqslant x) \\ &= P(Y \leqslant x) - P(Y < -x) \\ &= P(Y \leqslant x) - P(Y \leqslant -x) \\ &= F(x) - F(-x) = F(x) - (1 - F(x)) = 2F(x) - 1. \end{aligned}$$

$P(Y = -x) = 0$ et donc $P(Y \leqslant -x) = P(Y < -x)$.

On en déduit que $\boxed{F(x) = \dfrac{G(x)+1}{2}.}$
Si $x < 0$, alors $-x > 0$. Et donc

$$\begin{aligned} F(x) &= P(Y \leqslant x) = P(-Y \leqslant x) \\ &= P(Y \geqslant -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - P(Y \leqslant -x) \\ &= 1 - F(-x) = 1 - \frac{G(-x)+1}{2} \\ &= \boxed{\frac{1 - G(-x)}{2}.} \end{aligned}$$

Y et $-Y$ ont même loi.

$F(-x)$ vient d'être calculé car $-x \geqslant 0$.

La fonction F est alors continue sur $\mathbf{R}_+$ et sur $\mathbf{R}_-^*$.
De plus, $|Y|$ est à valeurs positives, de sorte que $G(0) = P(|Y| \leqslant 0) = P(|Y| = 0)$, et puisque $|Y|$ est une variable à densité, $G(0) = 0$.
Enfin, G est continue[13] et donc

$$\lim_{x \to 0^-} G(x) = \lim_{x \to 0^+} G(x) = G(0) = 0.$$

[13] Toujours car $|Y|$ est à densité.

On en déduit donc que

$$\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = \frac{1}{2} = F(0).$$

Et donc F est continue en 0, donc elle l'est sur $\mathbf{R}$ tout entier. Enfin, G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ privé d'un nombre fini de points, et donc il en est de même de F. Ainsi, $\boxed{Y \text{ admet une densité.}}$
Là où G est dérivable, c'est-à-dire sauf éventuellement en un nombre fini de points, on a

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}G'(x) & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2}G'(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Mais là où elle est définie[14], $G'(x) = g(x)$.
Une densité de Y est donc donnée par

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}g(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}g(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} = \boxed{\frac{1}{2}g(|x|).}$$

Détails
Si G n'est pas $\mathscr{C}^1$ en $x_1, \ldots, x_n$, alors les x_i sont positifs (car G est nulle donc dérivable sur $]-\infty, 0]$).
Et donc F n'est peut-être pas $\mathscr{C}^1$ en $-x1, \ldots, -x_n$, ni en $x_1, \ldots, x_n$.
En revanche, elle est $\mathscr{C}^1$ partout ailleurs.

[14] Sur $\mathbf{R}$ si g est continue.

9. La fonction $t \mapsto e^{2t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et réalise une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
Ainsi, nous pouvons procéder au changement de variable $u = e^{2t}$.
Alors $t = \dfrac{\ln u}{2}$ et donc $dt = \dfrac{1}{2u}$.
Sous réserve de convergence, on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t} e^{-\frac{ce^{2t}}{2}}\, dt = \int_0^{+\infty} u e^{-\frac{cu}{2}} \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{cu}{2}}\, du.$$

Cette dernière intégrale converge car il s'agit d'une intégrale de référence et vaut $\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{c} = \boxed{\dfrac{1}{c}.}$

Convergence
Rappelons que lors d'un changement de variable, il faut tout de même étudier la nature de l'une des deux intégrales, l'autre étant automatiquement de même nature.

Alternative
Notons que sans changement de variable, il était tout à fait possible de calculer cette intégrale, car une primitive de $e^{2t}e^{-\frac{ce^{2t}}{2}}$ est $-\frac{1}{c}e^{-\frac{ce^{2t}}{2}}$.

10.a. φ est continue et paire. Donc par la question 8.a, $|X|$ admet une densité, et sa fonction de répartition est donnée par $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2F_X(x) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par croissance de la fonction exponentielle[15]

$$F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P(\ln|X| \leqslant x) = P(|X| \leqslant e^x) = F_{|X|}(e^x) = 2F_X(e^x) - 1.$$

Puisque F_X est continue, et de classe $\mathscr{C}^1$, il en est de même de F_Z, et donc Z admet une densité.
De plus, l'une de ses densités est alors donnée par

$$F_Z'(x) = 2e^x\varphi(e^x) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^x e^{-\frac{e^{2x}}{2}}.}$$

[15] Rappelons que cette croissance justifie que le sens des inégalités soit préservé.

Remarque
F_X n'est autre que la fonction Φ du cours, dont nous savons qu'elle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ tout entier, de dérivée égale à φ.

10.b. Notons que $\ln\left|\frac{X}{X'}\right| = \ln|X| - \ln|X'|$.
Une densité de $\ln|X|$ a été calculée à la question précédente.
C'est également une densité de $\ln|X'|$, et donc une densité de $-\ln|X'|$ est $x \mapsto \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-x}e^{-\frac{e^{-2x}}{2}}$.
De plus, $\ln|X|$ et $-\ln|X'|$ sont indépendantes car X et X' le sont, de sorte que nous pouvons utiliser le produit de convolution : une densité de $\ln\left|\frac{X}{X'}\right|$ est donnée par

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi}e^t e^{-\frac{e^{2t}}{2}} e^{-(x-t)} e^{-\frac{e^{-2(x-t)}}{2}}\, dt = \frac{2}{\pi}e^{-x}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}e^{-\frac{e^{2t}}{2}(1+e^{-2x})}\, dt.$$

Nous pouvons alors utiliser la question 9 avec $c = 1 + e^{-2x}$:

$$h(x) = \frac{2}{\pi}e^{-x}\frac{1}{1+e^{-2x}} = \boxed{\frac{2}{\pi}\frac{e^x}{e^{2x}+1}.}$$

Précision
Le quotient n'est pas défini pour $X' = 0$, et son logarithme n'est pas défini lorsque $X = 0$.
Ceci est sans importance car ces deux événements sont de probabilité nulle.

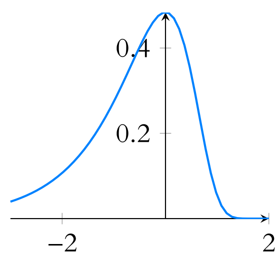


FIGURE 3– La densité de Z.

10.c. Notons $T = \left|\frac{X}{X'}\right|$.
Alors il est évident que T ne prend que des valeurs positives, et donc que pour $x < 0$, $F_T(x) = 0$.

Pour $x=0$, on a $[T\leqslant 0]=[T=0]=[|X|=0]=[X=0]$ et donc $P(T\leqslant 0)=0$.
En revanche, si $x>0$, alors, par croissance du logarithme

$$F_T(x)=P(T\leqslant x)=P\left(\ln\left|\frac{X}{X'}\right|\leqslant \ln(x)\right)=\int_{-\infty}^{\ln x}\frac{2}{\pi}\frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{2}{\pi}\frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt+\int_{0}^{\ln x}\frac{2}{\pi}\frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt.$$

Mais nous savons que $u\mapsto\displaystyle\int_0^u\frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, de dérivée égale à $\dfrac{e^u}{e^{2u}+1}$.
Et donc F_T est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ par composition de fonctions $\mathscr{C}^1$.
Elle l'est également sur $\mathbf{R}_-^*$ puisque constante.
Enfin, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}F_T(x)=0$ et

$$\lim_{x\to 0^+}F_T(x)=\lim_{x\to 0^+}\int_{-\infty}^{\ln x}\frac{2}{\pi}\frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt=\lim_{y\to-\infty}\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{y}\frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt=0=F_T(0).$$

Et donc F_T est continue en 0 et donc sur $\mathbf{R}$.
Puisque nous savons déjà qu'elle est $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 0, T est une variable à densité.
Pour $x>0$, on a alors $F_T'(x)=\dfrac{1}{x}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{e^{\ln x}}{e^{2\ln x}+1}=\dfrac{1}{x}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$.
Ainsi, une densité de T est

$$f_T: x\mapsto\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Puisque X et $-X$ ont même loi[16], il en est donc de même de $\dfrac{X}{X'}$ et $\dfrac{-X}{X'}$. Et $\left|\dfrac{X}{X'}\right|$ admettant une densité, le résultat de la question 8.b s'applique : $\dfrac{X}{X'}$ admet une densité, et l'une de ses densité est donnée

$$x\mapsto\frac{1}{2}f_T(|x|)=\frac{1}{2}\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+|x|^2}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Nous pouvons alors affirmer que $\boxed{\frac{X}{X'}\text{ suit une loi de Cauchy.}}$

[16] Les deux suivent une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
Pour $-X$, c'est par exemple car on connaît la loi d'une transformation affine d'une loi normale.

ECRICOME 2004

Exercice 1

Sujet : Matrices commutant avec une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ possédant n valeurs propres

Facile

Abordable en première année : ✗

Intérêt : ★★☆

Thèmes du programme abordés : diagonalisation, polynômes de matrices.

$\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ($n \geqslant 1$) et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$.
On considère une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distinctes deux à deux.
L'objet de cet exercice est de montrer que, si k est un entier naturel impair et si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ commute avec S^k, alors elle commute avec S.

1. Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que la matrice $P^{-1}SP$ soit une matrice D diagonale.

Dans la suite de l'exercice, un entier naturel impair k est fixé.

2. On considère l'application f de E dans $\mathbf{R}^n$ qui à tout polynôme T fait correspondre le vecteur de $\mathbf{R}^n$ défini par :

$$f(T) = \left(T(\lambda_1^k), T(\lambda_2^k), \ldots, T(\lambda_n^k)\right).$$

   a. Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   b. En déduire l'existence d'un unique polynôme U de E tel que :

$$U(\lambda_1^k) = \lambda_1,\ U(\lambda_2^k) = \lambda_2, \ldots, U(\lambda_n^k) = \lambda_n.$$

3. Prouver que le polynôme R, défini par :

$$R(X) = U(X^k) - X$$

   est un polynôme annulateur de D puis de S.

4. Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $AS^k = S^kA$.
   a. Montrer que pour tout entier naturel p,

$$AS^{pk} = S^{pk}A.$$

   b. En déduire que les matrices A et S commutent, c'est-à-dire que :

$$AS = SA.$$

5. On considère les deux matrices A et S de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a. Vérifier que S possède deux valeurs propres distinctes.
   b. Montrer que A commute avec toute puissance paire de S, mais ne commute pas avec S.

Exercice 2

Sujet : Étude de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n(x)}\,dx$.

Moyen

Abordable en première année : ✓

Intérêt : ★★☆

Thèmes du programme abordés : fonctions d'une variable, intégration sur un segment, suites

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : de l'analyse de première année, celle qu'on a souvent oublié en arrivant aux concours ! La question 15 est plus difficile que le reste.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ ainsi que la suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suivante :

$$I_0 = \frac{\pi}{4} \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x)]^n\,dx.$$

Étude de la bijection réciproque de f.

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.
2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.
3. Justifier que :
$$\forall x \in J, \quad \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \text{ et } \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$
4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :
$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$
5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

Étude des dérivées successives de f.

6. Justifier que f est de classe C^∞ sur I, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f sur I.
7. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :
$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$
8. Déterminer les polynômes P_1 et P_2.
9. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad P_{n+1} = (1 - X^2)P_n' + (n+1)X.P_n$$
En déduire le polynôme P_3.
10. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

Étude de la suite d'intégrales.

11. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bien définie. Calculer I_2.
12. Déterminer les réels a et b, tels que : $\forall t \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$.
13. En posant $t = \sin x$, déterminer I_1.
14. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.
15. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad I_n \geqslant \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n x}\,dx \geqslant \frac{1}{n^2}\frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}.$$
En déduire le comportement de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
16. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1}I_n.$$

ECRICOME 2004 : Corrigé

Exercice 1

Plus précisément

P est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ à une base de vecteurs propres de S.

1. Puisque $S \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ admet n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.
Il existe donc $P \in GL_n(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}SP$ soit diagonale.

2.a. Commençons par prouver que f est linéaire : soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= \left((\lambda P + Q)(\lambda_1^k), \dots, (\lambda P + Q)(\lambda_n^k)\right) \\ &= \left(\lambda P(\lambda_1^k) + Q(\lambda_1^k), \dots, \lambda P(\lambda_n^k) + Q(\lambda_n^k)\right) = \lambda \left(P(\lambda_1^k), \dots, P(\lambda_n^k)\right) + \left(Q(\lambda_1^k), \dots, Q(\lambda_n^k)\right) \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.
De plus, la fonction $x \mapsto x^k$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ car k est impair. Et donc, les λ_i étant deux à deux distincts, il en est de même des λ_i^k.
Ainsi, si $T \in \operatorname{Ker}(f)$, alors $T(\lambda_1^k) = \cdots = T(\lambda_n^k) = 0$. Et donc T possède n racines distinctes.
Puisque $\deg T \leqslant n-1$, c'est donc que T est le polynôme nul et donc $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.
Ainsi, T est injective. Mais $\dim E = n = \dim \mathbf{R}^n$, et donc $\boxed{T \text{ est un isomorphisme.}}$

2.b. Tout élément de $\mathbf{R}^n$ possède un unique antécédent par f. En particulier, il existe un unique $U \in E$ tel que $f(U) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, c'est-à-dire tel que

$$U(\lambda_1^k) = \lambda_1, \ \dots, \ U(\lambda_n^k) = \lambda_n.$$

Détails

Élever une matrice diagonale à la puissance k c'est élever chacun de ses coefficients diagonaux à la puissance k, et pour sommer deux matrices diagonales, il suffit de sommer leurs coefficients diagonaux.
Donc pour appliquer le polynôme U à D, il suffit de l'appliquer à chacun de ses coefficients diagonaux.

3. On a $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.Et donc

$$U(D^k) = U\left(\operatorname{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)\right) = \operatorname{Diag}\left(U(\lambda_1^k), \dots, U(\lambda_n^k)\right) = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = U.$$

Et donc $R(D) = U(D^k) - D = D - D = 0$.
Ainsi, $\boxed{R \text{ est un polynôme annulateur de } D.}$
Et puisque $S = PDP^{-1}$, on a

$$R(S) = R(PDP^{-1}) = PR(D)P^{-1} = 0.$$

Donc $\boxed{R \text{ est aussi annulateur de } S.}$

4.a. Montrons le résultat par récurrence sur p. Pour $p = 0$, c'est évident : $A = A$ et pour $p = 1$, c'est l'hypothèse faite sur A.
Supposons que $AS^{pk} = S^{pk}A$. Alors

$$AS^{(p+1)k} = AS^{pk}S^k = (AS^{pk})S^k = S^{pk}AS^k = S^{pk}S^kA = S^{(p+1)k}A.$$

Donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbf{N},\ AS^{pk} = S^{pk}A.}$

4.b. Soit $U = \sum_{p=0}^{n-1} a_p X^p$ le polynôme de la question 2.b.
Alors $U(X^k) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p X^{kp}$. Et donc $U(S^k) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p S^{kp}$.
On en déduit que

$$U(S^k)A = \sum_{p=0}^{n-1} a_p S^{kp} A = \sum_{p=0}^{n-1} a_p A S^{kp} = AU(S^k).$$

Mais, d'après la question 3, $R(S) = 0 \Leftrightarrow U(S^k) = S$, et donc $\boxed{SA = AS.}$

5.a. λ est valeur propre de S si et seulement si $S - \lambda I_2$ n'est pas inversible, soit si et seulement si $\det(S - \lambda I_2) = 0$. Or

$$\det(S - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Ainsi, $\boxed{S \text{ possède deux valeurs propres distinctes : } 1 \text{ et } -1.}$

5.b. On a $S^2 = I_2$, et donc si $k = 2p$ est pair, $S^k = (S^2)^p = I_2^p = I_2$.
Donc $\boxed{A \text{ commute avec toute puissance paire de } S.}$

On a $AS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $SA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Donc $\boxed{S \text{ et } A \text{ ne commutent pas.}}$

Rappel
Toute matrice commute avec l'identité.

EXERCICE 2

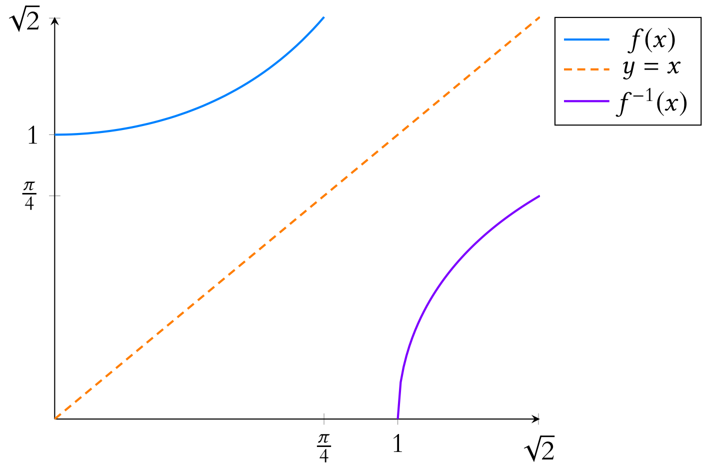
Étude de la bijection réciproque de f.

1. La fonction f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ car quotient de fonctions dérivables et on a alors $f'(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.
Mais sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\sin x > 0$, de sorte que $f'(x) > 0$.
On en déduit que f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
D'autre part, elle y est continue[1] et donc par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $J = \left[f(0), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = [1, \sqrt{2}]$.

[1] Car dérivable.

2. Rappelons que la courbe représentative de f et la courbe représentative de f^{-1} sont symétriques par rapport à première bissectrice[2].
Notons que la question demande juste «l'allure» des courbes, et donc que le dessin attendu n'a pas besoin d'être extrêmement précis, il s'agit surtout de mettre en évidence cette symétrie et la monotonie de f.

[2] Qui, rappelons-le, est la droite d'équation $y = x$.



3. Par définition de la bijection réciproque, on a, pour tout $x \in J$, $f(f^{-1}(x)) = x$.
Soit encore $\dfrac{1}{\cos(f^{-1})(x)} = x \Leftrightarrow \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \dfrac{1}{x}$.
D'autre part, on a

$$\sin^2\left(f^{-1}(x)\right) + \cos^2\left(f^{-1}(x)\right) = 1 \Leftrightarrow \sin^2\left(f^{-1}(x)\right) = \boxed{1 - \frac{1}{x^2}.}$$

D'autre part, pour $x \in J$, on a $f^{-1}(x) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, de sorte que $\sin\left(f^{-1}(x)\right) \geqslant 0$.

Et donc $\boxed{\sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.}$

4. Sur J, f' s'annule uniquement en 0. Puisque $f^{-1}(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$, f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$, avec

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Rappel
En cas de doute sur la formule donnant la dérivée de f^{-1}, il suffit de se rappeler que $(f \circ f^{-1})(x) = x$.
En dérivant cette relation, il vient alors

$$\left(f^{-1}\right)'(x) \times f'(f^{-1}(x)) = 1$$

ce qui permet de retrouver $\left(f^{-1}\right)'(x)$.
Ceci permet également de retrouver où f^{-1} est dérivable : c'est en tous les points x tels que $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, c'est-à-dire en ceux où le quotient précédent est défini.

$$= \frac{\cos^2(f^{-1}(x))}{\sin(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} = \boxed{\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.}$$

$\mathscr{C}^1$

La dérivée obtenue à la question précédente est continue par opérations sur les fonctions usuelles, et donc f^{-1} est $\mathscr{C}^1$.

5. Par la formule de Taylor-Young à l'ordre 1, qui s'applique car f^{-1} est $\mathscr{C}^1$ sur $J \setminus \{1\}$, il vient

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(\sqrt{2}) + \left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{2}\right)(x-\sqrt{2}) + \underset{x\to\sqrt{2}}{o}\left(x-\sqrt{2}\right).$$

Or nous savons que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, de sorte que $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Et $(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}.}$

Et donc $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\sqrt{2}) + \underset{x\to\sqrt{2}}{o}(x-\sqrt{2}).}$

Étude des dérivées successives de f.

6. La fonction cos est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, et ne s'annule pas sur I, donc son inverse, qui est f, est $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

7. Montrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$.

Pour $n = 1$, nous avons déjà prouvé que pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Donc si on pose $P_1(X) = X$, alors $\forall x \in I,\ f'(x) = \frac{P_1(\sin x)}{\cos^2(x)}$.

Supposons qu'il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$.

Alors, en dérivant, il vient

$$\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{\cos(x)P_n'(\sin x)\cos n+1(x) + P_n(\sin x)(n+1)\sin(x)\cos^n(x)}{\cos^{2n+2}(x)}$$
$$= \frac{\cos^2(x)P_n'(\sin x) + (n+1)P_n(\sin x)\sin x}{\cos^{n+2}(x)}$$
$$= \frac{(1-\sin^2 x)P_n'(\sin x) + (n+1)P_n(\sin x)\sin x}{\cos^{n+2}(x)}.$$

Posons alors $P_{n+1}(X) = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n(X)$, qui est un polynôme. On a alors,

$$\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{\cos^{n+2}(x)}.$$

Et donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\boxed{\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.}$$

8. Nous avons déjà remarqué que $P_1 = X$ convient.
Et alors, en utilisant la relation donnée à la question précédente entre P_{n+1} et P_n, il vient

$$P_2(X) = (1-X^2)P_1' + 2XP_1(X) = 1 - X^2 + 2X^2 = \boxed{X^2+1.}$$

9. Je ne sais trop quoi dire... cette relation a déjà été prouvée à la question 7. Peut-être le concepteur avait-il une autre idée en tête lorsqu'il a écrit la question 7.
Toujours est-il que cette relation nous permet d'obtenir

$$P_3 = (1-X^2)P_2' + 3XP_2 = (1-X^2)2X + 3X(X^2+1) = \boxed{X^3+5X.}$$

10. Si l'on se fie à P_1, P_2 et P_3, il semblerait que P_n soit de degré n et que son coefficient dominant soit égal à 1.
Prouvons donc ceci par récurrence, récurrence qui est donc largement initialisée.
Supposons donc que $P_n = X^n + Q_n$, avec $Q_n \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$. Alors

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= (1-X^2)(nX^{n-1} + Q_n') + (n+1)X(X^n + Q_n)\\
&= nX^{n-1} + Q_n' - nX^{n+1} - X^2Q_n' + (n+1)X^{n+1} + (n+1)XQ_n\\
&= X^{n+1} + \underbrace{nX^{n-1} + (1-X^2)Q_n' + (n+1)XQ_n}_{=Q_{n+1}\in\mathbf{R}_n[X]}.
\end{aligned}$$

Et donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, P_n est de degré n et son coefficient dominant vaut 1.

> **Détails**
> Si P_n est de degré n, il s'écrit sous la forme $P_n = \alpha_n X^n + R_n$, avec $R_n \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$.
> Si on suppose de plus que le coefficient dominant vaut 1, alors $\alpha_n = 1$.
> Et inversement, si P_n s'écrit sous cette forme, alors il est de degré n et de coefficient dominant égal à 1.

Étude de la suite d'intégrales.

11. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, f^n est continue sur I, et donc I_n est une intégrale d'une fonction continue sur un segment, donc est bien définie[3].
On a alors

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = [\tan(x)]_0^{\pi/4} = \tan(\pi/4) - \tan(0) = \boxed{1.}$$

[3] Autrement dit : est bien convergente.

12. Pour $t \neq 1$, on a

$$\frac{1}{1-t} + \frac{b}{1+t} = \frac{a(1+t)+b(1-t)}{1-t^2} = \frac{(a-b)t+(a+b)}{1-t^2}.$$

Et donc pour avoir l'égalité demandée dans l'énoncé, il faut que pour tout $t \neq 1$,

$$(a-b)t + (a+b) = 1.$$

Or deux polynômes prennent la même valeur en une infinité de réels si et seulement si ils sont égaux, c'est-à-dire ont les mêmes coefficients.

Donc il faut $\begin{cases} a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{2}.$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } t \neq 1,\ \dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t}\right).}$

13. Procédons au changement de variable $t = \sin x$, qui est légitime car la fonction sin est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
On a donc $dt = \cos(x)\,dx$, de sorte que

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x} = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{1-u^2}.$$

Mais d'après la question précédente, il vient

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) du = \frac{1}{2}\left[\ln(1+u) - \ln(1-u)\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \boxed{\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).}$$

> **Chgt de variable**
> Notons qu'il s'agit d'un changement de variable sur un segment, et donc il n'y a que le caractère $\mathscr{C}^1$ à vérifier, la stricte monotonie n'est pas indispensable.

14. Pour $x \in [0,1]$, on a $\cos(x) \leqslant 1$ et donc $\dfrac{1}{\cos(x)} \geqslant 1$.

Et par conséquent, $\left[\dfrac{1}{\cos(x)}\right]^{n+1} \geqslant \left[\dfrac{1}{\cos(x)}\right]^n$.

Par croissance de l'intégrale, on a donc $I_{n+1} \geqslant I_n$, et donc $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ est croissante.}}$

15. Puisque $\dfrac{1}{\cos^n x} \geqslant 0$ pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a, par la relation de Chasles,

$$I_n = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}} \frac{1}{\cos^n(x)}\,dx}_{\geqslant 0} + \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n(x)}\,dx \geqslant \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n(x)}\,dx.$$

De plus, la fonction cos étant décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a, pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}, \frac{\pi}{4}\right]$,

$$\cos(x) \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\cos x} \geqslant \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)} \Rightarrow \frac{1}{\cos^n x} \geqslant \frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}.$$

Et donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n x}\,dx \geqslant \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}\,dx \geqslant \boxed{\frac{1}{n^2}\frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}.}$$

Notons alors $u_n = \frac{1}{n^2}\frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}$.

Pour déterminer la limite de (u_n) posons $v_n = \ln(u_n) = -2\ln(n) - n\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)\right)$.

On a alors

$$\frac{v_n}{n} = -\underbrace{\frac{2\ln n}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} - \underbrace{\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right)\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}\ln(2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\ln(2).$$

Détails

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc

$$\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}\ln(2).$$

Et donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}\ln(2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
On en déduit que $u_n = e^{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Et alors $I_n \geqslant u_n$ implique que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty.}$

16. Procédons à une intégration par parties, en posant $u(x) = \tan(x)$ et $v(x) = \frac{1}{\cos^n(x)}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, avec

$$u'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \text{ et } v'(x) = \frac{n\sin x}{\cos^{n+1}(x)}.$$

Rappel

La dérivée de tan est

$$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} u'(x)v(x)\,dx = \left[\tan(x)\frac{1}{\cos^n(x)}\right]_0^{\pi/4} - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^{n+2}(x)}\,dx \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{\cos^n\frac{\pi}{4}} - n\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^{n+2}(x)}\,dx \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^n - nI_{n+2} + nI_n \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^n - nI_{n+2} + nI_n. \end{aligned}$$

Et donc $(n+1)I_{n+2} = \left(\sqrt{2}\right)^n + nI_n$, de sorte que

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n+1} \frac{n}{n+1}I_n.}$$

ECRICOME 2003

Exercice 1

Sujet : Développement asymptotique d'une suite définie par $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : suites numériques

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_n^2 \\ u_0 = a,\ a \in \mathbf{R}_+^* \end{cases}$$

1. **Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.**
   a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement positive et monotone.
   b. Montrer que cette suite diverge vers l'infini.
2. **Comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.**
   On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln u_n$.
   a. Prouver que pour tout entier n de $\mathbf{N}$:
   $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$
   En déduire que quels que soient les entiers naturels n et p :
   $$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$
   b. En déduire que quels que soient les entiers naturels k et n :
   $$0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$
   c. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée α.
   d. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbf{N},\quad u_n \leqslant \exp(\alpha 2^n).$$
   En passant à la limite pour n fixé dans l'encadrement de la question 2.b, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbf{N},\quad \exp(\alpha 2^n) \leqslant u_n + 1.$$
   En déduire, lorsque n tend vers l'infini, l'équivalent suivant :
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n).$$
   e. On pose :
   $$\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n.$$
   Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante :
   $$\forall n \in \mathbf{N},\ 2\beta_n - 1 = \left(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n\right)\exp(-\alpha 2^n).$$
   f. Prouver enfin que lorsque n tend vers l'infini :
   $$u_n = -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

Problème

Sujet : Construction d'intervalles de confiance pour la variance de lois normales. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : variables à densité, intervalles de confiance, matrices symétriques, diagonalisation.

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Modifications apportées au sujet d'origine : ajout d'une question intermédiaire dans la partie I pour pallier à la disparition des lois Γ du programme 2015.

Reformulation des questions 10 et 13 en termes d'intervalle de confiance.

Commentaires : un sujet plutôt difficile, mais un des rares problèmes traitant vraiment d'intervalles de confiance.

On admet dans toute la suite que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Partie I : loi du χ^2

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi normale centrée réduite.

On pose alors $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_i^2$.

1. Montrer que la fonction de répartition de $Y_1 = X_1^2$ est égale à $F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
2. En déduire que Y_1 est une variable à densité dont on donnera une densité.
3. Déterminer une densité de $\frac{Y_1}{2}$. Reconnaître alors la loi de $\frac{Y_1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de Y_1.
4. En déduire la loi de $\frac{Y_n}{2}$, puis donner une densité de Y_n.

On dit alors que Y_n suit une loi du Chi-deux à n degrés de liberté, notée $\chi^2(n)$.

5. Donner les valeurs de l'espérance $E(Y_n)$ et de la variance $V(Y_n)$ de Y_n.
6. Soient G_n la fonction de répartition de Y_n et β un réel dans l'intervalle $]0,1[$.
   Montrer qu'il existe un unique réel t tel que $G_n(t) = \beta$. Ce réel sera noté dans la suite $\chi^2_\beta(n)$.

Dans la suite du problème, on considère $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant une même loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. L'objet des parties suivantes est de déterminer une estimation ponctuelle, puis une estimation par intervalle de confiance de la variance σ^2.

Partie II : estimation ponctuelle de σ^2

Pour n entier naturel non nul, on pose

$$F_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - F_n)^2.$$

7. Montrer que $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est un estimateur sans biais et convergent de m.
8. Soit n un entier naturel non nul.
   a. Démontrer que :
   $$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$$
   puis que
   $$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 - (F_n - m)^2.$$
   b. Prouver que $E(V_n) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.
   c. En déduire un estimateur sans biais de σ^2.

Partie III : Estimation par intervalle de confiance de σ^2, m étant connue
Pour n entier supérieur à 2, on pose

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 \text{ et } T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2.$$

9. Justifier que U_n suit une loi du Chi-deux à n degrés de liberté.
10. Montrer l'égalité des événements

$$\left[\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right] \text{ et } \left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leqslant U_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right].$$

En déduire que $\left[\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$ est un intervalle de confiance de σ^2 au niveau de confiance $1-\alpha$.

Partie IV : Estimation par intervalle de confiance de σ^2, m étant inconnue
$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ désigne dans la suite l'ensemble des matrices à n lignes et une colonne à coefficients réels et $Id_{\mathbf{R}^n}$ désigne l'identité de $\mathbf{R}^n$.
Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2, U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_n)^2.$$

11. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $A = (a_{i,j})$ avec

$$a_{i,i} = n-1 \text{ et } a_{i,j} = -1 \text{ si } i \neq j.$$

Soit B la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

a. Justifier que A est une matrice diagonalisable.
b. Calculer le produit AB. En déduire une valeur propre de A et un vecteur propre de A associé à cette valeur propre.
c. Montrer que

$$\dim \operatorname{Im}(\varphi - n\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) = 1.$$

d. En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}(\varphi - n\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n})$, les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A.
e. Soit $X = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées d'un vecteur propre associé à la la valeur propre n. Prouver que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 0$.
f. Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la dernière colonne est proportionnelle à B et d'une matrice diagonale D que l'on déterminera, telles que

$$P^{-1}AP = D \text{ avec } {}^tP = P^{-1}.$$

(On ne demande pas la matrice P).
g. On note $(p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ les coefficients de la matrice ${}^tP$. Montrer que

$$\forall i \in [\![1,\ldots,n-1]\!], \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 0$$

puis que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^2 = 1.$$

12. Soit q l'application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}), q(X) = {}^tXMX \text{ où } M = \frac{1}{n}A.$$

a. On pose $Y = {}^tPX$, montrer que

$$q(X) = \frac{1}{n}{}^tYDY$$

puis que

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2.$$

b. En utilisant l'écriture $q(X) = \frac{1}{n}{}^tYDY$, montrer que

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}x_j\right)^2.$$

13. Pour tout i de l'ensemble $[\![1, n-1]\!]$, on pose

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j}X_j.$$

a. Justifier que Y_i suit une loi normale, puis montrer que $E(Y_i) = 0$ et $V(Y_i) = \sigma^2$.

b. En utilisant les résultats de la question 12, montrer que

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2.$$

c. En admettant que les $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ sont mutuellement indépendantes, justifier que U_n suit une loi du Chi-deux à $n-1$ degrés de liberté.

d. Montrer que les événements

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] \text{ et } \left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leqslant U_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$$

sont égaux.

e. En déduire un intervalle de confiance de σ^2 au niveau de confiance $1-\alpha$.

ECRICOME 2003 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

1.a. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n + u_n^2 - u_n = u_n^2 \geqslant 0$.
Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est croissante.}}$

Et par conséquent, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\boxed{u_n \geqslant u_0 > 0.}$

1.b. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, soit elle converge vers un réel ℓ, soit elle diverge vers $+\infty$.
Supposons par l'absurde que (u_n) converge vers ℓ.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et $u_n + u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell^2$.
Par unicité de la limite, on a donc $\ell = \ell + \ell^2 \Leftrightarrow \ell = 0$.
Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant a$, donc $\ell \geqslant a > 0$, contredisant le fait que $\ell = 0$.
C'est donc que (u_n) ne converge pas, et par conséquent, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$

> **Remarque**
> La croissance de (u_n) est ici importante, car sans cette hypothèse, on pourrait avoir une suite à termes strictement positifs, et de limite nulle. Penser par exemple à $u_n = \dfrac{1}{n}$.

2. Comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

2.a. Quel que soit $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2^{n+1}}\ln(u_{n+1}) - \frac{1}{2^n}\ln(u_n) = \frac{1}{2^{n+1}}\ln(u_n + u_n^2) - \frac{1}{2^n}\ln(u_n)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\ln(u_n + u_n^2) - 2\ln(u_n)\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\ln(u_n + u_n^2) - \ln\left(u_n^2\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{u_n + u_n^2}{u_n^2}\right)\\
&= \boxed{\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{1}{u_n} + 1\right).}
\end{aligned}$$

En particulier, pour $n, p \in \mathbf{N}$, on a

$$v_{n+p+1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right).$$

Puisque $\dfrac{1}{u_{n+p}} > 0$, le logarithme est bien strictement positif, et donc $\boxed{v_{n+p+1} - v_{n+p} > 0.}$
D'autre part, puisque (u_n) est croissante et positive, $u_{n+p} \geqslant u_n \geqslant 0$ et donc $\dfrac{1}{u_{n+p}} \leqslant \dfrac{1}{u_n}$, de sorte que, par croissance du logarithme, $\ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.

On a donc bien $\boxed{v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+p}}\ln\left(1 + \dfrac{1}{u_n}\right).}$

2.b. Soient $k, n \in \mathbf{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
v_{n+k+1} - v_n &= (v_{n+k+1} - v_{n+k}) + (v_{n+k} - v_{n+k-1}) + \cdots + (v_{n+1} - v_n)\\
&= \sum_{i=0}^{k}(v_{n+i+1} - v_{n+i})\\
&\leqslant \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2^{n+i+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2^i}\\
&\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i}\\
&\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\
&\boxed{\leqslant \frac{1}{2^n}\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).}
\end{aligned}$$

> **Détails**
> Puisque la série de terme général $\frac{1}{2^i}$ est à termes positifs, ses sommes partielles sont toutes plus petites que la somme de la série.

Et d'autre part, puisque les $v_{n+i+1} - v_{n+i}$ sont tous strictement positifs, leur somme, égale à $v_{n+k+1} - v_n$ est également strictement positive.
En résumé, on a bien prouvé que $0 < v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.

2.c. En prenant $n = 0$ dans l'inégalité précédente, on obtient, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$v_{k+1} \leqslant v_0 + \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right).$$

Autrement dit, pour tout $k \geqslant 1$, $v_k \leqslant v_0 + \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right)$.

Cette inégalité est évidemment encore vraie pour $k = 0$, et donc $v_0 + \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right)$ est un majorant de la suite (u_n).
Comme d'autre part nous avons prouvé à la question 2.a que[1] $v_{n+1} - v_n > 0$, la suite (v_n) est croissante.
Et donc par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge.}}$

2.d. Puisque (v_n) est croissante et converge vers α, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \leqslant \alpha$.
Et donc $\ln(u_n) \leqslant 2^n\alpha$, de sorte que par croissance de l'exponentielle, $u_n \leqslant \exp(\alpha 2^n)$.
Reprenons à présent l'encadrement de la question 2.b, fixons n et faisons tendre k vers l'infini.
Il vient alors

$$\alpha - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_0}\right) \Leftrightarrow \alpha \leqslant \frac{1}{2^n} \ln(u_n) + \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

Et donc après multiplication par 2^n, on a

$$\alpha 2^n \leqslant \ln(u_n) + \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \ln\left(u_n\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)\right) = \ln(1 + u_n).$$

Par croissance de l'exponentielle, on a donc

$$\boxed{\exp(\alpha 2^n) \leqslant u_n + 1.}$$

On a donc $u_n \leqslant \exp(\alpha 2^n) \leqslant u_n + 1$, soit encore[2]

$$1 \leqslant \frac{\exp(\alpha 2^n)}{u_n} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}.$$

Mais puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $1 + \frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\exp(\alpha 2^n)}{u_n} = 1$.
Soit encore $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n).}$

2.e. En reprenant les inégalités de la question précédente, on a

$$u_n \leqslant \exp(\alpha 2^n) \leqslant u_n + 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \underbrace{\exp(\alpha 2^n) - u_n}_{=\beta_n} \leqslant 1.$$

Et donc (β_n) est majorée et minorée, donc $\boxed{\text{bornée.}}$

Pour prouver la relation demandée, notons que $(\exp(\alpha 2^n))^2 = \exp(\alpha 2^{n+1})$. Et donc

$$\begin{aligned}
\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n &= \exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - u_{n+1} + (\exp(\alpha 2^n) - u_n)^2 - (\exp(\alpha 2^n) - u_n)\\
&= \exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - u_n - u_n^2 + \exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - 2u_n \exp(\alpha 2^n) + u_n^2 - \exp(\alpha 2^n) + u_n\\
&= 2\exp\left(\alpha 2^{n+1}\right) - 2u_n \exp(\alpha 2^n) - \exp(\alpha 2^n).
\end{aligned}$$

Et donc après multiplication par $\exp(-\alpha 2^n)$, il vient

$$\left(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n\right) \exp(-\alpha 2^n) = 2\exp(\alpha 2^n) - 2u_n - 1 = \boxed{2\beta_n - 1.}$$

[1] Il suffit de prendre $k = 0$ dans l'inégalité de 2.a

[2] $u_n > 0$, donc la division par u_n ne change pas le sens de l'inégalité.

2.f. Nous avons prouvé précédemment que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|\beta_n| \leqslant 1$.
Et donc

$$\begin{aligned}|2\beta_n - 1| &\leqslant |\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n| \exp(-\alpha 2^n)\\ &\leqslant \left(|\beta_{n+1}| + |\beta_n^2| + |\beta_n|\right) \exp(-\alpha 2^n)\\ &\leqslant 3\exp(-\alpha 2^n).\end{aligned}$$

Inégalité triangulaire.

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} |2\beta_n - 1| = 0$.

Et donc $\lim_{n\to+\infty} 2\beta_n = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \frac{1}{2}$.

Donc $\beta_n = \frac{1}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

Et donc

$o(1)$
Rappelons que la notation $o(1)$ désigne toute suite de limite nulle.

$$u_n = \exp(\alpha 2^n) - (\exp(\alpha 2^n) - u_n) = \exp(\alpha 2^n) - \beta_n = \boxed{\exp(\alpha 2^n) - \frac{1}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1).}$$

Remarque *: ce résultat permet de retrouver l'équivalent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n)$, mais il est bien plus précis, puisqu'il affirme que la différence entre u_n et $\exp(\alpha 2^n)$ tend vers $-\frac{1}{2}$, et donc que u_n ne s'éloigne jamais trop de $\exp(\alpha 2^n)$.*
Ceci n'est pas vrai pour toute suite équivalent à $\exp(\alpha 2^n)$. Par exemple, la suite $v_n = \exp(\alpha 2^n) + n^2$ est également équivalente[3] à $\exp(\alpha 2^n)$, mais pourtant la différence entre v_n et $\exp(\alpha 2^n)$ tend vers l'infini.

[3] Car $n^2 = \underset{n\to+\infty}{o}(\exp(\alpha 2^n))$.

PROBLÈME

Partie I : loi du χ^2

1. Puisqu'un carré est toujours positif, X^2 est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, et donc pour $x \leqslant 0$, on a $P(X^2 \leqslant x) = 0$.
Si $x = 0$, alors $P(X^2 \leqslant 0) = P(X^2 = 0) = P(X = 0) = 0$.
Enfin, si $x > 0$, alors

Méthode
Commencer par systématiquement déterminer le support d'une variable aléatoire permet d'éviter des erreurs ultérieures.

$$P(X^2 \leqslant x) = P\left(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}\right) = \Phi\left(\sqrt{x}\right) - \Phi\left(-\sqrt{x}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{x}\right) - 1.$$

Ainsi, la fonction de répartition de Y_1^2 est donnée par

$$\boxed{F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0\\ 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{sinon}\end{cases}}$$

2. Puisque Φ est $\mathscr{C}^1$, de même que la fonction racine[4], par composition, F_{Y_1} est continue et même de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
Il est évident que F_{Y_1} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ puisqu'elle y est constante.
De plus, on a

[4] Du moins sur $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x\to 0^+} F_{Y_1}(x) = \lim_{x\to 0} 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 = 0 = \lim_{x\to 0^-} F_{Y_1}(x).$$

Donc F_{Y_1} est continue en 0 : elle est donc continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$.
Ceci prouve bien que Y_1 est une variable à densité, dont une densité est donnée par

$$f_{Y_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0\\ \frac{1}{\sqrt{x}}\Phi'(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0\end{cases}$$

Mais $\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, de sorte que

Rappel
On ne connaît pas d'expression facilement utilisable de Φ, mais on connaît bien sa dérivée, qui est la densité d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$\boxed{f_{Y_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0\end{cases}}$$

3. Par transformation affine de variables à densité, $\frac{Y_1}{2}$ est une variable à densité dont une densité est

$$x \mapsto 2f_{Y_1}(2x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2\frac{1}{\sqrt{2x}\sqrt{2\pi}}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}e^{-x} = \frac{1}{\Gamma(1/2)}x^{1/2-1}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On reconnaît alors la densité d'une loi $\gamma(1/2)$. Par conséquent, on a

$$E(Y_1) = 2E\left(\frac{Y_1}{2}\right) = 2\frac{1}{2} = \boxed{1} \text{ et } V(Y_1) = V\left(2\frac{Y_1}{2}\right) = 4V\left(\frac{Y_1}{2}\right) = 4\frac{1}{2} = \boxed{2.}$$

4. On a $\frac{Y_n}{2} = \frac{X_1^2}{2} + \cdots + \frac{X_n^2}{2}$.

Mais les $\frac{X_i^2}{2}$ sont indépendantes[5], et identiquement distribuées[6], suivant toutes (d'après la question précédente) une loi $\gamma(1/2)$.

[5] Car les X_i le sont.

[6] Idem

On en déduit, par stabilité des lois γ, que $\frac{Y_n}{2}$ suit une loi $\gamma\left(\frac{n}{2}\right)$. Ainsi, une densité de $\frac{Y_n}{2}$ est

$$g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Par transformation affine de variables à densité, une densité de $Y_n = 2\frac{Y_n}{2}$ est alors

$$x \mapsto \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2\Gamma(n/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n/2-1}e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

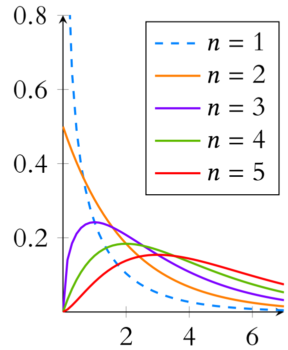


Figure 1– La densité de la loi $\chi^2(n)$ pour différentes valeurs de n.

5. Par linéarité de l'espérance,

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2\right) = nE(Y_1) = \boxed{n.}$$

Et par indépendance des X_i^2, on a

$$V(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} V\left(X_i^2\right) = nV(Y_1) = \boxed{2n.}$$

6. La fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est continue sur $\mathbf{R}_+$ car Y_n est à densité, et sur $\mathbf{R}_+^*$, on a $F'_{Y_n}(t) = f_{Y_n}(t) > 0$. Donc F_{Y_n} est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$.

De plus, on a $G_n(0) = \int_{-\infty}^{0} f_{Y_n}(t)\,dt = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} G_n(x) = 1$.

Limite

La limite en $+\infty$ est égale à 1 car c'est le cas pour **toute fonction de répartition.**

Par le théorème de la bijection, G_n réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ dans $[0, 1[$ et donc quel que soit $\beta \in]0, 1[$, $\boxed{\text{il existe un unique } \chi^2_\beta(n) \in \mathbf{R}_+^* \text{ tel que } G_n(\chi^2_\beta(n)) = \beta.}$

Partie II : estimation ponctuelle de σ^2

7. On a

$$E(F_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m = m.$$

Donc $\boxed{F_n \text{ est un estimateur sans biais de } m.}$

Il s'agit de prouver que $(F_n)_n$ converge en probabilité vers m. Mais puisque les X_i sont indépendantes, et possèdent une variance, la loi faible des grands nombres affirme que $(F_n)_n$ converge en probabilité vers m. Et donc $\boxed{F_n \text{ est un estimateur convergent de } m.}$

8.a. En développant les carrés, on a dans un premier temps

$$\begin{aligned}
V_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2F_nX_i + F_n\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2F_n\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}_{=F_n} + \frac{F_n^2}{n}\sum_{i=1}^{n}1\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2F_n^2 + F_n^2\\
&= \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2.}
\end{aligned}$$

Sur le même principe, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2 - (F_n-m)^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2mX_i + m^2\right) - F_n^2 + 2mF_n - m^2\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2m\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}_{=F_n} + m^2 - F_n^2 + 2mF_n - m^2\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - F_n^2 = \boxed{V_n.}
\end{aligned}$$

8.b. Notons que par la formule de Huygens, on a

$$V(X_i-m) = E\left((X_i-m)^2\right) - E(X_i-m)^2 \Leftrightarrow E((X_i-m)^2) = V(X_i-m) + E(X_i-m)^2.$$

Mais $E(X_i - m) = E(X_i) - m = m - m = 0$ et $V(X_i - m) = V(X_i) = \sigma^2$.
De même, toujours pas Huygens, $E((F_n-m)^2) = V(F_n-m) + E(F_n-m)^2 = V(F_n)$.
Mais par indépendance des X_i, il vient alors

> **Rappel**
> Ajouter une constante à une variable aléatoire ne change pas sa variance.

$$V(F_n) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Et donc, par linéarité de l'espérance, on a

$$E(V_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left((X_i-m)^2\right) - E\left((F_n-m)^2\right) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \boxed{\frac{(n-1)}{n}\sigma^2.}$$

8.c. On en déduit que

$$E\left(\frac{n-1}{n}V_n\right) = \frac{n-1}{n}E(V_n) = \sigma^2.$$

Ainsi, $\boxed{\frac{n-1}{n}V_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-F_n)^2 \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma^2.}$

Partie III : Estimation par intervalle de confiance de σ^2, m étant connue

9. On a

$$U_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-m}{\sigma}\right)^2.$$

Mais les X_i suivant la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, les $\frac{X_i-m}{\sigma}$ suivent une loi normale centrée réduite.

Et les X_i étant indépendantes, il en est de même des $\frac{X_i-m}{\sigma}$.

Ainsi, d'après la partie I, U_n est une somme de carrés de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi normale centrée réduite : U_n suit une loi du Chi-deux à n degrés de liberté.

10. Notons que $U_n = \dfrac{nT_n}{\sigma^2}$, et donc que

$$\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} \Leftrightarrow \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \frac{\sigma^2}{nT_n} \leqslant \frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}$$
$$\Leftrightarrow \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leqslant \frac{nT_n}{\sigma^2} \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$$
$$\Leftrightarrow \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leqslant U_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n).$$

Ainsi, on a donc bien l'égalité[7] entre événements

$$\left[\frac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right] = \left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leqslant U_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right].$$

Par définition[8] de $\chi^2_\alpha(n)$, on a

$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \leqslant U_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right) = G_n\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right) - G_n\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1-\alpha.$$

Ainsi, on en déduit que $P\left(\dfrac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \dfrac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right) = 1-\alpha$ et donc que

$\boxed{\left[\dfrac{nT_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} ; \dfrac{nT_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right] \text{ est un intervalle de confiance de } \sigma^2 \text{ au niveau de confiance } 1-\alpha.}$

[7] Le premier événement est réalisé si et seulement si le second l'est, donc nous avons bien prouvé une égalité.

[8] Voir question 6.

Explication

L'intérêt de cette méthode est que les valeurs de $\chi^2_\alpha(n)$ et $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ ne dépendent ni de m ni de σ.
Il existe des tables de la loi du χ^2, analogues à des tables de loi normale. Par exemple, pour $n = 100$ et $\alpha = 0.05$, on a $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) = 129.56$ et $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) = 70.06$.

Partie IV : Estimation par intervalle de confiance de σ^2, m étant inconnue

11.a. Tous les coefficients diagonaux de A sont égaux à $n-1$, et tous les autres coefficients sont égaux à -1. Donc A est symétrique réelle, et par conséquent, $\boxed{\text{diagonalisable.}}$

11.b. On a

$$AB = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{0.}$$

Puisque B est non nul et que $AB = 0 \cdot B$, c'est que 0 est valeur propre de A, et que B est un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

Rédaction

Il est important de préciser que $B \neq 0$, car cela fait partie de la définition de valeur propre : il faut qu'il existe un vecteur colonne **non nul** tel que ...

11.c. On a $\dim \operatorname{Im}(\varphi - n\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) = \operatorname{rg}(\varphi - n\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) = \operatorname{rg}(A - nI_n)$.
Mais $A - nI_n$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à -1.
Ses colonnes étant toutes égales[9], elle est de rang 1. Et donc

$$\boxed{\dim \operatorname{Im}(\varphi - n\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) = 1.}$$

[9] Et non nulles. C'est important car ceci prouve que $\operatorname{rg}(A - nI_n) > 0$.

11.d. Par le théorème du rang, on a

$$\dim \operatorname{Ker}(\varphi - n\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) = \dim \mathbf{R}^n - \dim \operatorname{Im}(\varphi - n\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) = n-1.$$

On en déduit que n est valeur propre de φ, et que

$$\dim E_n(\varphi) = \dim \operatorname{Ker}(\varphi - n\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}) = n-1.$$

Par conséquent, n est valeur propre de A avec un sous-espace propre de dimension $n-1$.
Puisque $\dim E_0(A) + \dim E_n(A) = n$, il n'y a pas d'autres valeurs propres : A ne possède que deux valeurs propres qui sont 0 et n avec

$$\boxed{\dim E_0(A) = 1 \text{ et } \dim E_n(A) = n-1.}$$

11.e. X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre n si et seulement si

$$AX = nX \Leftrightarrow (A - nI_n)X = 0.$$

Mais nous avons déjà dit que $A-nI_n$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à -1, donc

$$(A-nI_n)\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\dots&1\\1&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\dots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sum_{i=1}^n w_i\\\vdots\\-\sum_{i=1}^n w_i\end{pmatrix}.$$

Et donc si $(A-nI_n)X=0$, par identification des coefficients, on a $\boxed{\sum_{i=1}^n w_i=0.}$

Remarque

Même si l'énoncé ne demandait de prouver qu'une implication, on peut remarquer que X est vecteur propre **si et seulement si**

$$\sum_{i=1}^n w_i=0.$$

Alternative : puisque A est symétrique, ses sous-espaces propres sont orthogonaux, et en plus sont en somme directe, donc $E_n(A)=E_0(A)^{\perp}$.
Mais puisque $E_(A)$ est de dimension 1 et contient $B\neq 0$, $E_0(A)=\mathrm{Vect}(B)$.
On en déduit que $X\in E_n(A)\Leftrightarrow X\in(\mathrm{Vect}(B))^{\perp}\Leftrightarrow\langle X,B\rangle=0$.
Mais $\langle X,B\rangle=\sum_{i=1}^n w_i$, et donc $X\in E_n(A)\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n w_i=0$.

Rappel

Être dans $F^{\perp}$, c'est être orthogonal à tous les éléments d'une base de F.
Or ici, une base de $\mathrm{Vect}(B)$ est la famille formée du seul vecteur B.

11.f. A est symétrique, donc diagonalisable en base orthonormée.
Autrement dit, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A=PDP^{-1}$.
Plus précisément, posons $D=\mathrm{diag}(\underbrace{n,\dots,n}_{(n-1)\text{ fois}},0)$.
Soit alors $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ formée de la concaténation d'une base orthonormée de $E_n(A)$ et d'une base orthonormée de $E_0(A)$. Alors la matrice de passage P de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ à la base $\mathcal{B}$ est orthogonale[10], et $A=PDP^{-1}$ (ce qui est bien équivalent à $D=P^{-1}AP$, comme demandé dans l'énoncé).
Mais $E_0(A)$ est de dimension 1, et contient $B\neq 0$. Et donc $E_0(A)=\mathrm{Vect}(B)$.
Ainsi, tout vecteur de $E_0(A)$ est colinéaire à B. En particulier, une base orthonormée de $E_0(A)$ est formée d'un seul vecteur, proportionnel à B. Et donc la dernière colonne de P (qui est précisément un vecteur de norme 1 de $E_0(A)$) est nécessairement proportionnelle à B.

[10] Car matrice de passage entre deux bases orthonormées.

Autrement dit

$E_0(A)=\mathrm{Vect}(B)$.

11.g. Commençons par remarquer que $\sum_{j=1}^n p_{i,j}$ est la somme des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de ${}^tP$ et donc la somme des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ colonne de P.
Mais pour $i\in[\![1,n-1]\!]$, la i-ème colonne de P est un vecteur propre de A pour la valeur propre n. Et alors nous avons prouvé à la question 11.e que la somme de ses coefficients vaut 0, c'est-à-dire que

$$\boxed{\sum_{j=1}^n p_{i,j}=0.}$$

De plus, par construction de P, la $i^{\text{ème}}$ colonne de P est un vecteur de norme 1 (car élément d'une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$).
La $i^{\text{ème}}$ colonne de P étant de norme 1, on a donc

$$\boxed{\sum_{j=1}^n p_{i,j}^2=1.}$$

Rappel

Lorsqu'on parle d'une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, il est alors question du produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, c'est-à-dire

$$\langle X,Y\rangle={}^tXY.$$

Et de même, la norme d'un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est la norme associée à ce produit scalaire :

$$\|X\|^2={}^tXX.$$

12. Remarquons que q est en fait la forme quadratique associée à la matrice $\frac{A}{n}$.

12.a. En posant $Y={}^tPX$, on a

$$q(X)=\frac{1}{n}{}^tXAX=\frac{1}{n}{}^tXPD{}^tPX=\frac{1}{n}{}^t({}^tPX)D{}^tPX=\frac{1}{n}{}^tYDY.$$

Commençons par calculer les coefficients du vecteur colonne AX : pour tout $i\in[\![1,n]\!]$,

$$(AX)_i=\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n(-x_j)+(n-1)x_j=-\sum_{j=1}^n x_j+x_i+(n-1)x_i=nx_i-\sum_{j=1}^n x_j.$$

Et alors

$$^tXAX = \sum_{i=1}^n X_i(AX)_i = \sum_{i=1}^n x_i\left(nx_i - \sum_{j=1}^n x_j\right) = \sum_{i=1}^n nx_i^2 - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j.$$

Dans toute la suite de cette question, on note $S = \sum_{i=1}^n x_i$.

Alors

$$\begin{aligned} q(X) &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n nx_i^2 - \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j\right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\sum_{j=1}^n x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_iS \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{S^2}{n}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j\right)^2 = \left(x_i - \frac{S}{n}\right)^2 = x_i^2 - \frac{2S}{n}x_i + \frac{1}{n^2}S^2.$$

Et donc

$$\sum_{i=1}^n\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j\right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2S}{n}\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \frac{S^2}{n^2} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2S^2}{n} + \frac{S^2}{n} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{S^2}{n} = q(X).$$

12.b. Notons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$. Alors $q(X) = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n & & & \\ & \ddots & & \\ & & n & \\ & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} ny_i^2$.

Mais $y_i = ({}^tPX)_i = \sum_{j=1}^n ({}^tP)_{i,j}x_j = \sum_{j=1}^n p_{i,j}x_j$.

Et donc

$$q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = \boxed{\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^n p_{i,j}x_j\right)^2}.$$

Astuce

Nous savons que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$aX+b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(a\mu+b, a^2\sigma^2\right).$$

Il suffit en fait de se rappeler qu'une transformée affine de loi normale suit une loi normale.
En effet, les propriétés de l'espérance et de la variance nous donnent alors

$$E(aX+b) = aE(X)+b = a\mu+b$$

$$V(aX+b) = a^2V(X) = a^2\sigma^2.$$

13.a. Par transformation affine de loi normale, $p_{i,j}Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, p_{i,j}^2\right)$
Puisque les X_i sont indépendantes, il en est de même des $p_{i,j}X_i$, et donc par stabilité des lois normales,

$$Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sum_{j=1}^n p_{i,j}^2\sigma^2\right).$$

Astuce

Là encore, il suffit de se rappeler que la somme de lois normales indépendantes suit une loi normale.
Les propriétés de l'espérance et de la variance permettent alors de retrouver ses paramètres.

Mais puisque $\sum_{j=1}^n p_{i,j}^2 = 1$, on a donc $Y_j \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

En particulier, $\boxed{E(Y_j) = 0 \text{ et } V(Y_j) = \sigma^2.}$

13.b. Dans la question 12, nous avons montré que pour tout n-uplet de réels $(x_1, \dots, x_n)$, on avait

$$\sum_{i=1}^n\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^n p_{i,j}x_j\right)^2.$$

En particulier, pour $\omega \in \Omega$, $X_i(\omega)$ est un réel, et donc

$$\sum_{i=1}^n\left(X_i(\omega) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j(\omega)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^n p_{i,j}X_j(\omega)\right)^2.$$

Soit encore

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i(\omega)-F_n(\omega))^2=\sum_{i=1}^{n-1}Y_i(\omega)^2 \Leftrightarrow U_n(\omega)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-1}Y_i(\omega)^2.$$

Ceci étant vrai pour tout $\omega\in\Omega$, on a donc $\boxed{U_n=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-1}Y_i^2.}$

13.c. À la question 13.a, nous avons prouvé que les Y_i suivent la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.
Alors par indépendance des Y_i, la question 9 prouve que U_n suit une loi du Chi-deux à $n-1$ degrés de liberté.

13.d. On a

$$\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\leqslant\sigma^2\leqslant\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \Leftrightarrow \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\leqslant\frac{n-1}{\sigma^2}S_n\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1).$$

Mais notons que $U_n=\frac{n-1}{\sigma^2}S_n$, et donc on a

$$\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\leqslant\sigma^2\leqslant\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \Leftrightarrow \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\leqslant U_n\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1).$$

Par conséquent, les événements

$$\left[\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\leqslant\sigma^2\leqslant\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] \text{ et } \left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\leqslant U_n\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$$

sont égaux.

13.e. Puisque U_n suit une loi du Chi-deux à $n-1$ degrés de liberté, on a

$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\leqslant U_n\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=G_{n-1}\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)-G_{n-1}\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}=1-\alpha.$$

Et donc $P\left(\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\leqslant\sigma^2\leqslant\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)=1-\alpha$, prouvant que

$\boxed{\left[\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S_n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right] \text{ est un intervalle de confiance de } \sigma^2 \text{ au niveau de confiance } 1-\alpha.}$

ECRICOME 2001

Exercice 1

Sujet : Valeur absolue de la différence de deux loi exponentielles **Facile**
Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★
Thèmes du programme abordés : variables à densité, produit de convolution
Modifications apportées au sujet d'origine : suppression de la recherche de la fonction de répartition de $-X$: la densité d'une transformée affine est au programme.
Commentaires : une convolution très classique, sans difficultés dans le calcul, idéal pour revoir la convolution.

Soient a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b.

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $-X$.
2. Montrer que $Y - X$ admet une densité, notée h, définie par :

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{ab}{a+b} e^{-bt} & \text{si } t > 0 \\ \dfrac{ab}{a+b} e^{at} & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

On considère la variable aléatoire $Z = |X - Y|$.

3. Soit s un réel positif. Établir l'égalité $P(Z \leqslant s) = 1 - \dfrac{be^{-as} + ae^{-bs}}{a+b}$.
4. a. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
   b. Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

Exercice 2

Sujet : Quelques calculs avec le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. **Facile**
Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★☆☆
Thèmes du programme abordés : produits scalaires, projections orthogonales
Modifications apportées au sujet d'origine : suppression de deux questions : la trace est au programme 2015. Le produit scalaire a été renommé φ.
Commentaires : intéressant si vraiment vous n'êtes vraiment pas à l'aise avec les projecteurs orthogonaux/les produits scalaires.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I la matrice identité de E. On note ${}^tA$ la transposée d'un élément A de E.
On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$, qui à deux matrices A et B de E fait correspondre le réel
$\varphi(A, B) = \operatorname{tr}({}^tAB)$.

1. Montrer que pour tous $A, B \in E$, $\varphi(A, B) = \varphi(B, A)$.
2. Soit A un élément de E. Montrer que $\varphi(A, A)$ est la somme des carrés des coefficients de A.
3. Montrer, à l'aide des questions précédentes que φ est un produit scalaire sur E.
4. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ défini par

$$f(e_1) = e_n \text{ et pour tout entier } k \text{ tel que } 2 \leqslant k \leqslant n,\ f(e_k) = e_{k-1}.$$

   a. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbf{R}^n$.
   b. Soit U la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$. Montrer que $U^n = I$ et que $U^{-1} = {}^tU$.

On suppose, pour les deux questions suivantes, que $n = 4$.

5. Calculer U^2 et U^3, et montrer que (I, U, U^2, U^3) est une famille orthogonale pour le produit scalaire φ.
6. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille (I, U, U^2, U^3), et V la matrice de E dont la première ligne est constituée de 1 et les autres uniquement de 0. Calculer le projeté orthogonal W de V sur F.

ECRICOME 2001 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. Une densité de X est $f_X : t \mapsto \begin{cases} ae^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Par transformation affine, une densité de $-X$ est alors

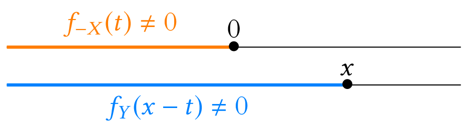
$$f_{-X} : t \mapsto \frac{1}{|-1|} f_X(-t) = \begin{cases} ae^{at} & \text{si } -t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \boxed{\begin{cases} ae^{at} & \text{si } t \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2. Les variables Y et $-X$ sont indépendantes[1] et ont toutes les deux une densité bornée. Par convolution, une densité de $Y - X$ est alors la fonction

[1] Car X et Y le sont.

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{-X}(t) f_Y(x-t)\, dt.$$

Or, on a $f_{-X}(t) \neq 0 \Leftrightarrow t \leqslant 0$ et $f_Y(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow x - t \geqslant 0 \Leftrightarrow t \leqslant x$.



Pour $x \leqslant 0$, on a

$$h(x) = \int_{-\infty}^{x} ae^{at} be^{-b(x-t)}\, dt = abe^{-bx} \int_{-\infty}^{x} e^{t(a+b)}\, dt.$$

Mais pour $A \leqslant x$, on a

$$\int_A^x e^{t(a+b)}\, dt = \left[\frac{1}{a+b} e^{t(a+b)}\right]_A^x = \frac{1}{a+b}\left(e^{x(a+b)} - e^{A(a+b)}\right) \underset{A \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a+b} e^{(a+b)x}.$$

Et donc $h(x) = \dfrac{ab}{a+b} e^{(a+b)x} e^{-bx} = \dfrac{ab}{a+b} e^{ax}$.

Pour $x \geqslant 0$, on a

$$h(x) = \int_{-\infty}^{0} ae^{at} be^{-b(x+t)}\, dt = abe^{-bx} \int_{-\infty}^{0} e^{(a+b)t}\, dt = abe^{-bx} \frac{1}{a+b} = \frac{ab}{a+b} e^{-bx}.$$

Remarque : L'intégrale est celle qui a été calculée à la question précédente, avec $x = 0$.

Ainsi, on a bien $\boxed{h(x) = \begin{cases} \dfrac{ab}{a+b} e^{ax} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{ab}{a+b} e^{-bx} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$

3. Notons que pour s positif, on a $[Z \leqslant s] = [|Y - X| \leqslant s] = [-s \leqslant Y - X \leqslant s]$.

Et donc

$$P(Z \leqslant s) = P(-x \leqslant Y - X \leqslant x) = \int_{-s}^{s} h(t)\, dt = \int_{-s}^{0} \frac{ab}{a+b} e^{at}\, dt + \int_0^s \frac{ab}{a+b} e^{-bt}\, dt.$$

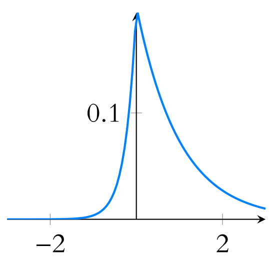


FIGURE 1– La densité de $Y - X$ pour $a = 1$ et $b = 4$.

Or on a

$$\int_{-s}^{0} e^{at}\, dt = \left[\frac{1}{a} e^{at}\right]_{-s}^{0} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} e^{-as}$$

et de même

$$\int_0^s e^{-bt}\, dt = \left[-\frac{1}{b} e^{-bt}\right]_0^s = \frac{1}{b} - \frac{e^{-bs}}{b}.$$

Et donc

$$P(Z \leqslant s) = \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b} e^{-as} + \frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+b} e^{-bs} = \frac{a+b}{a+b} - \frac{ae^{-bs} + be^{-as}}{a+b} = \boxed{1 - \frac{ae^{-bs} + be^{-as}}{a+b}}.$$

4.a. Pour $s < 0$, on a évidemment $P(Z \leqslant s) = 0$ car Z est à valeurs positives[2].

Et donc $F_Z(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0 \\ 1 - \dfrac{ae^{-bs} + be^{-as}}{a+b} & \text{sinon} \end{cases}$

La fonction F_Z est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ car constante, et sur $]0, +\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles.

De plus,

$$\lim_{s \to 0^-} F_Z(s) = 0 = \lim_{s \to 0^+} F_Z(s) = F_Z(0).$$

Donc F_Z est continue sur $\mathbf{R}$, et $\mathscr{C}^1$ sauf en 0.

Ainsi, $\boxed{Z \text{ est une variable à densité.}}$

Une densité en est alors toute fonction qui coïncide avec F_Z' là où celle-ci est définie[3]

Par exemple, on peut prendre

$$\boxed{f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{ab}{a+b}\left(e^{-ax} + e^{-bx}\right) & \text{sinon} \end{cases}}$$

4.b. Par définition, Z admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f_Z(t)\,dt$ converge[4].

Or, on a, par le changement de variable $x = at$,

$$\int_0^{+\infty} te^{-at}\,dt = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{x}{a}e^{-x}\,dt = \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \frac{1}{a^2}\Gamma(2) = \frac{1}{a^2}.$$

De même, $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-bt}\,dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{b^2}$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_Z(t)\,dt$ converge car somme d'intégrales convergentes, et vaut

$$\frac{ab}{a+b}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{a+b}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right).$$

Et donc Z admet une espérance et $\boxed{E(Z) = \dfrac{1}{a+b}\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right).}$

Exercice 2

1. Soient $A, B \in E$. Alors

$$\varphi(A,B) = \operatorname{tr}({}^tAB) = \operatorname{tr}({}^t({}^tAB)) = \operatorname{tr}({}^tB\,{}^t({}^tA)) = \operatorname{tr}({}^tBA) = \boxed{\varphi(B,A).}$$

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E$. Alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ ({}^tAA)_{i,j} = \sum_{k=1}^n ({}^tA)_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j}.$$

Il vient alors

$$\varphi(A,A) = \operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n ({}^tAA)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2.$$

Ainsi, $\boxed{\varphi(A,A) \text{ est bien la somme des carrés des coefficients de } A.}$

3. La première question prouve que φ est symétrique.

Soient $A, B, C \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\varphi(\lambda A + B, C) = \operatorname{tr}({}^t(\lambda A + B)C) = \operatorname{tr}(\lambda\,{}^tAC + {}^tBC) = \lambda\operatorname{tr}({}^tAB) + \operatorname{tr}({}^tBC) = \lambda\varphi(A,C) + \varphi(B,C).$$

Donc φ est linéaire à gauche. Étant symétrique, φ est une forme bilinéaire symétrique.

La question 2 prouve que pour tout $A \in E$, $\varphi(A,A) \geqslant 0$ car il s'agit d'une somme de carrés.

[2] C'est une valeur absolue.

[3] C'est-à-dire sur $\mathbf{R}^*$.

Méthode

Là où F_Z est dérivable, on prend $f(x) = F_X'(x)$.
Et pour les points restants, qui sont en nombre fini, on peut choisir n'importe quelle valeur. Ici on a choisi de prendre $F_Z(0) = 0$.

[4] Absolument, mais il s'agit d'une fonction positive.

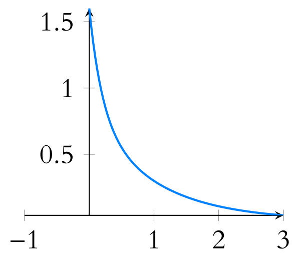


Figure 2– La densité de Z pour $a = 1$ et $b = 4$.

Trace

La trace d'une matrice est égale à la trace de sa transposée (c'est évident si on remarque que A et ${}^tA$ ont les mêmes coefficients diagonaux.)

Enfin, une somme de nombre positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul. Donc en utilisant la question 2, on a

$$\varphi(A,A) = 0 \Leftrightarrow \forall (k,i) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,k} = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ défini bien un produit scalaire sur } E.}$

4.a. On sait déjà par l'énoncé que f est un endomorphisme, donc il s'agit de prouver que f est bijective.
Or, l'image de la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est la famille $(e_n,e_1,\dots,e_{n-1})$, qui est donc[5] une base de $\mathbf{R}^n$.
Et donc l'image d'une base est une base : f est un isomorphisme.
Et puisque son espace de départ et son espace d'arrivée sont les mêmes, $\boxed{\text{c'est un automorphisme.}}$

Classique
Ce produit scalaire est souvent appelé produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Il est très classique au concours, et l'énoncé ne fournit pas toujours les indications contenues dans les deux premières questions. Il faudra donc savoir les refaire sans hésitation.

[5] C'est la même famille de vecteurs, seul l'ordre a changé.

4.b. On a $f(e_1) = e_n$ et donc

$$f^2(e_1) = f(e_n) = e_{n-1}, f^3(e_n) = e_{n-2}, \dots, f^n(e_n) = e_1.$$

Plus précisément, pour $k \in [\![1,n]\!]$, $f^k(e_n) = e_{n+1-k}$.
De même, on a $f(e_2) = e_1$ et donc $f^n(e_2) = f^{n-1}(e_1) = e_{n+1-(n-1)} = e_2$.
On prouve de même que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$f^n(e_i) = f^{n-i+1}(\underbrace{f^{i-1}(e_i)}_{=e_1}) = f^{n-i+1}(e_1) = e_{n+1-(n-i+1)} = e_i.$$

Et donc la matrice de f^n dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice identité, de sorte que $\boxed{U^n = I.}$

Notons que U est la matrice de passage de la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ à la base $(e_n,e_1,\dots,e_{n-1})$.
Cette dernière base est orthonormée, car la base canonique l'est.
Et donc U est la matrice de passage entre deux bases orthonormées de $\mathbf{R}^n$: c'est une matrice orthogonale, et donc $\boxed{P^{-1} = {}^tP.}$

Détails
Changer l'ordre des vecteurs d'une base orthonormée ne change ni la norme de ces vecteurs, ni les produits scalaires de deux d'entre eux, donc si la base de départ est orthonormée, celle obtenue après permutation des vecteurs l'est encore.

5. Dans cette question, on a donc

$$U = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}.$$

On a alors

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et par conséquent,

$$\begin{aligned} \varphi(I,U) &= \operatorname{tr}(IU) = U = 0 \\ \varphi(I,U^2) &= \varphi(I,U^3) = 0 \\ \varphi(U,U^2) &= \operatorname{tr}({}^tUU^2) = \operatorname{tr}(U^{-1}U^2) = \operatorname{tr}(U) = 0 \\ \varphi(U,U^3) &= \operatorname{tr}(U^2) = 0 \\ \varphi(U^2,U^3) &= \operatorname{tr}(U^{-2}U^3) = \operatorname{tr}(U) = 0. \end{aligned}$$

On utilise ici le fait que ${}^tU = U^{-1}$.

Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (I,U,U^2,U^3) \text{ est orthogonale.}}$

6. Il existe plusieurs moyens de calculer un projeté orthogonal. Parmi ceux-ci, l'un nécessite une base orthonormée de F. Puisque nous disposons déjà d'une base orthogonale de F, nous allons essayer d'utiliser cette formule.
La famille (I,U,U^2,U^3) étant orthogonale, il suffit de diviser chaque vecteur par sa norme pour obtenir une famille orthonormée.
Or, $\|I\|^2 = \varphi(I,I) = \operatorname{tr}(I) = 4$, donc $\|I\| = 2$.

Rappel
Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormée de F, alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

De même, $\|U\|^2 = \varphi(U,U) = \mathrm{tr}({}^tUU) = \mathrm{tr}(U^{-1}U) = \mathrm{tr}(I) = 4$, et donc $\|U\| = 2$.
On prouve de la même manière que $\|U^2\| = \|U^3\| = 2$.

Et donc $\boxed{\left(\frac{I}{2}, \frac{U}{2}, \frac{U^2}{2}, \frac{U^3}{2}\right) \text{ est une base orthonormée de } F.}$

Dans ce cas, il vient

$$p_F(V) = \sum_{i=0}^{3} \varphi\left(V, \frac{U^i}{2}\right)\frac{U^i}{2} = \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{4}\varphi(V,U^i)U^i.$$

Et alors $\varphi(I,U) = \mathrm{tr}(U) = 1$,

$$\varphi(V,U) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1, \varphi(V,U^2) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1, \varphi(I,U^3) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1.$$

Et donc on en déduit que

$$p_F(V) = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} U^i = \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

2 EML

EML 2018

Problème 1

Sujet : Équivalent lorsque $\lambda \to +\infty$ de $P(X = Y)$, où X et Y sont indépendantes de même loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. **Difficile**

Abordable en première année : ✓ (sauf la partie IV) **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, séries, variables aléatoires discrètes,`Scilab`

Commentaires : très similaire au problème d'EDHEC 2013.

On définit la fonction I d'une variable réelle x par : $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$.

Partie I : Étude d'une suite d'intégrales.

On pose, pour tout k de $\mathbf{N}$, $W_k = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(u))^k \, du$.

1. Calculer les intégrales W_0 et W_1.
2. a. Soit $k \in \mathbf{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer : $W_k - W_{k+2} = \dfrac{1}{k+1} W_{k+2}$.

   b. En déduire : $\forall k \in \mathbf{N}$, $W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}\,(k!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$.

Partie II : Une autre expression de $I(x)$.

3. Montrer que, pour tout k de $\mathbf{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ converge et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = W_k$.

   Pour cela, on pourra utilise le changement de variable $t = \sin(u)$ après avoir justifié sa validité.
4. a. Montrer que la fonction I est définie sur $\mathbf{R}$ et préciser sa parité.

   b. Donner la valeur de $I(0)$.
5. Soit $x \in \mathbf{R}_+$.

   a. Soient $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ appliquée à la fonction $u \mapsto e^u + e^{-u}$ entre 0 et xt, montrer :
$$\left| e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x.$$

   b. En déduire, pour tout n de $\mathbf{N}$: $\displaystyle\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} W_{2k} \right| \leqslant \frac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!} e^x$.

   c. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{1}{\pi} I(x)$.

Partie III : Équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6. Montrer, pour tout x de $\mathbf{R}_+$: $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \leqslant \frac{\pi}{2}$.
7. a. Montrer, pour tout v de $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$: $1 \leqslant \dfrac{1}{1-v} \leqslant (1+v)^2$.

   b. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Montrer, à l'aide du changement de variable $u = 1 - t$:
$$\int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\dfrac{u}{2}}}\, du.$$

   c. En déduire, pour tout x de $\mathbf{R}_+$:
$$\frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du \leqslant \int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \leqslant \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du + \frac{e^x}{2\sqrt{2}} \int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\, du.$$

8. a. Rappeler l'expression d'une densité de la loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$.
En déduire les convergences et les valeurs des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \text{ et } \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\, dt.$$

b. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{xu}$, montrer :

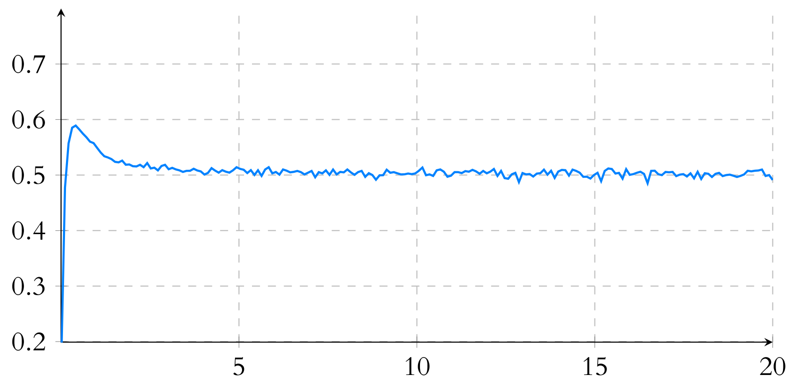
$$\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} \text{ et } \int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\, du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.$$

9. En déduire : $I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}$.

Partie IV : Une application en probabilités.
Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.
On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ.
On s'intéresse à la probabilité de l'événement $[X = Y]$.

10. a. Écrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function r = estime(lambda)` qui, prenant en argument un réel `lambda` strictement positif, simule un grand nombre de fois les variables aléatoires X et Y, et renvoie une estimation de $P(X = Y)$.
On rappelle que l'instruction `grand(1,1,'poi',lambda)` simule la loi de Poisson de paramètre `lambda`.

b. Grâce à la fonction précédente, on trace, en fonction de λ, une estimation de $\sqrt{\pi\lambda}P(X = Y)$ pour $\lambda \in]0, 20]$ et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, proposer un équivalent de $P(X = Y)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

11. Montrer : $P(X = Y) = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}$.

12. a. Exprimer $P(X = Y)$ en fonction de λ et de la fonction I.

b. En déduire un équivalent de $P(X = Y)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

PROBLÈME 2

Sujet : Obtention d'une loi de probabilité via sa fonction génératrice — Moyen
Abordable en première année : ✗ — **Intérêt** : ★★★
Thèmes du programme abordés : diagonalisation, variables aléatoires discrètes
Commentaires : De l'algèbre linéaire classique, avec en plus une application non triviale aux probas

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E = \mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1 - X)P' + XP.$$

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. a. Montrer que φ est une application linéaire.
   b. Calculer $\varphi(X^n)$.
   c. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathscr{B}$. Préciser le rang de cette matrice.
3. a. L'endomorphisme φ est-il injectif ? Justifier votre réponse.
   b. Soit P un polynôme non nul de $\text{Ker}(\varphi)$.
   Montrer que P admet 1 comme unique racine (dans $\mathbf{C}$), et que P est de degré n.
   c. En déduire une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
4. Montrer que φ est diagonalisable.
5. On pose, pour tout k de $[\![0,n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
   a. Pour tout k de $[\![0,n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.
   b. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.
   c. Déterminer les sous-espaces propres de φ.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires.

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On note alors, pour tout k de $\mathbf{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.
Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

6. On note, pour tout k de $\mathbf{N}^*$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k-ième tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.
   On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.
   a. Déterminer la loi de Z_2.
   b. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Calculer, pour tout j de $[\![1,k]\!]$, la valeur de $P_{[Y_k=j]}([Z_{k+1}=1])$.
   En déduire : $P([Z_{k+1}=1]) = 1 - \dfrac{1}{n}E(Y_k)$.
   c. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} Z_j$, montrer :
   $$P([Z_{k+1}=1]) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} P([Z_j=1]).$$
   d. En déduire, pour tout k de $\mathbf{N}^*$: $P([Z_k=1]) = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.
   e. Déterminer alors, pour tout k de $\mathbf{N}$, l'espérance de Y_k.
7. On note, pour tout k de $\mathbf{N}$, G_k le polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par :
   $$G_k = \sum_{i=0}^{n} P([Y_k=i])X^i.$$
   a. Déterminer les polynômes G_0, G_1 et G_2.
   b. Montrer, pour tout k de $\mathbf{N}$ et tout i de $[\![0,n]\!]$:
   $$P([Y_{k+1}=i]) = \frac{i}{n}P([Y_k=i]) + \left(1-\frac{i-1}{n}\right)P([Y_k=i-1]).$$
   c. Montrer, pour tout k de $\mathbf{N}$:
   $$G_{k+1} = \frac{1}{n}X(1-X)G_k' + XG_k.$$
   d. En déduire, pour tout k de $\mathbf{N}$:
   $$G_k = \varphi^k(G_0).$$
8. a. Pour tout k de $\mathbf{N}$, calculer $G_k(1)$ et $G_k'(1)$.

b. En déduire, pour tout k de $\mathbf{N}$:

$$E(Y_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) E(Y_k) + 1.$$

c. Retrouver alors, pour tout k de $\mathbf{N}$, l'expression de $E(Y_k)$ obtenue en question 6.e.

9. On rappelle que les polynômes $P_0, \dots, P_n$ sont définis à la question 5 par :

$$\text{pour tout } j \text{ de } [\![0, n]\!], \quad P_j = X^j(1-X)^{n-j}.$$

a. Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j$.

b. Montrer, pour tout j de $[\![0, n]\!]$:

$$P_j = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i.$$

c. En déduire, pour tout k de $\mathbf{N}$:

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} \right) X^i.$$

d. Montrer finalement, pour tout k de $\mathbf{N}$ et pour tout i de $[\![0, n]\!]$:

$$P([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.$$

EML 2018 : Corrigé

Problème 1

Partie I : Étude d'une suite d'intégrales.

1. On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, du = \boxed{\frac{\pi}{2}.}$

Et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\, du = [-\cos u]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1.}$

2.a. On a

$$\begin{aligned} W_k - W_{k+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\sin u)^k - (\sin u)k+2\right)\, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^k \left(1-\sin^2 u\right)\, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^k \cos^2 u\, du. \end{aligned}$$

> **Rappel**
> Pour tout $u \in \mathbf{R}$,
> $$\cos^2 u + \sin^2 u = 1.$$

D'autre part, procédons à une intégration par parties dans W_{k+2}, en posant $f(u) = (\sin u)^{k+1}$ et $g(u) = -\cos u$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $f'(u) = (k+1)\cos u (\sin u)^k$ et $g'(u) = \sin u$. On a alors

$$W_{k+2} = \left[-\cos(u)(\sin u)^{k+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^k \cos^2 u\, du = (k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^k \cos^2 u\, du.$$

Et donc on a bien $\boxed{\frac{1}{k+1} W_{k+2} = W_k - W_{k+2}.}$

2.b. De la question précédente, on déduit que

$$W_{k+2} + \frac{1}{k+1} W_{k+2} = W_k \Leftrightarrow W_{k+2} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Prouvons alors par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ que $W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Pour $k = 0$, le résultat est vrai car $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{2^0(0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Supposons donc que $W_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. Alors

> **⚠ Attention !**
> Nous cherchons ici à prouver un résultat sur les termes d'ordre pair de la suite (W_k). Le terme suivant W_{2k} est donc W_{2k+2}, et surtout pas W_{2k+1}.

$$\begin{aligned} W_{2(k+1)} = W_{2k+2} &= \frac{2k+1}{2k+2} W_{2k} \\ &= \frac{2k+1}{2k+2}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2k+1}{2k+2}\frac{2k+2}{2k+2}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2k+2)!}{(2(k+1))^2\, 2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}\left((k+1)!\right)^2}\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

> **Méthode**
> Nous savons que nous voulons faire apparaître du $(2k+2)!$ au numérateur, et nous avons déjà $(2k+1)!$, il ne manque donc que $2k+2$. Et pour le faire apparaître, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par $2k+2$.

Donc la formule reste vraie au rang $k+1$, de sorte que par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N},\ W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2}.}$$

Partie II : Une autre expression de $I(x)$.

3. Utilisons le changement de variable indiqué, qui est légitime, puisque la fonction $u \mapsto \sin u$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et strictement croissante[1].

On a alors $dt = \cos u\, du$. Mais puisque pour $u \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(u) \geqslant 0$, on a $\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u}$, et donc $dt = \sqrt{1-t^2}\, du \Leftrightarrow \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = du$.

De plus, lorsque $u \to 0$, $t \to 0$, et lorsque $u \to \frac{\pi}{2}$, $t \to 1$.

Alors, d'après le théorème de changement de variable, sous réserve de convergence de l'une de ces deux intégrales, on a

$$\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^k\, du = W_k.$$

Et donc puisque W_k est une intégrale convergente[2], on en déduit à la fois que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ converge, et qu'elle vaut W_k.

[1] Puisque sa dérivée est $\cos(u)$, qui est strictement positive sur cet intervalle.

[2] Puisqu'intégrale sur un segment.

4.a. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{xt}+e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $[0, 1[$.

Au voisinage de 1, on a

$$\frac{e^{-xt}+e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{e^x+e^{-x}}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Mais d'après la question précédente, avec $k = 0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ converge, et donc par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $I(x)$ converge. Ainsi, I est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

De plus, pour tout $t \in [0, 1[$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\frac{e^{xt}+e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{e^{(-x)t}+e^{-(-x)t}}{\sqrt{1-t^2}}$$

de sorte que

$$I(x) = \int_0^1 \frac{e^{xt}+e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^1 \frac{e^{(-x)t}+e^{-(-x)t}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = I(-x).$$

Et donc $\boxed{\text{la fonction } I \text{ est paire sur } \mathbf{R}.}$

4.b. On a $I(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 2\int_0^1 \frac{t^0}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 2W_0 = \boxed{\pi.}$

5.a. La fonction $f : u \mapsto e^u + e^{-u}$ est $\mathscr{C}^{2n+1}$ sur $[0, x]$, et une récurrence rapide prouve que pour tout $k \in [\![0, 2n+1]\!]$, on a $f^{(k)}(u) = e^u + (-1)^k e^{-u}$.

En particulier, pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a $f^{(2k)}(0) = 2$ et $f^{(2k+1)}(0) = 0$.

De plus, pour tout $u \in [0, x]$, $|f^{(2n+1)}(u)| = e^u - e^{-u} \leqslant e^u \leqslant e^x$.

Ainsi, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ entre 0 et xt, on a

$$\left| f(xt) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^k(0)}{k!}(xt)^k \right| \leqslant \frac{(xt)^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x.$$

Méthode

Rappelons que pour utiliser Taylor-Lagrange, il suffit de majorer $|f^{(2n+1)}|$ sur le segment $[0, xt]$.
Ici, nous utilisons le fait que $t \in [0,1]$, et donc $[0, xt] \subset [0, x]$, et donc un majorant sur $[0, x]$ sera automatiquement un majorant sur $[0, xt]$.

Mais nous avons déjà dit que les $f^{(k)}(0)$ valent 2 si k est pair et 0 si k est impair, de sorte que

$$\left| f(xt) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^k(0)}{k!}(xt)^k \right| = \left| e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right|.$$

Et donc on a bien pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{\left| e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x.}$$

5.b. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} W_{2k}\right| &= \left|\int_0^1 \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} \int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!}\right) dt\right| \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left|e^{xt} + e^{-xt} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2(xt)^{2k}}{(2k)!}\right| dt \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x\,dt \\
&\leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&\leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x W_0 = \boxed{\frac{x^{2n+1}\pi}{2(2n+1)!} e^x.}
\end{aligned}$$

Linéarité de l'intégrale.

Inégalité triangulaire.

5.c. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, en utilisant le résultat de la question 2, on a

$$\frac{2x^{2k}}{(2k)!} W_{2k} = \frac{2x^{2k}}{(2k!)} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \pi.$$

Et donc en divisant par π l'inégalité de la question précédente, il vient

$$\left|\frac{1}{\pi} I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\right| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{2(2n+1)!} e^x.$$

Mais par croissances comparées, $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ de sorte que par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{1}{\pi} I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2^{2k}((k!)^2}\right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{1}{\pi} I(x).$$

Cela prouve à la fois que la série $\sum_{k \geqslant 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ converge et que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{1}{\pi} I(x).}$$

Convergence

Par définition, une série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge, et dans ce cas, la limite de cette suite est la somme de la série.

Partie III : Équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6. Pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $t \in [0, 1[$, on a $0 \leqslant e^{-xt} \leqslant 1$, de sorte que par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = W_0 = \frac{\pi}{2}.$$

7.a. Pour $v \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $\frac{1}{2} \leqslant 1 - v \leqslant 1$ et donc $\boxed{1 \leqslant \frac{1}{1-v}.}$

D'autre part, on a

$$(1-v)(1+v)^2 = (1-v)(1+2v+v^2) = 1 + v - v^2 - v^3 = 1 + v(1 - v - v^2).$$

Mais la fonction $v \mapsto v^2 + v - 1$ est une fonction polynomiale de degré 2, dont les racines sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant 0$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \geqslant \frac{1}{2}$.

Elle est donc négative sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, de sorte que $(1-v)(1+v)^2 \geqslant 1$ et donc[3] $\boxed{(1+v)^2 \geqslant \frac{1}{1-v}.}$

[3] On divise par $1 - v > 0$, donc le sens de l'inégalité est inchangé.

7.b. Procédons au changement de variable indiqué, qui est légitime car affine. On a alors

$$\int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{x(1-u)}}{\sqrt{1-(1-u)^2}}\,du = e^x\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{2u-u^2}}\,du = \boxed{\frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}}\,du.}$$

Convergence
Notons que la première intégrale converge d'après un raisonnement analogue à celui de la question 4.a, et donc la seconde intégrale est alors automatiquement convergente.

7.c. Notons que l'inégalité de la question 7.a implique que pour $v \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-v}} \leqslant 1+v$.

Or, pour $u \in [0,1[$, on a $\frac{u}{2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, et donc

$$\frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} \leqslant \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}} \leqslant \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\left(1+\frac{u}{2}\right).$$

Par croissance de l'intégrale, cela nous donne donc

$$\frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du \leqslant \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}}\,du \leqslant \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du + \frac{e^x}{2\sqrt{2}}\int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\,du.$$

Enfin, en utilisant le résultat de la question 7.b, il vient

$$\boxed{\frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du \leqslant \int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \leqslant \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du + \frac{e^x}{2\sqrt{2}}\int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\,du.}$$

Danger !
La variance vaut $\frac{1}{2}$, donc l'écart-type σ vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

8.a. La densité demandée est $f : x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}e^{x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$.

Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$, alors on a

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Mais par parité de l'intégrande, on a alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

D'autre part,

$$\frac{1}{2} = V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^2}\,dx \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^2}\,dx.$$

Et là encore, un argument de parité nous donne

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-x^2}\,dx = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{4}.}$$

8.b. La fonction $u \mapsto \sqrt{xu}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$, et strictement croissante.
On a alors $u = \frac{t^2}{x}$ et donc $du = \frac{2t}{x}\,dt$.
Donc par le théorème de changement de variable,

$$\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-t^2}}{\frac{t}{\sqrt{x}}}\frac{2t}{x}\,dx = \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt.$$

Et donc, lorsque $x \to +\infty$, il vient

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 1.$$

On en déduit donc que $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}.}$

De la même manière, on prouve que

$$\int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\,du = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\frac{t}{\sqrt{x}}\frac{2t}{x}\,dt = \frac{2}{x\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} t^2 e^{-t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.}$$

9. En notant que $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ et en additionnant les inégalités des questions 6 et 7.c, on a

$$\frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du \leqslant I(x) \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du + \frac{e^x}{2\sqrt{2}}\int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\,du.$$

Après division par $\dfrac{e^x\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}$, il vient donc

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du \leqslant \frac{\sqrt{2x}}{e^x\sqrt{\pi}}I(x) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}{e^x\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\,du.$$

Il est évident que $\dfrac{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}{e^x\sqrt{2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et grâce aux équivalents de la question 8.b,

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ et } \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-xu}\sqrt{u}\,du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{4x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc par le théorème des gendarmes,

$$\frac{\sqrt{2x}}{e^x\sqrt{\pi}}I(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ de sorte que } \boxed{I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}.}$$

Partie IV : Une application en probabilités.

10.a. Le programme suivant convient.

```
function r = estime(lambda)
        r = 0 ;
        N = 100 000 ;
        for i=1 :N
                if grand(1,1,'poi',lambda) == grand(1,1,'poi',lambda)
then
                        r =r+1 ;
                end
        end
        r = r/N ;
endfunction
```

10.b. Il semble que $\sqrt{\pi\lambda}P(X=Y) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ et donc il est possible de conjecturer que $P(X=Y) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}$.

11. Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X=k],\ k\in\mathbf{N}\}$, on a

$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X=Y]\cap[X=k])$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P([X=k]\cap[Y=k]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)P(Y=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)^2 \\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.}
\end{aligned}$$

X et Y sont indépendantes.

12.a. Nous avons donc, en utilisant le résultat de la question 5,

$$P(X=Y) = e^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2} = e^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2\lambda)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \boxed{e^{-2\lambda}\frac{1}{\pi}I(2\lambda).}$$

12.b. Il ne reste plus qu'à combiner les résultats des question 9 et 12.a :

$$P(X=Y) = \frac{e^{-2\lambda}}{\pi}I(2\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-2\lambda}}{\pi}\frac{e^{2\lambda}\sqrt{\pi}}{\sqrt{4\lambda}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}.}$$

Notons qu'on retrouve bien le résultat qui avait été conjecturé précédemment.

PROBLÈME 2

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes.

1.a. Soient $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, par linéarité de la dérivation,

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P+Q) &= \frac{1}{n}X(1-X)(\lambda P+Q)' + X(\lambda P+Q) \\
&= \frac{1}{n}X(1-X)(\lambda P'+Q') + X(\lambda P+Q) \\
&= \lambda\left(\frac{1}{n}X(1-X)P' + XP\right) + \left(\frac{1}{n}X(1-X)Q' + XQ\right) \\
&= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire de } \mathbf{R}_n[X] \text{ dans } \mathbf{R}[X].}$

> **Degré**
> Notons que pour l'instant, nous ne pouvons rien dire du degré de $\varphi(P)$, même si on prouverait sans grandes difficultés que φ est à valeurs dans $\mathbf{R}_{n+1}[X]$.
> Pour ne pas trop nous avancer, nous nous contentons pour l'instant de dire que φ est à valeurs dans $\mathbf{R}[X]$.
> Notons que la question 1.c prouvera que φ est à valeurs dans $\mathbf{R}_n[X]$.

1.b. On a

$$\varphi(X^n) = \frac{1}{n}X(1-X)nX^{n-1} + XX^n = (1-X)X^n + X^{n+1} = \boxed{X^n.}$$

1.c. Pour $Q \in \mathbf{R}_n[X]$, on a $\deg Q' \leqslant \deg Q - 1$ et donc

$$\deg(\varphi(Q)) \leqslant \max\left(\deg(Q') + \deg(X(1-X)), \deg(Q)+1\right) \leqslant \deg(Q)+1.$$

Or, si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, alors en séparant le terme de degré n des autres termes, on constate qu'il existe un réel a et un polynôme $Q \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ tels que $P = aX^n + Q$.
Et par linéarité de φ, on a alors

$$\varphi(P) = a\varphi(X^n) + \varphi(Q) = aX^n + \varphi(Q).$$

Or, $\deg\varphi(Q) \leqslant \deg(Q) + 1 \leqslant n$, de sorte que $\varphi(P) \in \mathbf{R}_n[X]$.
Ainsi, φ est à valeurs dans E, et étant linéaire, c'est $\boxed{\text{un endomorphisme de } E.}$

> **Danger !**
> Tout ce qu'on peut dire en toutes généralités sur le degré d'une somme est que
> $$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q).$$
> Cette inégalité n'est pas nécessairement une égalité.

2. On a $\varphi(1) = X$, $\varphi(X^n) = X^n$ et pour $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\varphi\left(X^k\right) = \frac{k}{n}X(1-X)X^{k-1} + X^{k+1} = \frac{k}{n}X^k - \frac{k}{n}X^{k+1} + X^{k+1} = \frac{k}{n}X^k + \frac{n-k}{n}X^{k+1}.$$

Et donc la matrice A est donnée par

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \dots & \varphi(X^{n-1}) & \varphi(X^n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{n} & \frac{2}{n} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array} \end{array} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R}).$$

Puisque la première ligne de A est nulle, elle est de rang au plus n.
Puisque d'autre part elle est triangulaire[4] et possède n coefficients diagonaux non nuls, elle est de rang au moins n.
Et donc $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1.}$

[4] Inférieure.

3.a. Puisque A est de rang $n < n+1$, elle n'est pas inversible.
Donc φ n'est pas un isomorphisme, et donc $\boxed{\text{n'est pas injectif.}}$

Rappel
En dimension finie, un endomorphisme est injectif si et seulement si il est bijectif.

3.b. Soit $P \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. Alors $\dfrac{1}{n}X(1-X)P' = -XP \Leftrightarrow \dfrac{1}{n}(1-X)P' = -P$.
Soit a une racine complexe de P. Alors $P(a) = 0$ et donc $\dfrac{1}{n}(1-a)P'(a) = 0$, de sorte que $P'(a) = 0$ ou $a = 1$.
Supposons que $a \neq 1$, et notons $m \geqslant 1$ la multiplicité de a comme racine de P.
Alors a est racine de P' de multiplicité $m-1$.
Et donc a est racine de $\dfrac{1}{n}(1-X)P'$ de multiplicité $m-1$.
Mais $\dfrac{1}{n}(1-X)P' = P$, et donc a en est racine de multiplicité m, d'où une contradiction.
Ainsi, $\boxed{\text{1 est la seule racine de } P.}$

Remarque
Si $m = 1$, a n'est pas racine de P'.

Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ non nul, et notons d le degré de P, de sorte que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $a_d \neq 0$.

Degré
Lorsqu'on dit d'un polynôme qu'il est de degré d, cela signifie précisément qu'il possède un terme de degré d non nul, et aucun terme de degré plus élevé.

Alors le coefficient en X^{d+1} de $\varphi(P)$ est $-\dfrac{d}{n}a_d + a_d$, qui est nul si et seulement si $d = n$.
Et donc si $\varphi(P) = 0$, nécessairement $d = n$: $\boxed{\text{tout polynôme non nul de } \mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est de degré égal à } n.}$

3.c. Nous savons que tout polynôme de $\mathbf{C}[X]$ se factorise en produit de termes de degré un.
Or, un élément non nul de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est nécessairement de degré n, donc produit de n termes de degré un.
Et puisque 1 en est la seule racine, nécessairement si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $P = \lambda(X-1)^n$. Et donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left((X-1)^n\right).}$

Réels/complexes
Nous avons ici considéré P comme un polynôme complexe.
Mais puisque nous savons qu'il s'agit d'un polynôme à coefficients réels, nous pouvons en réalité affirmer que $\lambda \in \mathbf{R}$.

4. La matrice A est triangulaire inférieure, et donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.
Ainsi, $\mathrm{Spec}(A) = \left\{\dfrac{k}{n},\ k \in [\![0, n]\!]\right\}$. Par conséquent, A possède $n+1$ valeurs propres distinctes, et donc est diagonalisable.
Et donc $\boxed{\varphi \text{ est également diagonalisable.}}$

5.a. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $P_k' = kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}$. Et donc

$$\begin{aligned} \varphi(P_k) &= \frac{1}{n}X(1-X)\left(kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}\right) + X^{k+1}(1-X)^{n-k} \\ &= \frac{k}{n}X^k(1-X)^{n-k+1} - \frac{n-k}{n}X^{k+1}(1-X)^{n-k} + X^{k+1}(1-X)^{n-k} = \frac{k}{n}X^k(1-X)^{n-k}(X+1-X) \\ &= \boxed{\frac{k}{n}P_k.} \end{aligned}$$

Remarque
Nous traitons à part les cas $k = 0$ et $k = n$ pour éviter d'écrire des puissances négatives.

D'autre part, on a $P_0 = (1-X)^n \in \operatorname{Ker}\varphi$ et donc $\boxed{\varphi(P_0) = 0.}$

Et enfin $P_n = X^n$ et donc $\boxed{\varphi(P_n) = X^n = P_n.}$

5.b. Nous venons de prouver que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, P_k est un vecteur propre de φ pour la valeur propre $\frac{k}{n}$.
Donc $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes : elle est libre. Étant de cardinal $n+1 = \dim E$, c'est une $\boxed{\text{base de } E.}$
Et puisqu'il s'agit d'une base de vecteurs propres de φ, la matrice de φ dans cette base est diagonale :

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{(P_0,\dots,P_n)}(\varphi) = \operatorname{Diag}\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right).}$$

5.c. Puisque φ possède $n+1 = \dim E$ valeurs propres distinctes, ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
Et puisque pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, P_k est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\frac{k}{n}$, c'est une base de $E_{\frac{k}{n}}(\varphi)$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0,n]\!],\ E_{\frac{k}{n}}(\varphi) = \operatorname{Vect}(P_k).}$

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires.

6.a. La variable Z_2 prend la valeur 0 si et seulement si les deux premiers tirages ont donné deux fois le même numéro.
Or, il y a n^2 tirages possibles pour les deux premières boules, dont n comprenant deux fois la même boule.
Donc $P(Z_2 = 0) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.
Et par conséquent[5],

$$P(Z_2 = 1) = 1 - P(Z_2 = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $\boxed{Z_2 \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } 1 - \frac{1}{n}.}$

[5] Z_2 ne prend que les valeurs 0 et 1.

6.b. Sachant que $[Y_k = j]$, les k premiers tirages ont fait apparaître j boules différentes. Et donc pour que le $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage fasse apparaître une nouvelle boule, il faut que celle-ci soit tirée parmi les $n-j$ boules qui ne sont pas apparues précédemment.
Et donc $\boxed{P_{[Y_k=j]}(Z_{k+1} = 1) = \frac{n-j}{n} = 1 - \frac{j}{n}.}$

Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[Y_k = j],\ j \in [\![1,k]\!]\}$, il vient

$$\begin{aligned}
P(Z_{k+1} = 1) &= \sum_{j=1}^{k} P(Y_k = j) P_{[Y_k=j]}(Z_{k+1} = 1) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{j}{n}\right) P(Y_k = j) = \sum_{j=1}^{k} P(Y_k = j) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} j P(Y_k = j) \\
&= 1 - \frac{1}{n} E(Y_k).
\end{aligned}$$

6.c. Comme indiqué dans l'énoncé, on a bien $Y_k = \sum_{j=1}^{k} Z_k$, puisque $\sum_{j=1}^{k} Z_k$ est égal au nombre de fois où l'on a obtenu une boule qui n'était pas sortie précédemment : c'est donc le nombre de boules différentes apparues lors des k premiers tirages.

Par linéarité de l'espérance, on a alors $E(Y_k) = \sum_{j=1}^{k} E(Z_j)$.

Mais les Z_j suivent des lois de Bernoulli, donc pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, $E(Z_j) = P(Z_j = 1)$.

Et donc

$$P(Z_{k+1}=1)=1-\frac{1}{n}E(Y_j)=1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}E(Z_j)=\boxed{1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}P(Z_j=1).}$$

Récurrence forte
Une récurrence forte s'utilise quand pour prouver la propriété au rang $n+1$, nous n'avons pas uniquement besoin de savoir qu'elle est vraie au rang n, mais à tous les rangs $1, 2, \dots, n$.

6.d. Prouvons le résultat par récurrence forte sur k.

Pour $k=1$, c'est évident car $P(Z_1=1)=1=\left(1-\frac{1}{n}\right)^0$.

Supposons donc que pour tout $j\in[\![1,k]\!]$, $P(Z_j=1)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1}$. Alors

$$\begin{aligned}P(Z_{k+1}=1)&=1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}P(Z_j=1)\\&=1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1}\\&=1-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{i}\\&=1-\frac{1}{n}\frac{1-(1-\frac{1}{n})^k}{1-(1-\frac{1}{n})}\\&=1-\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right)\\&=\left(1-\frac{1}{n}\right)^k.\end{aligned}$$

Chgt d'indice
$i=j-1$.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $1-\frac{1}{n}\neq 1$.

Par le principe de récurrence forte, $\boxed{\text{pour tout } k\in\mathbf{N},\ P(Z_k=1)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}.}$

6.e. La relation prouvée à la question 6.b nous donne

$$E(Y_k)=n-nP(Z_{k+1}=1)=\boxed{n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right).}$$

7.a. Puisque Y_0 est certaine égale à 0 et que Y_1 est certaine égale à 1, on a $G_0=P(Y_0=0)=1$ et $G_1=P(Y_1=1)X=X$. De plus

$$G_2=P(Y_2=1)X+P(Y_2=2)X^2=P(Y_2=1)X+(1-P(Y_2=1))X^2=\boxed{\frac{1}{n}X+\frac{n-1}{n}X^2.}$$

Détail
$P(Y_2=1)$ est la probabilité d'avoir deux fois la même boule lors des 2 premiers tirages.
Or il y a n^2 tirages de deux boules possibles, dont n comportant deux fois la même boule.

7.b. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[Y_k=j],\ j\in[\![1,k]\!]\}$, on a

$$P(Y_{k+1}=i)=\sum_{j=1}^{k}P([Y_{k+1}=i]\cap[Y_k=j]).$$

Or à chaque tirage, nous avons au plus un nouveau numéro, de sorte que Y_{k+1} ne peut être égal qu'à Y_k ou à Y_k+1.
Autrement dit, si $j\notin\{i,i-1\}$, $P([Y_{k+1}=i]\cap[Y_k=j])=0$.
Et donc

$$\begin{aligned}P(Y_{k+1}=i)&=P([Y_{k+1}=i]\cap[Y_k=i])+P([Y_{k+1}=i]\cap[Y_k=i-1])\\&=P(Y_k=i)P_{[Y_k=i]}(Y_{k+1}=i)+P(Y_k=i-1)P_{[Y_k=i-1]}(Y_k=i)\\&=\boxed{\frac{i}{n}P(Y_k=i)+\left(1-\frac{i-1}{n}\right)P(Y_k=i-1).}\end{aligned}$$

Détails
$\frac{i}{n}$ est la probabilité que, ayant déjà tiré i numéros distincts, on tire de nouveau l'un de ces numéros.
Et au contraire, $1-\frac{i-1}{n}$ est la probabilité de tirer un numéro distinct des $i-1$ déjà sortis.

7.c. En utilisant le résultat de la question précédente, il vient

$$\begin{aligned}
G_{k+1} &= \sum_{i=0}^{n} P(Y_{k+1}=i)X^i = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}P(Y_k=i)+\left(1-\frac{i-1}{n}\right)P(Y_k=i-1)\right)X^i\\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n}P(Y_k=i)X^i+\sum_{i=1}^{n+1}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)P(Y_k=i-1)X^i\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} iP(Y_k=i)X^i+\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)P(Y_k=i)X^{i+1}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} iP(Y_k=i)X^i+X\sum_{i=1}^{n}P(Y_k=i)X^i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} iP(Y_k=i)X^{i+1}\\
&= \frac{X}{n}\sum_{i=1}^{n} iP(Y_k=i)X^{i-1}+XG_k-\frac{X^2}{n}\sum_{i=1}^{n} iP(Y_k=i)X^{i-1}\\
&= \frac{1}{n}X(1-X)\sum_{i=1}^{n} iP(Y_k=i)X^{i-1}+XG_k\\
&= \boxed{\frac{1}{n}X(1-X)G_k'+XG_k.}
\end{aligned}$$

Astuce

Pour $i = n+1$, le terme $1-\frac{i-1}{n}$ est nul, donc on ne change rien en l'ajoutant à la somme.
Et le terme en $i=0$ est nul car $P(Y_k=-1)=0$. Donc on peut le retirer de la somme.

7.d. Nous venons de prouver que $G_{k+1}=\varphi(G_k)$.
Une récurrence rapide prouve alors que pour tout $k\in\mathbf{N}$, $\boxed{G_k=\varphi^k(G_0).}$

8.a. On a

$$G_k(1)=\sum_{i=0}^{n}P(Y_k=i)\times 1^k=\sum_{i=0}^{n}P(Y_k=i)=\boxed{1.}$$

Et de même,

$$G_k'(1)=\sum_{i=1}^{n} iP(Y_k=i)1^{i-1}=\sum_{i=1}^{n} iP(Y_k=i)=\boxed{E(Y_k).}$$

8.b. On a, en dérivant la relation de la question 7.c,

$$G_{k+1}'=\frac{1}{n}X(1-X)G_k''+\frac{1}{n}(1-X)G_k'-\frac{1}{n}XG_k'+G_k+XG_k'$$

et donc

$$E(Y_{k+1})=G_{k+1}'(1)=-\frac{1}{n}G_k'(1)+G_k(1)+G_k'(1)=\left(1-\frac{1}{n}\right)G_k'(1)+1=\boxed{\left(1-\frac{1}{n}\right)E(Y_k)+1.}$$

8.c. Nous venons donc de prouver que la suite $(E(Y_k))_{k\geqslant 0}$ est une suite arithmético-géométrique de raison $1-\dfrac{1}{n}$.
Et donc nous savons qu'il existe $\lambda\in\mathbf{R}$ tel que, en posant $u_k=E(Y_k)+\lambda$, alors (u_k) est géométrique de raison $1-\dfrac{1}{n}$.
Or, pour tout $k\in\mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
u_{k+1}=\left(1-\frac{1}{n}\right)v_k &\Leftrightarrow E(Y_{k+1})+\lambda=\left(1-\frac{1}{n}\right)(E(Y_k)+\lambda)\\
&\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{n}\right)E(Y_k)+1+\lambda=\left(1-\frac{1}{n}\right)E(Y_k)+\left(1-\frac{1}{n}\right)\lambda\\
&\Leftrightarrow \lambda=-n.
\end{aligned}$$

Méthode

Si vous connaissez directement la formule donnant λ (c'est $\lambda=\dfrac{b}{1-a}$ pour une suite vérifiant $u_{n+1}=au_n+b$), vous pouvez l'utiliser.
Mais si vous voulez vous éviter d'apprendre une formule de plus, il suffit de savoir qu'un tel λ existe et d'être capable de le retrouver.

Autrement dit, en posant $u_k=E(Y_k)-n$, alors $(u_k)_k$ est géométrique de raison $1-\dfrac{1}{n}$, et donc $\forall k\in\mathbf{N}$, $u_k=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^k u_0$.
Mais $u_0=E(Y_0)-n=-n$ de sorte que

$$E(Y_k)=u_k+n=-n\left(1-\frac{1}{n}\right)^k+n=\boxed{n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right).}$$

9.a. On a, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}X^j(1-X)^{n-j}=(X+(1-X))^n=1^n=\boxed{1.}$$

9.b. Utilisons de nouveau la formule du binôme :

$$P_j=X^j(1-X)^{n-j}=X^j\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-X)^k=X^j\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^{i-j}=\boxed{\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i.}$$

Chgt d'indice
$i-j=k \Leftrightarrow i=k+j$ et donc si k varie de 0 à $n-j$, alors i varie de j à n.

9.c. D'après la question 9.a, $G_0=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j$.

Or, P_j étant un vecteur propre de φ pour la valeur propre $\frac{j}{n}$, on en déduit que pour tout $k\in\mathbf{N}$, $\varphi^k(P_j)=\left(\frac{j}{n}\right)^k P_j$.
Et donc, par linéarité de φ^k,

$$\begin{aligned}\varphi^k(G_0)&=\varphi^k\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j\right)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\varphi^k(P_j)\\&=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n}\right)^k P_j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{j}{n}\right)^k\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i\\&=\boxed{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{j}{n}\binom{i-j}{n-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k(-1)^{i-j}X^i.}\end{aligned}$$

9.d. Puisque $G_k=\varphi^k(G_0)$, en identifiant[6] le coefficient de degré i, il vient

$$\begin{aligned}P(Y_k=i)&=\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k(-1)^{i-j}\\&=\sum_{j=0}^{i}\frac{n!}{j!\cancel{(n-j)!}}\,\frac{\cancel{(n-j)!}}{(i-j)!(n-i)!}\left(\frac{j}{n}\right)^k(-1)^{i-j}\\&=\sum_{j=0}^{i}\frac{n!}{i!(n-i)!}\,\frac{i!}{j!(i-j)!}\left(\frac{j}{n}\right)^k(-1)^{i-j}\\&=\boxed{\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(-1)^{i-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k.}\end{aligned}$$

[6] Il y a unicité des coefficients d'un polynôme.

Remarque
Notons que de manière surprenante, cette somme est nulle pour $i>k$, car $P(Y_k=i)$ est évidemment nul.

Remarque : le résultat obtenu permet facilement d'en déduire une formule pour le rang du premier tirage où l'on a obtenu les n numéros. En effet, si on note X le rang de ce tirage, on a

$$\begin{aligned}P(X=k)&=P(Y_k=n)-P(Y_{k-1}=n)\\&=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k-\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\left(\frac{j}{n}\right)^{k-1}\\&=\left(\frac{j}{n}-1\right)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{n-j}\left(\frac{j}{n}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

Détails
Il faut qu'on ait eu la $n^{\text{ème}}$ boule lors du $k^{\text{ème}}$ tirage, et donc qu'on n'en ait eu que $n-1$ à l'issue du $(k-1)^{\text{ème}}$.

EML 2017

Problème 1

Sujet : Étude d'un endomorphisme et d'un produit scalaire de $\mathbf{R}_n[X]$. **Facile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : diagonalisation, produits scalaires, endomorphismes symétriques.

Commentaires : rien que du très classique (surtout à Lyon), idéal pour revoir les fondamentaux.

Partie I : Étude d'un exemple

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle inversible ? Quel est son rang ?
2. Quelles sont les valeurs propres de A ? La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$?
3. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, diagonale, dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, telles que : $A = PDP^{-1}$.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de polynômes.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

On note $E = \mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de E.

On note, pour tout polynôme P de E, $T(P) = (X(X-1)P')'$, où l'accent désigne la dérivation.

Par exemple, si $P = X^2$, alors $P' = 2X$ et donc

$$T(P) = (X(X-1)2X)' = \left(2X^3 - 2X^2\right)' = 6X^2 - 4X.$$

4. Montrer que T est un endomorphisme de E.
5. Calculer, pour tout k de $\{0, \dots, n\}$, $T(X^k)$. En déduire la matrice M de T dans la base $\mathcal{B}$.
6. L'endomorphisme T est-il bijectif ? Quel est le rang de T ? Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$.
7. Quelles sont les valeurs propres de T ? L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

Partie III : Intervention d'un produit scalaire.

On conserve les notations de la partie II.

On considère l'application $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx.$$

8. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
9. Démontrer : $\forall (P,Q) \in E^2,\ \varphi(T(P),Q) = -\displaystyle\int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x)\,dx$.
10. En déduire que T est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire φ. Quel résultat de la partie II peut-on ainsi retrouver ?
11. a. Établir : $\forall P \in E,\ \varphi(T(P),P) \geqslant 0$.
    b. Déterminer l'ensemble des polynômes P de E tels que $\varphi(T(P),P) = 0$.

Partie IV : Retour sur l'exemple de la partie I.

On conserve les notations des parties II et III et on suppose dans cette partie que $n = 2$.

12. Quelle est la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$ de E ?
13. En utilisant les résultats obtenus dans la question 3 de la partie I, déterminer une base orthonormale $\mathcal{C}$ de E pour le produit scalaire φ, formée de vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de T dans l'ordre croissant.

14. Déterminer, par sa matrice dans la base $\mathscr{C}$ de E, un endomorphisme V de E, symétrique pour le produit scalaire φ, tel que :

$$\begin{cases} V \circ V = T \\ \forall P \in E,\ \varphi(V(P), P) \geqslant 0 \end{cases}$$

Problème 2

Sujet : Étude d'une fonction définie par une intégrale. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ (sauf question 12) **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : intégrale impropres, suites et séries, `Scilab` , variables aléatoires à densité, convergence des variables aléatoires.

On définit la fonction réelle H d'une variable réelle x par : $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\,dt$.

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Partie I : Premières propriétés de la fonction H.

1. Justifier que la fonction H est définie sur I.
2. Montrer que H est décroissante sur I.
3. a. Calculer $H(1)$.
   b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $H(n) = 2n\,(H(n) - H(n+1))$. En déduire une expression de $H(n+1)$ en fonction de n et de $H(n)$.
   c. Écrire un programme en `Scilab` qui, étant donné un entier n de $\mathbf{N}^*$, renvoie la valeur de $H(n)$.
   d. Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ H(n) = \dfrac{(2n-2)!\,\pi}{2^{2n-1}\,((n-1)!)^2}$.

Partie II : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

4. a. Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. Préciser $\varphi^{-1}(0)$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \varphi^{-1}(t)$.
   b. À l'aide du changement de variable $t = \varphi(u)$, montrer :

$$\forall x \in I,\ H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}}\,du.$$

5. a. Justifier : $\forall u \in [0; +\infty[,\ e^u \leqslant e^u + e^{-u} \leqslant 2e^u$.
   b. En déduire : $\forall x \in I,\ \dfrac{1}{2x-1} \leqslant H(x) \leqslant \dfrac{4^x}{2(2x-1)}$.
6. Déterminer la limite de H en $\frac{1}{2}$ et un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

Partie III : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

7. a. Montrer : $\forall u \in [0, 1],\ \ln(1+u) \geqslant \dfrac{u}{2}$.
   b. À l'aide d'une loi normale bien choisie, montrer que, pour tout x de I, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2}\,dt$ converge et calculer sa valeur.
   c. En déduire : $\forall x \in I,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\,dt \leqslant \int_0^1 e^{-xt^2/2}\,dt \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.
   d. Montrer : $\forall x \in I,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\,dt \leqslant \frac{1}{2x-1}$.
   e. En déduire la limite de H en $+\infty$.
8. On note, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $u_n = \ln(H(n)) + \dfrac{\ln(n)}{2}$.
   a. Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$. On pourra utiliser le résultat obtenu à la question 3.b.

b. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1}-u_n)$ converge.

c. En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que : $H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{n}}$.

9. Donner enfin un équivalent simple de $H(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$ à l'aide de K.

Partie IV : Étude d'une suite de variables aléatoires.

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \dfrac{2}{\pi(1+t^2)} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

10. Montrer que f est une densité.

11. On considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

a. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

b. La variable X admet-elle une espérance ? Une variance ?

12. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ à densité, à valeurs strictement positives, mutuellement indépendantes, dont chacun à pour densité f.
On définit, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, les variables aléatoires $M_n = \max(X_1,\dots,X_n)$ et $Z_n = \dfrac{n}{M_n}$.

a. Déterminer, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.

b. Justifier : $\forall u \in]0,+\infty[,\ \mathrm{Arctan}(u) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{u}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\mathrm{Arctan}(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.

c. Montrer alors, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $\forall x \in]0;+\infty[,\ P(Z_n \leqslant x) = 1 - \left(1 - \dfrac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{n}\right)\right)^n$.

d. En déduire que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on reconnaîtra la loi.

EML 2017 : Corrigé

Problème 1

Partie I : Étude d'un exemple.

1. A n'est pas inversible car elle possède une colonne nulle, et donc son rang est inférieur ou égal à 2.
D'autre part, la deuxième et la troisième colonne ne sont pas colinéaires, et donc son rang est au moins égal à 2.
On en déduit donc que $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2.}$

2. A est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont sur sa diagonale : $\boxed{\mathrm{Spec}(A) = \{0, 2, 6\}.}$
Et donc A est une matrice 3×3 qui possède trois valeurs propres distinctes : $\boxed{\text{elle est diagonalisable.}}$

3. Si une telle matrice D existe, elle est semblable à A et donc ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A. Puisque ces coefficients doivent être rangés dans l'ordre croissant, nécessairement, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
De plus, nous savons que $A = PDP^{-1}$ si et seulement si les colonnes de P sont des vecteurs propres de A.
Plus précisément, puisque D est fixée, la première colonne de P doit être un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0, la seconde doit être dans $E_2(A)$ et la troisième dans $E_6(A)$.
Puisque la première colonne de A est nulle, et que[1] $\dim E_0(A) = 1$, nécessairement $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.
D'autre part, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Soit si et seulement si

$$\begin{cases} -y = 2x \\ 2y - 4z = 2y \\ 6z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
De même, une résolution de système nous donne $E_6(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$.
Puisque de plus, l'énoncé impose de choisir des vecteurs propres dont la première coordonnée vaut 1, il n'y a qu'une solution possible : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

> **Valeurs propres**
> A et D sont semblables, donc possèdent les mêmes valeurs propres. Mais D étant diagonale, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

[1] A possède 3 valeurs propres, donc ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de polynômes.

4. Soit $P \in E$. Alors P' est de degré inférieur ou égal à $n-1$ et donc $X(X-1)P'$ est un polynôme de degré au plus $n+1$.
Et donc $T(P) = (X(X-1)P')'$ est un polynôme de degré au plus n : $T(P) \in E$.
Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} T(\lambda P + Q) &= (X(X-1)(\lambda P + Q)')' \\ &= (\lambda X(X-1)P' + X(X-1)Q')' \\ &= \lambda (X(X-1)P')' + (X(X-1)Q')' = \lambda T(P) + T(Q). \end{aligned}$$

Ainsi, T est linéaire, et donc $\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } E.}$

5. On a $T(X^0) = T(1) = 0$ et pour $k \geqslant 1$,

$$T(X^k) = \left(X(X-1)kX^{k-1}\right)' = k\left(X^{k+1} - X^k\right)' = \boxed{k(k+1)X^k - k^2X^{k-1}.}$$

On en déduit que la matrice de T dans la base $\mathscr{B}$ est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} T(1) & T(X) & T(X^2) & \dots & T(X^{n-1}) & T(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -4 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & n(n-1) & -n^2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R}).$$

Danger ☠

Attention à ne pas dire que le rang d'une matrice triangulaire est égal au nombre de ses coefficients diagonaux non nuls, ce n'est pas toujours vrai. Par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1.
De même, M n'est pas échelonnée (la deuxième ligne commence par autant de 0 que la première), et donc on ne peut y voir directement n pivots.

6. La matrice M possède une colonne nulle, et donc ne peut pas être inversible.
Par conséquent, $\boxed{T \text{ n'est pas bijectif.}}$
D'autre part, puisque M est triangulaire et que 0 n'apparaît qu'une fois sur sa diagonale, $\dim E_0(M) = 1$.
Et donc $\mathrm{rg}\, M = n + 1 - \dim E_0(M) = n$.
On a alors $\mathrm{rg}(T) = n$, et donc par le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Ker}(T) = \dim E - \mathrm{rg}(T) = n + 1 - n = 1.$$

Puisque $1 \in \mathrm{Ker}(T)$, on a donc $\boxed{\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Vect}(1).}$

Autrement dit

$\mathrm{Ker}(T)$ est l'ensemble des polynômes constants.

7. Puisque M est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux :
$\mathrm{Spec}(M) = \{k(k+1),\ k \in [\![0, n]\!]\}$.
Et donc $\boxed{\mathrm{Spec}(T) = \{k(k+1),\ k \in [\![0, n]\!]\}.}$
Puisque l'application $x \mapsto x(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, ces valeurs propres sont deux à deux distinctes, et donc T possède $n+1 = \dim E$ valeurs propres : T est diagonalisable.

Partie III : Intervention d'un produit scalaire.

8. Soient $P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q, R) &= \int_0^1 (\lambda P(x) + Q(x))R(x)\, dx \\ &= \int_0^1 (\lambda P(x)R(x) + Q(x)R(x))\, dx \\ &= \lambda \int_0^1 P(x)R(x)\, dx + \int_0^1 Q(x)R(x)\, dx = \lambda\varphi(P, R) + \varphi(Q, R). \end{aligned}$$

Et donc φ est linéaire à gauche.
D'autre part, pour $P, Q \in E$, on a

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\, dx = \int_0^1 Q(x)P(x)\, dx = \varphi(Q, P).$$

Donc φ est symétrique, et donc[2] est bilinéaire symétrique.
Soit $P \in E$. Alors la fonction $x \mapsto P(x)^2$ est positive sur $[0, 1]$, de sorte que, par positivité de l'intégrale

$$\varphi(P, P) = \int_0^1 P(x)^2\, dx \geqslant 0.$$

De plus, $x \mapsto P(x)^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$. Or, l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si et seulement si cette fonction est identiquement nulle.
Et donc si $\varphi(P, P) = 0$, alors $\forall x \in [0, 1],\ P(x)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [0, 1],\ P(x) = 0$.
Mais P possède alors une infinité de racines, et donc est le polynôme nul.
Ceci achève de prouver que $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

[2] Car elle est linéaire à gauche.

9. Soient $P, Q \in E$. Alors

$$\varphi(T(P), Q) = \int_0^1 (x(x-1)P')'(x)Q(x)\,dx.$$

Procédons à une intégration par parties en posant $u(x) = x(x-1)P'(x)$ et $v(x) = Q(x)$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ avec $u'(x) = (x(x-1)P')'(x)$ et $v'(x) = Q'(x)$. Alors

$$\varphi(T(P), Q) = [x(x-1)P'(x)Q(x)]_0^1 - \int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x)\,dx = \boxed{-\int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x)\,dx.}$$

10. Soient $P, Q \in E$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(P, T(Q)) &= \varphi(T(Q), P) \\ &= -\int_0^1 x(x-1)Q'(x)P'(x)\,dx \\ &= -\int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x)\,dx = \varphi(T(P), Q).\end{aligned}$$

Symétrie de φ.

Question précédente.

Et donc $\boxed{T \text{ est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire } \varphi.}$
On retrouve ainsi le fait que T est diagonalisable.

11.a. Soit $P \in E$. Alors $\varphi(T(P), P) = -\int_0^1 x(x-1)P'(x)^2\,dx = \int_0^1 x(1-x)P'(x)^2\,dx$.
Or, sur $[0,1]$, la fonction $x \mapsto x(1-x)P'(x)^2$ est positive, donc par positivité de l'intégrale, $\boxed{\varphi(T(P), P) \geqslant 0.}$

11.b. D'après ce qui précède, si $\varphi(T(P), P) = 0$, alors pour tout $x \in [0,1]$, $x(1-x)P'(x)^2 = 0$, de sorte que[3] $\forall x \in]0,1[$, $P'(x) = 0$.
Mais alors P' est un polynôme qui possède une infinité de racines : $P' = 0$, et donc P est constant.
Inversement, si P est constant, alors $P \in \operatorname{Ker}(T)$ et donc $\varphi(T(P), P) = \varphi(0, P) = 0$.
Nous avons donc prouvé que $\boxed{\varphi(T(P), P) = 0 \Leftrightarrow P \in \operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Vect}(1).}$

[3] En 0 et en 1, $x(1-x)$ s'annule et on ne peut donc rien dire sur $P(x)$.

Partie IV : Retour sur l'exemple de la partie I.

12. D'après les calcul de la question 5, on a

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(T) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T(1) & T(X) & T(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array} = \boxed{A.}$$

13. Les sous-espaces propres de T étant deux à deux orthogonaux[4], nous savons qu'une telle base est obtenue par concaténation de bases orthonormées de chacun de sous-espaces propres.
Or à la question 3, nous avons obtenu des bases de chacun des sous-espaces propres de A, il est aisé d'en déduire que

$$E_0(T) = \operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Vect}(1),\ E_2(T) = \operatorname{Vect}(-2X+1),\ E_6(T) = \operatorname{Vect}(6X^2 - 6X + 1).$$

[4] Car T est symétrique.

Détails
Les vecteurs propres de A sont les vecteurs colonnes des coordonnées dans la base canonique des vecteurs propres de T.

Puisque chacune de ces bases est formée d'un seul vecteur, il suffit de diviser ce vecteur par sa norme pour obtenir une base orthonormée de chaque sous-espace propre.
On a $\|1\|^2 = \int_0^1 1\,dx = 1$, donc $\|1\| = 1$.

$$\|-2X+1\|^2 = \int_0^1 (-2x+1)^2\,dx = \int_0^1 (4x^2 - 4x + 1)\,dx = \frac{4}{3} - 2 + 1 = \frac{1}{3}.$$

Donc $\|-2X+1\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
Enfin,

$$\|6X^2 - 6X + 1\|^2 = \int_0^1 (6x^2 - 6x + 1)^2\,dx = \int_0^1 (36x^4 + 36x^2 + 1 - 72x^3 + 12x^2 - 12x)\,dx$$

$$= \frac{36}{5} + \frac{36}{3} + 1 - \frac{72}{4} + \frac{12}{3} - \frac{12}{2} = \frac{36}{5} + 12 + 1 - 18 + 4 - 6$$
$$= \frac{36}{5} - 7 = \frac{1}{5}.$$

Et donc $\|6X^2 - 6X + 1\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Par conséquent, on peut prendre $\boxed{\mathscr{C} = \left(1, \sqrt{3}(-2X+1), \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)\right)}$.

14. Notons $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$, et soit V l'unique endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{C}$ est D_1.
Alors $D_1^2 = D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(T)$, de sorte que $V \circ V = T$.
Puisque $\mathscr{C}$ est orthonormée et que D_1 est symétrique, alors V est un endomorphisme symétrique.

D'autre part, puisque $\mathscr{C}$ est une base orthonormée, si $P \in E$ et si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ est le vecteur des coordonnées de P dans la base $\mathscr{C}$, alors

$$\varphi(V(P), P) = {}^t(D_1X)X = {}^tXD_1X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}y \\ \sqrt{6}z \end{pmatrix} = \sqrt{2}y^2 + \sqrt{6}z^2 \geqslant 0.$$

Rappel
Un endomorphisme est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base **orthonormée** est symétrique.

PROBLÈME 2

Partie I : Premières propriétés de la fonction H.

Rédaction
Étudier le domaine de continuité de l'intégrande permet de bien montrer que le seul problème de convergence de l'intégrale se trouve au voisinage de $+\infty$, et donc qu'on va se contenter d'une étude au voisinage de $+\infty$.

1. Soit $x \in I$. Alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Or, pour $t \geqslant 0$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^x} \leqslant \frac{1}{(t^2)^x} \leqslant \frac{1}{t^{2x}}.$$

Mais $2x > 1$, de sorte que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x}}$ converge[5].
On en déduit donc que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^x}$, et puisqu'il n'y a pas de problème de convergence sur le segment $[0, 1]$, l'intégrale définissant $\boxed{H(x) \text{ converge}}$.

[5] Intégrale de Riemann.

2. ⚠ *Une erreur classique serait de dériver H, par exemple en dérivant $x \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^x}$ et en plaçant cette dérivée sous une intégrale de 0 à $+\infty$.*
Aucun théorème ne justifie ceci[6]*, et nous ne savons donc rien de la dérivabilité de H.*
Pour étudier sa monotonie, il faut donc revenir à la définition de la croissance/décroissance d'une fonction.
Soient donc $x, y \in I$ avec $x \leqslant y$. Alors pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$(1+t^2)^x \leqslant (1+t^2)^y \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t^2)^x} \geqslant \frac{1}{(1+t^2)^y}.$$

Et donc par croissance de l'intégrale,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt \geqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^y}\, dt = F(y).$$

Et donc $\boxed{F \text{ est décroissante sur } I.}$

[6] De tels théorèmes existent, mais ne sont pas au programme d'ECS et ne s'appliquent que sous certaines conditions.

Remarque
La fonction $x \mapsto t^x$ est croissante si $t \geqslant 1$ (et décroissante si $t \in]0, 1[$). Or ici, $1 + t^2$ est bien supérieur ou égal à 1.

3.a. Soit $A > 0$. Alors

$$\int_0^A \frac{1}{1+t^2}\, dt = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^A = \mathrm{Arctan}(A) - \underbrace{\mathrm{Arctan}(0)}_{=0} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

Et donc $\boxed{H(1) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.}$

3.b. Comme indiqué, procédons à une intégration par parties, sur un segment $[0, A]$.

Posons à cet effet $u(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ et $v(t) = t$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$ avec $u'(t) = -\dfrac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$ et $v'(t) = 1$.

Il vient donc

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^A + \int_0^A \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt \\
&= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n\int_0^A \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt \\
&= \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt - 2n\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt \\
&\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 2n\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt - 2n\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\,dt = 2n\,(H(n) - H(n+1)).
\end{aligned}$$

Et donc on a bien $\boxed{H(n) = 2n\,(H(n) - H(n+1)).}$

Soit encore $\boxed{H(n+1) = \dfrac{2n-1}{2n}H(n).}$

> **IPP**
> Rappelons que le théorème d'intégration par parties ne s'applique que sur un **segment**.

> **Limite**
> Au voisinage de $+\infty$,
> $$\frac{A}{(1+A^2)^n} \sim \frac{1}{A^{2n-1}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3.c. Il s'agit d'utiliser les résultats des deux questions précédentes : nous connaissons la valeur de $H(1)$ et disposons d'une formule exprimant $H(n+1)$ en fonction de $H(n)$.

Cette formule s'écrit encore $H(n) = \dfrac{2n-3}{2n-2}H(n-1)$.

```
function y = H(n)
        y = %pi/2
        for i=2 :n
                y = (2*i-3)/(2*i-2)*y
        end
endfunction
```

3.d. Montrons la formule annoncée par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, on a $H(1) = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2-2)!\pi}{2^{2-1}(0!)^2}$, donc la formule est vraie.

Supposons que $H(n) = \dfrac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$. Alors

$$\begin{aligned}
H(n+1) = \frac{2n-1}{2n}H(n) &= \frac{(2n-1)(2n-2)!\pi}{n2^{2n}((n-1)!)^2} \\
&= \frac{2n(2n-1)(2n-2)!\pi}{2n^2 2^{2n}((n-1)!)^2} \\
&= \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}.
\end{aligned}$$

> **Astuce**
> On a multiplié numérateur et dénominateur par $2n$ afin de faire apparaître au numérateur le $(2n)!$ que l'on attend.

Et donc la formule reste vraie au rang $n+1$.

Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ H(n) = \dfrac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}.}$

Partie II : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

4.a. φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ car somme de fonctions $\mathscr{C}^1$, et pour tout $u \in \mathbf{R}$,

$$\varphi'(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} > 0.$$

On en déduit que φ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
D'autre part, $\lim\limits_{u\to-\infty} \varphi(u) = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \varphi(u) = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection[7], $\boxed{\varphi \text{ réalise une bijection de } \mathbf{R} \text{ sur } \mathbf{R}.}$

De plus, $\varphi(0) = 0$ et donc $\boxed{\varphi^{-1}(0) = 0}$, et $\lim\limits_{u\to+\infty} \varphi(u) = +\infty$ de sorte que $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi^{-1}(t) = +\infty.}$

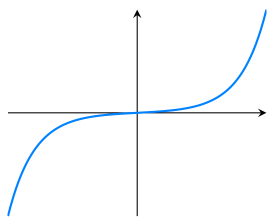


Figure 1– La fonction φ.

[7] φ est continue puisque $\mathscr{C}^1$.

4.b. La fonction $t \mapsto \varphi^{-1}(t)$ est $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc le changement de variable est légitime.
De plus, nous savons déjà que $\lim_{t\to 0} \varphi^{-1}(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} \varphi^{-1}(t) = +\infty$.
Posons donc $u = \varphi^{-1}(t) \Leftrightarrow t = \varphi(u)$, de sorte que $dt = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}\, du$.
On a alors $1 + t^2 = 1 + \left(\dfrac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 = 1 + \dfrac{e^{2u} + e^{-2u} - 2}{4} = \dfrac{e^{2u} + 2 + e^{-2u}}{4} = \left(\dfrac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2$.
Et donc par le théorème de changement de variable,

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{e^u + e^{-u}}\right)^{2x} \frac{e^u + e^{-u}}{2}\, du = \boxed{\frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}}\, du.}$$

Convergence Rappelons que l'intégrale obtenue après changement de variable est de même nature que l'intégrale de départ, qui ici était convergente. Il n'y a donc pas à se préoccuper de la convergence de la seconde intégrale.

5.a. Il est clair que pour tout $u \geqslant 0$, $e^{-u} \geqslant 0$ et donc $\boxed{e^u \leqslant e^u + e^{-u}.}$
D'autre part, par croissance de la fonction exponentielle, $e^{-u} \leqslant e^u$ et donc $\boxed{e^u + e^{-u} \leqslant 2e^u.}$

5.b. Pour tout $u \in [0, +\infty[$, on a

$$0 \leqslant e^{u(2x-1)} \leqslant (e^u + e^{-u})^{2x-1} \leqslant 2^{2x-1} e^{u(2x-1)} = \frac{4^x}{2} e^{u(2x-1)}$$

et donc en passant à l'inverse[8],

$$\frac{2}{4^x} e^{-u(2x-1)} \leqslant \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}} \leqslant e^{-u(2x-1)}.$$

[8] N'oublions pas de changer le sens des inégalités car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Par croissance de l'intégrale, il vient alors

$$\frac{2}{4^x} \int_0^{+\infty} e^{-u(2x-1)}\, du \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^u + e^{-u})^{2x-1}}\, du \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-u(2x-1)}\, du.$$

Convergence Notons que toutes ces intégrales convergent bien, car $2x - 1 > 0$.

Mais nous savons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u(2x-1)}\, du = \frac{1}{2x-1}$ et donc, après multiplication par $\dfrac{4^x}{2}$, il vient

$$\boxed{\frac{1}{2x-1} \leqslant H(x) \leqslant \frac{4^x}{2(2x-1)}.}$$

Rappel Pour tout $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{\alpha}$.
Notons que ce résultat se retrouve aisément en calculant une primitive.

6. Lorsque x tend vers $\dfrac{1}{2}$ par valeurs supérieures, $\dfrac{1}{2x-1} \to +\infty$, et donc $\boxed{\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} H(x) = +\infty.}$
D'autre part, on a, pour tout $x \in I$,

$$1 \leqslant (2x-1)H(x) \leqslant \frac{4^x}{2}$$

et lorsque $x \to \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{4^x}{2} \to \dfrac{4^{1/2}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.
Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (2x-1)H(x) = 1 \Leftrightarrow \boxed{H(x) \underset{x\to\frac{1}{2}^+}{\sim} \frac{1}{2x-1}.}$$

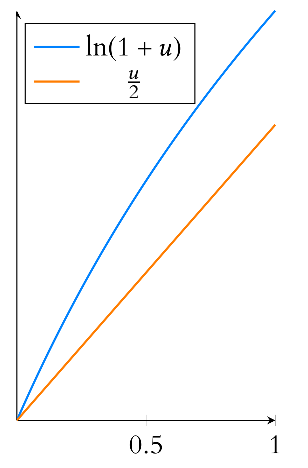
Partie III : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

7.a. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(u) = \ln(1+u) - \dfrac{u}{2}$.
Alors f est dérivable sur $[0, 1]$, avec

$$f'(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2} = \frac{1-u}{2(1+u)} \geqslant 0.$$

Et donc f est croissante sur $[0, 1]$, avec $f(0) = 0$, de sorte que pour tout $u \in [0, 1]$,

$$f(u) \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{\ln(1+u) \geqslant \frac{u}{2}.}$$



7.b. Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{x}\right)$, alors une densité de X est

$$t \mapsto \sqrt{\frac{x}{2\pi}} e^{-xt^2/2}$$

de sorte que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{x}{2\pi}} e^{-xt^2/2}\, dt = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt^2/2}\, dt = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$.

Puisque la fonction $t \mapsto e^{-xt^2/2}$ est paire, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2}\, dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt^2/2}\, dt = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2x}}.}$$

Méthode

Comment «bien choisir» la loi normale ?
L'important est de faire apparaître la bonne exponentielle, et donc il faut que

$$e^{-xt^2/2} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Ici cela impose donc $\mu = 0$ et $\sigma^2 = -\frac{1}{x}$.

7.c. Soit $x \in I$. Pour $t \in [0,1]$, on a $t^2 \in [0,1]$ et donc d'après 7.a, $\ln\left(1+t^2\right) \geqslant \frac{t^2}{2}$, donc

$$\left(1+t^2\right)^x = e^{x\ln(1+t^2)} \geqslant e^{xt^2/2} \Rightarrow \frac{1}{(1+t^2)^x} \leqslant e^{-xt^2/2}.$$

Par croissance de l'intégrale, il vient alors

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt \leqslant \int_0^1 e^{-xt^2/2}\, dt.$$

D'autre part,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2x}} = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2}\, dt = \int_0^1 e^{-xt^2/2}\, dt + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-xt^2/2}\, dt}_{\geqslant 0} \geqslant \int_0^1 e^{-xt^2/2}\, dt.$$

Et donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt \leqslant \int_0^1 e^{-xt^2/2}\, dt \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.}$

Enfin, puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^x}$ est positive sur $[0,1]$, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^x} \geqslant 0.}$

7.d. Soit $x \in I$. Alors, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^x} \leqslant \frac{1}{t^{2x}}$.
Et donc par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x}}.$$

Mais pour $A \geqslant 1$,

$$\int_1^A \frac{dt}{t^{2x}} = \left[-\frac{1}{2x-1}\frac{1}{t^{2x-1}}\right]_1^A = \frac{1}{2x-1}\left(1 - \frac{1}{A^{2x-1}}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2x-1}.$$

Et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x}} = \frac{1}{2x-1}$, de sorte que

$$\boxed{0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt \leqslant \frac{1}{2x-1}.}$$

Remarque

Nous l'avons ici redémontrée, mais celui qui sait que pour $\alpha > 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

peut l'utiliser directement.

7.e. Pour $x \in I$, en combinant les résultats de deux questions précédentes, il vient

$$0 \leqslant H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\, dt \leqslant \frac{1}{2x-1} + \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

Et donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0.}$

8.a. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \ln(H(n+1)) + \frac{\ln(n+1)}{2} - \ln(H(n)) - \frac{\ln(n)}{2} \\
&= \ln\left(\frac{H(n+1)}{H(n)}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{2n-1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= -\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= -\frac{3}{8n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\boxed{\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{8n^2}.}
\end{aligned}$$

DL

Rappelons que le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 est

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Rappel

Si $v_n = u_n + o(u_n)$, alors $v_n \sim u_n$.

8.b. La série de terme général $-\frac{3}{8n^2}$ est une série de Riemann convergente, et donc, par le critère des équivalents pour les séries de signe constant[9], $\boxed{\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1}-u_n) \text{ converge.}}$

[9] $-\frac{3}{8n^2}$ est de signe constant, donc le critère s'applique.

8.c. Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} u_k = \sum_{i=2}^{n} u_i - \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_n - u_1.$$

Et donc $u_n = \sum_{k=2}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) + u_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k) + u_1$.

Notons donc $\ell = \sum_{k=1}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k) + u_1$.

Nous avons $u_n = \ln(H(n)) + \ln(n^{1/2}) = \ln(H(n)\sqrt{n})$.
Et donc, par continuité de l'exponentielle, $H_n\sqrt{n} = e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ell} = K > 0$.
Soit encore

$$\lim_{n\to+\infty} H(n)\frac{\sqrt{n}}{K} = 1 \Leftrightarrow \boxed{H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}.}$$

Méthode

La question précédente nous a fourni un équivalent de H aux entiers positifs.
Pour obtenir un équivalent de $H(x)$, il semble donc logique de se ramener aux valeurs de H aux entiers, et le meilleur moyen d'y parvenir est donc d'introduire $H(\lfloor x\rfloor)$.
De plus, $H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n}}$ nous laisse penser que $H(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}}$.
Essayons donc de prouver ce résultat.

9. Pour tout $x \geqslant 1$, on a $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$ et donc par décroissance de H,

$$H(\lfloor x\rfloor + 1) \leqslant H(x) \leqslant H(\lfloor x\rfloor).$$

Et donc $\frac{H(\lfloor x\rfloor+1)}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{H(x)}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{H(\lfloor x\rfloor)}{\sqrt{x}}$.
Or, $x-1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x$, de sorte que

$$\frac{x-1}{x} < \frac{\lfloor x\rfloor}{x} \leqslant 1$$

et donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x} = 1 \Leftrightarrow \lfloor x\rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
Par conséquent, il vient

$$\frac{H(\lfloor x\rfloor)}{\sqrt{x}} = \underbrace{\frac{H(\lfloor x\rfloor)}{\sqrt{\lfloor x\rfloor}}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} K}\underbrace{\frac{\sqrt{\lfloor x\rfloor}}{\sqrt{x}}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} K.$$

Détails

Puisque $\lfloor x\rfloor \sim x$, on a donc $\sqrt{\lfloor x\rfloor} \sim \sqrt{x}$.

De même, on a $\lfloor x\rfloor + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \lfloor x\rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et donc

$$\frac{H(\lfloor x\rfloor+1)}{\sqrt{x}} = \underbrace{\frac{H(\lfloor x\rfloor+1)}{\sqrt{\lfloor x\rfloor+1}}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} K}\underbrace{\frac{\sqrt{\lfloor x\rfloor+1}}{\sqrt{x}}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} K.$$

Par le théorème des gendarmes, on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{H(x)}{\sqrt{x}} = K \Leftrightarrow \boxed{H(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}}.}$$

Partie IV : Étude d'une suite de variables aléatoires.

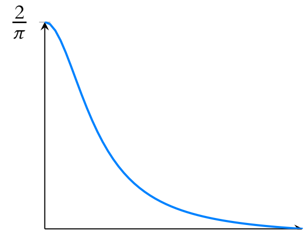


FIGURE 2– La densité f.
.5mm

10. Il est évident que f est à valeurs positives et continue sur $\mathbf{R}$, sauf en 0.
De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\pi}H(1) = 1.$$

Et donc $\boxed{f \text{ est bien une densité.}}$

11.a. Soit $x \leqslant 0$. Alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.
Si $x > 0$, alors

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{Arctan}(t)\right]_0^A = \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(A).$$

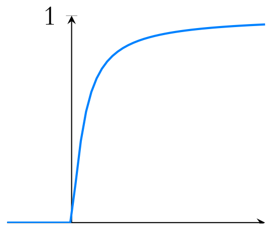


FIGURE 3– La fonction F_X.

Et donc $\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$

11.b. X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{\pi(1+t^2)}\,dt$ converge.
Mais au voisinage de $+\infty$, $tf(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\frac{1}{t}$.
Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{dt}{t}$ diverge, par le critère des équivalents pour les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} tf(t)\,dt$ diverge également.
Et donc $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance}}$.
Par conséquent, X n'admet pas non plus de moment d'ordre 2 et donc $\boxed{\text{pas de variance.}}$

> **Moments**
> Rappelons que si X admet un moment d'ordre p, alors elle admet un moment d'ordre q pour tout $q \leqslant p$.
> Et donc par contraposée, si elle n'admet pas de moment d'ordre p, elle n'admet pas de moment d'ordre q, pour tout $q \geqslant p$.

12.a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leqslant x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \leqslant x]\right).$$

Mais par indépendance des X_i, il vient

$$P(M_n \leqslant x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) = F_{X_1}(x)^n = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(x)\right)^n & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

12.b. Soit $g : u \mapsto \operatorname{Arctan}(u) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right)$. Alors g est dérivable sur $]0;+\infty[$, et

$$g'(u) = \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{u^2}\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} = \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{u^2+1} = 0.$$

Et donc g est constante sur l'intervalle[10] $]0,+\infty[$.
Puisque $g(1) = \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(1) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que

$$\boxed{\forall u \in]0,+\infty[,\ g(u) = \operatorname{Arctan}(u) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

> **Rappel**
> $\tan\frac{\pi}{4} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}.$

La fonction Arctan est de classe $\mathscr{C}^1$, et donc par la formule de Taylor-Young à l'ordre 1,

$$\operatorname{Arctan}(u) = \operatorname{Arctan}(0) + \operatorname{Arctan}'(0)u + \underset{u\to0}{o}(u) = u + \underset{u\to0}{o}(u)\boxed{\underset{u\to0}{\sim} u.}$$

[10] Notons que g est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et que $g' = 0$ sur $\mathbf{R}^*$, mais $\mathbf{R}^*$ n'est pas un intervalle, et donc ceci ne prouve pas que g y est constante.

12.c. Soit $x \in]0,+\infty[$. Alors

$$\begin{aligned} P(Z_n \leqslant x) &= P\left(\frac{n}{M_n} \leqslant x\right) \\ &= P\left(M_n \geqslant \frac{n}{x}\right) \\ &= P\left(M_n > \frac{n}{x}\right) \\ &= 1 - P\left(M_n \leqslant \frac{n}{x}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{x}\right)\right)^n. \end{aligned}$$

Détails
M_n est une variable à densité car sa fonction de répartition, qui vaut $F_{X_1}^n$ est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points.
Et donc il est possible de remplacer l'inégalité large par une inégalité stricte.

Mais en utilisant le résultat de la question 12.b,

$$\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{x}\right) = 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$$

de sorte que $\boxed{P(M_n \leqslant x) = 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n.}$

12.d. Il est clair que Z_n est à valeurs positives, donc pour $x \leqslant 0$, $P(Z_n \leqslant x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Pour $x > 0$, on a

$$\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right).$$

Mais $\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que

$$\ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\frac{x}{n}.$$

On en déduit que $n\ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}x$.
Et donc par continuité de l'exponentielle[11],

$$\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{2}{\pi}x}.$$

Danger !
Le piège classique : 1^∞ est une forme indéterminée, et il ne faudrait surtout pas conclure que $P(Z_n \leqslant x) \to 1$ au prétexte que

$$1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) \to 1.$$

Il est indispensable de passer par la forme exponentielle pour lever l'indétermination.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\frac{2}{\pi}x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Nous reconnaissons là la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Et donc si $\boxed{Z \text{ est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle } \mathscr{E}\left(\frac{2}{\pi}\right), \text{ alors } Z_n \xrightarrow{\mathscr{L}} Z.}$

[11] Ce qui nous permet de composer des limites, et non des équivalents !

EML 2016

Problème 1

Sujet : Décomposition d'un endomorphisme diagonalisable en combinaison linéaire de projecteurs sur ses sous-espaces propres.

Difficile

Abordable en première année : ✗

Intérêt : ★★★

Thèmes du programme abordés : polynômes d'endomorphismes, diagonalisation, endomorphismes symétriques, projecteurs orthogonaux.

Partie I : Étude d'un exemple

On considère, dans cette partie, les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver, en fonction de I_3 et A, deux matrices P_1 et P_2 de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que :

$$P_1 + P_2 = I_3 \text{ et } 4P_1 + 9P_2 = A.$$

   Expliciter ensuite les coefficients de P_1 et ceux de P_2.

2. a. Calculer les matrices P_1^2, P_1P_2, P_2P_1 et P_2^2.

   b. En déduire : $\forall k \in \mathbf{N},\ A^k = 4^k P_1 + 9^k P_2$.

3. Trouver au moins une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ dont on explicitera les coefficients, telle que $B^2 = A$.

4. Quelles sont les valeurs propres de A ?

Dans toute la suite du problème, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1 et f un endomorphisme de E.

On note e l'endomorphisme identité de E qui, à chaque élément de E associe lui-même, et $\widetilde{0}$ l'endomorphisme nul de E qui, à chaque élément de E, associe l'élément nul de E.

On suppose qu'il existe un entier m de $\mathbf{N}^*$, des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ deux à deux distincts et des endomorphismes $p_1, \dots, p_m$ de E tous différents de $\widetilde{0}$, tels que : $\forall k \in [\![0, m]\!],\ f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$.

Enfin, on considère les polynômes

$$N = \prod_{\ell=1}^{m} (X - \lambda_\ell), \text{ et pour tout } i \text{ de } [\![1, m]\!],\ M_i = \prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant m \\ \ell \neq i}} (X - \lambda_\ell) \text{ et } L_i = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i.$$

On admet que, pour tous polynômes P et Q de $\mathbf{R}[X]$: $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

Partie II : Étude des puissances de f.

5. Montrer, pour tout polynôme P de $\mathbf{R}_m[X]$: $P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$.

6. En déduire $N(f) = \widetilde{0}$.

7. a. Montrer que, pour tout couple (i, j) de $[\![1, m]\!]^2$, $L_i(\lambda_j)$ est égal à 1 si $i = j$ et à 0 si $i \neq j$.

   b. En déduire, pour tout i de $[\![1, m]\!]$: $L_i(f) = p_i$.

8. a. Montrer : $e = \sum_{i=1}^{m} p_i$.

   b. En déduire que E est la somme des m sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(p_1), \dots, \mathrm{Im}(p_m)$.

9. Soit i appartenant à $[\![1, m]\!]$.

   a. Vérifier : $N = M_i(\lambda_i)(X - \lambda_i)L_i$.

   b. En déduire, en utilisant le résultat de la question 6 : $\mathrm{Im}(p_i) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_i e)$.

10. Déduire des questions précédentes que f est diagonalisable, que les valeurs propres de f sont les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ et que, pour tout i de $[\![1, m]\!]$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i est $\mathrm{Im}(p_i)$.

11. a. Montrer, pour tout couple (i, j) de $[\![1, m]\!]^2$ tel que $i \neq j$: $p_i \circ p_j = \widetilde{0}$.

b. En déduire, en utilisant le résultat de la question 8.a, pour tout i de $[\![1,m]\!]$: $p_i \circ p_i = p_i$.

c. Établir, pour tout i de $[\![1,m]\!]$: $p_i \circ f = \lambda_i p_i$.

12. Montrer : $\forall k \in \mathbf{N}$, $f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$, puis, pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X]$: $P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$.

Partie III : Intervention de produits scalaires.

On munit le $\mathbf{R}$-espace vectoriel E d'un produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$ définie, pour tout $(x,y) \in E \times E$, par :

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(y) \rangle.$$

13. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

On remarquera qu'ainsi E est muni de deux produits scalaires $\langle \cdot,\cdot, \rangle$ et φ.

14. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E pour le produit scalaire φ.
    Quel résultat de la partie II peut-on alors retrouver sans calcul ?
15. Démontrer que, pour tout i de $[\![1,m]\!]$, p_i est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(p_i)$ pour le produit scalaire φ.

PROBLÈME 2

Sujet : Fonction η de Dirichlet, relation avec la fonction Γ, étude d'une suite de variables aléatoires. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ (partie I) **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : séries, intégrales impropres, variables à densité, convergence en loi.

Partie I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout x de $\mathbf{R}$, à la série $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout x de $\mathbf{R}_-$, la série $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.
2. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. On note, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

   a. Montrer que les suites $(u_{2p})_{p \in \mathbf{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p \in \mathbf{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

   b. En déduire : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbf{N}^* / \forall n \geqslant n_0$, $|u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

   c. Justifier alors que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

   d. Justifier : $\forall p \in \mathbf{N}^*$, $u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

   e. En déduire : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $|S(x) - u_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$.
   On pourra séparer les cas n pair et n impair.

   f. En déduire une fonction en `Scilab` qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.
3. Soient $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} \text{ puis } \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}.$$

4. On pose, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

   a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer, en utilisant la question 3 : $v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.

   b. En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.
5. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale.

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

On rappelle également l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

6. Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}\,dt$ converge si et seulement si $x > -1$.

On pose, pour tout réel x de $]-1;+\infty[$, $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}\,dt$.

7. Soit $x \in]-1;+\infty[$. On définit la fonction $g_x :]0;+\infty[\to \mathbf{R}$, $t \mapsto \dfrac{t^x}{1+e^t}$.
   a. Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall t \in \mathbf{R}_+^*$, $g_x(t) = (-1)^n g_x(t)e^{-nt} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}t^x e^{-kt}$.
   b. Justifier, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt}\,dt$ converge et que l'on a :
   $$\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt}\,dt = \frac{1}{k^{x+1}}\Gamma(x+1).$$
   c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\,dt$ converge, puis que la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\,dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$ est égale à 0.
   d. En déduire la relation : $I(x) = S(x+1)\Gamma(x+1)$, où la fonction S a été définie dans la partie I.
8. En utilisant la partie I, déterminer la valeur de $I(1)$.

Partie III : Étude d'une variable aléatoire.

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall t \in \mathbf{R}$, $f(t) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$.

9. Vérifier que la fonction f est paire.
10. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

On considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

11. Déterminer la fonction de répartition de X.
12. a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt$ converge.
    En déduire que X admet un moment d'ordre n, que l'on note $m_n(X)$.
    b. Justifier : $\forall p \in \mathbf{N}$, $m_{2p+1}(X) = 0$.
    c. À l'aide d'une intégration par parties, montrer : $\forall p \in \mathbf{N}^*$, $m_{2p}(X) = 4pI(2p-1)$.
13. En déduire l'existence et la valeur de l'espérance et de la variance de X.
14. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ mutuellement indépendantes et de même densité f.
    On pose, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $Y_n = \max(X_1,\dots,X_n)$ et $Z_n = Y_n - \ln(n)$.
    a. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, déterminer la fonction de répartition de Y_n puis la fonction de répartition de Z_n.
    b. En déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera une densité.

EML 2016 : CORRIGÉ

PROBLÈME 1

Partie I : Étude d'un exemple.

1. Il s'agit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues matricielles :

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = I_3 \\ 4P_1 + 9P_2 = A \end{cases} \underset{L_2 \to L_2 - 4L_1}{\longleftrightarrow} \begin{cases} P_1 + P_2 = I_3 \\ 5P_2 = A - 4I_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = \dfrac{9I_3 - A}{5} \\ P_2 = \dfrac{A - 4I_3}{5} \end{cases}$$

Soit $\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$

2.a. On a : $\boxed{P_1^2 = P_1, P_1P_2 = P_2P_1 = 0 \text{ et } P_2^2 = P_2.}$

2.b. Prouvons par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ que $A^k = 4^kP_1 + 9^kP_2$.
Pour $k = 0$, on a $A^0 = I_3 = P_1 + P_2 = 4^0P_1 + 9^0P_2$.
Supposons que $A^k = 4^kP_1 + 9^kP_2$. Alors

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^kA = (4^kP_1 + 9^kP_2)(4P_1 + 9P_2) \\ &= 4^{k+1}P_1^2 + 9 \times 4^kP_1^kP_2 + 4 \times 9^kP_2P_1 + 9^{k+1}P_2^2 \\ &= 4^{k+1}P_1 + 9^{k+1}P_2. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est héréditaire et donc, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall k \in \mathbf{N},\ A^k = 4^kP_1 + 9^kP_2.}$

> **Alternative**
> On peut aussi utiliser le binôme de Newton matriciel avec
> $$A^k = (4P_1 + 9P_2)^k$$
> mais alors il ne faut pas oublier de signaler que P_1 et P_2 commutent (car nous avons prouvé que 3 $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$).

3. Cherchons une telle matrice sous la forme $B = \lambda P_1 + \mu P_2$.
On a alors $B^2 = \lambda^2P_1^2 + \lambda\mu P_1P_2 + \lambda\mu P_2P_1 + \mu^2P_2^2 = \lambda^2P_1 + \mu^2P_2$.
Si l'on prend par exemple[1] $\lambda = 2$ et $\mu = 3$, il vient

$$(2P_1 + 3P_2)^2 = 4P_1 + 9P_2 = A.$$

Donc $\boxed{B = 2P_1 + 3P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ convient.}}$

[1] Il est clair qu'il y a d'autres solutions, par exemple $\lambda = 2$ et $\mu = -3$.

4. A est triangulaire[2], donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $\boxed{\mathrm{Spec}(A) = \{4, 9\}.}$

[2] Inférieure.

Partie II : Étude des puissances de f.

5. Soit $P = \sum_{k=0}^{m} a_kX^k \in \mathbf{R}_m[X]$. Alors

$$P(f) = \sum_{k=0}^{m} a_kf^k = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{m} a_k\lambda_i^k \right) p_i = \boxed{\sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i)p_i.}$$

6. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, λ_i est racine de N et donc $N(\lambda_i) = 0$.
On en déduit que

$$N(f) = \sum_{i=1}^{m} N(\lambda_i)p_i = \sum_{i=1}^{m} 0 \times p_i = \boxed{\tilde{0}.}$$

7.a. Les racines de M_i sont les λ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, $j \neq i$.
En particulier, pour $i \neq j$, $M_i(\lambda_j) = 0.$, et donc $L_i(\lambda_j) = \dfrac{0}{M_i(\lambda_i)} = 0$.
Si $j = i$, alors $L_i(\lambda_i) = \dfrac{M_i(\lambda_i)}{M_i(\lambda_i)} = 1$.

> **Remarque**
> Puisque λ_i n'est pas racine de M_i, on a bien $M_i(\lambda_i) \neq 0$ et donc la division par $M_i(\lambda_i)$ dans la définition de L_i est légitime.

7.b. Soit $i \in [\![1, m]\!]$. Puisque $\deg(L_i) = \deg(M_i) = m-1$, d'après la question 5 on a

$$L_i(f) = \sum_{j=1}^{m} L_i(\lambda_j)p_j = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} \underbrace{L_i(\lambda_j)}_{=0} p_j + \underbrace{L_i(\lambda_i)}_{=1} p_i = \boxed{p_i.}$$

8.a. Par hypothèse, on a

$$e = f^0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 p_i = \boxed{\sum_{i=1}^{m} p_i.}$$

8.b. Soit $x \in E$. Alors

$$x = e(x) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{p_i(x)}_{\in \operatorname{Im} p_i} \in \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im}(p_i).$$

Et donc $E \subset \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im}(p_i)$.

Les $\operatorname{Im}(p_i)$ étant des sous-espaces vectoriels de E, on a évidemment $\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im}(p_i) \subset E$ et donc

$$\boxed{E = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im}(p_i).}$$

9.a. On a

$$N = \prod_{\ell=1}^{m} (X-\lambda_\ell) = (X-\lambda_i) \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{m} (X-\lambda_\ell) = (X-\lambda_i)M_i = \boxed{(X-\lambda_i)M_i(\lambda_i)L_i.}$$

9.b. Soit $x \in \operatorname{Im}(p_i)$. Alors il existe $z \in E$ tel que $x = p_i(z)$.
Et alors

$$(f-\lambda_i e)(x) = (f-\lambda_i e)(p_i(z)) = ((f-\lambda_i e)\circ L_i(f))\,(z).$$

Mais la question 9.a, $(X-\lambda_i)L_i = \dfrac{1}{M_i(\lambda_i)}N$, de sorte que $(f-\lambda_i e)\circ L_i(f) = \dfrac{1}{M_i(\lambda_i)}N(f)$.
On en déduit donc que

$$(f-\lambda_i e)(x) = \frac{1}{M_i(\lambda_i)}N(f)(z) = \frac{1}{\lambda_i}0 = 0.$$

Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$ et donc $\boxed{\operatorname{Im}(p_i) \subset \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e).}$

10. Soit $x \in E$. Alors il existe $x_1 \in \operatorname{Im}(p_1), \dots, x_m \in \operatorname{Im}(p_n)$ tels que $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$.

Mais puisque $x_i \in \operatorname{Im}(p_i) \subset \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$, on en déduit que $x \in \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$.

Et donc $E = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$.

De plus, les $\operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$ ne sont pas réduits à $\{0\}$ car $\operatorname{Im}(p_i) \subset \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$, et les p_i sont tous non nuls. Ce sont donc des[3] sous-espaces propres de f.
D'autre part, les sous-espaces propres de f sont en somme directe, donc
$E = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$, de sorte que $\dim E = \sum_{i=1}^{m} \dim \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$.
Comme de plus on a, comme toujours, $\dim E \geqslant \sum_{\lambda \in \operatorname{Spec}(f)} E_\lambda(f)$, f ne possède donc pas d'autres valeurs propres que les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ et donc E est somme des sous-espaces propres de f : f est diagonalisable.

Enfin, puisque $E = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im}(p_i)$, alors $\dim E \leqslant \sum_{i=1}^{m} \dim \operatorname{Im}(p_i)$.

Comme d'autre part, on a $\dim \operatorname{Im}(p_i) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e)$ et $\sum_{i=1}^{m} \dim \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e) = \dim E$,

on en déduit que

$$\forall i \in [\![1, m]\!],\ \dim \operatorname{Im}(p_i) = \dim \operatorname{Ker}(f-\lambda_i e).$$

Somme
Rappelons que par définition,

$$\sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im}(p_i)$$

est l'ensemble des éléments de E qui peuvent s'écrire comme un élément de $\operatorname{Im}(p_1)$ plus un élément de $\operatorname{Im}(p_2)$, etc.

Détail
D'après 7.b, $p_i = L_i(f)$.

[3] Il est encore un peu tôt pour dire **les** sous-espaces propres de f, car f pourrait avoir d'autres valeurs propres que les λ_i.

Détails
La concaténation de bases des $\operatorname{Im}(p_i)$ est de cardinal $\sum_{i=1}^{m} \dim \operatorname{Im}(p_i)$, et elle est génératrice de E, donc

$$\dim E \leqslant \sum_{i=1}^{m} \dim \operatorname{Im}(p_i).$$

Et puisque $\mathrm{Im}(p_i) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_i e)$, ces deux sous-espaces vectoriels de E sont donc égaux :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, m]\!],\ E_{\lambda_i}(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i e) = \mathrm{Im}(p_i).}$$

11.a. Soit $x \in E$. Alors $p_j(x) \in \mathrm{Im}(p_j) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_j e)$, de sorte que $f(p_j(x)) = \lambda_j p_j(x)$.
Donc pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$, $P(f)(p_j(x)) = P(\lambda_j) \cdot p_j(x)$.
En particulier, si $P = L_i$, il vient

$$p_i(p_j(x)) = L_i(f)(p_j(x)) = \underbrace{L_i(\lambda_j)}_{=0 \text{ car } i \neq j} p_j(x) = 0.$$

Et donc $\boxed{p_i \circ p_j = 0.}$

11.b. Le même raisonnement que précédemment prouve que pour tout $x \in E$,

$$p_i \circ p_i(x) = L_i(\lambda_i) p_i(x) = p_i(x)$$

et donc $\boxed{p_i \circ p_i = p_i.}$

11.c. En combinant les résultats des deux questions précédentes, il vient

$$p_i \circ f = p_i \circ \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \underbrace{p_i \circ p_j}_{=0 \text{ si } i \neq j} = \lambda_i p_i.$$

Complément

Nous venons de prouver que p_i est un projecteur, d'image égale à $E_{\lambda_i}(f)$.
La question précédente permettrait de prouver qu'on a également

$$\mathrm{Ker}\, p_i = \bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(f).$$

Et donc p_i est la projection sur $E_{\lambda_i}(f)$ parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres. On parle de projecteur spectral.

12. Prouvons le résultat par récurrence sur k. La récurrence est déjà largement initialisée puisque par hypothèse, le résultat est vrai pour $k \in [\![0, m]\!]$.
Supposons donc que $f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$. Alors

$$f^{k+1} = f \circ f^k = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i \right) \circ f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i \circ f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{k+1} p_i.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$, et par le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N},\ f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i.}$$

Enfin, si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$, alors, de même qu'à la question 5, il vient

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda_i^k \right) p_i = \boxed{\sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i.}$$

Partie III : Intervention de produits scalaires.

13. Soient $x, y \in E$. Alors

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(y) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(y), p_i(x) \rangle = \varphi(y, x).$$

Donc φ est symétrique.
Soient $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + y, z) &= \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(\lambda x + y), p_i(z) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle \lambda p_i(x) + p_i(y), p_i(z) \rangle \end{aligned}$$

Linéarité des p_i.

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda\langle p_i(x), p_i(z)\rangle + \langle p_i(y), p_i(z)\rangle$$

$$=\lambda \sum_{i=1}^{m}\langle p_i(x), p_i(z)\rangle + \sum_{i=1}^{m}\langle p_i(y), p_i(z)\rangle = \lambda\varphi(x,z) + \varphi(y,z).$$

Linéarité à gauche de $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Ainsi φ est linéaire à gauche, et étant symétrique, elle est bilinéaire symétrique.
Soit $x \in E$. Alors $\varphi(x,x) = \sum_{i=1}^{m}\langle p_i(x), p_i(x)\rangle = \sum_{i=1}^{m} \|p_i(x)\|^2 \geqslant 0$.
De plus, une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ses termes est nul, donc

$$\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,m]\!],\ \|p_i(x)\|^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,m]\!],\ p_i(x) = 0.$$

Rappel
Un vecteur est de norme nulle si et seulement si il est nul.

Mais alors, d'après le résultat de la question 8.a, $x = e(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x) = 0$.
Donc $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$ et la réciproque est toujours vérifiée.
Donc $\boxed{\varphi \text{ est bien un produit scalaire sur } E.}$

14. Soient $x, y \in E$. Alors

$$\varphi(x, f(y)) = \sum_{i=1}^{m}\langle p_i(x), p_i(f(y))\rangle = \sum_{i=1}^{m}\langle p_i(x), \lambda_i p_i(y)\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\langle p_i(x), p_i(y)\rangle.$$

De même, on a $\varphi(f(x), y) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\langle p_i(x), p_i(y)\rangle$, donc $\varphi(f(x),y) = \varphi(x, f(y))$ et donc f est un $\boxed{\text{endomorphisme symétrique pour le produit scalaire } \varphi.}$
On retrouve ainsi le fait que f est un endomorphisme diagonalisable.

15. Nous savons déjà que p_i est un projecteur d'après la question 11.b, et c'est donc un projecteur sur $\mathrm{Im}(p_i)$.
De plus, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\varphi(p_i(x), y) = \sum_{j=1}^{m}\langle p_j(p_i(x)), p_i(y)\rangle = \langle p_i(x), p_i(y)\rangle.$$

On a utilisé ici les résultats des questions 11.a et 11.b :

$$p_j \circ p_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

De même, on a $\varphi(x, p_i(y)) = \langle p_i(x), p_i(y)\rangle$, et donc p_i est un endomorphisme symétrique.
Mais nous savons qu'un projecteur est symétrique si et seulement si c'est un projecteur orthogonal, et donc p_i est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}\, p_i$.

Problème 2

Partie I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série.

1. Si $x = 0$, alors $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x} = (-1)^{n+1}$ ne converge pas vers 0.
Et si $x < 0$, alors $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right| = n^{-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc de même, on n'a pas $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et alors, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \text{ est grossièrement divergente.}}$

Grossièrement DV
Rappelons que $u_n \to 0$ **ne suffit pas** à garantir la convergence de $\sum u_n$, mais qu'en revanche, si $u_n \not\to 0$, alors nécessairement $\sum u_n$ diverge.

2.a. On a, pour $p \in \mathbf{N}^*$,

$$u_{2(p+1)} - u_{2p} = u_{2p+2} - u_{2p} = \sum_{k=1}^{2p+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p+2)^x}.$$

Mais la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$, de sorte que $\dfrac{1}{(2p+1)^x} \geqslant \dfrac{1}{(2p+2)^x}$ et donc $u_{2p+2} - u_{2p} \geqslant 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_{2p})_{p\in\mathbf{N}^*} \text{ est croissante.}}$

De même, on a $u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} = u_{2p+1} - u_{2p-1} = \dfrac{1}{(2p+1)^x} - \dfrac{1}{(2p)^x} \leqslant 0$ et donc $\boxed{\text{la suite } (u_{2p-1})_{p\in\mathbf{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

Enfin,

$$u_{2p} - u_{2p-1} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{2p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = -\frac{1}{(2p)^x} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbf{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbf{N}^*}$ sont adjacentes, et par conséquent convergent vers une même limite.

Suites adjacentes

Pour prouver que deux suites sont adjacentes, il ne faut pas oublier de vérifier que la différence des deux suites tend vers 0, il ne suffit pas de vérifier que l'une est croissante et l'autre décroissante.

2.b. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(u_{2p})_{p\in\mathbf{N}^*}$ tend vers $S(x)$, alors il existe $N_1 \in \mathbf{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N_1$, $|S(x) - u_{2n}| \leqslant \varepsilon$.
De même, $(u_{2p-1})_{p\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $S(x)$, donc il existe $N_2 \in \mathbf{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N_2$, $|S(x) - u_{2n-1}| \leqslant \varepsilon$.
Notons à présent $N = \max(2N_1, 2N_2 - 1)$, alors pour $n \geqslant N$:

- soit n est pair, avec $n = 2p$. Et alors $n \geqslant 2N_1 \Leftrightarrow p \geqslant N_1$, de sorte que

$$|u_n - S(x)| = |u_{2p} - S(x)| \leqslant \varepsilon,$$

- soit n est impair, avec $n = 2p-1$. Et alors $n \geqslant 2N_2 - 1 \Leftrightarrow p \geqslant N_2$ et donc

$$|u_n - S(x)| = |u_{2p-1} - S(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Dans les deux cas, $\boxed{|u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon.}$

2.c. La question précédente prouve[4] que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $S(x)$. Mais $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ n'est autre que la suite des sommes partielles de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = S(x).}$

[4] C'est tout simplement la définition de $u_n \to S(x)$.

Série convergente

Par définition, une série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge, et dans ce cas, la somme de la série est la limite de la suite des sommes partielles.

2.d. La suite $(u_{2p})_{p\in\mathbf{N}^*}$ étant croissante et convergente, chacun de ses termes est inférieur à la limite de la suite : $\forall p \in \mathbf{N}^*$, $u_{2p} \leqslant S(x)$.
De même, par décroissance de $(u_{2p-1})_{p\in\mathbf{N}^*}$, on a : $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $u_{2k-1} \geqslant S(x)$. En particulier, pour $k = p+1$, il vient $S(x) \leqslant u_{2p+1}$.
Enfin, toujours par décroissance de $(u_{2p-1})_{p\in\mathbf{N}^*}$, $\forall p \in \mathbf{N}^*$, $u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.
Ainsi,

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{N}^*,\ u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}.}$$

2.e. • Si n est pair, $n = 2p$, alors

$$0 \leqslant S(x) - u_{2p} \leqslant u_{2p+1} - u_{2p} \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}.$$

Et donc $|S(x) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

• Si n est impair, $n = 2p-1$, alors

$$u_{2p} - u_{2p-1} \leqslant S(x) - u_{2p-1} \leqslant 0$$

avec $u_{2p} - u_{2p-1} = \dfrac{(-1)^{2p+1}}{(2p)^x} = \dfrac{-1}{(n+1)^x}$.

Et alors $|S(x) - u_n| = |S(x) - u_{2p-1}| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

2.f. D'après la question précédente, si $\dfrac{1}{(n+1)^x} \leqslant \varepsilon$, alors $|u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

Or, $\dfrac{1}{(n+1)^x} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow (n+1)^x \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow (n+1) \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon^{1/x}} \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon^{1/x}} - 1$.

Cette condition est par exemple vérifiée pour $n = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon^{1/x}} \right\rfloor + 1$.

Pourquoi +1 ?

Notons que la partie entière peut tout à fait être nulle. Comme on souhaite alors que la somme comporte au moins un terme, il faut s'assurer que l'on prend au moins $n = 1$, d'où le terme $+1$.

```
function y=somme(x,epsilon)
        y = 0
        n = floor(1/epsilon^(1/x))+1
        for i = 1 :n
                y = y + (-1)^(i+1)/(i^x)
        end
endfunction
```

Donnons également une solution utilisant une boucle `while` :

```
function y = somme(x,epsilon)
        y = 1
        n = 1
        while 1/(n+1)^x>epsilon
                n = n+1
                y = y+(-1)^(n+1)/n^x
        end
endfunction
```

3. En séparant les termes pairs des termes impairs, il vient

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n)^x} + \sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^{2n-1+1}}{(2n-1)^x}$$
$$= \sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)}{2^x n^x} + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(2n-1)^x}$$
$$= \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(2n-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^x} = \boxed{\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}.}$$

Bornes

Attention à ne pas se tromper dans les bornes en séparant les termes pairs des termes impairs : les termes pairs sont les $k = 2n$, avec n variant de 1 à p et les termes impairs sont les $k = 2n-1$, avec n variant de 1 à p.

La variable de sommation est une variable muette, on peut l'appeler n comme on peut l'appeler k.

De même[5], on a

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(2n)^x} + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(2n-1)^x} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}.$$

[5] Toujours en séparant les termes pairs des termes impairs.

Et donc, en remplaçant dans l'égalité précédemment obtenue, il vient

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{2}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} = \boxed{\sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}.}$$

4.a. Dans la question 3, si l'on prend $x = 1$, il vient

$$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \boxed{\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.}$$

Soit encore, $v_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$.

Chgt d'indice

On pose $k = n + i$.
Et donc $n + 1 \leqslant k \leqslant 2n$ est équivalent à $1 \leqslant i \leqslant n$.

En factorisant le dénominateur par n, on obtient donc $\boxed{v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.}$

4.b. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Alors f est continue, et on a

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On reconnaît alors des sommes de Riemann de f entre 0 et 1, de sorte que (v_n) converge[6] et que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 f(t)\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2).$$

[6] Ce que l'on savait déjà d'après la question 2.c.

D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = S(1)$ et donc $\boxed{S(1) = \ln(2).}$

5. En faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité de la question 3, on obtient

$$S(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{12}.}$$

Limite — Notons que le passage à la limite est bien légitime car la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ est une série convergente et donc

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale.

6. La fonction $t \mapsto \frac{t^x}{1+e^t}$ est continue sur $]0;+\infty[$, et donc il faut étudier la nature de l'intégrale en 0 et en $+\infty$.

Continuité — Il est tentant de dire que cette fonction est continue en 0. C'est effectivement le cas si $x \geqslant 0$, mais ce n'est plus le cas pour $x < 0$ car elle n'est alors pas définie en 0.

Au voisinage de $+\infty$, on a $t^2 \frac{t^x}{1+e^t} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{x+2}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $\frac{t^x}{1+e^t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $\int_1^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}\,dt$ converge, quelle que soit la valeur de x.

Au voisinage de 0, on a $\frac{t^x}{1+e^t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^x}{1+e^0} = \frac{t^x}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{t^{-x}}$.

Par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, les intégrales $\int_0^1 \frac{t^x}{1+e^t}\,dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{-x}}\,dt$ sont de même nature.

Comparaison — Rappelons que pour le critère des équivalents, il est indispensable de vérifier la positivité des fonctions.

Or cette dernière intégrale est une intégrale de Riemann, qui converge si et seulement si $-x < 1 \Leftrightarrow x > -1$.

Donc $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}\,dt \text{ converge si et seulement si } x > -1.}$

7.a. En utilisant la formule de sommation des premiers termes d'une suite géométrique[7], il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}t^x e^{-kt} &= t^x \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i e^{-(i+1)t}\\ &= t^x e^{-t}\sum_{i=0}^{n-1}(-e^{-t})^i\\ &= t^x e^{-t}\frac{1-(-1)^n e^{-nt}}{1+e^{-t}} = t^x \frac{1-(-1)^n e^{-nt}}{1+e^t}\\ &= g_x(t)\left(1-(-1)^n e^{-nt}\right).\end{aligned}$$

[7] Qui s'applique ici car la raison de la suite est $-e^{-t} \neq 1$.

Chgt d'indice — $i = k-1$.

Et donc

$$\boxed{g_x(t) = (-1)^n g_x(t)e^{-nt} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}e^{-kt}.}$$

7.b. Procédons au changement de variable $u = kt$, qui est légitime car il s'agit d'un changement de variable affine. Alors, $\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{k}\right)^x e^{-u}\frac{du}{k}$ sont de même nature, et en cas de convergence sont égales.

Or, la seconde intégrale est convergente[8] et

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{k}\right)^x e^{-u}\frac{du}{k} = \frac{1}{k^{x+1}}\int_0^{+\infty} u^x e^{-u}\,du = \frac{1}{k^{x+1}}\Gamma(x+1).$$

[8] Car on y reconnaît la fonction Γ, dont on sait qu'elle est définie par une intégrale convergente.

On en déduit que $\boxed{\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt}\,dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{k^{x+1}}\Gamma(x+1).}$

7.c. Pour tout $t > 0$, on a $0 \leqslant g_x(t)e^{-nt} \leqslant t^x e^{-nt}$.

Puisque $\int_0^{+\infty} t^x e^{-nt}\,dt$ converge par la question précédente, $\int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\,dt$ converge.

Par croissance de l'intégrale, il vient alors

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} t^x e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n^{x+1}}\Gamma(x+1).$$

Mais $x > -1$, de sorte que $x+1>0$ et donc $\frac{1}{n^{x+1}}\Gamma(x+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par le théorème des gendarmes, on a donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\,dt = 0.}$$

7.d. En intégrant la relation obtenue en 7.a, on a

$$\int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\,dt = \int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\,dt + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt}\,dt = \int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\,dt + \Gamma(x+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}}.$$

Lorsque $n\to+\infty$, il vient alors

$$I(x) = \int_0^{+\infty} g_x(t)\,dt = 0 + \Gamma(x+1)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}} = \boxed{\Gamma(x+1)S(x+1).}$$

8. On a $I(1) = S(2)\Gamma(2) = S(2) = \boxed{\frac{\pi^2}{12}}.$

$\Gamma(2)$
On a
$$\Gamma(2) = (2-1)! = 1.$$

Partie III : Étude d'une variable aléatoire.

9. Soit $t\in\mathbf{R}$. Alors

$$f(-t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{e^{-2t}}{e^{-2t}}\frac{e^{t}}{e^{2t}(1+e^{-t})^2} = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = f(t).$$

Donc $\boxed{f \text{ est une fonction paire.}}$

10. La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$ car quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
Et elle clairement positive car son numérateur et son dénominateur le sont.
Pour $A>0$, on a

$$\int_0^A \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{1+e^t}\right]_0^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. On en déduit, par parité de f que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est une densité de probabilités.}}$

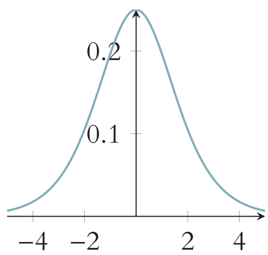


FIGURE 1– La fonction f.

Culture
La loi associée à cette densité, relativement fréquente dans les sujets de concours, est appelée **loi logistique.**

11. Soit $x\in\mathbf{R}$. Alors

$$F_X(x) = P(X\leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{1+e^t}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} = \boxed{\frac{1}{1+e^{-x}}.}$$

Remarquons que la relation de Chasles et le calcul d'intégrale (sur un segment) qui suit sont valables également pour $x<0$.

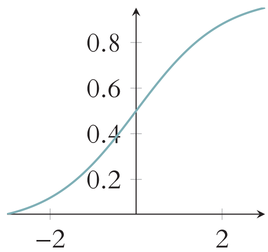


FIGURE 2– La fonction de répartition de X.

12.a. La fonction $t\mapsto t^n f(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc le seul éventuel problème de convergence est au voisinage de $+\infty$.
Or, on a $t^n f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^n\frac{e^t}{e^{2t}} = t^n e^{-t}$.
Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ converge[9], par critère de comparaison pour les fonctions positives, on en déduit que $\boxed{\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt \text{ converge.}}$

Par le théorème de transfert, X admet un moment d'ordre n si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\,dt$ converge.

[9] Et vaut $\Gamma(n+1) = n!$

Mais la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est soit paire, soit impaire, suivant la parité de n.
Dans les deux cas, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\,dt$ converge si et seulement $\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt$ converge, ce qui est bien le cas.
Et donc $\boxed{X \text{ admet un moment d'ordre } n.}$

12.b. La fonction $t \mapsto t^{2p+1} f(t)$ est impaire, et d'intégrale convergente d'après la question précédente, donc

$$m_{2p+1}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1} f(t)\,dt = 0.$$

12.c. La fonction $t \mapsto t^{2p} f(t)$ est paire et d'intégrale convergente, de sorte que

$$m_{2p}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} t^{2p} f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}e^t}{(1+e^t)^2}\,dt.$$

Soit $A > 0$. Alors, en posant $u(t) = t^{2p}$ et $v(t) = -\dfrac{1}{1+e^t}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0, A]$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{t^{2p}e^t}{(1+e^t)^2}\,dt &= \left[-\frac{t^{2p}}{1+e^t}\right]_0^A + 2p\int_0^A \frac{t^{2p-1}}{1+e^t}\,dt\\ &= -\frac{A^{2p}}{1+e^A} + 2p\int_0^A \frac{t^{2p-1}}{1+e^t}\,dt\\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 2pI(2p-1).\end{aligned}$$

On en déduit donc que $m_{2p}(X) = 2\times 2pI(2p-1) = \boxed{4pI(2p-1).}$

Moments Rappelons que si X admet un moment d'ordre p, elle admet des moments d'ordre q pour tout $q \in [\![1, p]\!]$.

13. Puisque X admet un moment d'ordre 2, elle admet une variance et donc une espérance.
Alors $E(X) = m_1(X) = 0$ d'après 12.b.
Par la formule de Huygens, on a donc

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = m_2(X) = 4I(1) = \boxed{\frac{\pi^2}{3}.}$$

14.a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$[Y_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i \leqslant x]$$

de sorte que, par indépendance des X_i,

$$P(Y_n \leqslant x) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leqslant x]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leqslant x) = \boxed{\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^n.}$$

Et donc

$$F_{Z_n}(x) = P(Y_n - \ln(n) \leqslant x) = P(Y_n \leqslant x + \ln(n)) = \frac{1}{(1+e^{-x-\ln(n)})^n} = \boxed{\frac{1}{\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)^n}.}$$

14.b. Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. Alors

$$F_{Z_n}(x) = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)\right).$$

Lorsque $n \to +\infty$, $\dfrac{e^{-x}}{n} \to 0$ et donc

$$\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{n} \Rightarrow -n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\frac{e^{-x}}{n} = -e^{-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -e^{-x}.$$

Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = e^{-e^{-x}}.$$

Soit donc F la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = e^{-e^{-x}}$.
F est évidemment de classe $\mathscr{C}^1$, et elle est croissante sur $\mathbf{R}$ car composée de la fonction $t \mapsto e^{-t}$, qui est décroissante, par elle-même.
De plus, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{t \to 0} e^{-t} = 1$.
Ainsi, F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Puisque F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, cette variable aléatoire est à densité, et une densité en est donnée par $g(x) = F'(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}$.
Soit donc Z une variable aléatoire de densité g. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, c'est-à-dire en tout point de continuité de $F_Z = F$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = F(x) = F_Z(x)$, ce qui, par définition de la convergence en loi, signifie que $\boxed{Z_n \xrightarrow{\mathscr{L}} Z.}$

d'une fonction de répartition. Puis, pour montrer que c'est la fonction de répartition **d'une variable à densité**, il faut, comme d'habitude montrer que F est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points.

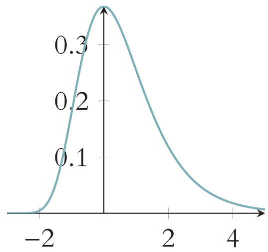


Figure 3– La densité de Z.

EML 2015

Problème 1

Sujet : Étude d'endomorphismes de $\mathbf{R}_4[X]$ **Moyen**

Abordable en première année : ✓ (partie I, sauf 5.c et 5.d) **Intérêt** : ★☆☆

Thèmes du programme abordés : polynômes, algèbre linéaire de base, diagonalisation, produits scalaires, projection orthogonale.

Commentaires : exercice mettant en œuvre un grand nombre de méthodes rencontrées en cours, mais sans but précis.
Peut toutefois être intéressant pour s'entraîner aux calculs.

Dans tout le problème, on confond polynôme et application polynomiale de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
On note, pour tout k de $\mathbf{N}$, $\mathbf{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à k.
On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbf{R}_4[X] : P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W = X(X-4)$.

Partie I : Étude d'endomorphismes

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbf{R}_4[X]$.
   Pour tout polynôme Q de $\mathbf{R}_2[X]$, on note $\phi(Q) = WQ$.
2. Montrer que l'application $\phi : Q \mapsto WQ$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$ sur E.
3. En déduire une base de E et la dimension de E.

Pour tout polynôme Q de $\mathbf{R}_2[X]$, on considère le polynôme $\Delta(Q)$ défini par

$$\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X).$$

Ainsi, par exemple, si $Q = X^2 - 3X + 5$, alors

$$\Delta(Q) = \left((X+1)^2 - 3(X+1) + 5\right) - \left(X^2 - 3X + 5\right) = 2X - 2.$$

4. a. Montrer que l'application Δ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.
   b. Déterminer, pour tout polynôme Q de $\mathbf{R}_2[X]$, le degré de $\Delta(Q)$ en fonction du degré de Q.
   c. Déterminer le noyau et l'image de Δ.
   d. Établir : $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.

   On définit l'endomorphisme f de E suivant : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$, où ϕ^{-1} désigne l'application réciproque de l'application ϕ.
5. a. Montrer : $f \circ f \circ f = 0$.
   b. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.
   c. Démontrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci. Donner une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.
   d. Est-ce que f est diagonalisable ?

Partie II : Étude d'un produit scalaire

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbf{R}_4[X] \times \mathbf{R}_4[X]$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\forall (P_1, P_2) \in \mathbf{R}_4[X] \times \mathbf{R}_4[X],\ \langle P_1, P_2 \rangle = \sum_{k=0}^{4} P_1(k) P_2(k).$$

6. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_4[X]$.
   On munit dorénavant $\mathbf{R}_4[X]$ de ce produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$.
   On considère les trois polynômes suivants :

$$L_1 = (X-2)(X-3),\ L_2 = (X-1)(X-3),\ L_3 = (X-1)(X-2).$$

7. Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
8. a. Exprimer, pour tout polynôme P de $\mathbf{R}_2[X]$, les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) en fonction de $P(1), P(2), P(3)$.

b. Exprimer $\Delta(L_1), \Delta(L_2), \Delta(L_3)$ sur la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbf{R}_2[X]$ et en déduire que la matrice de l'endomorphisme Δ dans la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbf{R}_2[X]$ est $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$.

On note, pour tout i de $\{1,2,3\}$, $M_i = WL_i$.

9. a. Montrer que pour tout i de $\{1,2,3\}$, $M_i(i)$ est non nul.

On note alors, pour tout i de $\{1,2,3\}$, $N_i = \dfrac{1}{M_i(i)} M_i$.

b. Montrer que (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormée du sous-espace vectoriel E de $\mathbf{R}_4[X]$.

10. Déterminer la matrice de l'application linéaire ϕ dans les bases (L_1, L_2, L_3) de $\mathbf{R}_2[X]$ et (N_1, N_2, N_3) de E.

11. Déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base (N_1, N_2, N_3) de E.

12. On note, pour tout polynôme P de $\mathbf{R}_4[X]$, $u(P) = \sum_{i=1}^{3} P(i) N_i$.

a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbf{R}_4[X]$.

b. Montrer : $\forall P \in \mathbf{R}_4[X], \forall j \in \{1,2,3\}, \langle P - u(P), N_j \rangle = 0$.

c. En déduire que u est la projection orthogonale sur E.

d. Déterminer le projeté orthogonal de $Q = X^2(X-2)(X-3)$ sur E.

Problème 2

Sujet : Transformée de Laplace — **Difficile**

Abordable en première année : ✗ — **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : fonctions d'une variable réelle, intégrales impropres (IPP et changement de variable)

Commentaires : problème assez difficile, qui demande de solides bases d'analyse, notamment la capacité à manipuler les quantificateurs dans la définition de limite. La dernière partie semble assez éloignée de l'esprit du programme d'ECS.

Dans tout le problème, on note E l'ensemble des fonctions $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ continues sur $\mathbf{R}^+$ vérifiant :

$$\text{il existe } p \in \mathbf{N} \text{ tel que : } \lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0.$$

On remarquera que l'entier p dépend a priori de la fonction u considérée.

Partie I : Définition de la transformée de Laplace

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbf{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.

2. Soit u un élément de E.
Montrer, pour tout $x \in]0, +\infty[$: $\lim_{t \to +\infty} t^2 u(t) e^{-xt} = 0$.
En déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(t) e^{-xt}\, dt$ est convergente.
Dans toute la suite du problème, pour tout élément u de E, on définit la fonction $L(u)$ sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-xt}\, dt.$$

3. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ et pour tout $(u, v) \in E^2$: $L(\alpha u + v) = \alpha L(u) + L(v)$.

Partie II : Quelques exemples

4. Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$ fixé. On considère, pour tout i de $\{0,1,2\}$ la fonction $v_i : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, v_i(t) = t^i e^{-at}.$$

Pour tout i de $\{0,1,2\}$, montrer que la fonction v_i appartient à E et, en utilisant par exemple des résultats sur la loi exponentielle, calculer, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $L(v_i)(x)$.

5. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On considère la fonction $w_n : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par : $\forall t \in \mathbf{R}_+, w_n(t) = t^n$.
Montrer que la fonction w_n appartient à E et montrer, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $L(w_n)(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Partie III : Propriétés des transformées de Laplace

6. **Limite de $L(u)$ en $+\infty$**
Soit u un élément de E. Justifier qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ et $A, M \in \mathbf{R}_+$ tels que
$$\forall t \in [A; +\infty[,\ |u(t)| \leqslant t^p \text{ et } \forall t \in [0, A], |u(t)| \leqslant M.$$
Établir : $\forall t \in \mathbf{R}_+,\ |u(t)| \leqslant M + t^p$. En déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} L(u)(x) = 0$.

7. **Limite de $L(u)$ en 0**
Soit u un élément de E tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(s)\,ds$ converge.
On note, pour tout t de $\mathbf{R}_+$, $R(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} u(s)\,ds$.
   a. Déterminer la limite en $+\infty$ de R. Montrer que R appartient à E.
   b. Montrer que R est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ et : $\forall t \in \mathbf{R}_+,\ R'(t) = -u(t)$.
   c. En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, L(u)(x) = R(0) - xL(R)(x)$.
   d. Soit $\varepsilon \in]0; +\infty[$. Justifier qu'il existe $B \in [0; +\infty[$ tel que : $\forall t \in [B; +\infty[,\ |R(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[,\ |L(u)(x) - R(0)| \leqslant x \displaystyle\int_0^B |R(t)|\,dt + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   e. Conclure : $\lim\limits_{x \to 0} L(u)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\,dt$.

8. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
Soit $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ telle que $u' \in E$.
   a. Montrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ et $A \in [0; +\infty[$ tels que : $\forall t \in [A : +\infty[, |u(t)| \leqslant |u(A)| + \dfrac{t^{p+1}}{p+1}$.
   b. En déduire que u appartient à E.
   c. Établir : $\forall x \in]0; +\infty[,\ L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x)$.

9. **Dérivée puis dérivée n-ième d'une transformée de Laplace**
Soit u un élément de E. On considère, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, la fonction $u_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par
$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ u_n(t) = t^n u(t).$$
   a. Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, la fonction u_n appartient à E.
   b. Montrer : $\forall a \in \mathbf{R},\ |e^a - 1 - a| \leqslant \dfrac{a^2}{2} e^{|a|}$.
   c. Soient $x \in]0, +\infty[$ et $h \in \mathbf{R}^*$ tel que $|h| \leqslant \frac{x}{2}$.
   Montrer : $\forall t \in [0; +\infty[,\ \left| \dfrac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt} \right| \leqslant |h| \dfrac{t^2}{2} e^{-xt/2}$.
   En déduire : $\left| \dfrac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x) \right| \leqslant \dfrac{|h|}{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 |u(t)| e^{-xt/2}\,dt$.
   d. Montrer que $L(u)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et exprimer $(L(u))'$ à l'aide de $L(u_1)$.
   e. Montrer que $L(u)$ est de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur $]0; +\infty[$ et exprimer, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $(L(u))^{(n)}$ à l'aide de $L(u_n)$.

Partie IV : Application à la résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie, on cherche à déterminer une fonction $u : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$ vérifiant
$$\forall t \in \mathbf{R}^+,\ u''(t) + 5u'(t) + 6u(t) = e^{-1} \text{ et } u(0) = 1 \text{ et } u'(0) = -2.$$

10. On suppose qu'il existe une fonction $u : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^+$, solution du problème et telle que $u'' \in E$.
   a. Montrer que u appartient à E et : $\forall x \in]0; +\infty[,\ L(u'')(x) = -xu(0) - u'(0) + x^2 L(u)(x)$.
   b. En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[,\ (x^2 + 5x + 6)L(u)(x) = \dfrac{1}{x+1} + 3 + x$,
   puis : $\forall x \in]0; +\infty[,\ L(u)(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+3}$.
11. En déduire une fonction $u : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ solution du problème posé.

EML 2015 : Corrigé

Problème 1

Partie I : Étude d'endomorphismes

1. Notons que le polynôme nul est dans E, donc E est non vide.
Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0 \text{ et } (\lambda P + Q)(4) = \lambda P(4) + Q(4) = 0.$$

Donc $\lambda P + Q \in E$ et puisque $E \subset \mathbf{R}_4[X]$ par définition, $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbf{R}_4[X].}$

2. ϕ est une application linéaire car pour $P, Q \in \mathbf{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\phi(\lambda P + Q) = W(\lambda P + Q) = \lambda WP + WQ = \lambda\phi(P) + \phi(Q).$$

Si $P \in \mathbf{R}_2[X]$, alors $\deg \phi(P) = \deg P + \deg W \leqslant 4$ et donc $\phi(P) \in \mathbf{R}_4[X]$. De plus

$$\phi(P)(0) = W(0)P(0) = 0 \text{ et } \phi(P)(4) = W(4)P(4) = 0$$

de sorte que $\phi(P) \in E$. Et donc ϕ est une application linéaire de $\mathbf{R}_2[X]$ dans E.

Si $P \in \operatorname{Ker}(\phi)$, alors $WP = 0$. Or si $x \in]0,4[$, $W(x) \neq 0$, et donc $P(x) = 0$. Ainsi, P possède une infinité de racines et donc $P = 0$. Ceci prouve donc que ϕ est injectif.
Enfin, si $Q \in E$, alors notons $P \in \mathbf{R}[X]$ et $R \in \mathbf{R}_1[X]$ le quotient et le reste de la division euclidienne de Q par W, c'est-à-dire les uniques polynômes tels que $Q = PW + R$.
Alors $0 = Q(0) = P(0)W(0) + R(0) = R(0)$ et $0 = Q(4) = P(4)W(4) + R(4)$, de sorte que R possède deux racines, qui sont 0 et 4.
Puisque R est de degré au plus un, c'est que $R = 0$, et donc $Q = WP = \phi(P)$.
Ainsi, ϕ est surjectif, ce qui achève de prouver que $\boxed{\phi \text{ est un isomorphisme de } \mathbf{R}_2[X] \text{ sur } E.}$

> **Remarque**
> La preuve ci-contre utilise uniquement l'existence de la division euclidienne pour prouver la surjectivité de ϕ (l'injectivité étant prouvée séparément). Si l'on se souvient qu'il y a de plus unicité de cette division euclidienne, alors de manière unique, $Q = WP + R$. On prouve de même que précédemment que $R = 0$, et alors il existe un **unique** polynôme $P \in \mathbf{R}_2[X]$ tel que $Q = WP = \phi(P)$. Donc tout élément de E admet un unique antécédent par ϕ : ϕ est une bijection de $\mathbf{R}_2[X]$ sur E.

3. De la question précédente, on déduit que E est de même dimension que $\mathbf{R}_2[X]$ et donc $\boxed{\dim E = 3.}$
Comme ϕ est un isomorphisme, l'image par ϕ d'une base de $\mathbf{R}_2[X]$ est une base de E, et donc $\boxed{(W, WX, WX^2) \text{ est une base de } E.}$

4.a. Si $Q \in \mathbf{R}_2[X]$, alors $\deg Q(X+1) = \deg Q$ et donc $\deg \Delta(Q) \leqslant \deg Q$, de sorte que $\Delta(Q) \in \mathbf{R}_2[X]$. Si $P, Q \in \mathbf{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\Delta(\lambda P+Q) = \lambda P(X+1)+Q(X+1)-(\lambda P(X)+Q(X)) = \lambda(P(X+1)-P(X))+(Q(X+1)-Q(X)) = \lambda\Delta(P)+\Delta(Q).$$

Donc Δ est linéaire et donc $\boxed{\text{est un endomorphisme de } \mathbf{R}_2[X].}$

4.b. Soit $Q = aX^2 + bX + c \in \mathbf{R}_2[X]$. Alors

$$\Delta(Q) = a(X+1)^2+b(X+1)+c-(aX^2+bX+c) = a(X^2+2X+1)+bX+b+c-aX^2-bX-c = 2aX+(a+b).$$

Si $\deg Q = 2 \Leftrightarrow a \neq 0$, alors $\deg \Delta(Q) = 1$.
Si $\deg Q = 1 \Leftrightarrow a = 0, b \neq 0$, alors $\deg \Delta(Q) = 0$.
Si $\deg Q \leqslant 0 \Leftrightarrow a = b = 0$, alors $\Delta(Q) = 0 \Leftrightarrow \deg \Delta(Q) = -\infty$.

> **Degré**
> Rappelons qu'un polynôme constant est de degré nul, sauf le polynôme nul dont le degré est $-\infty$.

4.c. D'après la question précédente, on a $\Delta(Q) = 0 \Leftrightarrow \deg Q \leqslant 0$. Donc $\boxed{\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbf{R}_0[X]}$, l'ensemble des polynômes constants.
De plus, la question précédente prouve que $\operatorname{Im}(\Delta) \subset \mathbf{R}_1[X]$. Mais par le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Im}(\Delta) = \dim \mathbf{R}_2[X] - \dim \operatorname{Ker}(\Delta) = 3 - 1 = 2 = \dim \mathbf{R}_1[X].$$

On en déduit que $\boxed{\operatorname{Im}(\Delta) = \mathbf{R}_1[X].}$

> **Alternative**
> Pour déterminer le noyau, on peut aussi écrire
> $$P = aX^2 + bX + c$$
> et chercher à quelle(s) condition(s) on a $\Delta(P) = 0$.

4.d. Nous avons prouvé en 4.b que $\deg \Delta(Q) \leqslant \deg Q - 1$.
Donc pour tout $Q \in \mathbf{R}_2[X]$, $\deg(\Delta \circ \Delta \circ \Delta)(Q) \leqslant \deg Q - 3 \leqslant -1$.
Et donc pour tout $Q \in \mathbf{R}_2[X]$, $(\Delta\circ\Delta\circ\Delta)(Q) = 0$. Ceci prouve bien que $\boxed{\text{l'endomorphisme } \Delta^3 \text{ est nul.}}$

5.a. On a $f^3 = (\phi\circ\Delta\circ\phi^{-1})^3 = \phi\circ\Delta^3\circ\phi^{-1} = \boxed{0.}$

5.b. ϕ est injectif, donc pour $P\in E$,

$$f(P)=0 \Leftrightarrow \Delta\circ\phi^{-1}(P)=0 \Leftrightarrow \phi^{-1}(P)\in \mathbf{R}_0[X] \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbf{R} : P=\lambda W.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)=\{\lambda W,\lambda\in\mathbf{R}\}$. $\boxed{\text{Une base de } f \text{ est alors formée du seul vecteur } W.}$
Par le théorème du rang, on a alors $\dim \mathrm{Im}(f)=2$.
Or, on a $W = W\Delta(X) = (\phi\circ\Delta\circ\phi^{-1})(WX) = f(WX)\in\mathrm{Im}(f)$ et de même

$$2WX = W\Delta(X^2-X) = (\phi\circ\Delta\circ\phi^{-1})(W(X^2-X)) = f(W(X^2-X))\in\mathrm{Im}(f).$$

Or, $(W,2WX)$ est une famille libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. Elle est de cardinal $2=\dim\mathrm{Im}(f)$: $\boxed{\text{c'est une base de } \mathrm{Im}(f).}$

Détails
On a utilisé ici

$$\Delta(X)=X+1-X=1$$

ainsi que le fait qu'appliquer ϕ revient à multiplier par W, donc appliquer $\phi-1$ revient à diviser par W.

5.c. Nous avons déjà prouvé que $\dim\mathrm{Ker} f\geqslant 1$, et donc 0 est valeur propre de f.
Comme à la question 5.a nous avons prouvé que X^3 est un polynôme annulateur de f, toutes les valeurs propres de f sont des racines de X^3. Or la seule racine de X^3 est 0, donc f admet une unique valeur propre qui est 0.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est alors $E_0(f)=\mathrm{Ker}(f)$, qui est de dimension 1, et dont nous avons déjà déterminé une base, qui est W.

Danger !
Dire que X^3 est annulateur suffit à prouver qu'il y a **au plus** une valeur propre. Pour prouver qu'il y en a bien une, il ne faut pas oublier de montrer que 0 est bien valeur propre. Il suffit ici de remarquer que f n'est pas invective.

5.d. On a $\dim E_0(f)<\dim E$, et 0 est la seule valeur propre de f, donc la somme des dimensions des sous-espaces propres n'est pas égale à $\dim E$: $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Partie II : Étude d'un produit scalaire

6. Soient $P_1,P_2,Q\in\mathbf{R}_4[X]$ et $\lambda\in\mathbf{R}$. Alors

$$\langle\lambda P_1+P_2,Q\rangle = \sum_{k=0}^{4}(\lambda P_1+P_2)(k)Q(k) = \lambda\sum_{k=0}^{4}P_1(k)Q(k)+\sum_{k=0}^{4}P_2(k)Q(k) = \lambda\langle P_1,Q\rangle+\langle P_2,Q\rangle.$$

Ainsi, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire par rapport à la première variable.

Pour $P_1,P_2\in\mathbf{R}_4[X]$, on a

$$\langle P_1,P_2\rangle = \sum_{k=0}^{4}P_1(k)P_2(k) = \sum_{k=0}^{4}P_2(k)P_1(k) = \langle P_2,P_1\rangle.$$

Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique, et donc[1] bilinéaire symétrique.

[1] Car on sait déjà qu'elle est linéaire à gauche.

Pour $P\in\mathbf{R}_4[X]$, on a

$$\langle P,P\rangle = \sum_{k=0}^{4}P(k)^2\geqslant 0.$$

Et si $\langle P,P\rangle=0$, alors c'est que

$$\forall k\in[\![0,4]\!], P(k)^2=0\Leftrightarrow P(k)=0.$$

Rédaction
Ne pas oublier de préciser pour quelles valeurs de k on a $P(k)=0$.

Alors P possède 5 racines distinctes et est de degré au plus 4, donc $P=0$.
Ainsi, on a bien $\langle P,P\rangle=0\Leftrightarrow P=0$, ce qui achève de prouver que $\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbf{R}_4[X].}$

7. Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbf{R}$ tels que $\lambda_1L_1+\lambda_2L_2+\lambda_3L_3=0$.
Alors en évaluant en $X=1$, il vient

$$0=\lambda_1L_1(1)+\lambda_2L_2(1)+\lambda_3L_3(1)=2\lambda_1.$$

Et donc $\lambda_1=0$. De même en évaluant en $X=2$, il vient

$$0=\lambda_2L_2(2)+\lambda_3L_3(2)=-3\lambda_2.$$

Donc $\lambda_2=0$, et puisque $L_3\neq 0$, nécessairement, $\lambda_3=0$.
Ainsi, (L_1,L_2,L_3) est une famille libre de $\mathbf{R}_2[X]$. Elle est de cardinal $3=\dim\mathbf{R}_2[X]$, et donc c'est $\boxed{\text{une base de } \mathbf{R}_2[X].}$

Remarque
La plupart du temps, les bases de $\mathbf{R}_n[X]$ que l'on manipule sont à degré échelonné, ce n'est pas le cas de cette famille !

8.a. Soit $P \in \mathbf{R}_2[X]$, et soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3), c'est-à-dire les réels tels que

$$P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3.$$

En évaluant en $X = 1$, il vient $P(1) = \lambda_1 L_1(1) = 2\lambda_1$.
De même, en évaluant en $X = 2$ puis $X = 3$, il vient $P(2) = -\lambda_2$ et $P(3) = 2\lambda_3$. Donc on a

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{P(1)}{2}, \lambda_2 = -P(2), \lambda_3 = \frac{P(3)}{2}.}$$

8.b. On a, en utilisant la définition de Δ puis le résultat de la question 8.a afin de décomposer dans la base (L_1, L_2, L_3),

$$\Delta(L_1) = L_1(X+1) - L_1(X) = (X-1)(X-2) - (X-2)(X-3) = 2(X-2) = -L_1 + 0L_2 + L_3$$

$$\Delta(L_2) = L_2(X+1) - L_2(X) = X(X-2) - (X-1)(X-3) = -\frac{1}{2}L_1 - L_2 + \frac{3}{2}L_3$$

$$\Delta(L_3) = L_3(X+1) - L_3(X) = X(X-1) - (X-1)(X-2) = -2L_2 + 2L_3$$

Ainsi, la matrice de Δ dans la base (L_1, L_2, L_3) est

$$\boxed{M = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \Delta(L_1) & \Delta(L_2) & \Delta(L_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \end{array}.}$$

Matrice
Pour écrire M, on ne se contente pas de calculer les images de L_1, L_2, L_3, il faut ensuite les décomposer dans la base (L_1, L_2, L_3). C'est ici qu'on utilise la question 8.a.

9.a. Les racines de W sont 0 et 4, et donc pour tout $i \in \{1, 2, 3\}, W(i) \neq 0$.
De plus, on remarque que i n'est pas racine de L_i, de sorte que $L_i(i) \neq 0$.
Ainsi, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\boxed{M_i(i) = W(i)L_i(i) \neq 0.}$

9.b. Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. Alors

$$\|N_i\|^2 = \langle N_i, N_i\rangle = \frac{1}{M_i(i)^2}\langle M_i, M_i\rangle = \frac{1}{M_i(i)^2}\sum_{k=0}^{4} M_i(k)^2.$$

Mais $M_i(0) = M_i(4) = 0$, et pour $k \in \{1, 2, 3\}, k \neq i$, on a $M_i(k) = 0$ car $L_i(k) = 0$.
Donc $\|N_i\|^2 = \frac{1}{M_i(i)^2}M_i(i)^2 = 1$, et donc $\boxed{\|N_i\| = 1.}$
Pour $j \neq i$, on a

$$\langle N_i, N_j\rangle = \sum_{k=0}^{4} N_i(k)N_j(k) = N_i(i)N_j(i).$$

Mais $i \neq j$, de sorte que $N_j(i) = 0$. Ainsi, $\langle N_i, N_j\rangle = 0$.

Nous avons bien prouvé que pour tout $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $\langle N_i, N_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Donc (N_1, N_2, N_3) est une famille orthonormée de E. En particulier, elle est libre[2], et étant de cardinal 3, $\boxed{\text{c'est une base de orthonormée de } E.}$

[2] Car toute famille orthogonale est libre.

10. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on a

$$\phi(L_i) = WL_i = M_i = M_i(i)N_i.$$

Or, on a $M_1(1) = -6, M_2(2) = 4, M_3(3) = -6$, de sorte que la matrice de ϕ dans les bases (L_1, L_2, L_3) et (N_1, N_2, N_3) est

$$\boxed{N = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.}$$

11. Notons $\mathscr{B} = (L_1, L_2, L_3)$ et $\mathscr{C} = (N_1, N_2, N_3)$, de sorte que

$$\text{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \text{Mat}_{\mathscr{C}}(\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}) = \text{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\phi) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\Delta) \times \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\phi^{-1}) = N \times M \times N^{-1}.$$

Soit encore

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \\ -6 & -9 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 3/4 & 0 \\ 0 & -1 & 4/3 \\ 1 & -9/4 & 2 \end{pmatrix}.}$$

12.a. Puisque $N_1, N_2, N_3 \in E \subset \mathbf{R}_4[X]$, il est clair[3] que u est à valeurs dans $\mathbf{R}_4[X]$.
Si $P, Q \in \mathbf{R}_4[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors

$$u(\lambda P + Q) = \sum_{i=1}^{3}(\lambda P + Q)(i)N_i = \lambda \sum_{i=1}^{3} P(i)N_i + \sum_{i=1}^{3} Q(i)N_i = \lambda u(P) + u(Q).$$

Donc u est linéaire : $\boxed{\text{c'est un endomorphisme de } \mathbf{R}_4[X].}$

[3] Car $u(P)$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{R}_4[X]$.

12.b. Soit $P \in \mathbf{R}_4[X]$ et $j \in \{1, 2, 3\}$. Alors

$$\langle P - u(P), N_j\rangle = \langle P, N_j\rangle - \langle u(P), N_j\rangle = \sum_{k=0}^{4} P(k)N_j(k) - \sum_{i=1}^{3} P(i)\langle N_i, N_j\rangle.$$

Mais pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$, $N_j(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases}$, et $\langle N_i, N_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} P(k)N_j(k) = P(j)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} P(i)\langle N_i, N_j\rangle = P(j)$. Ainsi, on a bien

$$\boxed{\langle P - u(P), N_j\rangle = P(j) - P(j) = 0.}$$

12.c. Notons que $u(N_i) = N_i(i)N_i = N_i$, et donc si $P \in E$, alors $u(P) = P$.
La question précédente prouve que pour tout $P \in \mathbf{R}_4[X]$,$P - u(P)$ est orthogonal à tous les éléments d'une base de E et donc $P - u(P) \in E^{\perp}$, et il est évident que $u(P) \in \mathrm{Vect}(N_1, N_2, N_3) = E$. Or, $P = \underbrace{u(P)}_{\in E} + \underbrace{(P - u(P))}_{\in E^{\perp}}$.
Donc par unicité de la décomposition de P dans la somme directe $\mathbf{R}_4[X] = E \oplus E^{\perp}$, $u(P)$ est la composante suivant E de P, et donc $\boxed{u \text{ est la projection orthogonale sur } E.}$

Remarque

Notons que $\langle P, N_i\rangle N_i = P(i)$, de sorte que

$$u(P) = \sum_{i=1}^{3}\langle P, N_i\rangle N_i$$

avec (N_1, N_2, N_3) une base orthonormée de E. Nous reconnaissons alors une formule donnée dans le cours pour la projection orthogonale sur E. Toutefois, l'énoncé demandait de «déduire» ce résultat de la question précédente, donc essayons de l'utiliser...

12.d. Il s'agit d'utiliser le résultat de la question précédente : le projeté orthogonal de Q sur E est

$$u(Q) = \sum_{i=1}^{3} Q(i)N_i = Q(1)N_1 = \boxed{2N_1.}$$

PROBLÈME 2

Partie I : Définition de la transformée de Laplace

1. Soient $u, v \in E$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Par définition de E, il existe $p, q \in \mathbf{N}$ tels que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t^p} = \lim_{t\to+\infty} \frac{v(t)}{t^q} = 0.$$

Soit alors $r = p + q \in \mathbf{N}$. On a alors

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\lambda u + v}{t^r} = \lim_{t\to+\infty} \lambda\frac{1}{t^q}\frac{u(t)}{t^p} + \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^p}\frac{v(t)}{t^q} = 0.$$

Remarque

N'importe quel r à la fois plus grand que p et q faisait l'affaire. On aurait pu par exemple prendre $r = \max(p, q)$.

De plus, $\lambda u + v$ est continue, donc $\lambda u + v \in E$.
Enfin, E contient la fonction nulle (pour laquelle on peut prendre par exemple $p = 0$), et donc est non vide.
$\boxed{\text{Ainsi, } E \text{ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues sur } \mathbf{R}^+.}$

2. Soit $u \in E$, et soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{u(t)}{t^p} = 0$. Alors

$$t^2 u(t)e^{-xt} = t^{p+2}e^{-xt}\frac{u(t)}{t^p}.$$

Par croissance comparée, $t^{p+2}e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et par hypothèse $\dfrac{u(t)}{t^p} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} t^2u(t)e^{-xt} = 0.}$$

On en déduit que $u(t)e^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)e^{-xt}\,dt$.
Enfin, $t \mapsto u(t)e^{-xt}$ est continue sur $\mathbf{R}^+$, de sorte qu'il n'y a pas de problème de convergence en 0. Ainsi

$$\boxed{\int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt}\,dt \text{ converge.}}$$

3. Soient $u, v \in E$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors

$$L(\alpha u+v) = \int_0^{+\infty} (\alpha u(t)+v(t))e^{-xt}\,dt = \alpha\int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt}\,dt + \int_0^{+\infty} v(t)e^{-xt}\,dt = \boxed{\alpha L(u) + L(v).}$$

Partie II : Quelques exemples

4. Pour tout $i \in \{0,1,2\}$, v_i est continue sur $\mathbf{R}^+$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} v_i(t) = 0$ par croissance comparée.
Donc on a bien $v_i \in E$ (et on peut prendre $p = 0$).
Soit alors $x > 0$ et soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $a + x > 0$.
Alors une densité de X est $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ (a+x)e^{-(a+x)t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$ et nous savons que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1, \int_0^{+\infty} tf(t)\,dt = E(X) = \frac{1}{a+x}, \int_0^{+\infty} t^2f(t)\,dt = E(X^2) = V(X)+E(X)^2 = \frac{2}{(a+x)^2}.$$

Ainsi, il vient

$$L(v_0)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x+a}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \boxed{\frac{1}{a+x}}$$

$$L(v_1)(x) = \int_0^{+\infty} te^{-xt}\,dt = \frac{1}{x+a}\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt = \boxed{\frac{1}{(a+x)^2}}$$

$$L(v_2)(x) = \int_0^{+\infty} t^2e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x+a}\int_0^{+\infty} t^2f(t)\,dt = \boxed{\frac{2}{(a+x)^3}}$$

Méthode
Les variables à densité nous fournissent la valeur d'un certain nombre d'intégrales, que l'on a calculées en cours. On peut s'épargner un certain nombre de calculs d'intégrales si on reconnaît qu'une loi usuelle se cache derrière.

5. La fonction w_n est évidemment continue car polynomiale, et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{w_n(t)}{t^{n+1}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t} = 0$.
Ainsi, $\boxed{w_n \in E.}$
On a alors

$$L(w_n)(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\,dt.$$

L'application $t \mapsto xt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et réalise une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}^+$ sur lui-même, de sorte que nous pouvons procéder au changement de variable $u = xt$. On a alors

$$L(w_n)(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{x}\right)^n e^{-u}\frac{du}{x} = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^{+\infty} u^ne^{-u}\,du = \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}} = \boxed{\frac{n!}{x^{n+1}}.}$$

Chgt de variable
Ce changement de variable est affine, et c'est donc à vous d'y penser tout seul, l'énoncé ne dit rien à ce sujet.
L'idée est de remarquer que l'intégrale de départ ressemble beaucoup à la fonction Γ, à l'exception du xt dans l'exponentielle. Comment se ramener alors à Γ ? En posant $u = xt$!

Partie III : Propriétés des transformées de Laplace

6. **Limite de $L(u)$ en $+\infty$**

Par définition de E, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $\lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0$.
Rappelons que par définition d'une limite, cela signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : t \geqslant A \Rightarrow \left|\frac{u(t)}{t^p}\right| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, si $\varepsilon = 1$, alors il existe $A > 0$ tel que

$$\forall t \in [A;+\infty[, \left|\frac{u(t)}{t^p}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow \forall t \in [A;+\infty[, |u(t)| \leqslant |t^p| = t^p.$$

La fonction u étant continue sur le segment $[0, A]$, elle y est bornée, et donc il existe $M \geqslant 0$ tel que

$$\boxed{\forall t \in [0, A], |u(t)| \leqslant M.}$$

Ainsi, si $t \in [0, A]$, $|u(t)| \leqslant M \leqslant M + t^p$ et si $t \geqslant A, |u(t)| \leqslant t^p \leqslant M + t^p$. Alors

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}_+, |u(t)| \leqslant M + t^p.}$$

Rappel
Une fonction continue sur un **segment** est bornée et atteint ses bornes (autrement dit elle admet un maximum et un minimum). Ce résultat est faux sur un intervalle ouvert.

On en déduit que

$$\forall x > 0, |L(u)(x)| = \left|\int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt}\,dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |u(t)|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} Me^{-xt}\,dt + \int_0^{+\infty} t^p e^{-xt}\,dt.$$

Mais d'après la question 5, on a

$$M\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{M}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

C'est le résultat de la question 5 avec $n = 0$.

et de même,

$$\int_0^{+\infty} t^p e^{-xt}\,dt = \frac{p!}{x^{p+1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty} |L(u)(x)| = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} L(u)(x) = 0.}$$

7. **Limite de $L(u)$ en 0**

7.a. $R(t)$ est le reste d'une intégrale convergente, c'est alors du cours que $\boxed{\lim_{t\to+\infty} R(t) = 0.}$

De plus, pour $x \geqslant 0$, on a

$$R(x) = \int_x^{+\infty} u(t)\,dt = \int_0^{+\infty} u(t)\,dt - \int_0^x u(t)\,dt.$$

Or, $\int_0^{+\infty} u(t)\,dt$ est une constante, et la fonction $x \mapsto \int_0^x u(t)\,dt$ est continue sur $\mathbf{R}_+$, d'après le théorème fondamental de l'analyse. Par conséquent R est continue sur $\mathbf{R}^+$.
Puisqu'elle est de limite nulle en $+\infty$, $\boxed{\text{elle est[4] dans } E.}$

[4] On peut prendre $p = 0$ dans la définition.

7.b. La fonction $x \mapsto \int_0^x u(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée égale à u. Et donc d'après le calcul effectué à la question précédente, R est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}^+, R'(t) = -u(t).}$$

7.c. Soit $x > 0$, et soit $A > 0$. Posons $v(t) = e^{-xt}$ et $w(t) = -R(t)$. Alors v et w sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$, et nous pouvons procédons à une intégration par parties sur le segment $[0, A]$:

$$\int_0^A u(t)e^{-xt}\,dt = \left[-R(t)e^{-xt}\right]_0^A - \int_0^A xe^{-xt}R(t)\,dt = R(0) - R(A)e^{-xA} - x\int_0^A R(t)e^{-xt}\,dt.$$

En passant à la limite lorsque $A \to +\infty$, il vient

$$L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt}\,dt = R(0) - x\int_0^{+\infty} R(t)e^{-xt}\,dt = \boxed{R(0) - xL(R)(x).}$$

7.d. Comme à la question 6, il s'agit de la définition de $\lim_{t\to+\infty} R(t) = 0$: il existe $B > 0$ tel que

$$\boxed{\forall t \in [B, +\infty[, |R(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.}$$

On en déduit que

$$\forall x > 0,\ |L(u)(x) - R(0)| = |xL(R)(x)| \leqslant x\int_0^{+\infty} |R(t)e^{-xt}|\,dt \leqslant x\left(\int_0^B |R(t)|e^{-xt}\,dt + \int_B^{+\infty} |R(t)|e^{-xt}\,dt\right).$$

Or, pour tout $t \in [0, B]$, on a $0 \leqslant e^{-xt} \leqslant 1$, de sorte que $\int_0^B |R(t)|e^{-xt}\,dt \leqslant \int_0^B |R(t)|\,dt$.
Et pour $t \geqslant B$, $|R(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et donc

$$\int_B^{+\infty} |R(t)|e^{-xt}\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_B^{+\infty} e^{-xt}\,dt.$$

Mais pour $A > B$, on a

$$\int_B^A e^{-xt}\,dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x}\right]_B^A = \frac{e^{-xB}}{x} - \frac{e^{-xA}}{x} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-xB}}{x}.$$

On en déduit que

$$|L(u)(x) - R(0)| \leqslant x\int_0^B |R(t)|\,dt + x\frac{\varepsilon}{2}\frac{e^{-xb}}{x} \leqslant \boxed{x\int_0^B |R(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2}.}$$

> **Majorations**
> L'erreur à ne pas faire ici serait de majorer comme précédemment e^{-xt} par 1. En effet, on aurait alors
> $$|B(t)e^{-xt}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
> mais l'intégrale de cette dernière constante sur $[B; +\infty[$ diverge !

7.e. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et soit B comme dans la question précédente (notons qu'un tel B dépend du choix de ε). Alors pour $0 \leqslant x < \dfrac{\varepsilon}{2\int_0^B |R(t)|\,dt}$, on a

$$|L(u)(x) - R(0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\int_0^B |R(t)|\,dt}\int_0^B |R(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A\left(= \dfrac{\varepsilon}{2\displaystyle\int_0^B |R(t)|\,dt}\right)$ tel que pour $0 \leqslant x < A$,

$$|L(u)(x) - R(0)| \leqslant \varepsilon.$$

Nous reconnaissons là la définition de

$$\boxed{\lim_{x\to 0} L(u)(x) = R(0) = \int_0^{+\infty} u(t)\,dt.}$$

> **Méthode**
> On sait que, par définition d'une limite, on veut arriver à : pour x «suffisamment petit»,
> $$|L(u)(x) - R(0)| \leqslant \varepsilon.$$
> Pour préciser ce que veut dire suffisamment petit, on fait le calcul à l'envers (au brouillon), et on se rend compte qu'il faut $x\int_0^B |R(t)|\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui implique
> $$x \leqslant \frac{\varepsilon}{2\int_0^B |R(t)|\,dt}.$$

8. Transformée de Laplace d'une dérivée

8.a. Soient, comme à la question 6, $A > 0$ et $p \in \mathbf{N}$ tels que pour $x \geqslant A$, $|u'(x)| \leqslant x^p$.
Alors pour $t \geqslant A$, on a $u(t) = u(A) + \int_A^t u'(x)dx$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
|u(t)| &= \left|u(A) + \int_A^t u'(x)\,dx\right| \\
&\leqslant |u(A)| + \left|\int_A^t u'(x)\,dx\right| \\
&\leqslant |u(A)| + \int_A^t x^p\,dx \\
&\leqslant |u(A)| + \frac{1}{p+1}\left(t^{p+1} - A^{p+1}\right) \\
&\leqslant \boxed{|u(A)| + \frac{t^{p+1}}{p+1}.}
\end{aligned}$$

> **Danger !**
> Attention aux noms des variables. La variable d'intégration doit être muette, et on ne peut pas prendre comme variable d'intégration la même variable que la borne de l'intégrale. Il n'est donc pas question d'écrire
> $$\int_0^t u'(t)\,dt.$$

8.b. En conservant les notations de la question précédente, pour $t \geqslant A$, on a

$$\left|\frac{u(t)}{t^{p+2}}\right| \leqslant \frac{|u(A)|}{t^{p+2}} + \frac{1}{p+1}\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, la fonction u est continue par hypothèse, donc $\boxed{u \text{ appartient à } E.}$

8.c. Soit $A > 0$. Procédons alors à une intégration par parties sur le segment $[0, A]$:

$$\int_0^A u'(t)e^{-xt}\,dt = \left[u(t)e^{-xt}\right]_0^A + x\int_0^A u(t)e^{-xt}\,dt = u(A)e^{-xA} - u(0) + x\int_0^A u(t)e^{-xt}\,dt.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans les deux membres de l'égalité précédente, il vient

$$\boxed{L(u')(x) = \int_0^{+\infty} u'(t)e^{-xt}\,dt = -u(0) + x\int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt}\,dt = -u(0) + xL(u)(x).}$$

9. Dérivée puis dérivée n-ième d'une transformée de Laplace

9.a. Puisque $u \in E$, il existe un entier p tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0$.

Mais alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{u_n(t)}{t^{n+p}} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0$.

Comme de plus u est continue, il en est de même de u_n comme produit de fonctions continues. Et donc $\boxed{u_n \in E}$.

9.b. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction $f : x \mapsto e^x$.

• Si $a \geqslant 0$, alors sur le segment $[0, a]$, f'' est majorée par e^a et donc

$$|e^a - 1 - a| = |f(a) - f(0) - af'(0)| \leqslant \frac{a^2}{2}e^a = \frac{a^2}{2}e^{|a|}.$$

• Si $a < 0$, alors sur le segment $[a, 0]$, f'' est majorée par $1 \leqslant e^{|a|}$, de sorte que

$$|e^a - 1 - a| = |f(a) - f(0) - af'(0)| \leqslant \frac{a^2}{2}e^{|a|}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall a \in \mathbf{R}, |e^a - 1 - a| \leqslant \frac{a^2}{2}e^{|a|}.}$$

9.c. Pour $t > 0$, appliquons l'inégalité précédente à $a = -th$. Alors il vient

$$\forall t > 0, |e^{-th} - 1 + th| \leqslant \frac{t^2h^2}{2}e^{th}.$$

En multipliant cette inégalité par $e^{-xt} > 0$, il vient

$$\forall t > 0, |e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + the^{-xt}| \leqslant \frac{t^2h^2}{2}e^{(h-x)t} \leqslant \frac{t^2h^2}{2}e^{-xt/2}.$$

Enfin, en divisant par $|h|$, on obtient

$$\forall t > 0, \left|\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt}\right| \leqslant \frac{h^2}{|h|}\frac{t^2}{2}e^{-xt/2} = |h|\frac{t^2}{2}e^{-x/2}.$$

Multiplions cette inégalité par $|u(t)|$, de sorte que

$$\forall t > 0, \left|\frac{u(t)e^{-(x+h)t} - u(t)e^{-xt}}{h} + tu(t)e^{-xt}\right| \leqslant |h|\frac{t^2}{2}|u(t)|e^{-xt/2}.$$

Par croissance de l'intégrale, il vient alors

$$\left|\frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x)\right| = \left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{u(t)e^{-(x+h)t} - u(t)e^{-xt}}{h} + tu(t)e^{-xt}\right)dt\right|$$

Détails
On sait $|h| \leqslant \frac{x}{2}$. Donc en particulier, $h \leqslant \frac{x}{2}$.
Il vient alors

$$h - x \leqslant \frac{x}{2} - x = -\frac{x}{2}$$

puis en multipliant par $t \geqslant 0$,

$$(h-x)t \leqslant -t\frac{x}{2}.$$

Valeur absolue
Pour tout réel x, on a

$$x^2 = |x|^2.$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} \left| \frac{u(t)e^{-(x+h)t} - u(t)e^{-xt}}{h} + tu(t)e^{-xt} \right| dt$$
$$\leqslant \int_0^{+\infty} |h| \frac{t^2}{2} |u(t)| e^{-xt/2}\, dt$$
$$\leqslant \boxed{\frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |u(t)| e^{-xt/2}\, dt.}$$

9.d. Soit $x \in \mathbf{R}^+$ fixé. Alors lorsque $h \to 0$, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |u(t)| e^{-xt/2} dt = 0.$$

Et donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} = -L(u_1)(x).$$

Ceci signifie que L est dérivable en x et que

$$L'(u)(x) = -L(u_1)(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on en déduit que $\boxed{L(u) \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}_+^* \text{ et que } L(u)' = -L(u_1).}$

Dérivée

Comme souvent dans ce genre de questions, si l'on veut prouver qu'une fonction est dérivable et qu'il ne s'agit pas d'une composée de fonctions usuelles, il faudra revenir à la définition de la dérivabilité : le taux d'accroissement admet une limite finie.

9.e. Notons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $tu_n(t) = u_{n+1}(t)$.
Prouvons alors par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $L(u)$ est n-fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et que $L(u)^{(n)} = (-1)^n L(u_n)$.
Pour $n = 1$, le résultat vient d'être démontré.
Supposons donc que $L(u)$ est n-fois dérivable, et que $L(u)^{(n)} = (-1)^n L(u_n)$.
Alors en appliquant le résultat de la question précédente, à la fonction u_n, $L(u_n)$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, de dérivée égale à $-L(u_{n+1})$. Et donc $L(u)$ est $(n+1)$-fois dérivable, et

$$L(u)^{(n+1)} = \left(L(u)^{(n)}\right)' = (-1)^{n+1} L(u_{n+1}).$$

Ainsi, par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $L(u)$ est n fois dérivable et $L(u)^{(n)} = (-1)^n L(u_n)$.
En particulier, $L(u)$ est indéfiniment dérivable : $\boxed{\text{elle est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbf{R}_+^*.}$

Partie IV : Application à la résolution d'une équation fonctionnelle

10.a. Si $u'' \in E$, alors d'après la question 8.c, on a

$$\forall x \in]0, +\infty[, L(u'')(x) = -u'(0) + xL(u')(x).$$

Et comme nous avons prouvé en 8.b que $u' \in E$, nous pouvons de nouveau appliquer le résultat de 8.c à u' :

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ L(u'')(x) = -u'(0) + x(-u(0) - xL(u)(x)) = -u'(0) - xu(0) + x^2 L(u)(x).}$$

10.b. Rappelons que si v_0 désigne la fonction $t \mapsto e^{-t}$, nous avons prouvé à la question 4 que $L(v_0)(x) = \frac{1}{x+1}$.
Ainsi, si u est une solution du problème, alors par linéarité de L, on a

$$\forall x > 0, L(u'')(x) + 5L(u')(x) + 6L(u)(x) = L(v_0)(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Et en utilisant le résultat de la question précédente ainsi que la connaissance de $u(0)$ et $u'(0)$, il vient

$$\forall x > 0, x^2 L(u)(x) + 2 - x + 5(-1 + xL(u)(x)) + 6L(u)(x) = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \boxed{(x^2 + 5x + 6)L(u)(x) = \frac{1}{x+1} + 3 + x.}$$

Remarquons que $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$, qui ne s'annule pas sur $\mathbf{R}^+$. Ainsi, en divisant l'égalité précédente par $x^2 + 5x + 6$, il vient

$$\forall x > 0, L(u)(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{1}{x+2} = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{x+2}{(x+1)(x+3)}.$$

De même, on a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{2}\frac{2(x+2)}{(x+1)(x+3)}=\frac{x+2}{(x+1)(x+3)}.$$

Et donc nous avons bien

$$\boxed{\forall x>0, L(u)(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+3}.}$$

11. Il s'agit là de reconnaître une fonction dont la transformée de Laplace serait égale à $\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+3}$.
Mais d'après la question 4, nous savons que si $u : t \mapsto \frac{1}{2}\left(e^{-t}+e^{-3t}\right)$, alors

$$\forall x>0, L(u)(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}\right).$$

Ceci ne suffit certainement pas à garantir qu'il s'agit bien d'une solution au problème posé, mais il semble que ce soit un bon candidat. Vérifions que u vérifie bien les conditions souhaitées :

$$\forall t>0, u'(t)=\frac{1}{2}\left(-e^{-t}-3e^{-3t}\right) \text{ et } u''(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}+9e^{-3t}\right)$$

de sorte que

$$\forall t>0, u''(t)+5u'(t)+6u(t)=e^{-t}.$$

De plus, on a $u(0)=1$ et $u'(0)=-2$, de sorte que $\boxed{u \text{ est bien une solution du problème posé.}}$

> **Remarque**
> Rien ne nous permet de garantir que u soit l'unique solution du problème posé, bien que ce soit le cas.

EXTRAITS COMMENTÉS DU RAPPORT DU JURY

Des règles élémentaires de rédaction et de présentation doivent être respectées. On doit éviter les abréviations abusives. Rappelons qu'il est impératif de numéroter les questions, de mettre en évidence les résultats, par exemple en les encadrant proprement, de séparer nettement les questions et de conclure clairement à la fin de chaque question. De plus, tous les calculs doivent figurer sur la copie.

✎ Une copie mal présentée et/ou mal rédigée n'incitera pas le correcteur à aller chercher les résultats ou à vérifier les détails s'ils ne sont pas mis en valeur. Les candidats sont également évalués sur leur aptitude à tenir des raisonnements clairs, et il est impératif de montrer qu'on possède une bonne compréhension de ce que l'on est en train d'écrire.
Notons particulièrement la remarque concernant les abréviations : elles sont à proscrire car ne sont probablement pas universelles, et une abréviation claire pour vous car vous l'utilisez régulièrement ne l'est peut-être pas pour le correcteur.

Problème 1

2 — La définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels est trop souvent inconnue. Il y a quelquefois oublie de la linéarité ou oubli de l'étude de l'ensemble d'arrivée. Le plus souvent, l'argumentation est défaillante en ce qui concerne la surjectivité, les candidat(e)s n'ayant pas perçu que les ensembles de départ et d'arrivée de ϕ ne sont pas les mêmes.

✎ La question était difficile, mais les oublis concernant la surjectivité sont révélateurs d'une connaissance partielle du cours : une application linéaire injective est un isomorphisme lorsque **l'espace de départ et l'espace d'arrivée ont même dimension**, en particulier s'ils sont égaux. Ici, on ne connaissait pas la dimension de l'espace d'arrivée et on ne peut donc se dispenser de prouver la surjectivité.

4.b — Beaucoup trop d'erreurs sur le degré du polynôme nul, de nombreux candidat(e)s croyant à tort que $\deg(0)=0$.

✎ Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.

5.b — Il y a ici beaucoup de confusions sur les ensembles manipulés. Il ne faut pas perdre de vue que $\mathrm{Ker}(f)$ est une partie de l'ensemble de départ de f.

8.b — Les correcteurs ont été désagréablement surpris de constater ici de nombreux essais de tricherie dans les calculs, le résultat pour $\Delta(L_2)$ étant donné dans l'énoncé.

✎ L'emploi du terme «tricherie» peut paraître exagéré, et il est sûrement plus juste de parler d'«arnaque».
Quoi qu'il en soit, s'il est important de pouvoir remettre en cause ses calculs à l'aide de l'énoncé, mieux vaut alors prendre le temps de les refaire plutôt que d'essayer de duper le correcteur, qui vous pardonnera moins facilement des erreurs ultérieures.

9.b — Quesion souvent traitée, mais lourdement, avec des calculs de liberté inutiles, la famille étant orthogonale à vecteurs tous non nuls.

✎ C'est un résultat du cours : une famille orthogonale est libre dès que ses éléments sont tous non nuls.

Problème 2

2 — Pour la convergence de l'intégrale, il apparaît quelquefois une borne parasite 0 dans l'exemple de Riemann en $+\infty$.

✎ Une intégrale de Riemann n'est **jamais** convergente entre 0 et $+\infty$.
On la coupera systématiquement en deux (le plus souvent en $x = 1$). En l'occurrence, il n'y avait ici pas de problème de convergence de l'intégrale en 0, l'intégrande étant continue sur $[0, +\infty[$.

7.c — On ne peut pas effectuer directement une intégration par parties sur une borne infinie : il faut faire l'intégration par parties sur un segment, puis procéder à un passage à la limite.

✎ Combien de fois ne l'ai-je pas répété ? La preuve que ce n'est pas pour vous embêter...

8.b — La déduction est souvente faite, en admettant le résultat de la question précédente.

✎ Même si on ne fait pas une question, admettre son résultat pour continuer est valorisé, et il ne faut donc pas hésiter à aller chercher des points de cette manière.

EML 2014

Problème 1

Sujet : Étude d'un endomorphisme de $\mathscr{C}^0(\mathbf{R})$ défini par une intégrale. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ (sauf question 4 et partie IV.) **Intérêt** : ★☆☆

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, analyse réelle, fonctions de plusieurs variables.

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : un sujet un peu poussif... La question 16 est beaucoup trop dure avec la disparition des formules de Monge du programme. J'en donne tout de même une solution.

On note E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ continues, E_1 le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On remarquera que E_1 est inclus dans E.

On note, pour tout élément f de E, $T(f)$ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt.$$

Partie I : Propriétés générales de T

1. Établir que, pour tout élément f de E, $T(f)$ appartient à E_1, et que, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$(T(f))'(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right).$$

   On note $T : E \to E$ l'application qui, à f, associe $T(f)$.

2. Montrer que T est un endomorphisme de E.
3. Est-ce que T est surjectif ?
4. Soit $f \in E$. Montrer que, si f est paire (respectivement impaire), alors $T(f)$ est paire (respectivement impaire). À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable $u = -t$ dans une intégrale.
5. Soit $f \in E$. Montrer que, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.
6. On note $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application qui, à tout $t \in \mathbf{R}$, associe $s(t) = \sin(\pi t)$.
   Calculer $T(s)$. Est-ce que T est injectif ?

Partie II : Premier exemple

On note, pour tout $a \in \mathbf{R}$: $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto f_a(t) = e^{at}$.

7. Calculer, pour tout $a \in \mathbf{R}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, $T(f_a)(x)$.
   On note

$$\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, a \mapsto \varphi(a) = \begin{cases} \dfrac{e^a - e^{-a}}{2a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

8. Établir : $\forall a \in \mathbf{R}$, $T(f_a) = \varphi(a) f_a$.
9. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\varphi'(a)$.
   Étudier, selon $a \in \mathbf{R}$, le signe de $e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)$.
   En déduire les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique.
10. En déduire que, pour tout $\lambda \in [1;+\infty[$, il existe $f \in E - \{0\}$ tel que $T(f) = \lambda f$.

Partie III : Deuxième exemple

On note $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, t \mapsto h(t) = \dfrac{1}{|t|+1}$.

11. Vérifier que $h \in E$ et calculer, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $T(h)(x)$.
    À cet effet, on remarquera que h est paire, et on distinguera les cas $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $1 < x$.
12. Étudier les variation de $T(h)$ et tracer l'allure de sa représentation graphique.
    On précisera les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1. On donne $\ln(2) \simeq 0.69...$ et $\ln(3) \simeq 1.10...$

13. Est-ce que la réciproque du résultat obtenu dans la question 5 est vraie, c'est-à-dire, est-ce que, pour tout élément f de E, si $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge ?

Partie IV : Recherche d'extremums locaux pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $F :]1,+\infty[\to \mathbf{R}, x \mapsto F(x) = \ln(x+2) - \ln(x)$, de sorte que $F(x) = 2T(h)(x)$, où h a été définie dans la partie III, et on note

$$H :]1,+\infty[^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto H(x,y) = F(x) + F(y) - 2F(xy).$$

14. Montrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[^2$ et calculer les dérivées partielles premières de H en tout $(x,y) \in]1,+\infty[^2$.

15. Établir que H admet un point critique et un seul, que l'on calculera.
    On note (x_0, y_0) les coordonnées de ce point critique.

16. On admet que H est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]1,+\infty[^2$ et que

$$\partial^2_{1,1}H(x_0,y_0) = \partial^2_{2,2}H(x_0,y_0) \simeq -1,2\cdot 10^{-2} \text{ et } \partial^2_{2,1}H(x_0,y_0) = \partial^2_{1,2}H(x_0,y_0) \simeq -4,5\cdot 10^{-2}.$$

    Est-ce que H admet un extremum local sur $]1,+\infty[^2$?

Partie V : Transformée d'une densité

Soit $f \in E$. On suppose, dans cette partie, que f est une densité.

17. Montrer, pour tout $(A,B) \in \mathbf{R}^2$,

$$\int_A^B T(f)(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1}(A-x)f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{A+1}^{B+1} f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{B-1} f(x)\,dx.$$

18. Montrer : $\forall B \in \mathbf{R}, \left|\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)\,dx\right| \leqslant T(f)(B)$.
    En déduire la limite de $\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)\,dx$ lorsque B tend vers $+\infty$

19. Établir que $T(f)$ est aussi une densité.

Problème 2

Sujet : Étude d'un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ — **Moyen**

Abordable en première année : ✗ — **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : diagonalisation, produits scalaires, matrices symétriques.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on note V_i la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i-ème ligne qui est égal à 1. On admet que la famille $(V_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j} = V_i\,{}^tV_j$. Ainsi, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ est la matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne, qui est égal à 1. On admet que la famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Soit A une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $A \neq \lambda I_n$.

On considère l'application Φ_A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \Phi_A(M) = AM - MA.$$

Partie I : Quelques généralités

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

2. Calculer $\Phi_A(I_n)$. L'endomorphisme Φ_A est-il injectif ? Surjectif ?

Partie II : Étude d'un cas particulier

On suppose dans cette partie seulement que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et donner ses valeurs propres.
   On note $\mathcal{B}$ la base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ formée des quatre matrices suivantes :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Écrire la matrice de Φ_A dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer le rang de cette matrice.
5. Déterminer les valeurs propres de Φ_A, et montrer que Φ_A est diagonalisable.

Partie III : Étude du cas où A est diagonalisable

On suppose, dans cette partie seulement, que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

6. Montrer que ${}^tA$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
7. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tels que X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. de ${}^tA$). Montrer que X^tY est un vecteur propre de Φ_A.
8. Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On note $\mathcal{F}$ la famille $\mathcal{F} = (X_i{}^tY_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
   Montrer que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $V_i{}^tV_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ engendré par $\mathcal{F}$, et en déduire que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
9. Établir que Φ_A est diagonalisable.
10. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Φ_A est l'ensemble des différences $\lambda - \mu$ lorsque λ et μ décrivent les valeurs propres de A.

Partie IV : Étude d'un sous-espace propre de Φ_A associé à une valeur propre non nulle

Soient λ une valeur propre non nulle de Φ_A et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ un vecteur propre associé ; on a alors

$$\Phi_A(T) = \lambda T \text{ et } T \neq 0.$$

11. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer : $\forall k \in \mathbf{N}, \Phi_A(T^k) = \lambda k T^k$.
12. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un entier $q \in \mathbf{N}^*$ tel que $T^q = 0$ et $q \leqslant n^2$.
    On note p l'unique entier de $\mathbf{N}^*$ tel que $T^p = 0$ et $T^{p-1} \neq 0$.
13. Justifier qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $T^{p-1}X \neq 0$.
    Montrer que la famille $(X, TX, \ldots, T^{p-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, et en déduire que $p \leqslant n$.

Partie V : Étude du cas où A est symétrique

On suppose dans cette partie seulement, que la matrice A est symétrique : il existe donc une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ orthogonale telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. On note $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les colonnes de P.
Pour toutes matrices $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on définit

$$(M|N) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{i,j} n_{i,j}.$$

14. Montrer que l'application $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
15. Montrer que
$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2, (M|N) = (M^tN|I_n).$$
16. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, calculer ${}^tC_iC_j$.
17. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, déterminer les coefficients diagonaux de la matrice $C_i{}^tC_j$ et en déduire la valeur de $(C_i{}^tC_j|I_n)$.
18. Pour tout $(i, j, k, \ell) \in [\![1, n]\!]^4$, calculer $(C_i{}^tC_j|C_k{}^tC_\ell)$.
19. On considère la famille $\mathcal{G} = (C_i{}^tC_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
    Montrer que $\mathcal{G}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, et qu'elle est constituée de vecteurs propres de Φ_A.

EML 2014 : Corrigé

Problème 1

Partie I : Propriétés générales de T

1. Soit $f \in E$, et soit F une primitive de f. Alors

$$\forall x \in \mathbf{R},\ T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(F(x+1) - F(x-1)\right).$$

Puisque F est de classe $\mathscr{C}^1$, de même que les fonctions affines $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x-1$, alors $T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^1$. Et donc $\boxed{T(f) \in E_1.}$
De plus, par dérivation de composées de fonctions dérivables, on a

$$\boxed{T(f)'(x) = \frac{1}{2}\left(F'(x+1) - F'(x-1)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right).}$$

2. Soient $f, g \in E$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, $\forall x \in \mathbf{R}$, on a

$$T(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} (\lambda f(t)+g(t))\,dt = \lambda\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} g(t)\,dt = \lambda T(f)(x)+T(g)(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbf{R}$, $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$.
Donc T est linéaire, et puisqu'elle est à valeurs dans $E_1 \subset E$, $\boxed{\text{c'est un endomorphisme de } E.}$

Méthode
Prouver que deux applications sont égales, c'est prouver qu'elles prennent la même valeur en tout point.

3. À la question 1, nous avons prouvé que si $f \in E$, alors $T(f) \in E_1$.
Donc si g est une fonction continue mais qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ (par exemple la fonction valeur absolue[1]), alors g ne peut s'écrire $g = T(f)$. Autrement dit, g n'admet pas d'antécédent par T, et donc $\boxed{T \text{ n'est pas surjectif.}}$

[1] Qui n'est pas dérivable en 0.

4. Soit $f \in E$, et soit $x \in \mathbf{R}$. Par le changement de variable $u = -t$, on a

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-x-1}^{-x+1} f(-u)\,du.$$

Si f est paire, alors $\forall u \in \mathbf{R}$, $f(-u) = f(u)$ et donc

$$T(f)(-x) = \frac{1}{2}\int_{-x+1}^{x+1} f(u)\,du = T(f)(x).$$

Ainsi, $\boxed{T(f) \text{ est paire.}}$

Si f est impaire, alors $\forall u \in \mathbf{R}$, $f(-u) = -f(u)$, et donc

$$T(f)(-x) = \frac{1}{2}\int_{-x+1}^{x+1} -f(u)\,du = -T(f)(x).$$

Ainsi, $\boxed{T(f) \text{ est impaire.}}$

5. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors par la relation de Chasles,

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{x+1} f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{0}^{x-1} f(t)\,dt.$$

Lorsque $x \to +\infty$, on a alors

$$\lim_{x\to+\infty} T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = \boxed{0.}$$

De même, lorsque $x \to -\infty$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{0}^{-\infty} f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{0}^{-\infty} f(t)\,dt = \boxed{0.}$$

6. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} \sin(\pi t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(\pi t)}{\pi}\right]_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{2\pi}\left(\cos(\pi x - \pi) - \cos(\pi x + \pi)\right).$$

Mais la fonction cosinus est 2π-périodique et $\pi x + \pi = (\pi x - \pi) + 2\pi$, de sorte que

$$\cos(\pi x + \pi) = \cos(\pi x - \pi)$$

et donc $T(s)(x) = 0$.
Nous venons donc de prouver que $s \in \mathrm{Ker}(T)$ et $s \neq 0$, de sorte que $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$, et donc $\boxed{T \text{ n'est pas injectif.}}$

Partie II : Premier exemple

7. On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $T(f_a)(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} e^{at}\,dt$.
Si $a \neq 0$, alors

$$T(f_a)(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{at}}{a}\right]_{x-1}^{x+1} = \frac{e^{ax+a} - e^{ax-a}}{2a} = \boxed{e^{ax}\frac{e^a - e^{-a}}{2a}.}$$

Si $a = 0$, alors

$$T(f_a)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} 1\,dt = \frac{1}{2}(x + 1 - (x-1)) = \boxed{1.}$$

8. Si $a \neq 0$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$T(f_a)(x) = \frac{e^{ax+a} - e^{ax-a}}{2a} = e^{ax}\frac{e^a - e^{-a}}{2a} = \varphi(a)e^{ax} = \varphi(a)f_a(x).$$

Donc on a bien $\boxed{T(f_a) = \varphi(a)f_a.}$
Si $a = 0$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $T(f_a)(x) = 1 = \varphi(a) \times 1 = \varphi(a)f_a(x)$.
Donc on a bien $\boxed{T(f_a) = \varphi(a)f_a.}$

> **Astuce**
> Il est facile d'oublier de distinguer le cas $a = 0$ dans la question précédente.
> Toutefois, la manière dont cette question est posée nous laisse clairement voir qu'il nécessite un traitement particulier. Et donc si on l'a oublié précédemment, il faut être capable de réaliser son erreur et d'aller rectifier.

9. φ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables, et on a alors

$$\varphi'(a) = \frac{(e^a + e^{-a})a - (e^a - e^{-a})}{2a^2} = \frac{e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)}{2a^2}.$$

Et en $a = 0$, revenons au taux d'accroissement :

$$\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \frac{\frac{e^h - e^{-h}}{2h} - 1}{h} = \frac{e^h - e^{-h} - 2h}{2h^2}$$

> **Rappel**
> Par définition, la dérivée de f en x_0, si elle existe, est égale à
> $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Un développement limité en 0 nous permet d'obtenir

$$e^h - e^{-h} - 2h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}(h^2) - \left(1 - h + \frac{h^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}(h^2)\right) - 2h = \underset{h\to 0}{o}(h^2)$$

et donc

$$\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \frac{o(h^2)}{2h^2} = \underset{h\to 0}{o}(1) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

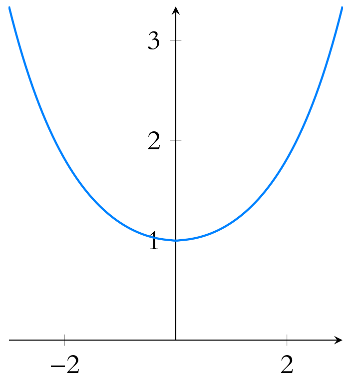
> **o/ $\sim$**
> Si on n'est pas à l'aise avec la notaion o, il est possible de pousser le développement limité un ordre plus loin, afin d'obtenir un terme en h^3, qui donnera alors un équivalent.

Donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$.
Posons $g(a) = e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)$. Alors g est dérivable et

$$g'(a) = e^a(a-1) + e^a - e^{-a}(a+1) + e^{-a} = a(e^a - e^{-a}).$$

Mais $e^a - e^{-a} \geqslant 0 \Leftrightarrow e^a \geqslant e^{-a} \Leftrightarrow a \geqslant -a \Leftrightarrow a \geqslant 0$.
Ainsi, on peut dresser le tableau de variations de g, et par la même occasion, celui de φ :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



10. L'étude de φ réalisée à la question précédente montre que φ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.
En effet, elle est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, y est continue, et $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$, donc le théorème de la bijection s'applique.
Ainsi, si $\lambda \in [1, +\infty[$, il existe $a \in [0, +\infty[$ tel que $\lambda = \varphi(a)$.
Et alors, avec les notations de l'énoncé, $\boxed{T(f_a) = \varphi(a) f_a = \lambda f_a.}$

> **Valeurs propres**
> Nous venons en fait de prouver que tout réel positif est valeur propre de T, qui possède donc une infinité de valeurs propres.
> Puisque E n'est pas de dimension finie, ceci ne vient contredire aucun résultat du cours.

Partie III : Deuxième exemple

11. La fonction $t \mapsto |t|$ est continue sur $\mathbf{R}$, et donc il en est de même de $t \mapsto |t| + 1$, qui ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$. Ainsi, $h : t \mapsto \dfrac{1}{|t|+1}$ est continue sur $\mathbf{R}$, donc est dans E.
Il est évident que h est paire, et donc d'après la question 4, $T(h)$ est paire aussi. Donc il suffit de déterminer $T(h)(x)$ pour $x \geqslant 0$, car pour $x \leqslant 0$, on aura $T(h)(x) = T(h)(-x)$.
Si $0 \leqslant x < 1$, alors

$$\begin{aligned}
T(h)(x) &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} \frac{1}{|t|+1} dt = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{0} \frac{dt}{|t|+1} + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+1} \frac{dt}{|t|+1}\\
&= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{0} \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+1} \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{2}\left(\left[-\ln(1-t)\right]_{x-1}^{0} + \left[\ln(1+x)\right]_{0}^{x+1}\right)\\
&= \boxed{\frac{1}{2}\ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln(2-x).}
\end{aligned}$$

> **Détails**
> Si t est négatif, alors $|t| = -t$. C'est pour cette raison qu'il nous faut distinguer le cas $x \leqslant 1$, car c'est celui où $[x-1x+1]$ contient des nombres négatifs.

Et si $x \geqslant 1$, alors $x - 1 \geqslant 0$, de sorte que

$$T(h)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{2}\left[\ln(1+t)\right]_{x-1}^{x+1} = \boxed{\frac{1}{2}\left(\ln(x+2) - \ln(x)\right).}$$

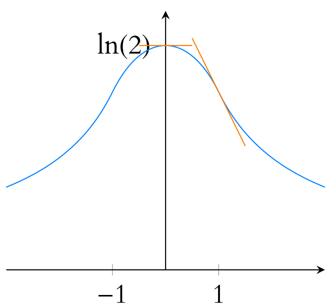
12. On a, pour $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
T(h)'(x) &= \frac{1}{2}\left(h(x+1) - h(x-1)\right)\\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{2-x}\right) & \text{si } 0 \leqslant x < 1\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-x}{(x+2)(2-x)} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1\\ \dfrac{-1}{x(x+2)} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

> **Détails**
> Cette formule sur la dérivée de $T(h)$ est valable en toute généralité, et n'est pas du tout spécifique à fonction h. Elle découle directement du théorème fondamental de l'analyse.

Donc le tableau de variations de $T(h)$ est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$T(h)'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(h)(x)$	0	$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	0



En $x=0$, on a $T(h)'(0)=0$ car $T(h)$ étant paire, $T(h)'$ est impaire. Donc la tangente au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $x=\ln(2)$.

En $x=1$, nous savons $T(h)'(1)=-\dfrac{1}{3}$ et $T(h)(1)=\dfrac{1}{2}\ln(3)$.

Donc la tangente à f en $x=1$ est la droite d'équation $y=-\dfrac{1}{3}(x-1)+\dfrac{1}{2}\ln(3)$.

Plus généralement
Une fonction paire a toujours une tangente horizontale en 0.

13. La fonction h vérifie bien les hypothèses, à savoir ; $T(h)$ est de limites nulles en $\pm\infty$.
Mais l'intégrale de h sur $]-\infty,+\infty[$ ne converge pas car, $h(t)=\dfrac{1}{t+1}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t}$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t}$ diverge, et donc, par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty}h(t)\,dt$.

Donc la réciproque de la question I.5 est fausse.

Partie IV : Recherche d'extremum locaux pour une fonction réelle de deux variables réelles

14. F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$, et les fonctions $(x,y)\mapsto x,(x,y)\mapsto y$ et $(x,y)\mapsto xy$ le sont car elles sont polynomiales.
Donc par composition[2] de fonctions $\mathscr{C}^1$, les fonctions $(x,y)\mapsto F(x),(x,y)\mapsto F(y)$ et $(x,y)\mapsto F(xy)$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[^2$.
Et donc H est de classe $\mathscr{C}^1$ comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
On a alors

$$\partial_1 H(x,y)=F'(x)-2yF'(xy)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}-2\frac{y}{xy+2}+2\frac{1}{x}$$

et de même,

$$\partial_2 H(x,y)=F'(y)-2xF'(xy)=\frac{1}{y+2}-\frac{2x}{xy+2}+\frac{1}{y}.$$

[2] Ce qui est bien légitime car les trois fonctions mentionnées ci-dessus sont à valeurs dans $]1,+\infty[$.

15. $(x,y)\in]1,+\infty[^2$ est un point critique de H si et seulement si

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2y}{xy+2}+\dfrac{1}{x}=0\\[2mm] \dfrac{1}{y+2}-\dfrac{2x}{xy+2}+\dfrac{1}{y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(2x+2)(xy+2)-2yx(x+2)}{x(x+2)(xy+2)}=0\\[2mm] \dfrac{(2y+2)(xy+2)-2xy(y+2)}{y(y+2)(xy+2)}=0\end{cases}$$

Donc (x,y) est un point critique de H si et seulement si

$$\begin{cases}(2x+2)(xy+2)-2yx(x+2)=0\\(2y+2)(xy+2)-2xy(y+2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2-xy=0\\2y+2-xy=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=2x+2\\xy=2y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x^2=2x+2\end{cases}$$

L'équation $x^2=2x+2$ a pour solutions $x=1+\sqrt{3}$ et $x=1-\sqrt{3}$.
Mais $1-\sqrt{3}\notin]1,+\infty[$, donc le seul point critique de H est $(1+\sqrt{3},1+\sqrt{3})$.

16. Le critère à utiliser ici[3] n'est plus au programme donc nous allons le redémontrer. Le résultat et la méthode son intéressants, mais ce serait trop dur pour qu'on vous demande de le trouver sans indications !
Souvenons-nous que nous cherchons à déterminer le signe des valeurs propres de la hessienne.
Notons $\nabla^2 H(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.
Un réel λ est alors valeur propre de $\nabla^2 H(x_0,y_0)$ si et seulement si

$$\det(\nabla^2 H(x_0,y_0)-\lambda I_2)=0\Leftrightarrow\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0.$$

Notons alors $P(X)=X^2-(a+d)X+(ad-bc)$.
Puisque $\nabla^2 H(x_0,y_0)$ est symétrique, elle est diagonalisable, et donc possède une ou deux valeurs propres.
Si elle n'en possédait qu'une seule, notée λ_1 elle serait semblable à $\lambda_1 I_2$ et donc **égale** à $\lambda_1 I_2$, ce qui n'est pas le cas.
Donc $\nabla^2 H(x_0,y_0)$ possède deux valeurs propres λ_1 et λ_2, de sorte que P possède deux

[3] Les formules de Monge.

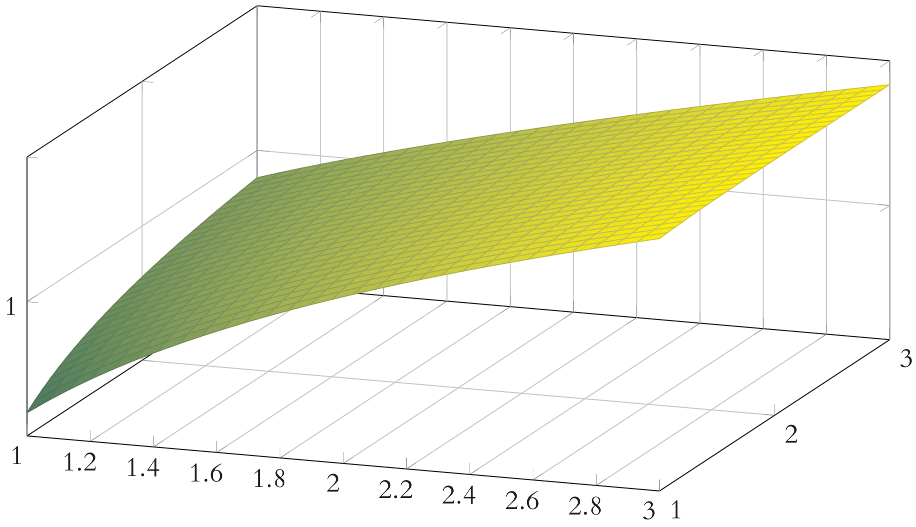


FIGURE 1 – La représentation graphique de H

racines.
Ce polynôme se factorise donc en $P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$.
Et donc $P(X) = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2$.
Par identification des coefficients, il vient alors

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d = \operatorname{tr}(\nabla^2 H(x_0, y_0)) \text{ et } \lambda_1\lambda_2 = ad - bc = \det(\nabla^2 H(x_0, y_0)).$$

Étant donnée les valeurs numériques fournies par l'énoncé,

$$\det(\nabla^2 H(x_0, y_0)) \simeq (1.2^2 - 4.5^2) \cdot 10^{-4} < 0$$

et donc $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Ainsi, les valeurs propres de $\nabla^2 H(x_0, y_0)$ sont de signe opposé. .
Et donc H possède un point selle en (x_0, y_0).

Remarque
Nous n'avons pas eu ici besoin de la relation sur $\lambda_1 + \lambda_2$, mais si λ_1 et λ_2 étaient de même signe, ce signe serait celui de $\lambda_1 + \lambda_2$

Enfin, puisque $]1, +\infty[^2$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et que (x_0, y_0) est l'unique point critique de H sur $]1, +\infty[^2$, H ne possède pas d'extremum local sur $]1, +\infty[^2$.

Partie V : Transformée d'une densité

17. Procédons à une intégration par parties, en posant $u(x) = T(f)(x), v'(x) = 1$, et donc $u'(x) = T(f)'(x)$, $v(x) = x$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_A^B T(f)(x)\,dx &= [xT(f)(x)]_A^B - \int_A^B \frac{1}{2} xT(f)'(x)\,dx \\
&= BT(f)(B) - AT(f)(A) - \int_A^B \frac{1}{2} x\,(f(x+1) - f(x-1))\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} Bf(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1} Af(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_A^B xf(x+1)\,dx + \frac{1}{2}\int_A^B xf(x-1)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} Bf(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1} Af(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{A+1}^{B+1} (t-1)f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{B-1} (t+1)f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int_{A+1}^{B+1} (t-1)f(t)\,dt &= \int_{A+1}^{B+1} tf(t)\,dt - \int_{A+1}^{B+1} f(t)\,dt \\
&= \int_{A+1}^{B-1} tf(t)\,dt + \int_{B-1}^{B+1} tf(t)\,dt - \int_{A+1}^{B+1} f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

De même,

$$\int_{A-1}^{B-1} (t+1)f(t)\,dt = \int_{A-1}^{B-1} tf(t)\,dt + \int_{A-1}^{B-1} f(t)\,dt = \int_{A-1}^{A+1} tf(t)\,dt + \int_{A+1}^{B-1} tf(t)\,dt + \int_{A-1}^{B-1} f(t)\,dt.$$

Et donc

$$\int_A^B T(f)(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} Bf(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1} Af(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} tf(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{A-1}^{B-1} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1} tf(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{B-1} f(t)\,dt$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-t)f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1}(A-t)f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{B-1} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{A+1}^{B+1} f(t)\,dt}$$

18. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}|B-x|\cdot|f(x)|\,dx \leqslant \int_{B-1}^{B+1}|B-x|\cdot f(x)\,dx.$$

Or, si $x \in [B-1, B+1]$, alors $|B-x| \leqslant 1$. Donc $|B-x|f(x) \leqslant f(x)$, de sorte que

$$\left|\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} f(x)\,dx = \boxed{T(f)(B).}$$

Puisque f est une densité, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ converge. Alors nous avons prouvé à la question 5 que $T(f)(B) \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)\,dx = 0.}$$

Valeur absolue

Puisque f est une densité, elle est positive, et donc $|f| = f$.

19. En passant à la limite lorsque $B \to \infty$ dans l'égalité de la question 17, on obtient

$$\int_A^{+\infty} T(f)(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{A+1}^{+\infty} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Nous pourrions prouver, de même qu'à la question précédente que

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1} f(t)\,dt = 0.$$

Et alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(f)(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$$

Nous avons prouvé précédemment que $T(f)$ est continue, et puisque f est positive (c'est une densité), par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens *i.e.* on a bien $x-1 \leqslant x+1$), il en est de même de $\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$ et donc de $T(f)(x)$, et ce quel que soit $x \in \mathbf{R}$.
Donc $T(f)$ est positive : $\boxed{T(f) \text{ est encore une densité.}}$

Convergence

Notons que le fait que cette limite existe prouve que $\displaystyle\int_A^{+\infty} T(f)(x)\,dx$ converge, ce qui n'avait pas été prouvé avant.

PROBLÈME 2

Partie I : Quelques généralités

1. Φ_A est évidemment à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrons qu'il s'agit d'une application linéaire.
Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\Phi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A = \lambda(AM - MA) + (AN - NA) = \lambda\Phi_A(M) + \Phi_A(N).$$

Donc $\boxed{\Phi_A \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$

2. On a $\Phi_A(I_n) = A - A = 0$.
Puisque $I_n \neq 0$, c'est que $\boxed{\Phi_A \text{ n'est pas injectif.}}$
Et comme il s'agit d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, il n'est donc $\boxed{\text{pas non plus surjectif.}}$

Rappel

Lorsque l'espace de départ et l'espace d'arrivée ont même dimension, une application linéaire est injective si et seulement si elle est surjective.

Partie II : Étude d'un cas particulier

3. La matrice A est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, qui sont 1 et 3. Elle possède 2 valeurs propres distinctes, $\boxed{\text{donc est diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbf{R}).}$

4. Après calculs, on a

$$\Phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Phi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Phi_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \Phi_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la matrice de Φ_A dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\boxed{N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_A) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \Phi_A(E_{1,1}) & \Phi_A(E_{1,2}) & \Phi_A(E_{2,1}) & \Phi_A(E_{2,2}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ E_{1,1} \\ E_{1,2} \\ E_{2,1} \\ E_{2,2} \end{array}.}$$

Méthode

$\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est de dimension 4 donc la matrice désirée est de taille 4×4.
Ce doit être le premier réflexe sur une telle question : déterminer la taille de la matrice pour prévenir toute confusion.

Puisque trois colonnes[4] sont colinéaires, et que la dernière n'est pas colinéaires aux trois autres, $\boxed{\mathrm{rg}(N) = 2.}$

[4] La première, la seconde et la dernière.

5. Puisque $\mathrm{rg}(N) = 2$, on en déduit que 0 est valeur propre de Φ_A, et que

$$\dim E_0(\Phi_A) = \dim \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) - \mathrm{rg}(N) = 4 - 2 = 2.$$

D'autre part, puisque $\Phi_A(E_{1,2}) = -2E_{1,2}$, -2 est valeur propre de Φ_A, et donc de N, avec $\dim E_{-2}(N) \geqslant 1$.
Si A est diagonalisable, elle doit alors être semblable à une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(0, 0, -2, \lambda)$, avec $\lambda \in \mathbf{R}$.
Et alors, deux matrices semblables ayant mêmes traces,

Remarque

λ peut éventuellement être égale à -2.

$$\mathrm{tr}(N) = \mathrm{tr}(D) \Leftrightarrow 0 = 0 + 0 - 2 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Autrement dit, la seule autre valeur propre possible de N est 2. Mais on a alors

$$\mathrm{rg}(N - 2I_4) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} < 4.$$

Rang

Puisque cette matrice possède une ligne nulle, sa transposée possède une colonne nulle et donc est de rang < 3.
Mais une matrice et sa transposée ont même rang.

Donc 2 est bien valeur propre de N.
De plus, nous savons déjà que $\dim E_0(N) = 2$, donc $\dim E_2(N) = \dim E_{-2}(N) = 1$.
Alors

$$\dim E_0(N) + \dim E_{-2}(N) + \dim E_2(N) = 4$$

et donc N est diagonalisable. Par conséquent, $\boxed{\Phi_A \text{ est diagonalisable.}}$

Précision

2 et -2 sont des valeurs propres, donc les sous-espaces propres associés sont de dimension au moins égale à 1. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut excéder 4, elle est égale à 4.

Alternative : il est également possible de trouver les valeurs propres de N à l'aide d'un pivot : $\lambda \in \mathbf{R}$ est valeur propre de N si et seulement si $\mathrm{rg}(N - \lambda I_4) < 4$. Or,

$$N - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -2-\lambda & 0 & 1 \\ -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_4}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2\lambda-\lambda^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 + (2-\lambda)L_3}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2\lambda-\lambda^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

λ est valeur propre de N si et seulement si $\mathrm{rg}(N - \lambda I_4) < 4$, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ ou $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, soit $\lambda \in \{-2, 0, 2\}$.

Partie III : Étude du cas où A est diagonalisable

6. Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et une matrice inversible P telles que $A = P^{-1}DP$. Et alors

$$^tA = {}^t(P^{-1}DP) = {}^tP^tD^t(P^{-1}) = {}^tPD({}^tP)^{-1}.$$

Si l'on pose $Q = ({}^tP)^{-1}$, alors ${}^tA = Q^{-1}DQ$, et donc ${}^tA$ est semblable à la matrice diagonale D, et $\boxed{\text{donc est diagonalisable.}}$

7. Notons λ, μ les réels tels que $AX = \lambda X$ et ${}^tAY = \mu Y$. Alors

$$\Phi_A(X^tY) = AX^tY - X^tYA = \lambda X^tY - X^tYA.$$

Mais en transposant la relation ${}^tAY = \mu Y$, il vient ${}^tYA = \mu^tY$, et donc

$$\Phi_A(X^tY) = \lambda X^tY - X\mu^tY = (\lambda - \mu)X^tY.$$

Pour prouver que X^tY est un vecteur propre, il reste à voir qu'il est non nul.
Or, X et Y sont non nuls, donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$ tels que $x_i \neq 0$ et $y_j \neq 0$.
Mais puisque

$$X^tY = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix}.$$

le coefficient à la i-ème ligne et j-ème colonne de X^tY est $x_iy_j \neq 0$. Et donc $X^tY \neq 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, } X^tY \text{ est bien un vecteur propre de } \Phi_A \text{, associé à la valeur propre } \lambda - \mu.}$

> **Danger**
> Un produit de deux matrices non nulles peut être nul. Il n'est donc pas question de se contenter de remarquer que X et ${}^tY$ sont non nuls.

8. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$.
Puisque $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$V_i = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n.$$

De même, il existe des réels $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que $V_j = \mu_1 Y_1 + \dots + \mu_n Y_n$. Et alors

$$V_i{}^tV_j = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k X_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^n \mu_\ell{}^tY_\ell\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \lambda_k\mu_\ell X_k{}^tY_\ell.$$

Donc $V_i{}^tV_j$ est bien combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$.
Mais puisque la famille $(V_i{}^tV_j)$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, en particulier elle est génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Et donc tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est combinaison linéaire des $V_i{}^tV_j$, et donc des éléments de $\mathcal{F}$.
Ceci prouve que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Étant de cardinal $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\boxed{\text{c'est une base de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$

9. Puisque A et ${}^tA$ sont toutes deux diagonalisable, il existe deux bases $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ formées respectivement de vecteurs propres de A et de ${}^tA$.
Mais alors d'après les questions 7 et 8, la famille $(X_i{}^tY_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est alors une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de Φ_A. Et donc $\boxed{\Phi_A \text{ est diagonalisable.}}$

10. Les calculs ont en réalité été effectués à la question 7, si X_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ et si Y_j est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre μ, alors $X_i{}^tY_j$ est un vecteur propre de Φ_A, associé à la valeur propre $\lambda - \mu$.
Donc tous les $\lambda - \mu, \lambda \in \operatorname{Spec}(A), \mu \in \operatorname{Spec}({}^tA)$ sont bien des valeurs propres de Φ_A.
De plus, $\operatorname{Spec}(A) = \operatorname{Spec}({}^tA)$ car A et ${}^tA$ sont semblables à la même matrice diagonale.
Puisque $(X_i{}^tX_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de vecteurs propres de Φ_A, on a bien ainsi toutes les valeurs propres de Φ_A.

Partie IV : Étude d'un sous-espace propre de Φ_A associé à une valeur propre non nulle

11. Montrons par récurrence que $\Phi_A(T^k) = \lambda k T^k$. Pour $k = 0$, la propriété est évidemment vérifiée.
Supposons donc que $\Phi_A(T^k) = \lambda k T^k$. Alors

$$\Phi_A(T^{k+1}) = AT^{k+1} - T^{k+1}A = AT^kT - TT^kA = (\Phi_A(T^k) + T^kA)T - T^{k+1}A$$

$$= (\lambda k T^k + T^k A)T - T^{k+1}A = \lambda k T^{k+1} + T^k(AT - TA) = \lambda k T^{k+1} + T^k \Phi_A(T)$$
$$= \lambda k T^{k+1} + T^k \lambda T = \lambda(k+1)T^{k+1}.$$

Ainsi, la propriété est vérifiée au rang $k+1$, et par le principe de récurrence, il vient

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N}, \Phi_A(T^k) = \lambda k T^k.}$$

12. Supposons par l'absurde que pour tout $k \in [\![0, n^2]\!]$, on ait $T^k \neq 0$.
Alors les $T^k, 0 \leqslant k \leqslant n^2$ sont des vecteurs propres de Φ_A, associés à des valeurs propres deux à deux distinctes : les λk (elles sont distinctes car $\lambda \neq 0$).
Mais alors Φ_A possède au moins n^2+1 valeurs propres, ce qui n'est pas possible car $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension n^2.
$\boxed{\text{Par conséquent, l'un au moins des } T^k, 0 \leqslant k \leqslant n^2 \text{ est nul.}}$

Rappel
Si f est un endomorphisme de E, alors f possède au plus $\dim E$ valeurs propres distinctes.

13. $T^{p-1} \neq 0$ et donc l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est T^{p-1} n'est pas l'endomorphisme nul.
Par conséquent, il existe $x \in \mathbf{R}^n$, non nul, tel que $f(x) \neq 0$.
Mais alors si X désigne le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base canonique, alors X est non nul et $T^{p-1}X \neq 0$.
Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbf{R}^p$ tels que $\lambda_0 X + \lambda_1 TX + \cdots + \lambda_{p-1}T^{p-1}X = 0$.
Alors en multipliant à gauche par T^{p-1}, il vient $\lambda_0 T^{p-1}X + \cdots + \lambda_{p-1}T^{2(p-1)}X = 0$.
Mais $T^p = 0$, et donc $T^k = 0$ pour $k \geqslant p$.
Ainsi, la relation précédente devient $\lambda_0 T^{p-1}X = 0$.
Mais $T^{p-1}X \neq 0$, et donc $\lambda_0 = 0$.
La relation de dépendance linéaire initiale s'écrit alors $\lambda_1 TX + \cdots + \lambda_{p-1}T^{p-1}X = 0$.
En multipliant à gauche par T^{p-2}, il vient $\lambda_1 T^{p-1}X = 0$, et donc $\lambda_1 = 0$.
De proche en proche, on prouve ainsi que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$, et donc la famille $(X, TX, \dots, T^{p-1}X)$ est une $\boxed{\text{famille libre de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}).}$
Puisque $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est de dimension n, on en déduit que p (qui est le cardinal de cette famille libre) est inférieur ou égal à n.

Partie V : Étude du cas où A est symétrique

14. Soient $M, N, P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$(\lambda M + N|P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\lambda M + N)_{i,j}P_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\lambda m_{i,j} + n_{i,j})P_{i,j}$$
$$= \lambda \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}P_{i,j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} n_{i,j}P_{i,j} = \lambda(M|P) + (N|P).$$

Donc $(\cdot|\cdot)$ est linéaire par rapport à la première variable.
On a d'autre part $(M|N) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}n_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} n_{i,j}m_{i,j} = \boxed{(N|M).}$
Donc $(\cdot|\cdot)$ est symétrique, et donc bilinéaire symétrique.
Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a

$$(M|M) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 \geqslant 0.$$

Enfin, si $(M|M) = 0$, alors chacun des $m_{i,j}$ est nul (une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun des nombres est lui même nul), et donc M est la matrice nulle.
Tout ceci prouve bien que $\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$

Remarque
On pourrait vérifier que
$$(M|N) = \operatorname{tr}({}^tMN).$$

15. Soient $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Notons $b_{i,j}$ les coefficients de la matrice M^tN. Alors

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}({}^tN)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{j,k}.$$

Et alors $(M^tN|I_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}(I_n)_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{j,k} = (M|N).$

16. Notons $c_{i,j}$ les coefficients de P. Alors

$$^tC_iC_j = \begin{pmatrix} c_{1,i} & \dots & c_{n,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,j} \\ \vdots \\ c_{n,j} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} c_{k,i}c_{k,j}$$

Nous reconnaissons là le coefficient situé à la i-ème ligne et j-ème colonne de $^tPP = I_n$.

Détails
$^tPP = I_n$ car P est orthogonale.

Ainsi, $\boxed{^tC_iC_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

17. Notons $b_{k,\ell}$ le coefficient à la k-ème ligne et ℓ-ème colonne de $C_i{}^tC_j$. Gardant en tête le fait que C_i est un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et que $^tC_j \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$, la formule du produit matriciel donne

$$\forall k \in [\![1,n]\!], b_{k,k} = \sum_{p=1}^{1} (C_i)_{k,p}(^tC_j)_{p,k} = c_{k,i}c_{k,j}.$$

On en déduit que $(C_i{}^tC_j|I_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} c_{k,i}c_{k,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

18. Soient $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$. Alors, d'après la question 15 :

$$(C_i{}^tC_j|C_k{}^tC_\ell) = (C_i{}^tC_j{}^t(C_k{}^tC_\ell)|I_n) = (C_i{}^tC_jC_\ell{}^tC_j|I_n)$$

Mais nous savons que $^tC_jC_\ell = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq \ell \\ 1 & \text{si } j = \ell \end{cases}$

Donc déjà, si $j \neq \ell$, alors $(C_i{}^tC_j|C_k{}^tC_\ell) = 0$.
Si $j = \ell$, alors il reste

$$(C_i{}^tC_j|C_k{}^tC_\ell) = (C_i{}^tC_k|I_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

En résumé, on a

$$\boxed{(C_i{}^tC_j|C_k{}^tC_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

19. Notons que nous avons $A = PDP^{-1}$, avec D diagonale. Comme d'habitude, cela signifie que les vecteurs colonnes de P (dans le cours il s'agit de celle que nous appelons usuellement P^{-1}, mais peu importe : c'est celle qui est à gauche de la matrice diagonale !) forment une base de vecteurs propres de A. Mais A est symétrique, donc ils forment également une base de vecteurs propres de $^tA = A$.

Donc d'après la question 10, $\boxed{\text{la famille } \mathcal{G} \text{ est une base de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \text{, formée de vecteurs propres de } \Phi_A.}$

Enfin, la question précédente prouve qu'il s'agit d'une $\boxed{\text{base orthonormée pour le produit scalaire } (\cdot|\cdot).}$

EML 2013

Problème 1

Sujet : Étude d'une fonction définie par une intégrale **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, fonctions d'une variable, séries, variables à densité.

Commentaires : le sujet n'est pas forcément passionnant mais couvre une grande partie du programme d'analyse de première année et nécessite un certain recul sur les notions d'équivalents, de dérivée ou sur la manipulation des intégrales. Très typique des problèmes de Lyon, il constitue un très bon entraînement.

Partie I : Étude d'une fonction f définie par une intégrale.

1. Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$ converge.

On note $f :]0;+\infty[\to \mathbf{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0;+\infty[$ par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$.

2. Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,dt$. En déduire : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

3. Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[,\ 0 < f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$. En déduire : $f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$ converge et que :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ \left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt.$$

   En déduire : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Partie II : Une autre expression intégrale de f.

A – Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale.

5. Soit $(x,h) \in]0;+\infty[\times\mathbf{R}^*$ tel que $h > -\dfrac{x}{2}$.

   a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$ converge.

   b. Établir : $\forall t \in [0;+\infty[,\ \left|\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t} - \dfrac{1}{x+t}\right) + \dfrac{1}{(x+t)^2}\right| \leqslant \dfrac{2|h|}{x^3}$.

   c. En déduire : $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt\right| \leqslant \dfrac{2|h|}{x^3}$.

6. En déduire que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$.

7. Montrer, pour tout $x \in]0;+\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0,1] \times [1;+\infty[$:

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt.$$

8. En déduire : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = -\dfrac{1}{x} + f(x)$.

9. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f''(x) = \dfrac{1}{x^2} + f'(x)$.

B – Intervention d'une fonction auxiliaire g.

On note $g :]0;+\infty[\to \mathbf{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0;+\infty[$, par : $g(x) = e^{-x}f(x)$.

10. Démontrer que g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ g'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}$.

11. Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$ converge et que :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du,$$

puis : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$

12. Montrer : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$

13. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$?

Partie III : Étude d'une densité.

On note $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie, pour tout $t \in \mathbf{R}$, par : $h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(1)}\dfrac{e^{-t}}{1+t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

14. Montrer que h est une densité.
15. Soit X une variable aléatoire réelle admettant h pour densité. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$ à l'aide de $f(1)$.

Problème 2

Sujet : Matrices de rang 1 — Facile

Abordable en première année : ✗ — **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire, diagonalisation, produits scalaires, endomorphismes symétriques, variables aléatoires discrètes.

Modifications apportées au sujet d'origine : suppression de la partie II, inutile avec l'apparition de la trace au programme 2015

Commentaires : joli problème, plutôt facile pour un sujet de Lyon et couvrant tout le programme d'algèbre.

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geqslant 2$.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices réelles à une colonne et n lignes, nommées «matrices colonnes» dans la suite du problème.
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, alors ${}^tA$ désigne la matrice transposée de V.
Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ alors ${}^tV$ désigne la matrice transposée de V.
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, alors le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j est noté $a_{i,j}$, la matrice A est notée $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, alors la matrice colonne V est notée $V = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ constituée des coefficients de la colonne numéro j de A. Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Partie I : Un exemple

Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\4 \end{pmatrix}$, $V_0 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\2\\-1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0\,{}^tV_0$.

1. Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.
2. a. Calculer A_0U_0.
   b. Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$.
   c. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

Partie II : Une caractérisation des matrices de rang 1

3. Soient $U = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $V = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
   a. Justifier que $U\,{}^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Déterminer les coefficients de $U\,{}^tV$ à l'aide des coefficients de U et de V.
   b. Exprimer $\mathrm{tr}(U\,{}^tV)$ à l'aide des coefficients de U et de V.

c. Quel est le rang de U^tV ?

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice de rang 1.

   a. Montrer qu'il existe $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe $\alpha_j \in \mathbf{R}$ vérifiant : $C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$.

   b. En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telles que $A = U^tV$.

5. Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rang 1.

Partie III : Une application en probabilités

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose de plus : $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
On note, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j} = P([X=i] \cap [Y=j])$ puis

$$M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ U_X = (P(X=i))_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \text{ et } U_Y = (P(Y=i))_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}).$$

6. On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Calculer $U_X{}^tU_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.

7. On suppose, dans cette question, que la matrice M est de rang 1.

   a. Montrer : $C_1(M) + \cdots + C_n(M) = U_X$.

   b. En déduire que, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe $\beta_j \in \mathbf{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.

   c. Montrer : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ P(Y=j) = \beta_j$.

   d. En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Partie IV : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telles que $A = U^tV$ et on note $a = \mathrm{tr}(A)$.

8. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

9. Montrer : ${}^tVU = (a)$, puis $A^2 = aA$.

10. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

11. On suppose $a \neq 0$. Calculer AU. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

12. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Partie V : Construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique

13. Vérifier que : $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ \mathrm{tr}({}^tAA) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2$.

14. Montrer que l'application : $(M,N) \mapsto \langle M,N\rangle = \mathrm{tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On munit dorénavant $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de ce produit scalaire.

On considère une matrice colonne $V = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telle que $\displaystyle\sum_{j=1}^n v_j^2 = 1$. On note $S = V^tV$.

15. Montrer que S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et que $S^2 = S$.

16. a. Montrer que l'application $\Phi : M \mapsto SM$ est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

   b. Vérifier $\Phi^2 = \Phi$. Que peut-on dire des valeurs propres de Φ ?

   c. On note e l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(\Phi)$ et $\mathrm{Ker}(\Phi - e)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

EML 2013 : CORRIGÉ

PROBLÈME 1

Partie I : Étude d'une fonction f définie par une intégrale.

1. Pour $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[0;+\infty[$, donc le seul éventuel problème de convergence est au voisinage de $+\infty$.
Or, pour $t \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant \frac{e^{-t}}{x+t} \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}.$$

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge[1], il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$ et donc de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$.

Précision

Nous savons que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$ converge car intégrale d'une fonction continue sur un segment. Pour cette raison, il nous suffit d'étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x(x+t)}\,dt$.

[1] Par exemple car

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

converge.

2. D'après la relation de Chasles, on a

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt.$$

Mais la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est positive sur $[1;+\infty[$ et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt \geqslant 0$.
De plus, pour $t \in]0,1]$, on a $\dfrac{e^{-t}}{x+t} \geqslant \dfrac{e^{-1}}{x+t}$ et donc, par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,dt$.

On en déduit que $\boxed{f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,dt.}$

Mais on a alors

$$\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,dt = e^{-1}\int_0^1 \frac{dt}{x+t} = e^{-1}[\ln(x+t)]_0^1 = e^{-1}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = e^{-1}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Lorsque $x \to 0^+$, $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ et donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \to +\infty$.

On en déduit donc que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.}$

3. Pour $x > 0$, on a $e^{-1}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) > 0$ et donc, d'après l'inégalité de la question précédente, $f(x) > 0$.
Pour tout $t > 0$, on a $\dfrac{e^{-t}}{t+x} \leqslant \dfrac{e^{-t}}{x}$, de sorte que par croissance de l'intégrale,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{1}{x}\Gamma(1) = \boxed{\frac{1}{x}}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on en déduit, par le théorème des gendarmes, que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$

4. L'intégrale en question n'est autre que $\Gamma(2)$ qui converge d'après le cours.
On a alors, pour $x > 0$,

$$\left|f(x) - \frac{1}{x}\right| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,dt\right| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x}\right)dt\right| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{-te^{-t}}{x(x+t)}\,dt\right|.$$

Soit encore $\left|f(x) - \dfrac{1}{x}\right| = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)}\,dt$.

Mais pour $t > 0$, on a $\dfrac{1}{x(x+t)} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ et donc par croissance de l'intégrale[2] :

$$\left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x^2}\,dt = \boxed{\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt.}$$

Valeur absolue

Notons qu'en général, la valeur absolue de l'intégrale n'est pas égale à l'intégrale de la valeur absolue !
Ici, l'intégrande est de signe constant (négatif), et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-te^{-t}}{x(x+t)}\,dt$ est négatif, et donc sa valeur absolue est égale à son opposé, c'est-à-dire à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)}\,dt$.

[2] Toutes les intégrales en jeu sont convergentes.

En particulier, $x\left|f(x)-\frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(f(x)-\frac{1}{x}\right) = 0 \Longleftrightarrow f(x)-\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Et donc

$$f(x) = \frac{1}{x} + \left(f(x)-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right) \boxed{\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.}$$

o / $\sim$
Rappelons que $f \sim g$ si et seulement si $f = g + o(g)$.

Partie II : Une autre expression intégrale de f.
A - Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme intégrale.

5.a. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$, et donc le seul éventuel problème de convergence est au voisinage de $+\infty$.
Or, pour $t \geqslant 1$, on a $0 \leqslant \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leqslant e^{-t}$, et puisque $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge, il en est de même de $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$ et donc de $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$.

Majoration
N'oublions par que si on souhaite utiliser une majoration pour prouver la convergence d'une intégrale, il faut absolument vérifier la positivité des fonctions en jeu, cette hypothèse étant indispensable.
Par exemple, pour tout $t \geqslant 1$, on a $-\frac{1}{t} \leqslant -\frac{1}{t^2}$, et $\int_1^{+\infty}\frac{-1}{t}\,dt$ diverge alors que $\int_1^{+\infty}\frac{-1}{t^2}\,dt$ converge.

5.b. Soit $t \geqslant 0$. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2} &= -\frac{1}{h}\frac{h}{(x+h+t)(x+t)}+\frac{1}{(x+t)^2}\\ &= -\frac{x+t}{(x+h+t)(x+t)^2}+\frac{x+t+h}{(x+t+h)(x+t)^2}\\ &= \frac{h}{(x+h+t)(x+t)^2}.\end{aligned}$$

Puisque $h > -\frac{x}{2}$, on a $x+h > \frac{x}{2}$ et donc, t étant strictement positif,

$$\frac{1}{x+h+t} \leqslant \frac{1}{x+h} \leqslant \frac{2}{x}.$$

On en déduit que

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| \leqslant \frac{|h|}{(x+h+t)}\frac{1}{(x+t)^2} \leqslant \frac{2|h|}{x}\frac{1}{(x+t)^2} \leqslant \frac{2|h|}{x}\frac{1}{x^2} \leqslant \boxed{\frac{2|h|}{x^3}.}$$

5.c. En multipliant l'inégalité précédemment obtenue par e^{-t} on a, pour tout $t > 0$,

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{e^{-t}}{x+t+h}-\frac{e^{-t}}{x+h}\right)+\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\right| \leqslant \frac{2e^{-t}|h|}{x^3}.$$

Puisque $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$ converge, il vient donc

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{1}{h}\left(\frac{e^{-t}}{x+t+h}-\frac{e^{-t}}{x+h}\right)+\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\right|dt \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{2e^{-t}|h|}{x^3}\,dt.$$

D'après l'inégalité triangulaire généralisée, on a alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt\right| &= \left|\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)dt+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt\right|\\ &\leqslant \int_0^{+\infty}\left|\frac{1}{h}\left(\frac{e^{-t}}{x+t+h}-\frac{e^{-t}}{x+h}\right)+\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\right|dt\\ &\leqslant \frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt\\ &\leqslant \boxed{\frac{2|h|}{x^3}.}\end{aligned}$$

Inégalité triang.
Rappelons qu'on appelle inégalité triangulaire généralisée le fait suivant : si f est une fonction continue sur $]a,b[$ telle que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument, alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

$\Gamma(1)$
On aura reconnu que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \Gamma(1) = 0! = 1.$$

6. Soit $x \in]0;+\infty[$. Lorsque h tend vers 0 dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt=0 \iff \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt.$$

Ceci prouve donc que f est dérivable en x et que $\boxed{f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt.}$

Ceci étant vrai pour tout $x>0$, f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Dérivabilité
f est dérivable en x car son taux d'accroissement entre $x+h$ et x admet une limite finie lorsque $h\to 0$.
C'est la **définition** d'une fonction dérivable.

7. Procédons à une intégration par parties sur le segment $[\varepsilon, A]$ en posant $u(t)=e^{-t}$ et $v(t)=-\frac{1}{x+t}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\varepsilon,A]$ avec $u'(t)=-e^{-t}$ et $v'(t)=\frac{1}{(x+t)^2}$.
Il vient alors

$$\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt=\left[-\frac{e^{-t}}{(x+)}\right]_\varepsilon^A-\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{(x+t)^2},dt=\boxed{-\frac{e^{-A}}{x+A}+\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon}-\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{x+t}\,dt.}$$

8. Dans l'égalité précédente, faisons tendre ε vers 0. Il vient alors[3]

$$\int_0^A\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt=-\frac{e^{-A}}{x+A}+\frac{1}{x}-\int_0^A\frac{e^{-t}}{x+t}\,dt.$$

Puis, en faisant tendre A vers $+\infty$, il vient

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt=\frac{1}{x}-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,dt \iff -f'(x)=\frac{1}{x}-f(x)\iff \boxed{f'(x)=-\frac{1}{x}+f(x).}$$

[3] Car toutes les intégrales qui suivent convergent, garantissant l'existence des limites.

9. Puisque f est dérivable sur $]0,+\infty[$, elle y est continue. Et alors f' est également continue $]0;+\infty[$ car somme de la fonction $x\mapsto -\frac{1}{x}$ et de f, qui sont toutes deux continues.
De même, f' est dérivable car somme de fonctions dérivables. Et on a alors, en dérivant la relation de la question 8,

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ f''(x)=\frac{1}{x^2}+f'(x).}$$

Et puisque f' est continue, f'' est continue sur $]0;+\infty[$ car somme de fonctions continues. Ceci prouve donc que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$, car deux fois dérivable et à dérivée seconde continue.

☠ Danger
Attention à ne pas s'arrêter à «f' est dérivable, donc f est deux fois dérivable.»
Une fonction $\mathscr{C}^2$ est une fonction deux fois dérivable **dont la dérivée seconde est continue.**

Remarque
Le même raisonnement pourrait se poursuivre pour prouver que f est $\mathscr{C}^3$, puis $\mathscr{C}^4$, etc, et donc que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

B – Intervention d'une fonction auxiliaire g.

10. La fonction $x\mapsto e^{-x}$ est une fonction de référence, dérivable sur $]0,+\infty[$, et nous avons prouvé à la question 6 que f est dérivable sur ce même intervalle. Donc g est dérivable sur $]0;+\infty[$ car produit de deux fonctions dérivables.
On a alors

$$\forall x\in]0;+\infty[,\ g'(x)=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=e^{-x}\left(-\frac{1}{x}+f(x)\right)-e^{-x}f(x)=\boxed{-\frac{e^{-x}}{x}.}$$

11. Soit $x>0$. Alors pour $u\in[x;+\infty[$, on a

$$0\leqslant\frac{e^{-u}}{u}\leqslant\frac{e^{-u}}{x}.$$

Mais $\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{x}\,du$ converge car $\int_x^{+\infty}e^{-u}\,du$ converge. Par critère de comparaison, on en déduit donc que $\boxed{\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du \text{ converge.}}$

Soit $A>0$. En intégrant l'égalité de la question 10 sur le segment $[x,A]$, il vient

$$\int_x^A g'(u)\,du=-\int_x^A\frac{e^{-u}}{u}\,du\Leftrightarrow g(x)-g(A)=\int_x^A\frac{e^{-u}}{u}\,du. \qquad (\star)$$

Or, lorsque $A \to +\infty$, on a $e^{-A} \to 0$ et $f(A) \to 0$ d'après la question 3. On en déduit que $\lim\limits_{A \to +\infty} g(A) = 0$.
Et donc, en passant à la limite dans l'égalité $(\star)$, il vient

$$\boxed{g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du.}$$

Enfin, en multipliant par e^x, il vient

$$f(x) = e^x g(x) = \boxed{e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du.}$$

12. Il a été démontré à la question 4 que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. Et donc

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = e^{-x} f(x) \boxed{\underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.}$$

13. Notons qu'il s'agit d'une série à termes positifs puisque, par positivité de l'intégrale, pour tout $n \geqslant 1$, $n^2 \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du \geqslant 0$.
De plus, d'après la question précédente,

$$\int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-n}}{n} \text{ de sorte que } n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du \underset{n \to +\infty}{\sim} ne^{-n}.$$

Et puisque $ne^{-n} = n\left(\frac{1}{e}\right)^n$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} ne^{-n}$ est une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{e} \in]-1, 1[$, donc convergente.
D'après le critère des équivalents pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n \geqslant 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du \text{ converge.}}$

Partie III : Étude d'une densité.

14. La fonction h est évidemment continue sur $]-\infty, 0[$ car constante, et elle l'est sur $]0; +\infty[$ car quotient de fonction usuelles continues, dont le dénominateur ne s'annule pas.
Ainsi, h est continue sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement[4] en 0.
h est évidemment positive car pour $t > 0$, $\frac{e^{-t}}{1+t} \geqslant 0$ et $f(1) > 0$ d'après la question 3.
Enfin, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^0 h(t)\, dt = \int_{-\infty}^0 0\, dt = 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\, dt = f(1)$ de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, dt = \int_{-\infty}^0 h(t)\, dt + \frac{1}{f(1)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\, dt = \frac{f(1)}{f(1)} = 1.$$

Ainsi, $\boxed{h \text{ est une densité de probabilités.}}$

[4] Rappelons qu'une densité a droit à un nombre fini de points de discontinuité et donc qu'il n'est pas nécessaire de vérifier si h est continue en 0 ou non.

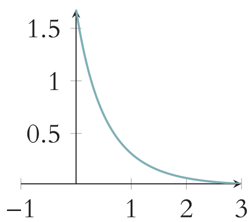


Figure 1– La densité h.

15. Par définition, X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} th(t)\, dt = \frac{1}{f(1)} \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1+t}\, dt$ converge[5].
De plus, pour $t > 0$, on a

$$\frac{te^{-t}}{1+t} = \frac{(1+t)e^{-t} - e^{-t}}{1+t} = e^{-t} - \frac{e^{-t}}{1+t}.$$

Puisque les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\, dt$ convergent, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1+t}\, dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1+t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\, dt = 1 - f(1).$$

[5] Absolument, mais il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive, donc la convergence garantit la convergence absolue.

On en déduit que X admet une espérance et que

$$E(X) = \frac{1}{f(1)} \int_0^{+\infty} t \frac{e^{-t}}{1+t}\, dt = \frac{1}{f(1)}(1 - f(1)) = \boxed{\frac{1}{f(1)} - 1.}$$

PROBLÈME 2

Partie I : Un exemple

1. On a $A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

On constate alors que les colonnes de A_0 sont deux à deux colinéaires, et donc A_0 est de rang 1.

Et puisque $\operatorname{rg}(A_0) < 4$, on en déduit que $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A_0,}$ et que la dimension du sous-espace propre associé est

$$\dim E_0(A_0) = 4 - \operatorname{rg}(A_0) = 3.$$

De plus, les colonnes de A_0 sont liées par les relations suivantes : $C_1 + C_2 = 0$, $-2C_1 + C_3 = 0$ et $C_1 + C_4 = 0$, de sorte que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A_0 associés à la valeur propre 0.

Cette famille étant libre[6] et de cardinal $3 = \dim E_0(A_0)$, c'est une base de $E_0(A_0)$.

Alternative — Si on ne veut pas utiliser de relations sur les colonnes, il est bien entendu possible de résoudre un système pour trouver une base du sous-espace propre.

[6] Utiliser les coefficients nuls.

2.a. On a $A_0 U_0 = U_0 \Big(\underbrace{{}^t V_0 U_0}_{\in \mathbf{R}} \Big) = \boxed{1 \times U_0.}$

2.b. La question précédente prouve que U_0 est vecteur propre[7] de A_0 pour la valeur propre 1.
Nécessairement, on a alors $\dim E_1(A_0) \geqslant 1$ et donc $\dim E_0(A_0) + \dim E_1(A_0) \geqslant 4$. L'inégalité réciproque étant toujours vérifiée, on a $\dim E_0(A_0) + \dim E_1(A_0) = 4$, et donc A_0 est diagonalisable.

[7] Notons que $U_0 \neq 0$.

2.c. Une base de vecteurs propres de A_0 est obtenue par concaténation des bases de chacun des sous-espaces propres. Or, une base de $E_1(A_0)$ est U_0, et donc une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de A_0 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ à cette base de vecteurs propres, c'est-à-dire $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, on a $A_0 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

P ou P^{-1} ? — La convention utilisée dans ce sujet n'est pas celle du cours : on veut $A = PDP^{-1}$ et non $A = P^{-1}DP$.
Donc c'est P qui est la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres, et non P^{-1} comme nous en avons l'habitude.
En cas de doute, il faut être capable de revenir à la formule de changement de base, la matrice de f dans la base de vecteurs propres devant être diagonale.

Partie II : Une caractérisation des matrices de rang 1

3.a. On a $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et ${}^tV \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$, et donc $U{}^tV \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
De plus, par définition du produit matriciel, le coefficient situé à la i-ème ligne et j-ème colonne de $U{}^tV$ est

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{1} U_{i,k}({}^tV)_{k,i} = \sum_{k=1}^{1} U_{i,k} V_{j,k} = \sum_{k=1}^{1} u_i v_j = u_i v_j.$$

Produit matriciel — Faire le produit «à la main» permet bien de se convaincre de cette formule.
Rappelons que si on souhaite écrire la somme, k doit varier de 1 au nombre de colonnes de la première matrice, qui ici vaut 1.

3.b. On a

$$\operatorname{tr}(U{}^tV) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} u_i v_i.}$$

3.c. La j-ème colonne de $U{}^tV$ est v_j fois U.
Donc en particulier, toutes les colonnes de $U{}^tV$ sont dans $\operatorname{Vect}(U)$, qui est de dimension

un car $U \neq 0$. On en déduit que $\mathrm{rg}(U^tV) \leqslant 1$.
De plus, V est non nul, et donc l'un des v_j est non nul, de sorte que la j-ème colonne de U^tV est non nulle.
Ainsi, U^tV n'est pas la matrice nulle, et donc son rang n'est pas nul : $\boxed{\mathrm{rg}\left(U^tV\right) = 1.}$

Rang
Rappelons que, **par définition**, le rang d'une matrice est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ engendré par ses vecteurs colonnes.

4.a. Puisque A est de rang 1, ce n'est pas la matrice nulle : l'une au moins de ses colonnes est non nulle. Notons la $C_{j_0}(A)$.
Toutes les autres colonnes de A sont alors colinéaires à $C_{j_0}(A)$, donc pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe $\boxed{\alpha_j \in \mathbf{R} \text{ tel que } C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A).}$

Danger !
Il est important de choisir ici une colonne **non nulle** de A, c'est-à-dire une colonne qui engendre bien l'espace des vecteurs colonnes.
L'emploi du mot «colinéaire» peut être trompeur : tout vecteur est colinéaire au vecteur nul. Pour autant, tout vecteur ne s'écrit pas comme un scalaire fois le vecteur nul.

4.b. Notons $U = C_{j_0}(A)$ et $V = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$. Alors U^tV est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont la j-ème colonne est $U\alpha_j = \alpha_j C_{j_0}(A) = C_j(A)$. C'est donc A : $\boxed{A = U^tV}$.
De plus, U est non nul, car à la question précédente, on a supposé que $C_{j_0}(A) \neq 0$.
Et V est non nul car $\alpha_{j_0} = 1$ puisqu'on doit avoir $C_{j_0}(A) = \alpha_{j_0}C_{j_0}(A)$.

5. De la question 3.a et de la question 4.b, on déduit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux vecteurs colonnes non nuls U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tels que $A = U^tV$.

Partie III : Une application en probabilités

6. D'après la question 3.a, le coefficient à la i-ème ligne et j-ème colonne de $U_X{}^tU_Y$ est $P(X = i)P(Y = j)$. Mais, par indépendance de X et de Y, on a alors

$$P(X = i)P(Y = j) = P([X = i] \cap [Y = j]) = m_{i,j}.$$

Ceci prouve donc que $U_X{}^tU_Y = M$, et donc $\boxed{M \text{ est de rang } 1}$ car U_X et U_Y sont deux vecteurs colonnes non nuls[8].

[8] Car la somme de leurs coefficients vaut 1 par la formule des probabilités totales, donc l'un au moins des coefficients est non nul.

7.a. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Montrons que le i-ème coefficient du vecteur colonne $C_1(M) + \cdots + C_n(M)$ est égal au i-ème coefficient de U_X.
Ce coefficient est

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j} = \sum_{j=1}^n P([X = i] \cap [Y = j]).$$

Mais $Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$, de sorte que $\{[Y = j], j \in [\![1,n]\!]\}$ est un système complet d'événements.
Par la formule des probabilités totales, on a alors

$$\sum_{j=1}^n P([X = i] \cap [Y = j]) = P(X = i).$$

Et donc les coefficients de $C_1(M) + \cdots + C_n(M)$ coïncident avec ceux de U_X :

$$\boxed{C_1(M) + \cdots + C_n(M) = U_X.}$$

7.b. Puisque M est de rang 1, par la question 4.a, il existe $j_0 \in [\![1,n]\!]$ et des réels $\alpha_1, \dots \alpha_n$ tels que pour tout $j \in [\![1,n]\!], C_j(M) = \alpha_j C_{j_0}(M)$.
Mais alors

$$C_1(M) + \cdots + C_n(M) = \alpha_1 C_{j_0}(M) + \cdots + \alpha_n C_{j_0}(M) = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)C_{j_0}(M).$$

Et donc $U_X = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)C_{j_0}(M)$, de sorte que[9] $C_{j_0}(M) = \dfrac{1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}U_X$.
Et donc pour tout $j \in [\![1,n]\!], C_j(M) = \dfrac{\alpha_j}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}U_X$.
En posant $\beta_j = \dfrac{\alpha_j}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$, on a donc $\boxed{C_j(M) = \beta_j U_X.}$

[9] $U_X \neq 0$, donc la somme des α_i est également non nulle.

7.c. Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X = i], i \in [\![1,n]\!]\}$, on a, $\forall j \in [\![1,n]\!]$,

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^n P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} = \sum_{i=1}^n \beta_j (U_X)_i = \beta_j \sum_{i=1}^n P(X = i) = \boxed{\beta_j.}$$

7.d. Pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$P([X=i]\cap[Y=j]) = m_{i,j} = \beta_j(U_X)_i = P(X=i)P(Y=j).$$

Donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$

Partie IV : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

8. Puisque A est de rang $1 < n$, 0 est valeur propre de A et $\dim E_0(A) = n - \text{rg}(A) = \boxed{n-1.}$

9. Nous avons prouvé précédemment que $A_{i,j} = u_i v_j$, de sorte que

$$a = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,i} = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

D'autre part, on a

$${}^tVU = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (v_1u_1 + \dots + v_nu_n) = (a).$$

Notation Le a entre parenthèses est là pour nous rappeler que ${}^tVU$ est une matrice 1×1 (que l'on assimile à un réel).

Il vient alors

$$A^2 = U\,{}^tVU\,{}^tV = U({}^tVU)\,{}^tV = U(a)\,{}^tV = aU\,{}^tV = \boxed{aA.}$$

10. Un polynôme annulateur de A est $X^2 - aX = X(X-a)$, dont les racines sont 0 et a. Donc les valeurs propres de A sont parmi[10] 0 et a.
Si $a = 0$, A ne possède donc qu'une seule valeur propre, égale à 0.
Mais on a alors $\dim E_0(A) = n-1 < n$, et donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

[10] On sait déjà que 0 est valeur propre de A, mais il faut encore employer le conditionnel pour a.

11. $AU = U\,{}^tVU = U(a) = aU$. Puisque $U \neq 0$ par hypothèse, a est bien une valeur propre de A, distincte de la valeur propre 0. Et alors $\dim E_a(A) \geqslant 1$, de sorte que

$$\dim E_0(A) + \dim E_a(A) \geqslant n$$

et donc $\dim E_0(A) + \dim E_a(A) = n$: $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

Rappel On a nécessairement

$$\dim E_0(A) + \dim E_a(A) \leqslant n.$$

12. Une matrice de rang 1 est nécessairement de la forme $U\,{}^tV$, avec U et V deux vecteurs colonnes non nuls. Les résultats des questions 10 et 11 prouvent alors que A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$.

Partie V : Construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique

13. On a, pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$({}^tAA)_{i,j} = \sum_{k=1}^n ({}^tA)_{i,k}A_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j}.$$

Et donc

$$\text{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n ({}^tAA)_{i,i} = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,i} = \boxed{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.}$$

14. Soient $M, N, P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\langle \lambda M + N, P\rangle = \text{tr}({}^t(\lambda M+N)P) = \text{tr}(\lambda\,{}^tMP + {}^tNP) = \lambda\text{tr}({}^tMP) + \text{tr}({}^tNP) = \lambda\langle M,P\rangle + \langle N,P\rangle.$$

Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche.
De plus, on a, pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\langle M,N\rangle = \text{tr}({}^tMN) = \text{tr}({}^t({}^tMN)) = \text{tr}({}^tNM) = \langle N,M\rangle.$$

Rappel Pour tout matrice carrée A, on a

$$\text{tr}(A) = \text{tr}({}^tA).$$

Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique, donc bilinéaire symétrique.
Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, alors, par la question précédente,

$$\langle A,A\rangle = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \geqslant 0.$$

De plus, on a $\langle A, A\rangle = 0$ si et seulement si[11] $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}^2 = 0 \Leftrightarrow a_{i,j} = 0$.
Autrement dit, $\langle A, A\rangle = 0$ si et seulement si $A = 0$.
Ceci achève de prouver que $\boxed{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$

[11] Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls.

15. On a ${}^tS = {}^t(V\,{}^tV) = {}^t({}^tV){}^tV = V\,{}^tV = S$, donc $\boxed{S \text{ est une matrice symétrique.}}$
On a alors, comme à la question 9, $S^2 = \mathrm{tr}(S)S$.
Or, nous avons prouvé, toujours à la question 9, que $\mathrm{tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = 1$. Donc $\boxed{S^2 = S.}$

16.a. Il est évident que Φ est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\Phi(\lambda A + B) = S(\lambda A + B) = \lambda SA + SB = \lambda\Phi(A) + \Phi(B).$$

Donc Φ est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Alors

$$\langle \Phi(A), B\rangle = \mathrm{tr}({}^t(SA)B) = \mathrm{tr}({}^tA\,{}^tSB) = \mathrm{tr}({}^tASB).$$

De même, on a

$$\langle A, \Phi(B)\rangle = \mathrm{tr}({}^tASB) = \langle \Phi(A), B\rangle.$$

Donc $\boxed{\Phi \text{ est bien un endomorphisme symétrique.}}$

16.b. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a $\Phi^2(M) = \Phi(SM) = S^2M = SM = \Phi(M)$.
Donc on a bien $\boxed{\Phi^2 = \Phi.}$
Ceci signifie que Φ est un projecteur, et donc ses valeurs propres sont dans $\{0, 1\}$.
De plus, on a $\Phi(S) = S^2 = S$, et $S \neq 0$. Donc 1 est bien valeur propre de Φ.
De plus, si 1 était l'unique valeur propre de Φ, alors Φ serait l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Mais $\Phi(I_n) = SI_n = S \neq I_n$, car $\mathrm{rg}(S) = 1$ et $\mathrm{rg}(I_n) = n \geqslant 2$.
Donc Φ possède une seconde valeur propre, qui est forcément égale à 0.
Ainsi, on a prouvé que $\boxed{\mathrm{Spec}(\Phi) = \{0, 1\}.}$

Valeurs propres
Les valeurs propres d'un projecteur p sont **dans** $\{0, 1\}$.
Il se peut que 0 ne soit pas valeur propre (si p est l'identité) ou que 1 ne soit pas valeur propre (si $p = 0$).

Détails
Φ est un projecteur, donc diagonalisable, et donc s'il possédait 1 comme unique valeur propre, sa matrice dans une base de vecteurs propres serait la matrice diagonale dont tous les coefficients valent 1, c'est-à-dire l'identité.
Et donc Φ serait égale à l'application identité.

16.c. Puisque Φ est un projecteur, ses deux sous-espaces propres sont supplémentaires.
Et puisqu'il est symétrique, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.
Remarque : puisque Φ est à la fois un projecteur et un endomorphisme symétrique, cela signifie que c'est un projecteur orthogonal.

EML 2012

Problème 1

Sujet : Matrices symétriques positives et interpolation polynomiale **Facile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : polynômes, diagonalisation des matrices symétriques.

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geqslant 2$.
On confond polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ et fonction polynomiale sur $\mathbf{R}$ ou sur $[0, +\infty[$ ou sur $]0; +\infty[$.
On note $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Partie I : Interpolation polynomiale

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On note

$$\varphi : \mathbf{R}_{n-1}[X] \to \mathbf{R}^n, P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)).$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme.
2. En déduire que, pour tout $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$, il existe $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ unique tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ P(a_i) = b_i.$$

3. *Exemple* : déterminer le polynôme P_0 de $\mathbf{R}_3[X]$ tel que :

$$P_0(0) = 1, P_0(1) = 3, P_0(2) = 11, P_0(3) = 31.$$

Partie II : Polynômes spéciaux

On considère l'ensemble E des polynômes P de $\mathbf{R}[X]$ tels que

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ (P(x) > 0 \text{ et } P'(x) > 0).$$

4. Donner un exemple d'élément de E.
5. Montrer que E est stable par multiplication par un réel strictement positif, par addition et par multiplication, c'est-à-dire que, pour tout $\alpha \in]0, +\infty[$ et tous $P, Q \in E$, on a :

$$\alpha P \in E, P + Q \in E, PQ \in E.$$

   Est-ce que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$?

6. Soit $P \in E$. On note $P_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto \displaystyle\int_0^x P(t)\,dt.$
   Montrer que $P_1 \in E$.
7. Soit $P \in E$. Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ P(x) \geqslant P(0)$.

Pour tout $P \in E$, on note $\widetilde{P} : [0, +\infty[\to [P(0), +\infty[,\ x \mapsto \widetilde{P}(x) = P(x)$.

8. Montrer que l'application $\widetilde{P}$ est bijective.
9. Si, de plus, P est de degré au moins 2, est-ce que l'application réciproque $\widetilde{P}^{-1}$ de $\widetilde{P}$ est une application polynomiale ?

Partie III : Matrices symétriques positives

On note $\mathbf{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que

$$\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}),\ {}^tUAU \geqslant 0.$$

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

10. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$? Justifier.
11. a. Montrer que si A est dans $\mathbf{S}_n^+$, alors toutes les valeurs propres de A sont dans $[0, +\infty[$.
    b. Réciproquement, montrer que si toutes les valeurs propres de A sont dans $[0, +\infty[$, alors A est dans $\mathbf{S}_n^+$.

Partie IV : Matrice symétrique positive solution d'une équation polynomiale spéciale

Soit $P \in E$ de degré $n-1$ (l'ensemble E a été défini dans la partie II), et soit $A \in \mathbf{S}_n^+$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, appartenant toutes à $[P(0); +\infty[$.

On note D la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les termes diagonaux sont successivement $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et Q une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$.

On se propose de résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathbf{S}_n^+$.

12. On suppose que l'équation $P(S) = A$ a une solution dans $\mathbf{S}_n^+$.
Soit S appartenant à $\mathbf{S}_n^+$ telle que $P(S) = A$. On note $\Delta = Q^{-1}SQ$.
    - a. Montrer que $SA = AS$ et en déduire que $\Delta D = D\Delta$.
    - b. Démontrer que Δ est diagonale et que les éléments diagonaux de Δ sont tous positifs ou nuls.
13. Établir que l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathbf{S}_n^+$ admet une solution et une seule, et que celle-ci est $Q\Delta Q^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale que l'on exprimera à l'aide de $\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)$, où $\widetilde{P}$ a été définie dans la partie II.
14. *Exemple* : On prend ici $n = 4$, $P = X^3 + X + 1$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 21 \end{pmatrix}$.
    - a. Vérifier que $P \in E$.
    - b. Déterminer les valeurs propres de A et montrer : $A \in \mathbf{S}_4^+$.
    - c. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Q telles que $A = QDQ^{-1}$.
    - d. Résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathbf{S}_4^+$.

PROBLÈME 2

Sujet : Formule de Stirling, convergence en loi dans le paradoxe des anniversaires **Difficile**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : intégration sur un segment, suites et séries, variables à densité, probabilités discrètes, convergence en loi.

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : La première partie, bien que technique est un grand classique qui permet d'établir la formule de Stirling. La seconde partie, tout aussi calculatoire est un des rares exemples de sujets de Lyon comportant vraiment des probabilités.

Partie I : Formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. a. Montrer, que la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
   b. Monter, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_n > 0$.
3. a. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
   b. En déduire, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1 W_0$.
4. a. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
   b. En déduire : $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$ puis $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
5. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$: $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$: $A_n = \dfrac{1}{n!} n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $a_n = -1 - \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} a_n$ converge.
7. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.
8. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.

9. a. Justifier : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

   b. En utilisant l'expression de W_{2n} à l'aide de factorielles, en déduire la valeur de ℓ et l'équivalent suivant :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Partie II : Étude de variables aléatoires

Soit un réel a strictement positif et la fonction $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie, pour tout réel x par

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

10. Montrer que f_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant f_a comme densité.

11. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
12. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.
13. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$.
14. a. On considère une variable aléatoire V suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$. Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(V)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.

    b. Écrire une fonction `Scilab` nommée `simul`, prenant en entrée le paramètre $a > 0$ et retournant une simulation de la variable aléatoire X.

Pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$, on considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue, dans U_n, des tirages d'une boule avec remise. On suppose que tous les tirages dans U_n sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue.

On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

15. Justifier : $P(T_n > n+1) = 0$.
16. Déterminer, pour tout entier k tel que $k \leqslant n$: $P(T_n > k)$.

On considère la variable aléatoire $Y_n = \dfrac{T_n}{\sqrt{n}}$. On se propose d'étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 2}$.

Soit $y \in [0; +\infty[$. On note k_n l'entier naturel égal à la partie entière de $y\sqrt{n}$. On a donc : $k_n \leqslant y\sqrt{n} < 1 + k_n$.

17. Justifier $P(Y_n > y) = P(T_n > k_n)$.
18. En utilisant 9.b, montrer $P(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n}\left(1 - \dfrac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}$.
19. a. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $t \mapsto -t + (t-1)\ln(1-t)$ en 0.

    b. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-k_n + (k_n - n)\ln\left(1 - \dfrac{k_n}{n}\right)\right) = -\dfrac{y^2}{2}$.
20. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.

EML 2012 : Corrigé

Problème 1

Partie I : Interpolation polynomiale

1. Commençons par prouver que φ est linéaire : soient $P, Q \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(a_1), \dots, (\lambda P + Q)(a_n))\\ &= (\lambda P(a_1) + Q(a_1), \dots, \lambda P(a_n) + Q(a_n)) = \lambda(P(a_1), \dots, P(a_n)) + (Q(a_1), \dots, Q(a_n))\\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).\end{aligned}$$

De plus, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$.
Donc P possède n racines distinctes. Or, P est de degré au plus $n-1$, et alors $P = 0$.
Nous venons donc de prouver que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$, c'est-à-dire que φ est injectif.
Mais $\dim \mathbf{R}_{n-1}[X] = n = \dim \mathbf{R}^n$, et donc $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme.}}$

Rédaction Lorsque l'espace de départ et l'espace d'arrivée ne sont pas les mêmes, on oubliera pas de vérifier l'égalité des dimensions, sans quoi il n'est pas vrai qu'une application linéaire injective est un isomorphisme.

2. D'après ce qui précède, φ est surjectif, donc pour tout $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$, il existe un unique $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ tel que $\varphi(P) = (b_1, \dots, b_n)$, c'est-à-dire tel que

$$\forall i \in [\![1, \dots, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

3. Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ tels que $P_0 = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Alors

$$\begin{cases}P_0(0) = 1\\ P_0(1) = 3\\ P_0(2) = 11\\ P_0(3) = 31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}d = 1\\ a+b+c+d = 3\\ 8a+4b+2c+d = 11\\ 27a+9b+3c+d = 31\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}d = 1\\ a+b+c = 2\\ 8a+4b+2c = 10\\ 27a+9b+3c = 30\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = 1\\ b = 0\\ c = 1\\ d = 1\end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique polynôme vérifiant les conditions demandées est } X^3 + X + 1.}$

Partie II : polynômes spéciaux

4. $P = X^2$ convient, car $\forall x > 0$, on a $P(x) = x^2 > 0$ et $P'(x) = 2x > 0$.
5. Soient $P, Q \in E$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. Alors $\forall x \in]0; +\infty[$, on a

$$\alpha P(x) > 0 \text{ et } (\alpha P)'(x) = \alpha P'(x) > 0 \text{ donc } \alpha P \in E.$$

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) > 0 \text{ et } (P+Q)'(x) = P'(x) + Q'(x) > 0 \text{ donc } P+Q \in E.$$

$$(PQ)(x) = P(x)Q(x) > 0 \text{ et } (PQ)'(x) = P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x) > 0 \text{ donc } PQ \in E.$$

Toutefois, E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$, par exemple car le polynôme nul n'est pas dans E.

Explication E étant stable par addition et par multiplication par un réel positif, ce qu'il lui manque pour être un espace vectoriel est la stabilité par la multiplication par un réel négatif : si $\alpha \leqslant 0$ et si $P \in E$, alors $\alpha P \notin E$.

6. Nous savons que P_1 est une primitive de P, et que $P_1(0) = 0$. En particulier, P_1 est un polynôme[1].
En particulier, pour tout $x > 0$, $P_1'(x) = P(x) > 0$ car $P \in E$. Par conséquent, P_1 est strictement croissant sur $[0, +\infty[$, et $P_1(0) = 0$, donc pour $x > 0$, on a $P_1(x) > P_1(0) = 0$.
Ainsi, on a bien $\boxed{P_1 \in E.}$

[1] Car primitive d'un polynôme.

7. Puisque $P \in E$, on a $P'(x) > 0$ pour $x \in]0, +\infty[$, de sorte que P est strictement croissant sur $[0, +\infty[$.
Et donc $\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ P(x) \geqslant P(0).}$
8. $\widetilde{P}$ est continue et strictement croissante car elle est dérivable, et sa dérivée est $\widetilde{P}'(x) = P'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$.
De plus, on a $\widetilde{P}(0) = P(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. En effet, $\widetilde{P}$ est polynomiale et non constante (car P' est non nul), et donc sa limite en $+\infty$ est soit $-\infty$, soit $+\infty$. Mais puisque $\forall x > 0, \widetilde{P}(x) > 0$, on ne saurait avoir $\lim\limits_{x\to+\infty} \widetilde{P}(x) = -\infty$. Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \widetilde{P}(x) = +\infty$.

Alors par le théorème de la bijection, $\boxed{\widetilde{P} \text{ réalise une bijection de } [0, +\infty \text{ sur } [P(0), +\infty[.}$

9. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\widetilde{P}^{-1}$ soit une application polynomiale, et notons $\widetilde{P}^{-1} = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où $d = \deg \widetilde{P}^{-1}$, et donc $a_d \neq 0$.

De même, notons $\widetilde{P} = \sum_{i=0}^{\ell} b_i X^i$, avec $b_\ell \neq 0$.

Puisque $\widetilde{P}^{-1}$ est bijective, $\widetilde{P}^{-1}$ ne saurait être une constante, et donc $d \geqslant 1$.
Ainsi, on a

$$\forall x \in]P(0), +\infty[,\ \widetilde{P}(\widetilde{P}^{-1}(x)) = x.$$

Mais

$$\widetilde{P}(\widetilde{P}^{-1}(x)) = \sum_{i=0}^{\ell} b_i \left(\sum_{k=0}^{d} a_k x^k \right)^i.$$

En développant $\left(\sum_{k=0}^{d} a_k x^k \right)^\ell$, on obtient un terme de degré $\ell \times d$ qui est $a_d^\ell b_\ell X^{\ell d}$. Et tous les autres termes sont de degré inférieur strictement à ℓd.
Et donc $\widetilde{P}(\widetilde{P}^{-1})$ est un polynôme de degré $\ell d \geqslant 2$ (car $\ell \geqslant 2$ et $d \geqslant 1$.)
Mais $\widetilde{P}(\widetilde{P}^{-1}(x)) = x$, donc $\widetilde{P}(\widetilde{P}^{-1})$ est de degré 1 : contradiction.
Ainsi, $\boxed{\widetilde{P}^{-1} \text{ n'est pas une application polynomiale.}}$

Remarque
Notons que si P est de degré 1, de la forme $aX + b$, alors $\tilde{P}^{-1} = \dfrac{X-b}{a}$ qui est de degré 1.

Partie III : Matrices symétriques positives

10. A est symétrique réelle, donc $\boxed{\text{diagonalisable.}}$

11.a. Soit λ une valeur propre de A, et soit X un vecteur propre associé.
Alors ${}^tXAX \geqslant 0$ par hypothèse car $A \in \mathbf{S}_n^+$.
Mais d'autre part, ${}^tXAX = {}^tX\lambda X = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$, où $\|X\|$ est la norme de X pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Et puisque $X \neq 0$ (c'est un vecteur propre), alors $\|X\|^2 > 0$. Et donc il vient $\lambda \geqslant 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{toutes les valeurs propres de } A \text{ sont positives.}}$

Rédaction ✎
Il est important de préciser que $\|X\|^2 \neq 0$, car si $\|X\|^2 = 0$, alors $\lambda \times 0 \geqslant 0$ ne permet pas de conclure quoi que ce soit quant au signe de λ.

11.b. Supposons à présent que toutes les valeurs propres de A soient positives.
Puisque A est symétrique réelle, il existe une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteur propres de A.
Notons $(X_1, \dots, X_n)$ une telle base, et soit λ_i la valeur propre de A associée à X_i.

Si $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ alors X s'écrit de manière unique $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$. Et alors

$$\begin{aligned}
{}^tXAX &= \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j {}^tX_j \right) A \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j {}^tX_j \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A X_i \right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j {}^tX_j \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i X_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \lambda_i {}^tX_j X_i.
\end{aligned}$$

Mais la famille $(X_1, \dots, X_n)$ étant orthonormée[2], on a ${}^tX_jX_i = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$. Et donc

$$ {}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2 \geqslant 0.$$

On en déduit donc que $\boxed{A \in \mathbf{S}_n^+.}$

[2] Pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Partie IV : Matrice symétrique positive solution d'une équation polynomiale spéciale

12.a. Si $P(S) = A$, alors A est un polynôme en S. Et puisque S commute avec tout polynôme en S, A et S commutent, de sorte que $\boxed{AS = SA.}$
On en déduit que

$$\Delta D = (Q^{-1}SQ)(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}SAQ = Q^{-1}ASQ = (Q^{-1}AQ)(Q^{-1}SQ) = D\Delta.$$

12.b. Notons $d_{i,j}$ les coefficients de D et $\delta_{i,j}$ les coefficients de Δ.
Puisque D et Δ commutent, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\delta_{k,j} = (D\Delta)_{i,j} = (\Delta D)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}d_{k,j}.$$

Mais puisque $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $d_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et donc $\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\delta_{k,j} = \lambda_i\delta_{i,j}$.

De même $\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}d_{k,j} = \delta_{i,j}\lambda_j$.

Ainsi, $\delta_{i,j}\lambda_i = \delta_{i,j}\lambda_j \Leftrightarrow (\lambda_i - \lambda_j)\delta_{i,j} = 0$. Si $i \neq j$, alors $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, et donc $\delta_{i,j} = 0$.

Ainsi, $\boxed{\Delta \text{ est diagonale.}}$

De plus, puisque $\Delta = QSQ^{-1}$, alors $S = Q^{-1}\Delta Q$, et Δ étant diagonale, ses coefficients diagonaux sont ses valeurs propres, qui sont également[3] les valeurs propres de S, qui sont toutes $\boxed{\text{positives ou nulles}}$ car $S \in \mathbf{S}_n^+$.

> **Détail**
> Les valeurs propres de A sont deux à deux distinctes par hypothèse.

[3] Car S et Δ sont semblables.

13. Soit S une solution de l'équation $P(S) = A$. Alors nous venons de prouver qu'il existe une matrice diagonale Δ, à coefficients diagonaux positifs, telle que $S = Q^{-1}\Delta Q$.
Notons $d_1, \dots, d_n$ les coefficients diagonaux de Δ. Alors

$$Q^{-1}DQ = A = P(S) = Q^{-1}P(\Delta)Q = Q^{-1}\begin{pmatrix} P(d_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(d_n) \end{pmatrix}Q.$$

> **Autrement dit**
> S est diagonalisable et une base de vecteurs propres de A est également une base de vecteurs propres de S.

Donc en multipliant à gauche par Q et à droite par Q^{-1}, il vient

$$\begin{pmatrix} P(d_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(d_n) \end{pmatrix} = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors $P(d_1) = \lambda_1, \dots, P(d_n) = \lambda_n$.
Puisque P réalise une bijection de $\mathbf{R}^+$ sur $[P(0), +\infty[$ et que tous les λ_i sont dans $[P(0), +\infty[$ par hypothèse, alors nécessairement $\forall i \in [\![1,n]\!], d_i = \widetilde{P}^{-1}(\lambda_i)$.
Ainsi, il existe au plus une solution de l'équation $P(S) = A$, qui est

$$S = Q^{-1}\begin{pmatrix} \widetilde{P}^{-1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n) \end{pmatrix}Q.$$

Inversement, si on pose $S = Q^{-1}\begin{pmatrix} \widetilde{P}^{-1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n) \end{pmatrix}Q$, alors

$$\begin{aligned} P(S) = Q^{-1}P\left(\begin{pmatrix} \widetilde{P}^{-1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n) \end{pmatrix}\right)Q &= Q^{-1}\begin{pmatrix} P(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1)) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)) \end{pmatrix}Q \\ &= Q^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}Q = Q^{-1}DQ = A. \end{aligned}$$

> **Synthèse**
> Cette phase est indispensable : nous n'avons pas encore prouvé qu'une telle solution existe, mais avons juste dit que si une solution existe, c'est celle donnée précédemment. Il s'agit donc de prouver qu'il s'agit bien d'une solution de l'équation.

Donc l'équation $P(S) = A$ admet au moins une solution.

$$\boxed{\text{Ainsi, l'équation } P(S) = A \text{ admet une unique solution qui est } S = Q^{-1}\begin{pmatrix} \widetilde{P}^{-1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n) \end{pmatrix}Q.}$$

14.a. Pour $x > 0$, on a $P(x) = x^3 + x + 1 > 1 > 0$, et $P'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Donc $\boxed{P \in E.}$

14.b. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors λ est valeur propre de A si et seulement si $\operatorname{rg}(A - \lambda I_4) < 4$. Or,

$$A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21-\lambda & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 21-\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftrightarrow L_4}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 21-\lambda \\ 0 & 0 & 21-\lambda & 10 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + (2-\lambda)L_1 \\ L_4 \leftarrow 10L_4 - (21-\lambda)L_3}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 21-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -341 + 42\lambda - \lambda^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, λ est valeur propre de A si et seulement si $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ ou $\lambda^2 - 42\lambda + 341 = 0$.
Et donc après résolution de ces deux équations (polynomiales de degré 2 en λ), on obtient $\lambda \in \{3, 1, 11, 31\}$.

Donc on a $\boxed{\operatorname{Spec}(A) = \{1, 3, 11, 31\}.}$

Puisque toutes ces valeurs propres sont positives[4], on a bien $\boxed{A \in \mathbf{S}_4^+.}$

> **Calculs**
> Notons que le discriminant de la seconde équation est $42^2 - 4 \times 341$, ce qui n'est pas bien difficile à calculer... à condition de savoir encore faire une multiplication à la main !
> Ce discriminant vaut $400 = 20^2$.

[4] Et que A est symétrique.

14.c. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$. Alors $X \in E_1(A) \Leftrightarrow AX = X$. Soit encore

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = x \\ -x + 2y = y \\ 21z + 10t = z \\ 10z + 21t = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ t = -2z \\ z = -2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Et donc $X \in E_1(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $E_1(A) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De même, en résolvant trois autres systèmes, on obtient

$$E_3(A) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_{11}(A) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, E_{31}(A) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notons que chacun des vecteurs propres obtenu est de norme $\sqrt{2}$, et donc, pour chaque sous-espace propre, une base orthonormée est obtenue en divisant le vecteur propre calculé par $\sqrt{2}$.
Et en concaténant ces bases orthonormées des sous-espaces propres, on obtient une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de A.

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 31 \end{pmatrix}.$$

Q est alors orthogonale car matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$, qui est orthonormée, à la base orthonormée de vecteurs propres de A. Et on a

$$A = QDQ^{-1} (\text{ avec } Q^{-1} = {}^tQ).$$

> **Q ou Q^{-1} ?**
> Attention à l'énoncé : si $A = QDQ^{-1}$, c'est que Q doit être la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres. Et donc c'est bien celle que nous avons écrite facilement, pas besoin de calculer P^{-1} (qui ici vaut ${}^tP$).

14.d. L'unique solution à l'équation $P(S) = A$ est

$$Q\begin{pmatrix} \widetilde{P}^{-1}(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{P}^{-1}(3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{P}^{-1}(11) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{P}^{-1}(31) \end{pmatrix}Q.$$

Mais ici, P est le polynôme obtenu à la question 3, de sorte que nous savons que

$$P(0) = 1, P(1) = 3, P(2) = 11 \text{ et } P(3) = 31.$$

Autrement dit, nous connaissons $\widetilde{P}^{-1}(1)$ (qui vaut 0), $\widetilde{P}^{-1}(3)$ (qui vaut 1), etc. Et donc l'unique solution à l'équation $P(S) = A$ est

$$S = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}Q^{-1} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}}.$$

Problème 2

Partie I : Formule de Stirling

1. On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,dt = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ et

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = \boxed{1.}$$

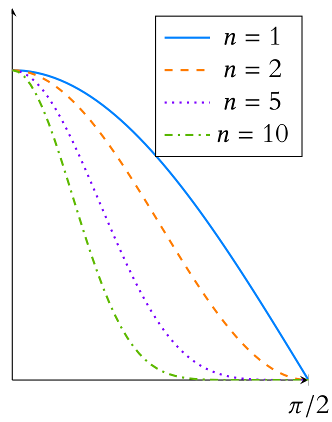


Figure 1– Les fonctions $t \mapsto (\cos t)^n$ pour quelques valeurs de n. On y voit bien que l'aire sous les courbes est de plus en plus petite, et donc que (W_n) est décroissante.

2.a. Pour $t \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$. Et donc $(\cos t)^{n+1} \leqslant (\cos t)^n$. Par croissance de l'intégrale, il vient alors

$$W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1}\,dt \leqslant \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,dt = W_n.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (W_n)_n \text{ est décroissante.}}$

2.b. La fonction $t \mapsto (\cos t)^n$ est continue et positive sur $[0, \pi/2]$. Comme elle est non nulle en $t = 0$, son intégrale W_n est strictement positive.

3.a. Calculons $(n+2)W_{n+2}$ par intégration par parties en posant $u = (\cos t)^{n+1}$ et $v = \sin t$, qui sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, avec $u' = -(n+1)\sin t(\cos t)^{n+1}$ et $v' = \cos t$. Alors

$$W_{n+2} = [\sin t(\cos t)^{n+1}]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^2 t(\cos t)^n\,dt = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 t(\cos t)^n\,dt.$$

Mais $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, et donc

$$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,dt - (n+1)\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+2}\,dt = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.$$

Soit encore $\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.}$

3.b. Montrons le résultat par récurrence sur n.
Pour $n = 0$, on a évidemment $W_1W_0 = W_1W_0$.
Supposons que $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0$. Alors

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
Par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, (n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0.}$$

4.a. Puisque (W_n) est décroissante, on a évidemment $W_n \geqslant W_{n+1}$.
De même on a $W_{n+1} \geqslant W_{n+2}$, et par la question 3.a, il vient alors $W_{n+1} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2}W_n$. On a donc prouvé que

$$\boxed{W_n \geqslant W_{n+1} \geqslant \frac{n+1}{n+2}W_n.}$$

4.b. On a $1 \geqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \geqslant \underbrace{\dfrac{n+1}{n+2}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$, donc par le théorème des gendarmes, $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \to 1$.

Et donc $\boxed{W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n.}$
De la question 3.b, on déduit que

$$\frac{\pi}{2} = W_0W_1 = (n+1)W_{n+1}W_n \sim (n+1)W_n^2 \sim nW_n^2.$$

Et donc $nW_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$ de sorte que $\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}.}$

Rappel
On a le droit d'élever des équivalents à une puissance fixée. En particulier à la puissance $1/2$, ce qui revient à prendre la racine des équivalents.

5. Montrons par récurrence sur n que $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.
Pour $n=0$, on a déjà $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$, donc la propriété est vraie.
Supposons donc que $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. Alors, par la question 3.a,

$$\begin{aligned}
W_{2(n+1)} &= \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)^2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2n+2)!}{(2(n+1))^2 2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

⚠ Attention !
Prouver la propriété au rang $n+1$, c'est vérifier l'égalité pour $W_{2(n+1)} = W_{2n+2}$, et non pour W_{2n+1}.

Ainsi la propriété est vérifiée au rang $n+1$, et donc par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \geqslant 0,\ W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}.}$$

DL

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

6. Lorsque $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$, et donc

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Et donc

$$a_n = -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -1 + 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Négligeabilité
Il manque dans ce développement des termes en $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et en $\frac{1}{n^3}$. Tous ces termes sont négligeables devant $\frac{1}{n^2}$, et on donc été inclus dans le $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi, $a_n = \dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.
Et alors, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs[5], la série de terme général a_n converge car la série de terme général $\dfrac{1}{12n^2}$ est une série de Riemann convergente.

[5] Il n'est pas évident que a_n soit positif, mais son équivalent l'est, donc le critère de comparaison s'applique.

7. Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
\ln(A_n) - \ln(A_{n-1}) &= n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln(n) - \ln(n!) - (n-1)\ln(n-1) + (n-1) - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(n-1) + \ln((n-1)!)\\
&= -1 + n\ln(n) - (n-1)\ln(n-1) - \ln\left(\frac{n!}{(n-1)!}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -1 + (n-1)\ln(n) - (n-1)\ln(n-1) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\\
&= -1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\\
&= -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\\
&= -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \boxed{a_n.}
\end{aligned}$$

8. Pour $N \geqslant 2$, on a

$$\sum_{n=2}^{N} a_n = \sum_{n=2}^{N}(\ln(A_n) - \ln(A_{n-1})) = \ln(A_N) - \ln(A_1).$$

Somme télescopique.

Et donc $A_n = A_1 e^{\sum_{n=2}^{N} a_n}$. Or la série converge, donc lorsque $N \to +\infty$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n \to \sum_{n=2}^{+\infty} a_n = M.$$

Et donc $A_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} A_1 e^M = \ell$. Cette limite est alors strictement positive car $A_1 = e^{-1} > 0$.

9.a. On a $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$ et donc

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{n}\frac{1}{A_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{\ell}n^n e^{-n}\sqrt{n}.}$$

Remarque
Une suite convergente est équivalente à sa limite si celle-ci est non nulle (seule la suite nulle est équivalente à 0), et donc c'est pour cette raison qu'il était indispensable de vérifier que $\ell \neq 0$.

9.b. Reprenons l'expression de la question 5 : on a

$$(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n} \text{ et } (n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell^2}n^{2n}e^{-2n}n$$

de sorte que $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\dfrac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}n}\dfrac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}$.

Comme d'autre part, on sait par la question 4.b que $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$, alors

$$\ell\frac{\pi}{\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \Leftrightarrow \ell \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi}}.$$

Mais deux constantes sont équivalentes si et seulement si elles sont égales, donc $\ell = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}$ et donc

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.}$$

Pour la culture
Cette formule est appelée formule de Stirling, et c'est en quelques sorte «le meilleur» équivalent que l'on puisse donner de $n!$ à l'aide de suites plus classiques.
Il en existe une généralisation pour la fonction Γ

$$\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^x e^{-x}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}$$

Partie II : Étude de variables aléatoires

10. La fonction f_a est évidemment positive sur $\mathbf{R}$, et elle est continue sur $\mathbf{R}_-^*$ car constante, et sur $\mathbf{R}_+^*$ par opérations usuelles sur les fonctions continues.
De plus, pour $A > 0$, on a

$$\int_{-\infty}^{A} f_a(t)\,dt = \int_0^A f_a(t)\,dt = \int_0^A \frac{t}{a^2}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^A = 1 - e^{-\frac{A^2}{2a^2}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\,dt$ converge et vaut 1.

Ainsi, $\boxed{f_a \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

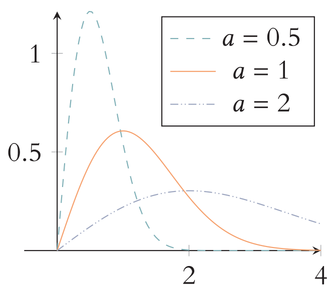


FIGURE 2– La densité f_a pour différentes valeurs de a.
La loi associée est appelée loi de Rayleigh.

11. Pour $x \leqslant 0$, on a

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_a(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

Et pour $x > 0$, le calcul a été fait à la question précédente : $F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. Ainsi,

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

12. Par définition, X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_a(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,dt$ converge.
Notons que cette intégrale ressemble fortement à celle définissant le moment d'ordre 2 d'une loi normale.
Plus précisément, soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, a^2)$, qui possède pour densité $t \mapsto \dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$.
Alors nous savons, par parité de l'intégrande, que

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,dt = \frac{2}{a\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,dt.$$

De plus, $E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = a^2 + 0 = a^2$.
On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,dt = a^3 \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Et donc

$$E(X) = \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,dt = \frac{1}{a^2} \frac{a^3\sqrt{2\pi}}{2} = \boxed{a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

Convergence
Comme nous savons que $E(Y^2)$ existe (car $V(Y)$ existe), la convergence de l'intégrale est automatique, pas besoin de la prouver.

Astuce
Ce résultat pouvait également se retrouver par une intégration par partie. On avait alors besoin de la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2a^2}$ qui se retrouve en se rappelant que l'intégrale de la densité d'une loi normale vaut 1.

13. De même, sous réserve de convergence, on a

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} t^2 f_a(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,dt.$$

Soit $A > 0$. Procédons à une intégration par parties sur le segment $[0, A]$, en posant $u = t^2$ et $v = -e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$. u et v sont alors bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$, avec $u' = 2t$ et $v' = \frac{t^2}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
\int_0^A t^3 e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,dt &= \left[-t^2 e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^A + 2\int_0^A t e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,dt \\
&= -A^2 e^{-\frac{A^2}{2a^2}} + 2\left[-a^2 e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^A \\
&= -A^2 e^{-\frac{A^2}{2a^2}} + 2a^2 - 2a^2 e^{-\frac{A^2}{2a^2}} \\
&\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 2a^2
\end{aligned}$$

Et alors, par la formule de Huygens, il vient

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2a^2 - a^2\frac{\pi}{2} = \boxed{a^2\frac{4-\pi}{2}.}$$

14.a. Notons que Z est à valeurs dans $\mathbf{R}^+$. Donc pour $x < 0$, on a $F_Z(x) = 0$.
Soit donc $x \geqslant 0$. Il vient

$$F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P(a\sqrt{-2\ln V} \leqslant x) = P\left(\sqrt{-2\ln V} \leqslant \frac{x}{a}\right) = P\left(-2\ln V \leqslant \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Inégalités
On a préservé le sens des inégalités par croissance de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$.

Et alors, par croissance de l'exponentielle, il vient

$$F_Z(x) = P\left(\ln V \geqslant -\frac{x^2}{2a^2}\right) = P\left(V \geqslant e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) = 1 - P\left(V \leqslant e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right).$$

Puisque V suit une loi uniforme sur $[0,1]$, et que $0 \leqslant e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \leqslant 1$, il vient donc

$$F_Z(x) = 1 - F_V\left(e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

Ainsi, Z a la même fonction de répartition que X, et donc $\boxed{\text{ces deux variables ont même loi.}}$

Remarque

Il s'agit ici d'un cas particulier de la méthode d'inversion rencontrée en TP.

14.b. Le programme suivant convient :

```
function y = simul(a)
  y = a*sqrt(-2*log(rand()))
endfunction
```

15. Puisque l'urne ne contient que n boules, il faut au maximum $n+1$ tirages avant de retirer une boule déjà sortie. Et donc T_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$, de sorte que $\boxed{P(T_n > n+1) = 0.}$

16. Remarquons que pour $k = 1$, on a $P(T_n > 1) = 1$, car T_n est à valeurs dans $[\![2, n]\!]$.
Notons A_i l'événement «la boule obtenue au tirage i n'a pas été tirée auparavant». Alors

$$[T_n > k] = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k.$$

Par la formule des probabilités composées, on a alors

$$P(T_n > k) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{k-1}}(A_k).$$

Mais pour tout $\ell \in [\![2, k]\!]$,

$$P_{A_1\cap\cdots\cap A_{i-1}}(A_i) = \frac{n-(i-1)}{n}.$$

Explication

Cette probabilité conditionnelle est la probabilité de tirer une boule qui n'a pas été tirée, sachant qu'on a déjà obtenu $i-1$ boules différentes lors des tirages précédents.

Et donc

$$P(T_n > k) = 1 \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n} = \boxed{\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}} = \frac{n!}{n^k(n-k)!}}.$$

17. Par définition de Y_n, on a

$$P(Y_n > y) = P\left(\frac{T_n}{\sqrt{n}} > y\right) = P(T_n > y\sqrt{n}).$$

Mais T_n étant à valeurs entières, on a

$$P(T_n > k_n) = \underbrace{P(k_n < T_n \leqslant y\sqrt{n})}_{=0} + P(T_n > y\sqrt{n}) \Leftrightarrow P(T_n > k_n) = P(T_n > y\sqrt{n}).$$

Et donc $\boxed{P(Y_n > y) = P(T_n > k_n).}$

18. Notons que $\sqrt{n}y - 1 < k_n \leqslant \sqrt{n}y$ et donc $\dfrac{\sqrt{n}y-1}{y\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{k_n}{y\sqrt{n}} \leqslant 1$.

Par le théorème des gendarmes, on a alors $\dfrac{k_n}{y\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ soit $k_n \sim y\sqrt{n}$.

En utilisant le résultat de la question 9.b, il vient $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$.

De même, on a $n - k_n \geqslant n - y\sqrt{n} \to +\infty$, et donc

$$(n-k_n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-(n-k_n)}(n-k_n)^{n-k_n}\sqrt{2\pi(n-k_n)}.$$

Plus généralement

Si $u_n \to +\infty$, alors le même raisonnement prouve que

$$\lfloor u_n \rfloor \sim u_n.$$

On en déduit, que

$$P(Y_n > y) = P(T_n > k_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{k_n}} \frac{e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}}{e^{-(n-k_n)}(n-k_n)^{n-k_n}\sqrt{2\pi(n-k_n)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n}\left(\frac{n}{n-k_n}\right)^{n-k_n}\sqrt{\frac{n}{n-k_n}}.$$

Mais on a $\dfrac{n}{n-k_n} = \dfrac{n}{n}\dfrac{1}{1-\frac{k_n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $\sqrt{\dfrac{n}{n-k_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ Il vient alors

$$P(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{e^{-k_n}\left(\frac{1}{1-\frac{k_n}{n}}\right)^{n-k_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n}\left(1-\frac{k_n}{n}\right)^{k_n-n}}.$$

19.a. Nous savons qu'au voisinage de 0, on a $\ln(1-t) = -t - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ et donc

$$\begin{aligned} -t + (1-t)\ln(1-t) &= -t + (t-1)\left(-t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \\ &= -t + t + \frac{t^2}{2} - t^2 + \underbrace{o(t^2) - \frac{t^3}{2} + o(t^3)}_{=o(t^2)} = \boxed{-\frac{t^2}{2} + o(t^2).} \end{aligned}$$

Remarque
Ce résultat peut bien entendu s'obtenir également à l'aide de Taylor-Young. Mais il faut alors calculer une dérivée seconde peu allèchante...

19.b. En factorisant par n, il vient

$$\begin{aligned} -k_n + (k_n - n)\ln\left(\frac{k_n}{n} - 1\right) &= n\left(-\frac{k_n}{n} + \left(\frac{k_n}{n} - 1\right)\ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)\right) \\ &= n\left(-\frac{k_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{k_n^2}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{k_n^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{y^2}{2} \end{aligned}$$

Rappel
Si $u_n = v_n + o(v_n)$, alors $u_n \sim v_n$.

Et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} -k_n + (k_n - n)\ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right) = -y^2/2.}$$

20. Nous savons que pour $x \leqslant 0$, on a $P(Y_n \leqslant x) = 0$ car Y_n est à valeurs strictement positives. Pour $x > 0$, on a, grâce au résultat de la question précédente,

$$P(Y_n \leqslant y) = 1 - P(Y_n > y) = 1 - e^{-k_n + (k_n - n)\ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-y^2/2}.$$

Limite
On a ici utilisé la continuité de l'exponentielle pour passer à la limite dans l'exponentielle.

On reconnaît alors la fonction de répartition d'une variable aléatoire de densité f_1. Soit X une telle variable aléatoire.
On a alors, en tout $x \in \mathbf{R}$ (et donc en particulier en tout point de continuité de F_X), $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = F_X(x)$.

Et donc $\boxed{Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X.}$

Remarque
On a ici un exemple d'une suite de variables discrètes, qui convergent en loi vers une variable à densité.

EML 2011

Le problème d'origine était formé de cinq parties indépendantes (à l'exception des parties II et III). Nous le proposons ici sous la forme de quatre exercices indépendants.

Partie I

Sujet : Somme de variables aléatoires suivant la loi exponentielle de paramètre 1 — Facile

Abordable en première année : ✗ — **Intérêt** : ★☆☆

Thèmes du programme abordés : Variables à densité, vecteurs aléatoires, `Scilab`

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

1. Rappeler une densité, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

On considère une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ mutuellement indépendantes, qui suivent la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

2. a. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n.
   b. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, rappeler une densité de S_n.
3. Soit une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.
   Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(1-U)$ suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.
4. Écrire un programme `Scilab` , utilisant le générateur aléatoire `rand()`, simulant la variable aléatoire S_n, l'entier n étant entré par l'utilisateur.
5. Pour tout $t \in]0,+\infty[$, on note N_t la variable aléatoire égale à 0 si l'événement $[S_1 > t]$ est réalisé, et, sinon, au plus grand entier $n \in \mathbf{N}^*$ tel que l'événement $[S_n \leqslant t]$ est réalisé.
   Ainsi, pour tout $t \in]0,+\infty[$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'événement $[N_t = n]$ est égal à l'événement $[S_n \leqslant t] \cap [S_{n+1} > t]$.
   Écrire un programme `Scilab` simulant la variable aléatoire N_t, le réel t étant entré par l'utilisateur.

Parties II et III

Sujet : Polynômes orthogonaux : polynômes de Laguerre — Moyen

Abordable en première année : ✓ (partie II) — **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : fonctions d'une variable, produits scalaires, endomorphismes symétriques, diagonalisation.

Modifications apportées au sujet d'origine : la question 17 a été modifiée : on peut parler de stabilité.

Partie II : Polynômes de Laguerre.

On considère, pour tout $n \in \mathbf{N}$, les applications

$$f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!},$$
$$L_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto e^x f_n^{(n)}(x),$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f_n.

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $L_0(x)$, $L_1(x)$ et $L_2(x)$.
2. Montrer :
$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R},\ L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k} x^k.$$
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, L_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.
4. Montrer :
$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R},\ L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x).$$

6. Montrer :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R},\ f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x).$$

7. En déduire :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R},\ (n+1)L_{n+1}(x) = xL_n'(x) + (n+1-x)L_n(x).$$

8. Établir :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R},\ xL_n''(x) - (x-1)L_n'(x) + nL_n(x) = 0.$$

Partie III : Produit scalaire, orthogonalité, endomorphisme.
On note E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des application polynomiales de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
Soit $N \in \mathbf{N}$ fixé. On note E_N le sous-espace vectoriel de E formé des applications polynomiales de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de degré inférieur ou égal à N.

9. Montrer que, pour tout $A \in E$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)e^{-x}\,dx$ converge.

On considère l'application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbf{R}, \quad (P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,dx.$$

10. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

On considère, pour tout $P \in E$, l'application $T(P) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R},\ T(P)(x) = xP''(x) - (x-1)P'(x).$$

11. Vérifier que T est un endomorphisme du $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.
12. Montrer que, pour tout $P \in E$, l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$: $x \mapsto T(P)(x)e^{-x}$ est la dérivée de l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$: $x \mapsto xP'(x)e^{-x}$.
13. En déduire, pour tout $(P,Q) \in E \times E$:

$$\langle T(P), Q\rangle = -\int_0^{+\infty} xP'(x)Q'(x)e^{-x}\,dx.$$

14. Établir : $\forall (P,Q) \in E \times E,\ \langle T(P),Q\rangle = \langle P, T(Q)\rangle$.
15. En utilisant le résultat de la question 8, calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T(L_n)$.
16. En déduire que la famille $(L_0,\dots,L_N)$ est orthogonale.
17. Montrer que E_N est stable par T.

On note T_N l'endomorphisme induit par T sur E_N, c'est-à-dire l'endomorphisme T_N de E_N défini par :

$$\forall P \in E_N,\ T_N(P) = T(P).$$

18. Montrer que $(L_0,\dots,L_N)$ est une base de E_N.
19. Donner la matrice de T_N dans la base $(L_0,\dots,L_N)$ de E_N.
20. Est-ce que T_N est diagonalisable ? Est-ce que T_N est bijectif ?

Partie IV : Nature d'une série de maximums.

Sujet : Vers la formule de Stirling.
Difficile
Abordable en première année : ✓
Intérêt : ★★☆
Thèmes du programme abordés : suites et séries.
Commentaires : assez classique, mais calculatoire

On considère, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'application

$$g_n : [0,+\infty[\to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!};$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, g_n admet un maximum, noté M_n et calculer M_n.

On note, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $\mu_n = \sqrt{n}M_n$ et $a_n = \ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n$.

2. Former le développement limité de a_n à l'ordre 2 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

3. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.
4. Établir que la suite $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ converge et que sa limite est strictement positive.
5. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} M_n$?

Partie V

Sujet : Étude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : fonctions d'une et de deux variables, calcul différentiel d'ordre 2.

Commentaires : difficile, mais intéressant pour la recherche de points critiques. Les formules de Monge n'étant plus au programme, la dernière question devient trop dure. Il faudrait probablement rajouter des questions intermédiaires. J'en donne tout de même une correction ne nécessitant pas les formules de Monge (mais qui les redémontre presque).

On considère les applications :

$$f :]0;+\infty[\to \mathbf{R},\ x \mapsto xe^{-x},$$

$$F :]0;+\infty[^2 \to \mathbf{R},\ (x,y) \mapsto f(x)+f(y)-f(x+y).$$

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $]0;+\infty[^2$ et exprimer, pour tout $(x,y)\in]0;+\infty[^2$, les dérivées partielles premières $\partial_1 F(x,y)$ et $\partial_2 F(x,y)$ en fonction de $f'(x)$, $f'(y)$ et $f'(x+y)$.
2. Établir que, pour tout $a \in]0;+\infty[$, l'équation $f'(x)=f'(a)$, d'inconnue $x\in]0;+\infty[$, admet au plus une solution distincte de a.
3. En déduire que, pour tout $(x,y)\in]0;+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de F si et seulement si :
$$x=y \text{ et } f'(x)=f'(2x).$$
4. Montrer que F admet un point critique et un seul, noté (α,α), et montrer que $1<\alpha<2$.
5. Montrer : $f''(\alpha)<0$ et $f''(2\alpha)>0$.
6. Montrer que F admet un extremum local, et un seul. Déterminer la nature de cet extremum local.

EML 2011 : CORRIGÉ

PARTIE I

Somme de variables aléatoires suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Une densité de la loi exponentielle de paramètre 1 est $\boxed{f : t \mapsto \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}}$

Et si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors $\boxed{E(X) = 1}$ et $\boxed{V(X) = 1.}$

2.a. Par linéarité de l'espérance, on a $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \boxed{n}$, et les X_k étant indépendantes, il vient $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \boxed{n.}$

2.b. Puisque la loi exponentielle de paramètre 1 est également la loi gamma de paramètre 1, par indépendance des X_k, S_n suit la loi gamma de paramètre $1 + \cdots + 1 = n$. Donc $S_n \hookrightarrow \gamma(n)$.
En particulier, une densité de S_n est

$$t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

> **Remarque**
> Si $U = 1$, alors $\ln(1-U)$ n'est pas défini.
> Toutefois, U étant à densité, on a $P(U = 1) = 0$, et donc on peut négliger ce détail, qui ne se produit presque jamais.

3. Puisque U est à valeurs dans $[0, 1]$, $1 - U$ est à valeurs dans $[0, 1]$ et donc $-\ln(1 - U)$ est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.
Pour $x < 0$, on a donc $P(Y \leqslant x) = 0$.
Et pour $x \geqslant 0$, il vient, par croissance de l'exponentielle

> **Rédaction** ✎
> Ne pas oublier de mentionner la croissance de l'exponentielle, c'est elle qui nous permet de garder le sens de l'inégalité inchangé.

$$F_Y(x) = P(-\ln(1-U) \leqslant x) = P(\ln(1-U) \geqslant -x) = P(1-U \geqslant e^{-x}) = P(U \leqslant 1-e^{-x}) = F_U(1-e^{-x}).$$

Mais U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, de sorte que $F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$.
Or, pour $x \geqslant 0$, $0 \leqslant 1 - e^{-x} \leqslant 1$, et donc $F_Y(t) = F_U(1 - e^{-x}) = 1 - e^{-x}$.
Par conséquent, on a

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît là la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1 : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1).}$

4. Notons que d'après la question précédente, `-log(1-rand())` permet de simuler une loi exponentielle de paramètre 1, et que des appels successifs à cette commande vont simuler des variables indépendantes.

```
n = input('Entrez n  : ') ;
S = 0 ;
for i = 1  : n
        S = S -log(1-rand()) ;
end
disp(S)
```

5. Il s'agit de simuler successivement des variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{E}(1)$ jusqu'à ce que la somme soit supérieure strictement à t.

```
t = input('Entrez la valeur de t :') ;
S = -log(1-rand()) ;
n = 0 ;
while S <=t
        S = S -log(1-rand()) ;
        n = n+1 ;
end
disp(n)
```

Parties II et III

Partie II : Polynômes de Laguerre

1. On a

$$f_0(x) = e^{-x}, \ \boxed{L_0(x) = 1.}$$

$$f_1(x) = xe^{-x}, f_1'(x) = -xe^{-x} + e^{-x}, \ \boxed{L_1(x) = 1 - x.}$$

$$f_2(x) = \frac{x^2e^{-x}}{2}, f_2'(x) = \frac{e^{-x}(2x - x^2)}{2}, f_2''(x) = \frac{e^{-x}(2 - 2x - (2x - x^2))}{2}, \ \boxed{L_2(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{2}.}$$

2. Les fonctions $g_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n!}$ et $g : x \mapsto e^{-x}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$, donc par la formule de Leibniz, on a

$$L_n(x) = e^x \left(g_n \times g\right)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) g_n^{(n-k)}(x).$$

Or, il est facile de voir que $\forall k \in \mathbf{N}$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $g^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$. D'autre part, on a $g_n'(x) = -\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, $g_n''(x) = \dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!}$, et une récurrence facile prouve que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ \forall x \in \mathbf{R}, \ g_n^{(k)}(x) = \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

Par conséquent, on a

$$L_n(x) = e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k!} x^k (-1)^k e^{-x} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.}$$

Méthode

Les coefficients binomiaux et la dérivée n-ième doivent faire penser à la formule de Leibniz. Il s'agit alors de commencer par calculer la dérivée k-ème de chacune des deux composantes du produit.

3. L'expression que nous venons d'obtenir prouve que L_n est une fonction polynomiale de degré n, dont le coefficient dominant est $\dfrac{(-1)^n}{n!} \dbinom{n}{n} = \boxed{\dfrac{(-1)^n}{n!}.}$

4. On a $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$,

$$f_{n+1}'(x) = \frac{(n+1)x^n e^{-x} - x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!} = \frac{x^n e^{-x}}{n!} - \frac{x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!} = \boxed{f_n(x) - f_{n+1}(x).}$$

5. Notons que

$$L_n'(x) = (e^x f_n^{(n)})'(x) = e^x f_n^{(n)}(x) + e^x f_n^{(n+1)}(x) = L_n(x) + e^x f_n^{(n+1)}(x).$$

Et de même

$$L_{n+1}'(x) = L_{n+1}(x) + e^x f_{n+1}^{(n+2)}(x).$$

En dérivant $n+1$ fois l'égalité obtenue à la question précédente, on obtient

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \ f_{n+1}^{(n+2)}(x) = f_n^{(n+1)}(x) - f_{n+1}^{(n+1)}(x).$$

Puis en multipliant par e^x, il vient

$$e^x f_{n+1}^{(n+2)}(x) = e^x f_n^{(n+1)}(x) - L_{n+1}(x) \Leftrightarrow L_{n+1}'(x) = e^x f_n^{(n+1)}(x).$$

On a alors

$$L_{n+1}'(x) - L_{n+1}(x) = L_n'(x) - L_n(x) - L_{n+1}(x)$$

soit encore

$$\boxed{L_{n+1}'(x) = L_n'(x) - L_n(x).}$$

6. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$\frac{x}{n+1} f_n(x) = \frac{x}{n+1} \frac{x^n e^{-x}}{n!} = \frac{x^{n+1} e^{-x}}{(n+1)!} = \boxed{f_{n+1}(x).}$$

7. D'après la question précédente, on a $(n+1) f_{n+1}(x) = x f_n(x)$.
En dérivant $n+1$ fois, il vient, par la formule de Leibniz, dont seuls deux termes sont non nuls[1] :

$$(n+1) f_{n+1}^{(n+1)}(x) = x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x)$$

En multipliant par e^x, on a alors

$$(n+1) L_{n+1}(x) = e^x x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) L_n(x).$$

Mais au début de la question 5, nous avons prouvé que

$$L_n'(x) = L_n(x) + e^x f_n^{(n+1)}(x)$$

et donc il vient

$$(n+1) L_{n+1}(x) = x L_n'(x) - x L_n(x) + (n+1) L_n(x) = \boxed{x L_n'(x) + (n+1-x) L_n(x).}$$

8. Dérivons l'égalité de la question précédente :

$$(n+1) L_{n+1}'(x) = x L_n''(x) + L_n'(x) + (n+1-x) L_n'(x) - L_n(x) = x L_n''(x) + (n+2-x) L_n'(x) - L_n(x).$$

Mais en utilisant le résultat de la question 5, il vient

$$(n+1) L_n'(x) - (n+1) L_n(x) = x L_n''(x) + (n+2-x) L_n'(x) - L_n(x) \Leftrightarrow \boxed{x L_n''(x) - (x-1) L_n'(x) + n L_n(x) = 0.}$$

Partie III : Produit scalaire, orthogonalité, endomorphisme

9. La fonction $x \mapsto A(x) e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Notons $a_d x^d$ le terme de plus haut degré de A, de sorte que $A(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_d x^d$.
Alors $x^2 A(x) e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\sim} a_d x^{d+2} e^{-x} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $A(x) e^{-x} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, et puisque l'intégrale[2] $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, il en est de même de $\int_0^{+\infty} A(x) e^{-x}\, dx$.

10. Soient $P, Q, R \in E$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle \lambda P + Q, R \rangle &= \int_0^{+\infty} (\lambda P + Q)(x) R(x) e^{-x}\, dx \\
&= \int_0^{+\infty} (\lambda P(x) R(x) + Q(x) R(x))\, e^{-x}\, dx \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} P(x) R(x) e^{-x}\, dx + \int_0^{+\infty} Q(x) R(x) e^{-x}\, dx \\
&= \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable.
De plus, on a

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x) Q(x) e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} Q(x) P(x) e^{-x}\, dx = \langle Q, P \rangle.$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, et donc[3] est bilinéaire symétrique.
On a $\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)^2 e^{-x}\, dx$. Or, la fonction $x \mapsto P(x)^2 e^{-x}$ est positive sur $[0, +\infty[$, donc par positivité de l'intégrale, $\langle P, P \rangle \geqslant 0$.
Enfin, si $\langle P, P \rangle = 0$, alors

$$\int_0^{+\infty} P^2(x) e^{-x}\, dx = 0.$$

[1] En effet, la dérivée n-ème de $x \mapsto x$ est nulle pour $n \geqslant 2$.

[2] De Riemann.

Remarque
Puisqu'il n'y a pas de problème de convergence en 0, le fait que $\int \frac{dx}{x^2}$ converge sur $[1, +\infty[$ et pas sur $]0, +\infty[$ suffit, l'essentiel étant qu'elle converge au voisinage de $+\infty$.

[3] Car elle est linéaire à gauche.

Mais la fonction $x \mapsto P^2(x)e^{-x}$ étant continue et positive, l'intégrale est nulle si et seulement si $\forall x \in [0, +\infty[, P^2(x)e^{-x} = 0$.
Mais alors $\forall x \in [0, +\infty[, P^2(x) = 0$. Or P^2 est un polynôme, s'il possède une infinité de racines, c'est qu'il est nul. Et donc $\langle P, P\rangle = 0 \Rightarrow P = 0$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est bien un produit scalaire sur } E.}$

11. Soient $P, Q \in E$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} T(\lambda P + Q)(x) &= x(\lambda P + Q)''(x) + (x-1)(\lambda P + Q)'(x) \\ &= \lambda x P''(x) + xQ''(x) + \lambda(x-1)P'(x) + (x-1)Q'(x) \\ &= \lambda T(P) + T(Q). \end{aligned}$$

Linéarité de la dérivation.

Donc T est linéaire. Il reste à prouver que pour $P \in E$, on a bien $T(P) \in E$.
Mais si P est polynomiale, alors P' et P'' sont également polynomiales, donc $x \mapsto xP''(x) + (x-1)P'(x)$ est encore polynomiale car somme de produits de fonctions polynomiales.
Ainsi, $\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } E.}$

12. Soit $f : x \mapsto xP'(x)e^{-x}$. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= (xP'(x))'e^{-x} - xP'(x)e^{-x} \\ &= xP''(x)e^{-x} + P'(x)e^{-x} - xP'(x)e^{-x} \\ &= e^{-x}\left(xP''(x) + P'(x)(1-x)\right) = \boxed{e^{-x}T(P)(x).} \end{aligned}$$

13. Soit $A > 0$. Procédons à une intégration par parties sur le segment $[0, A]$, en posant $u(x) = xP'(x)e^{-x}$ et $v(x) = Q(x)$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, avec $u'(x) = e^{-x}T(P)(x)$ et $v'(x) = Q'(x)$.
Il vient alors

$$\begin{aligned} \int_0^A T(P)(x)e^{-x}Q(x)\,dx &= \left[xP'(x)e^{-x}Q(x)\right]_0^A - \int_0^A xP'(x)e^{-x}Q'(x)\,dx \\ &= AP'(A)e^{-A}Q(A) - \int_0^A xP'(x)e^{-x}Q'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Mais lorsque $A \to +\infty$, par croissances comparées, $AP'(A)e^{-A}Q(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc

$$\boxed{\langle T(P), Q\rangle = \int_0^{+\infty} T(P)(x)Q(x)e^{-x}\,dx = -\int_0^{+\infty} xP'(x)Q'(x)e^{-x}\,dx.}$$

14. On a, par symétrie du produit scalaire,

$$\langle P, T(Q)\rangle = \langle T(Q), P\rangle = -\int_0^{+\infty} xQ'(x)P'(x)e^{-x}\,dx = \boxed{\langle T(P), Q\rangle.}$$

Remarque

La preuve que nous venons de faire a déjà été rencontrée en cours : des vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique, associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
Toutefois, nous ne pouvons pas utiliser directement ce résultat ici car T n'est pas un endomorphisme symétrique dont l'étude a été faite en cours : E est de dimension infinie, alors que les endomorphismes symétriques au programme sont ceux d'espaces euclidiens, c'est-à-dire de dimension finie.

15. Le résultat de la question 8 prouve en fait que

$$T(L_n) = xL_n''(x) - (x-1)L_n'(x) = \boxed{-nL_n.}$$

16. Soient $i, j \in [\![0, N]\!]$, avec $i \neq j$. On a alors $\langle T(L_i), L_j\rangle = -i\langle L_i, L_j\rangle$.
Mais d'autre part, en utilisant le résultat de la question 14,

$$\langle T(L_i), L_j\rangle = \langle L_i, T(L_j)\rangle = \langle L_i, -jL_j\rangle = -j\langle L_i, L_j\rangle.$$

Et donc $(-i+j)\langle L_i, L_j\rangle = 0$.
Puisque $i \neq j$, $j - i \neq 0$ et donc $\langle L_i, L_j\rangle = 0$. La famille $(L_0, \dots, L_N)$ est donc une $\boxed{\text{famille orthogonale de } E_N.}$

17. Soit $P \in E_N$. Alors $\deg P \leqslant N$, et donc $\deg P' \leqslant N-1$ et $\deg P'' \leqslant N-2$.
Et donc $\deg xP'' \leqslant N-1$, $\deg((1-x)P') \leqslant N$ et ainsi, $\deg T(P) \leqslant N$.
Nous prouvons ainsi que $T(P) \in E_N$, et donc $\boxed{E_N \text{ est stable par } T.}$

18. Nous avons prouvé à la question 3 que L_i est de degré i.
Donc $(L_0, \dots, L_N)$ est une famille de polynômes de E_N de degrés deux à deux distincts. Elle est donc libre.

Comme de plus, elle est de cardinal $N+1 = \dim \mathbf{R}_N[X] = \dim E_N$, c'est $\boxed{\text{une base de } E_N.}$

> **Alternative**
> Cette famille est également orthogonale, et formée de vecteurs non nuls, donc doit être libre.

19. Nous avons, pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, $T_N(L_i) = T(L_i) = -iL_i$.
Donc la matrice de T_N dans la base $(L_0, \dots, L_N)$ est

$$A\,\mathrm{Mat}_{(L_0,\dots,L_N)}(T_N) = \begin{array}{c c} \begin{matrix} T_N(L_0) & T_N(L_1) & \dots & T_N(L_N) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -N \end{pmatrix} & \begin{matrix} L_0 \\ L_1 \\ \vdots \\ L_N \end{matrix} \end{array}.$$

20. L'endomorphisme T_n est un endomorphisme symétrique[4] d'un espace euclidien de dimension $N+1$. Par conséquent, $\boxed{\text{il est diagonalisable.}}$

Notons d'ailleurs que nous avons obtenu une base de E_N formée de vecteurs propres de T_N : il s'agit de $(L_0, \dots, L_N)$, et donc les valeurs propres de T_N sont les $-k$, $k \in [\![0, N]\!]$. Et nous avons même remarqué à la question précédente que la matrice T_N dans cette base est diagonale !

De plus, $\boxed{T_N \text{ n'est pas bijectif}}$, car il n'est pas injectif : on a $T_N(L_0) = 0 = T_N(0)$, avec $L_0 \neq 0$.

[4] D'après la question 14.

Partie IV : Nature d'une série de maximums.

1. La fonction g_n est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ car produit de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ g_n'(x) = \frac{nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}}{n!} = \frac{x^{n-1}e^{-x}}{n!}(n-x).$$

En particulier, on a $g_n'(x) \geqslant 0$ pour $x \leqslant n$ et $g_n'(x) < 0$ pour $x > n$.
Le tableau de variation de g_n est donc

x	0		n		$+\infty$
$g_n'(x)$	$+$		z	$-$	
$g_n(x)$	1	$\nearrow$	$g_n(n)$	$\searrow$	0

En particulier, g_n admet un maximum en n, et $M_n = g_n(n) = \boxed{\dfrac{n^n e^{-n}}{n!}.}$

2. On a

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{1}{2}\ln(n+1) + (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - \ln((n+1)!) - \frac{1}{2}\ln(n) - n\ln(n) + n + \ln(n!) \\
=& -\ln(n+1) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 + n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln(n+1) \\
=& \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 \\
=& \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\
=& 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1 \\
=& \boxed{\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}
\end{aligned}$$

> **o**
> À partir du moment où on a un $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, tous les termes en $\frac{1}{n^3}$ et plus (y compris le $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$), qui sont négligeables devant $\frac{1}{n^2}$, «rentrent» dans le $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

3. D'après la question précédente, on a $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.
Et donc, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs , on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum a_n \text{ converge.}}$

Signe
Ne pas oublier de mentionner la positivité (ou au moins le signe constant) pour l'utilisation du critère des équivalents. Ici, $\dfrac{1}{12n^2}$ est clairement positif, ce qui suffit.

4. Pour $N \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{N} (\ln \mu_{k+1} - \ln \mu_k) = \sum_{k=2}^{N+1} \ln(\mu_k) - \sum_{k=1}^{N} \ln(\mu_k) = \ln(\mu_{N+1}) - \ln(\mu_1).$$

Or, lorsque $N \to +\infty$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \ell$.
Et donc la suite $(\ln(\mu_{N+1}))_{N\geqslant 1}$ converge, vers $\ell + \ln(\mu_1)$.
Et donc, par continuité de la fonction exponentielle, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \mu_{N+1} = e^{\ell + \ln \mu_1}.$$

On en déduit que $\boxed{(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge}}$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mu_n = e^{\ell+\ln\mu_1}$. En particulier, une exponentielle étant toujours strictement positive, cette limite est strictement positive. Dans la suite, nous noterons L cette limite.

Équivalent/limite
Lorsqu'on écrit $\mu \sim L$, il est important que $L \neq 0$.
En effet, seule la suite nulle est équivalente à 0.

5. D'après ce qui précède, on a $\mu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} L$ et donc $M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{L}{\sqrt{n}}$.
Mais la série de terme général $\dfrac{L}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente, donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} M_n \text{ diverge.}}$

Partie V

1. f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ par produit de fonctions $\mathscr{C}^2$.
Les fonctions $(x,y) \mapsto x, (x,y) \mapsto y$ et $(x,y) \mapsto x+y$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$ car polynomiales, et sont à valeurs dans $]0,+\infty[$.
Donc, par composition de fonctions $\mathscr{C}^2$, $(x,y) \mapsto f(x), (x,y) \mapsto f(y)$ et $(x,y) \mapsto f(x+y)$ sont $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$.
Et donc $\boxed{F \text{ est } \mathscr{C}^2 \text{ car somme de fonctions } \mathscr{C}^2.}$
On a alors $\boxed{\partial_1 f(x,y) = f'(x) - f'(x+y) \text{ et } \partial_2 F(x,y) = f'(y) - f'(x+y).}$

2. On a $f' : x \mapsto e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$, et donc $f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = e^{-x}(x-2)$.
Le tableau de variation de f' est donc

x	0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	1	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	0

Et donc, f' étant strictement monotone sur $]0,2]$ et sur $]2,+\infty[$, l'équation $f'(x) = f'(a)$ possède au plus une solution sur chacun de ces intervalles, et donc possède au plus deux solutions. Puisque l'une de ces deux solutions est nécessairement a, elle possède au plus une solution distincte de a.

Remarque
Bien que l'énoncé ne le demande pas, on peut être plus précis si on le souhaite : si $f'(a) \in]-e^{-2}, 0[$, l'équation possède une solution distincte de a, alors que pour $f'(a) \in [0,1[$ ou $f'(a) = -e^{-2}$, elle possède a pour unique solution.

3. (x,y) est un point critique de F si et seulement si $\partial_1 F(x,y) = \partial_2 F(x,y) = 0$, soit $\begin{cases} f'(x) = f'(x+y) \\ f'(y) = f'(x+y) \end{cases}$
x et y étant strictement positifs, $x+y > x$ et $x+y > y$. Donc d'après la question précédente, l'équation $f'(t) = f'(x+y)$ possède au plus une solution différente de $x+y$.

Et donc si $f'(x) = f'(y) = f'(x+y)$, nécessairement $\boxed{x = y.}$

Et alors $x + y = 2x$, de sorte que $\boxed{f'(x) = f'(2x).}$

Inversement, si $x = y$ et $f'(2x) = f'(2x)$, alors $\begin{cases} f'(x) = f'(x+y) \\ f'(y) = f'(x+y) \end{cases}$ et donc (x, y) est un point critique de F.

Ainsi, $\boxed{(x,y) \text{ est un point critique de } F \text{ si et seulement si } x = y \text{ et } f'(x) = f'(2x).}$

Explication

x et y sont deux solutions de $f'(t) = f'(x+y)$, toutes deux différentes de $x + y$: elles sont nécessairement égales.

4. D'après le tableau de variations de la fonction f' réalisé précédemment, une solution à $f'(x) = f'(2x)$ sera nécessairement dans $[0,2]$, avec $2x \in [2, +\infty[$.
Autrement, dit une solution de $f'(x) = f'(2x)$ est nécessairement dans $]1,2[$.
De plus, on a

$$f'(x) = f'(2x) \Leftrightarrow e^{-x}(1-x) = e^{-2x}(1-2x) \Leftrightarrow (1-x) = e^{-x}(1-2x).$$

Posons alors $g(x) = 1 - x - e^{-x}(1-2x)$, de sorte que $f'(x) = f'(2x)$ si et seulement si $g(x) = 0$.
La fonction g est dérivable car somme et produit de fonctions dérivables, et pour $x > 0$,

$$g'(x) = -1 + e^{-x}(1-2x) + 2e^{-x} = e^{-x}(3-2x) - 1.$$

Sur $]1,2[$, on a $e^{-x} \leqslant e^{-1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $3 - 2x \leqslant 1$, de sorte que

$$g'(x) \leqslant \frac{1}{2} - 1 < 0.$$

Et donc g est strictement décroissante sur $]1,2[$.
D'autre part, $g(1) = e^{-1} \geqslant 0$ et $g(2) = -1 + 3e^{-2}$. Puisque $e \geqslant 2$, $e^{-2} \leqslant \frac{1}{4}$ et donc $g(2) \leqslant 0$.
D'après le théorème de la bijection[5], il existe donc un unique $\alpha \in]1,2[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et donc un unique $\alpha \in]1,2[$ tel que $f'(\alpha) = f'(2\alpha)$.
Et donc $\boxed{F \text{ admet un unique point critique qui est } (\alpha, \alpha).}$

[5] g est continue.

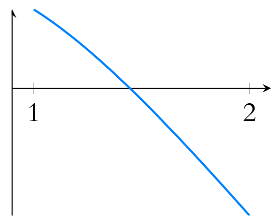


FIGURE 1– La fonction g.

5. Puisque $\alpha \in]1,2[$ et $2\alpha > 2$, d'après le tableau de variation établi à la question 2, on a $f''(\alpha) < 0$ et $f''(2\alpha) > 0$.

6. Puisque F possède un unique point critique, elle possède au plus un extremum local, qui sera nécessairement en (α, α).
On a, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$,

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,1}F(x,y) &= f''(x) - f''(x+y) \\ \partial^2_{2,2}F(x,y) &= f''(y) - f''(x+y) \\ \partial^2_{1,2}F(x,y) &= \partial^2_{2,1}F(x,y) = -f''(x+y). \end{aligned}$$

En particulier, la matrice hessienne de F au point (α, α) est

$$\nabla^2 F(\alpha,\alpha) = \begin{pmatrix} f''(\alpha) - f''(2\alpha) & -f''(2\alpha) \\ -f''(2\alpha) & f''(\alpha) - f''(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

Un réel λ en est valeur propre si et seulement si $\det(\nabla^2 F(\alpha,\alpha) - \lambda I_2) = 0$, soit encore

$$(f''(\alpha) - f''(2\alpha) - \lambda)^2 - f''(2\alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda(f''(\alpha) - f''(2\alpha)) + f''(\alpha)^2 = 0.$$

Notons donc $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda(f''(\alpha) - f''(2\alpha)) + f''(\alpha)^2$, qui est un polynôme de degré 2 en λ.
Son discriminant est

$$\Delta = 4(f''(\alpha) - f''(2\alpha))^2 - 4f''(\alpha)^2 = f''(2\alpha)^2 - 2f''(\alpha)f''(2\alpha) = f''(2\alpha)(f''(2\alpha) - 2f''(\alpha)) \geqslant 0.$$

Prévisible ?

Il n'y avait pas vraiment besoin de calculs pour savoir que ce discriminant est positif : la hessienne $\nabla^2 F(\alpha, \alpha)$ est symétrique, et donc diagonalisable : elle possède nécessairement au moins une valeur propre réelle.

Ainsi, $\nabla^2 F(\alpha,\alpha)$ possède une ou deux valeurs propres. Elle ne peut en posséder une seule, car elle étant diagonalisable, ce serait alors une matrice scalaire, ce qui n'est pas le cas car $f''(2\alpha) \neq 0$.
Donc $\nabla^2 F(\alpha,\alpha)$ possède deux valeurs propres distinctes qui sont

$$\lambda_1 = \frac{2(f''(\alpha) - f''(2\alpha)) + \sqrt{f''(2\alpha)(f''(2\alpha) - 2f''(\alpha))}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{2(f''(\alpha) - f''(2\alpha)) - \sqrt{f''(2\alpha)(f''(2\alpha) - 2f''(\alpha))}}{2}.$$

Puisque $f''(\alpha) - f''(2\alpha) < 0$, il est clair que $\lambda_2 < 0$.

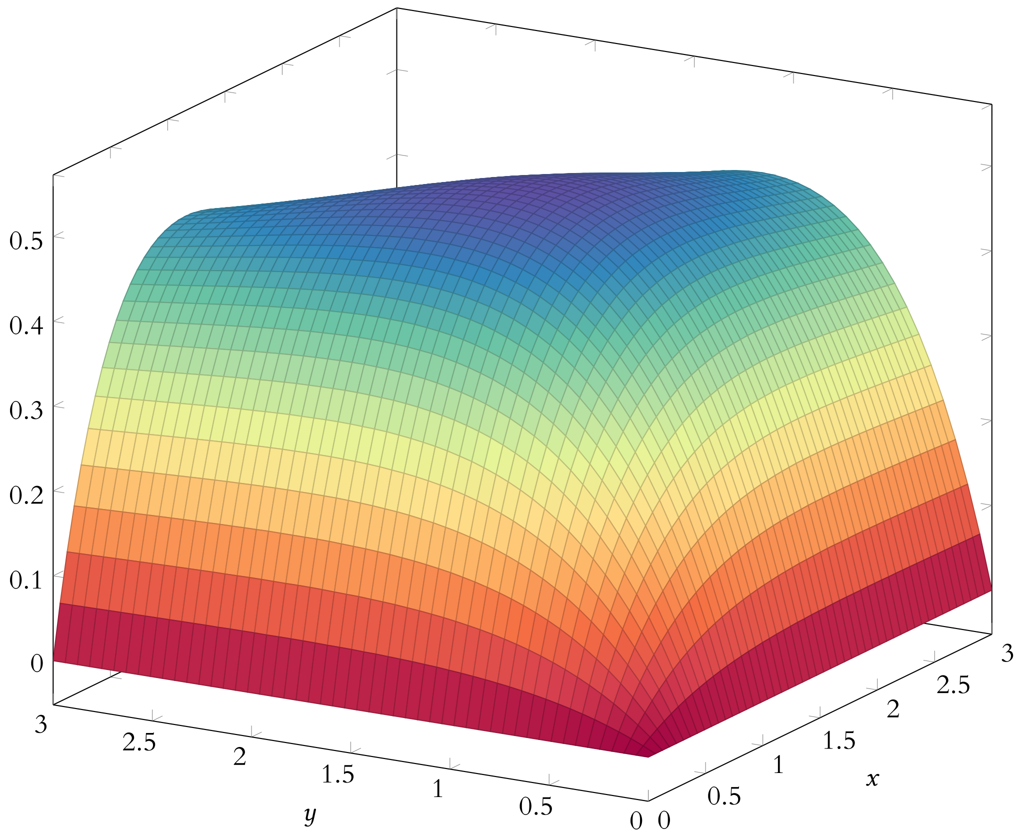
D'autre part, λ_1 et λ_2 étant les racines de P, il se factorise sous la forme $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$.
En développant, on obtient donc

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2.$$

En identifiant les termes constants, on a donc

$$\lambda_1\lambda_2 = f''(\alpha)^2 > 0.$$

Puisque $\lambda_2 < 0$, nécessairement, $\lambda_1 < 0$.
Et donc les deux valeurs propres de $\nabla^2 F(\alpha, \alpha)$ sont strictement négatives : $\boxed{F \text{ admet en } (\alpha, \alpha) \text{ un maximum local.}}$



EML 2010

Problème 1

Sujet : Matrices stochastiques, application à une chaîne de Markov. **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : Un problème qui justifie un résultat utilisé en TP sur les chaînes de Markov : toute matrice stochastique possède 1 comme valeur propre, et donc possède un état stationnaire. Les parties I et II sont plutôt intéressantes, et la partie III traite à la main un exemple de chaîne de Markov (sans le dire car le sujet a été posé à une époque où les chaînes de Markov n'étaient pas au programme).

Définitions et notations

- p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
- On note $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes, $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices-lignes à p colonnes à coefficients réels, $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels, I_p la matrice diagonale de $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ et de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1.
- On note, pour toute matrice carrée A d'ordre p et tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $(A)_{i,j}$ le coefficient de A situé à la ligne i et à la colonne j.
- On note, pour tout matrice-ligne L de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{R})$ et tout $j \in [\![1,p]\!]$, $(L)_j$ le coefficient de L situé à la colonne j.
- On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$, et on note $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$, si et seulement si : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $(A_n)_{i,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (A)_{i,j}$.
- On dit qu'une suite de matrices $(L_n)_{n\geqslant 1}$ de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{R})$ converge vers une matrice L de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{R})$, et on note $L_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$, si et seulement si : $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $(L_n)_j \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (L)_j$.
- On admet que, si la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ converge vers la matrice A et si la suite de matrice $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ converge vers la matrice B, alors la suite $(A_nB_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la matrice AB.
- On admet que si la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ converge vers la matrice A et si L est une matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbf{R})$, alors la suite $(LA_n)_{\geqslant 1}$ de matrices converge vers LA.
- On appelle matrice stochastique toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ telle que : $\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \ a_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in [\![1,p]\!], \ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1, \end{cases}$

  et on note $\mathcal{ST}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$.

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques – Illustrations

1. a. On note V la matrice-colonne à p lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1.

   Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$: $\quad A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V. \end{cases}$

   b. En déduire que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont une valeur propre commune.
2. Démontrer : $\quad \forall A, B \in \mathcal{ST}_p, \quad AB \in \mathcal{ST}_p$.
3. On note : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

   a. Justifier, sans calcul, que A_1 est diagonalisable. Donner la dimension du sous-espace propre de A_1 associé à la valeur propre 1.

   b. En utilisant éventuellement les matrices A_2 et A_3 :

      i. Montrer qu'il existe dans $\mathcal{ST}_3$ au moins un élément non diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$.

      ii. Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Pour tout élément A de $\mathcal{ST}_3$, le sous-espace propre pour A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1».
4. Soit $A \in \mathcal{ST}_p$ et λ une valeur propre de A dans $\mathbf{C}$.

   On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

   On note i un élément de $[\![1,p]\!]$ tel que : $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $|x_k| \leqslant |x_i|$.

a. Montrer : $|\lambda x_i| \leqslant |x_i|$.
b. En déduire : $|\lambda| \leqslant 1$.

Partie II : Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques
Soit $A \in \mathcal{ST}_p$. On note $A^0 = I_p$.

5. a. Établir : $\forall n \in \mathbf{N}, A^n \in \mathcal{ST}_p$.
   b. Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$.

Dans la suite de cette partie II, on suppose qu'il existe $r \in [\![1, p-1]\!]$, $P \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ inversible, $D \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux $(D)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leq r$ et distincts de 1 si $i \geqslant r+1$, tels que : $A = PDP^{-1}$.

On note, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $M_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D^k$ et $B_n = PM_nP^{-1}$.

On note Δ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(\Delta)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leq r$ et nuls sinon, et on note $B = P\Delta P^{-1}$.

6. Démontrer, pour tout $x \in \mathbf{R}$ fixé tel que $|x| \leqslant 1$: $\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$
7. Montrer : $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Delta$, et en déduire : $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B$.
8. a. Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad B_n \in \mathcal{ST}_p$.
   b. En déduire : $B \in \mathcal{ST}_p$.

Partie III : Aspect probabiliste
On dispose d'un objet noté T et de trois urnes numérotées $1, 2$ et 3.
À chaque instant n ($n \in \mathbf{N}$), T est dans une des trois urnes et une seule.
On note, pour tout $n \in \mathbf{N}$, X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve l'objet à l'instant n et L_n la matrice suivante de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbf{R})$: $L_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.
On suppose connues la loi de X_0 et la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2,\ (A)_{i,j} = P_{(X_0=i)}(X_1 = j).$$

On suppose : $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, \quad P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = P_{(X_0=i)}(X_1 = j)$.

9. Montrer : $A \in \mathcal{ST}_3$.
10. Montrer : $\forall \in \mathbf{N}$, $L_{n+1} = L_nA$ puis : $\forall n \in \mathbf{N}, L_n = L_0A^n$.

    On suppose dorénavant $A = A_1$, définie dans la question 3, et on note $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.
11. Déterminer une matrice $P_1 \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telle que $A_1 = P_1D_1P_1^{-1}$ et calculer P_1^{-1}.
12. Déterminer la limite de la suite $(D_1^n)_{n\geqslant 1}$, puis la limite de la suite $(A_1^n)_{n\geqslant 1}$.
13. Déterminer la limite de la suite $(L_n)_{n\geqslant 1}$. Expliquer ce résultat par des arguments probabilistes.

Problème 2

Sujet : Étude de $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dt$. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★★
Thèmes du programme abordés : séries numériques, intégrales impropres, analyse réelle.

Dans tout le problème, J désigne l'intervalle $]-1; +\infty[$.
Le but du problème est l'étude de l'application f définie, pour tout x de J, par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$.

Préliminaires
1. Justifier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}, \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^2}, \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

2. En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Partie I : Éléments d'étude de f

4. Justifier, pour tout $x \in J$, la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.
5. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
6. Montrer que

$$\forall x \in J,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x+1}$$

   et en déduire que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

7. a. Montrer que $\forall (x,y) \in J^2$, $\forall t \in]0,1]$, $(x \leqslant y \Rightarrow t^x \geqslant t^y)$.
   b. En déduire que f est décroissante sur J.
8. Montrer que $\forall x \in J, f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$.
9. Déduire des résultats précédents que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

10. Soit $x \in J$
   a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

   b. En déduire que la série $\sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

11. a. Montrer que

$$\forall (x,y) \in J^2,\ \forall k \in \mathbf{N}^*,\ \left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| \leqslant |x-y| \frac{1}{k^2},$$

   puis que

$$\forall (x,y) \in J^2, |f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right).$$

   b. En déduire que f est continue sur J.
12. Montrer que $f(x) \underset{x \to -1}{\sim} \frac{1}{x+1}$. En déduire la limite de f en -1.

Partie II : Dérivabilité de f

On note, pour tout $k \in \mathbf{N}$, g_k l'application de classe $\mathscr{C}^2$ de J dans $\mathbf{R}$ définie pour tout x de J par

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

13. Montrer que

$$\forall (x,y) \in J^2, \forall k \in \mathbf{N}^*, |g_k(x) - g_k(y) - (x-y) g_k'(x)| \leqslant \frac{|x-y|^2}{k^3}.$$

14. **a.** Justifier la convergence des séries $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3}$ et $\sum_{k\geqslant 0} g_k'(x)$, pour tout $x \in J$.

b. En déduire que f est dérivable sur J, et que

$$\forall x \in J, f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}.$$

c. Déterminer $f'(0)$.

15. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On donne la valeur approchée $\ln 2 \simeq 0,69$.

EML 2010 : CORRIGÉ

PROBLÈME 1

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques. Illustrations

1.a. Il s'agit de montrer que $AV = V$ si et seulement si

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1.$$

Mais pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$, on a

$$AV = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{p,j} \end{pmatrix}$$

Donc par identification des coefficients, il est clair que

$$\boxed{AV = V \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1.}$$

1.b. On en déduit que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont $\boxed{\text{1 comme valeur propre.}}$

> **Mieux**
> Nous avons même prouvé que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont V comme vecteur propre.

2. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ deux matrices de $\mathcal{ST}_p$. Alors il est clair que

$$(AB)V = A(BV) = AV = V.$$

De plus, notons $AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$. Par définition du produit matriciel, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} \geqslant 0$$

car tous les $a_{i,k}$ et tous les $b_{k,j}$ sont positifs.
Ainsi, d'après la question 1.a, on a bien $\boxed{AB \in \mathcal{ST}_p.}$

3.a. A est triangulaire inférieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. En l'occurrence, $\mathrm{Spec}(A_1) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$.
Puisque A_1 possède trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable, et tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

3.b.i. A_3 est triangulaire, donc $\mathrm{Spec}(A_3) = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$.
Puisque 1 n'apparait qu'une fois sur la diagonale de A_3, $\dim E_1(A_3) = 1$ et

$$\dim E_{1/2}(A_3) = 3 - \mathrm{rg}\left(A_3 - \frac{1}{2}I_3\right) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

> **Rappel**
> Pour une matrice triangulaire, la dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre λ est compris entre 1 et le nombre de fois où λ figure sur la diagonale de A.

On a donc

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A_3)} \dim E_\lambda(A_3) = \dim E_1(A_3) + \dim E_{1/2}(A_3) = 2 < 3.$$

Et donc A_3 n'est pas diagonalisable. Pourtant A_3 est bien[1] dans $\mathcal{ST}_3$, donc il existe des matrices de $\mathcal{ST}_3$ qui ne sont pas diagonalisables.

3.b.ii. Nous pourrions utiliser la matrice A_2 pour réfuter cette affirmation, mais plus simplement, notons que $I_3 \in \mathcal{ST}_3$, et que $\dim E_1(I_3) = 3 \neq 1$.

[1] Ses coefficients sont positifs, et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

4.a. Par définition, on a $AX = \lambda X$. En particulier, en identifiant la $i^{\text{ème}}$ coordonnée, il vient

$$\lambda x_i = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} x_k$$

et donc

$$|\lambda x_i| = \left|\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |a_{i,k} x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} |x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} |x_i| \leqslant |x_i|$$

car $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} = 1$.

4.b. Puisque X est un vecteur propre de A, il est non nul[2], et donc $|x_i| = \max\limits_{k\in[\![1,p]\!]} |x_k| \neq 0$.
En divisant alors la relation précédente par $|x_i|$, on obtient

$$\boxed{|\lambda| \leqslant 1.}$$

[2] Autrement dit, l'un au moins des x_k est non nul.

Partie II : Suite de moyennes de puissances de matrices stochastiques

5.a. Procédons par récurrence sur $\mathbf{N}$.
On a $A^0 = I_n$, qui est clairement[3] stochastique
Supposons que A^n est stochastique.
Alors $A^{n+1} = AA^n \in \mathcal{ST}_p$, d'après la question 2 la partie I.
Par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ A^n \in \mathcal{ST}_p.}$

[3] Tous ses coefficients sont positifs, et la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1.

5.b. Par la question précédente, chacune des A^k a tous ses coefficients positifs, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ a également tous ses coefficients positifs. En divisant par n, on a alors $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ qui a tous ses coefficients positifs.
De plus,

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right)V = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k V = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V = \frac{1}{n} nV = V.$$

Donc d'après la question 1, la matrice $\boxed{\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p.}$

6. Commençons par traiter le cas $x = 1$. On a alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n$, et donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1^k = \frac{n}{n} = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Si $x \neq 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$.
On obtient alors une suite bornée car

$$\left|\frac{1-x^n}{1-x}\right| = \frac{|1-x^n|}{|1-x|} \leqslant \frac{1+|x|^n}{|1-x|} \leqslant \frac{2}{|1-x|}.$$

Puisque $\displaystyle\frac{1}{n}$ tend vers 0, on a alors :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k = 0.}$$

Danger
Attention à ne pas aller trop vite, pour $x = -1$, il n'est pas question d'utiliser le fait que $x^n \to 0$: c'est faux !

Rappel
Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle tend vers 0.

7. Puisque A et D sont semblables, elles ont les mêmes valeurs propres. Or, A étant stochastique, ses valeurs propres sont de module inférieur à 1. Il en est donc de même de D, et ses valeurs propres étant ses coefficients diagonaux, on en déduit que tous les coefficients diagonaux de D sont de module[4] inférieur ou égal à 1.
Ainsi, en utilisant les données de l'énoncé, on a

$$D = \text{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{r \text{ fois}}, \lambda_{r+1},\dots,\lambda_p) \text{ avec } \forall i \in [\![r+1,p]\!], |\lambda_i| \leqslant 1 \text{ et } \lambda_i \neq 1.$$

Il vient alors $\forall k \in \mathbf{N}$, $D^k = \text{diag}(1,\dots,1,\lambda_{r+1}^k,\dots,\lambda_p^k)$. Et donc

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \text{diag}(1,\dots,1,\lambda_{r+1}^k,\dots,\lambda_p^k) = \frac{1}{n}\text{diag}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1,\dots,\sum_{k=0}^{n-1} 1, \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_{r+1}^k,\dots,\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_p^k\right).$$

En utilisant la question précédente, on a alors :

- si $i \neq j$, $(M_n)_{i,j} = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- si $i \in [\![1,r]\!]$, $(M_n)_{i,i} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$
- si $i \in [\![r+1,p]\!]$, $(M_n)_{i,i} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, on a bien prouvé que $\boxed{M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Delta.}$

De plus, en utilisant les résultats rappelés au début de l'énoncé : puisque $M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Delta$, alors $PM_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P\Delta$, puis $\boxed{PM_nP^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P\Delta P^{-1} = B.}$

8.a. Par définition, on a

$$B_n = PM_nP^{-1} = P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D^k\right)P^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(PDP^{-1})^k = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p.}$$

8.b. Il s'agit de prouver qu'une limite de matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.
Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. Alors $\forall n \in \mathbf{N}, (B_n)_{i,j} \geqslant 0$ car $B_n \in \mathcal{ST}_p$.
Donc par passage à la limite, $B_{i,j} = \lim\limits_{n\to\infty}(B_n)_{i,j} \geqslant 0$.
De plus, $\forall i \in [\![1,p]\!]$

$$\sum_{j=1}^{p}(B_n)_{i,j} = 1 \text{ et donc } \sum_{j=1}^{p} B_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\lim_{n\to\infty}(B_n)_{i,j} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{p} = 1.$$

Donc $\boxed{B \in \mathcal{ST}_p.}$

Partie III : Aspect probabiliste

9. Les coefficients de A sont tous des probabilités, donc sont évidemment positifs.
Soit $i \in [\![1,3]\!]$. Puisque $\{[X_1 = j], j \in [\![1,3]\!]\}$ forme un système complet d'événements, on a, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3} P_{(X_0=i)}(X_1=j) &= \sum_{j=1}^{3}\frac{P([X_0=i]\cap[X_1=j])}{P(X_0=i)} \\ &= \frac{1}{P(X_0=i)}\sum_{j=1}^{3}P([X_0=i]\cap[X_1=j]) = \frac{P(X_0=i)}{P(X_0=i)} = 1.\end{aligned}$$

Ainsi, la somme des coefficients de chaque ligne de A est bien égale à 1 : $\boxed{A \in \mathcal{ST}_p.}$

10. Soit $k \in [\![1,3]\!]$. Alors, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[X_n = i], i \in [\![1,3]\!]\}$, il vient

$$P(X_{n+1}=j) = \sum_{i=1}^{3} P(X_n=i)P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) = \sum_{i=1}^{3}P(X_n=i)P_{(X_0=i)}(X_1=j).$$

[4] En fait on sait que ces coefficients sont réels, donc leur module n'est autre que leur valeur absolue.

Chaîne de Markov
Le fait que la loi de X_{n+1} connaissant X_n ne dépende pas de n (*i.e.* ne varie pas au cours du temps), et soit toujours la même que la loi de X_1 connaissant X_0 signifie que nous sommes en fait en présence d'une chaîne de Markov (à trois états).
Et alors A est sa matrice de transition, dont il a été prouvé en TP qu'il s'agit bien d'une matrice stochastique.

Or, nous reconnaissons là le coefficient à la $j^{\text{ème}}$ colonne du produit matriciel L_nA.
Donc $L_{n+1} = L_nA$.
Prouvons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $L_n = L_0A^n$.
Pour $n = 0$, c'est évident car $A^0 = I_3$.
Supposons donc que $L_n = L_0A^n$. Alors

$$L_{n+1} = L_nA = L_0A^nA = L_0A^{n+1}.$$

Par le principe de récurrence, on a alors $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ L_n = L_0A^n.}$

Détails
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et P inversible, la matrice PAP^{-1} est diagonale si et seulement si A est diagonalisable et que la matrice P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ à une base de vecteurs propres de A.

11. Pour satisfaire aux conditions posées, il faut et il suffit que les colonnes de P_1 soient des vecteurs propres associés, dans cet ordre, aux valeurs propres $1, 1/2$ et $1/3$, et que les coefficients diagonaux de P_1 soient égaux à 1.
Nous savons déjà que les valeurs propres de A_1 sont $1, 1/2$ et $1/3$, et que ses trois sous-espaces propres sont de dimension 1.

On a $A_1 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont liées par la relation $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, de sorte que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A_1, associé à la valeur propre 1, et donc[5] $E_1(A_1) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[5] Le sous-espace propre $E_1(A_1)$ est de dimension 1.

De même, on a $A - \dfrac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont liées par la relation $0C_1 + C_2 + 2C_3 = 0$ et donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A_1 associé à la valeur propre $1/2$ et donc $E_{1/2}(A_1) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Enfin, on a $A_1 - \dfrac{1}{3}I_3 = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ dont la dernière colonne est nulle, de sorte que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A_1 associé à la valeur propre $1/3$ et donc $E_{1/3}(A_1) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ répond à la question posée, et un calcul d'inverse à l'aide de la méthode du pivot prouve qu'on a alors $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque
Ici, nous avons été chanceux : les vecteurs propres obtenus ont tous des 1 situés à la bonne place.
Si on avait utilisé d'autres relations sur les colonnes, ou obtenu des vecteurs propres par d'autre moyens, ceci n'aurait pas forcément été vrai.
Il aurait alors fallu se souvenir que si on multiplie un vecteur propre par $\lambda \neq 0$, alors on obtient encore un vecteur propre.
Et donc, quitte à multiplier par une constante bien choisie, il aurait été possible d'obtenir des 1 là où on les voulait.
Par exemple, pour le sous-espace propre $E_1(A_1)$, on aurait pu obtenir comme base $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Puisqu'on voulait un 1 à la première ligne, il faut multiplier ce vecteur par $-\frac{1}{2}$.

12. On a $D_1^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$, de sorte que $\lim\limits_{n\to\infty} D_1^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$.
On en déduit comme dans la question 7 que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_1^n = P_1DP_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

13. Notons $L_0 = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$. Puisque $\{[X_0 = i], i \in [\![1,3]\!]\}$ est un système complet d'événements, on a $a + b + c = 1$.
De plus, comme expliqué dans l'énoncé, on a

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \lim_{n\to+\infty} L_0A_1^n = L_0(\lim_{n\to+\infty} A_1^n) = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Ce résultat s'explique par le fait que si l'objet est dans l'urne 1, il n'en sort pas : $P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1)=1$.
De plus, si l'objet se trouve dans la seconde urne à un instant donné, il a une probabilité[6] $1/2$ de se trouver dans la première à l'instant suivant (et donc de ne plus en sortir), et de même, depuis la troisième urne, il a une probabilité $1/3$ de se trouver dans la première à l'instant suivant, puis de ne plus en sortir.
Ainsi, quel que soit l'endroit où se trouve l'objet au départ, au bout d'un temps suffisamment long, il finira presque sûrement par se retrouver dans la première urne, puis n'en sortira plus.
Ceci correspond au résultat du calcul : quel que soit $(a \quad b \quad c)$ l'état de départ, alors au bout d'un temps assez long, l'objet se trouvera dans l'urne 1 avec probabilité 1 (et donc dans les autres avec probabilité nulle).

[6] Cette probabilité est $P_{[X_0=2]}(X_1=1)=(A_1)_{2,1}$.

Markov
En d'autres termes, l'état stationnaire de la chaîne de Markov considérée est $(1 \quad 0 \quad 0)$.

PROBLÈME 2

Préliminaires

1. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car il s'agit d'une série de Riemann convergente.
On a $\frac{1}{(2k+1)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\frac{1}{k^2}$, et donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_k \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge.
Enfin, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument car $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente.

2. Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Alors
$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}.$$
Par passage à la limite lorsque $N \to +\infty$, il vient
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$
et donc
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}.}$$

3. Notons que $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ et donc
$$\forall N \in \mathbf{N}^*, \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$
Ainsi, en passant à la limite lorsque $N \to \infty$, il vient
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = \boxed{\frac{-\pi^2}{12}.}$$

Rédaction
Le critère des équivalents ne fonctionne que pour les séries dont le terme général est de signe constant.
Aussi, lorsqu'on utilise $u_n \sim v_n$, on n'oubliera pas de vérifier qu'au moins l'une des deux séries que l'on considère est de signe constant (l'autre l'étant alors automatiquement).
Même lorsque c'est évident, comme c'est le cas ici, mieux vaut montrer qu'il sait qu'il est indispensable de vérifier les signes.

Détails
Nous avons en fait séparé la somme en deux sommes : celle des termes d'ordre pair et celle des termes d'ordre impair, ce qui est légitime car les deux convergent.
Si c'est clair pour vous, nul besoin de repasser aux sommes partielles, il est possible de travailler directement sur les sommes de 1 à $+\infty$.

Partie I : Éléments d'étude de f

4. Pour $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \frac{t^x}{1+t}$ est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale est bien définie.
Pour $x \in]-1,0[$, la fonction $t \mapsto \frac{t^x}{1+t}$ est continue sur $]0,1]$, donc le seul problème éventuel de convergence a lieu au voisinage de 0.
Mais $\frac{t^x}{1+t} \underset{t\to0}{\sim} t^x$.
Or l'intégrale $\int_0^1 t^x\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{-x}}$ est une intégrale de Riemann convergente[7], donc par comparaison de fonctions positives, $\boxed{\int_0^1 \frac{t^x}{1+x}\,dt \text{ converge.}}$

Continuité
Si $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto t^x$ est définie sur $\mathbf{R}$, alors que si $x < 0$, $t \mapsto t^x = \frac{1}{t^{-x}}$ n'est définie que sur $\mathbf{R}^*$.

[7] Car $-x < 1$.

5. On a

$$f(0)=\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt=[\ln(1+t)]_0^1=\boxed{\ln(2).}$$

$$f(1)=\int_0^1 \frac{t}{1+t}\,dt=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=\boxed{1-\ln(2).}$$

6. Soit $x\in J$ fixé. Alors, $\forall t\in]0,1]$, on a

$$0\leqslant \frac{t^x}{1+t}\leqslant t^x$$

et donc par croissance de l'intégrale,

$$0\leqslant f(x)\leqslant \int_0^1 t^x\,dt=\frac{1}{x+1}.$$

Par le théorème des gendarmes, puisque $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=0.}$$

Remarque

Pour $x\geqslant 0$, on a

$$\int_0^1 t^x\,dt=\left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^1=\frac{1}{x+1}$$

Pour $x<0$, on ne peut directement faire ceci, car il s'agit d'une intégrale impropre en 0.
Mais pour $a>0$, on a $\int_a^1 t^x\,dt=\frac{1-a^{x+1}}{x+1}$, puis en faisant tendre a vers 0, il vient

$$\int_0^1 t^x\,dt=\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 t^x\,dt=\frac{1}{x+1}.$$

7.a. Soient $(x,y)\in J^2$, $x\leqslant y$, et soit $t\in]0,1]$.
Alors $\ln t\leqslant 0$, et donc $x\ln t\geqslant y\ln t$. Par croissance de l'exponentielle, on a alors

$$\boxed{t^x=e^{x\ln t}\geqslant e^{y\ln t}=t^y.}$$

7.b. Soient $(x,y)\in J^2$, avec $x\leqslant y$. Alors,

$$\forall t\in]0,1],\ \frac{t^x}{1+x}\geqslant\frac{t^y}{1+t}$$

et donc par croissance de l'intégrale,

$$f(x)=\int_0^1\frac{t^x}{1+t}dt\geqslant\int_0^1\frac{t^y}{1+t}dt=f(y).$$

Ceci prouve bien que $\boxed{f \text{ est décroissante sur } J.}$

8. Soit $x\in J$. Alors

$$f(x)+f(x+1)=\int_0^1\frac{t^x}{1+t}\,dt+\int_0^1\frac{t^{x+1}}{1+t}\,dt=\int_0^1\frac{t^x+t^{x+1}}{1+t}\,dt=\int_0^1\frac{t^x(1+t)}{1+t}\,dt=\int_0^1 t^x\,dt=\boxed{\frac{1}{x+1}.}$$

9. En utilisant les résultats des question 7.b et 8, on a

$$\frac{1}{x+1}=f(x)+f(x+1)\leqslant 2f(x)\text{ et }\frac{1}{x}=f(x-1)+f(x)\geqslant 2f(x).$$

Il vient alors $\frac{1}{2(x+1)}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2x}$, et en multipliant cette inégalité par $2x$, et par application du théorème des gendarmes, il vient alors

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to+\infty}2xf(x)=1\text{ et donc }\boxed{f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}.}$$

⚠ Attention !

Le théorème des gendarmes ne donne en aucun cas un équivalent, mais uniquement une limite.
Si on souhaite l'utiliser pour prouver un équivalent, on reviendra automatiquement au quotient : $f\sim g$ si et seulement si

$$\lim\frac{f}{g}=1.$$

10.a. Procédons par récurrence sur n. Pour $n=0$, le résultat est celui de la question 8.
Supposons donc que $f(x)=(-1)^{n+1}f(n+1+x)+\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

Par la question 8, $f(n+1+x)=\frac{1}{n+2+x}-f(n+2+x)$. Donc

$$f(x)=(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n+2+x}-f(n+2x+x)\right)+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}=(-1)^{n+2}f(n+2+x)+\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$, et par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall x\in J,\forall n\in\mathbf{N},\ f(x)=(-1)^{n+1}f(n+1+x)+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}.}$$

10.b. Lorsque $n \to \infty$, $n+1+x \to +\infty$, et alors $f(n+1+x) \to 0$ (d'après la question 6). On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} = f(x).$$

Ainsi, la série $\sum \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge[8] et $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x} = f(x).}$

[8] Car la suite de ses sommes partielles converge.

11.a. On a, $\forall (x,y) \in J^2, \forall k \in \mathbf{N}^*$,

$$\left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| = \left|\frac{k+1+y-(k+1+x)}{(k+1+y)(k+1+x)}\right| = \frac{|x-y|}{(k+1+x)(k+1+y)}.$$

Mais puisque $x, y \geqslant -1$, on a $(k+1+x)(k+1+y) \geqslant k^2$ et donc

$$0 \leqslant \frac{1}{(k+1+x)(k+1+y)} \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

On en déduit que $\boxed{\forall (x,y) \in J, \forall k \in \mathbf{N}^*, \left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| \leqslant \frac{|x-y|}{k^2}.}$

On a alors

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right)\right| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x-y|}{k^2} \\
&\leqslant |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) \\
&\leqslant \boxed{|x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6}\right).}
\end{aligned}$$

C'est l'inégalité triangulaire généralisée.

Le premier terme correspond à $k = 0$, cas dans lequel on ne pouvait pas utiliser la majoration précédente.

11.b. Soit $x \in J$ fixé. Alors

$$\lim_{y\to x} \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6}\right) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{\pi^2}{6}$$

et donc

$$\lim_{y\to x} |x-y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6}\right) = 0.$$

On en déduit que $\lim_{y\to x} |f(x) - f(y)| = 0$ et donc $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$.

Par conséquent, f est continue en x. Ceci étant vrai pour tout $x \in J$, $\boxed{f \text{ est continue sur } J.}$

12. D'après la relation de la question 8, on a $(x+1)f(x) = 1 - (x+1)f(x+1)$.
Mais par continuité de f en 0, $\lim_{x\to -1} f(x+1) = f(0) = \ln(2)$, et donc $\lim_{x\to -1} (x+1)f(x) = 0$.

On en déduit que $\lim_{x\to -1} (x+1)f(x) = 1$ et donc $\boxed{f(x) \underset{x\to -1}{\sim} \frac{1}{x+1}.}$

Et par conséquent, $\boxed{\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty.}$

Partie II : dérivabilité de f

13. Notons que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $g_k'(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}$ et $g_k''(x) = \frac{(-1)^k 2}{(k+1+x)^3}$.

En particulier, $\forall x \in J$, $k+1+x \geqslant k$ et donc $|g_k''(x)| \leqslant \frac{2}{k^3}$.
Puisque g_k est $\mathscr{C}^2$, par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall (x,y) \in J^2, |g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g_k'(x)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{2}{k^3}|x-y|^2 \leqslant \frac{|x-y|^2}{k^3}.$$

Taylor-Lagrange

L'inégalité de Taylor-Lagrange (à l'ordre n) fonctionne avec **n'importe quel majorant de $|f^{(n+1)}|$.** Lorsqu'il n'y en a pas d'évident, on peut essayer d'étudier les variations de $f^{(n+1)}$, ce qui permet généralement de trouver un majorant et un minorant de $f^{(n+1)}$.

14.a. La série $\sum_k \frac{1}{k^3}$ converge car il s'agit d'une série de Riemann convergente.

Pour $x \in J$ fixé, $|g_k'(x)| = \frac{1}{(k+1+x)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$. Donc $\sum_k g_k'(x)$ est absolument convergente, et donc convergente.

14.b. Soient $(x,y) \in J$. Alors la série de terme général $g_k(x) - g_k(y) - (x-y)g_k'(x)$ est absolument convergente d'après la question 13, car sa valeur absolue est majorée par le terme général d'une série convergente.

De plus, on a alors, par sommation des relations obtenues à la question précédente

$$\left| f(x) - f(y) - (x-y)\sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x) \right| \leqslant |g_0(x) - g_0(y) - (x-y)g_0'(x)| + |x-y|^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Pour $x \neq y$, en divisant par $|x-y|$, il vient

$$\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x) \right| \leqslant \left| \frac{g_0(x)-g_0(y)}{x-y} - g_0'(x) \right| + |x-y| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Fixons x, et soit $y \in J$. Alors $g_0'(x) = \lim_{y\to x} \frac{g_0(x)-g_0(y)}{x-y}$ de sorte que

$$\lim_{y\to x} \left| \frac{g_0(x)-g_0(y)}{x-y} - g_0'(x) \right| = 0.$$

On en déduit donc que

$$\lim_{y\to x} \left| f(x) - f(y) - (x-y)\sum_{k=0}^{\infty} g_k'(x) \right| = 0,$$

puis que

$$\lim_{y\to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}.$$

Ainsi, f est dérivable sur J, et

$$\boxed{f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}.}$$

Méthode

Remarquons que la dérivée de la somme (infinie) est la somme (infinie) des dérivées. Contrairement aux apparance, cela ne **découle pas** de la linéarité de la dérivation, qui permet de dériver terme à terme pour des sommes finies.
Si l'on souhaite étudier la dérivabilité d'une fonction définie par une série, il faudra toujours revenir à la définition de la dérivée : c'est la limite, **si elle existe**, du taux d'accroissement de f.

14.c. D'après la question précédente,

$$f'(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \boxed{-\frac{\pi^2}{12}.}$$

15. Il s'agit de faire apparaître sur la courbe les différents éléments mis en évidence au cours du problème : f est décroissante, dérivable[9], tend vers $+\infty$ en -1 et vers 0 en $+\infty$. D'autre part, elle vaut environ 0.69 en 0 et 0.31 en 1.

Enfin, sa tangente en 0 possède un coefficient directeur qui vaut $-\frac{\pi^2}{12}$. Sans chercher à en calculer une valeur exacte, on peut grossièrement affirmer que ceci est compris entre $-\frac{3}{4}$ et -1, et donc on évitera d'avoir une tangente trop «plate» ou trop «pentue» en 0.

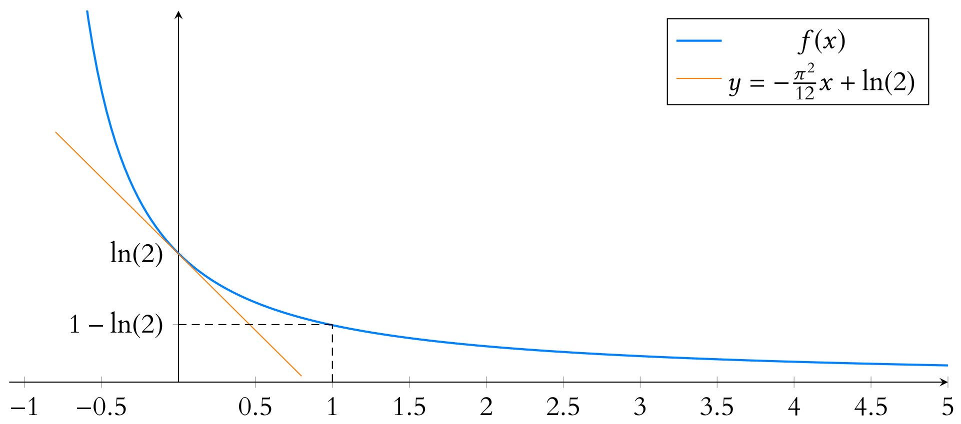
[9] Ce qui signifie que graphiquement, la courbe de f ne doit pas présenter «d'angles».

Extraits commentés du rapport du jury

Problème 1

1.b — Les candidat(e)s pour la plupart, oublient de rappeler que V est non nul.

✎ Rappelons que par définition, λ est valeur propre de A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ **non nul** tel que $AX = \lambda X$.
Si on oublie l'hypothèse $X \neq 0$, alors le vecteur nul convient toujours, et donc tous les éléments de $\mathbf{K}$ seraient valeur propre de A.



2 — Lors de l'étude du terme général du produit de deux matrices, la manipulation des symboles de sommation n'est pas toujours correcte, et, dans les copies faibles, le terme général du produit de deux matrices n'est pas obtenu, d'où l'impossibilité de justifier qu'il soit positif ou nul.

✎ Il ne suffit pas de savoir faire «à la main» le produit de deux matrices 2×2 ou 3×3, il faut absolument être capable de donner la formule du produit matriciel.
Rappelons que si vous savez faire un produit de matrices, vous connaissez (au moins inconsciemment) cette formule : comment obtenez-vous le terme situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de AB ? En faisant la somme des produits des coefficients de la ligne i de A et la colonne j de B... C'est exactement ce que dit la formule $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$.

3b — Certain(e)s candidat(e)s croient à tort que, si une matrice carrée d'ordre 3 n'a que deux valeurs propres, alors elle n'est pas diagonalisable. C'est faux, comme le montre l'exemple $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

✎ Nous savons que si une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ possède n valeurs propres, alors elle est diagonalisable. Mais la réciproque n'est absolument pas vrai, comme le montre l'exemple ci-dessus (diagonalisable car diagonale !) ou encore le cas de I_n, qui est évidemment diagonalisable, mais ne possède qu'une seule valeur propre.

5.b — Des candidat(e)s se lancent dans une récurrence qui tourne à une démonstration directe, sans utilisation de l'hypothèse de récurrence.

✎ Classique ! Avant de se lancer dans une récurrence, réfléchir à comment utiliser l'hypothèse de récurrence pour prouver l'hérédité. Si on ne l'utilise pas, cela ne signifie pas que la preuve est fausse, mais tout simplement qu'une récurrence (qui est toujours un peu fastidieuse à écrire) est inutile !

Problème 2

1 — Beaucoup trop d'erreurs dans l'étude de $\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Certain(e)s candidat(e)s croient à tort qu'il s'agit d'une série de Riemann.
On ne peut pas poser $n = 2k+1$ car les termes d'indices pairs sont alors soit manquants, soit introduits à tort.

✎ Les séries de Riemann sont les $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$, et rien d'autre !

Un bon moyen d'éviter les confusions est d'écrire (au brouillon) les sommes avec des pointillés : $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ alors que $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$

On constate alors que la seconde somme comporte plus de termes que la première.

Concernant les changements d'indice dans les sommes, on ne peut poser $n = 2k+1$ car alors n ne prend que des valeurs impaires, et donc on ne peut avoir comme nouvelle somme $\sum_{n=1}^{+\infty}$, car alors n prendrait **toutes** les valeurs entières, paires et impaires.

De manière générale, les seuls changements d'indices que l'on peut faire sur une somme sont des «décalages» : $n = k + p$, où $p \in \mathbf{Z}$ est fixé.

9 — Pour l'immense majorité des candidat(e)s, $f(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x)$ est une évidence, et additionner les équivalents ne les gêne pas.

✎ Donnons deux contre-exemples à $f(x+1) \sim f(x)$.

La fonction $f : x \mapsto \sin(\pi x)$ vérifie $f(x+1) = -f(x)$ et donc $\frac{f(x+1)}{f(x)} = -1 \underset{x\to+\infty}{\not\longrightarrow} 1$.

De même, si $f(x) = e^{x^2}$ alors $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{e^{x^2+2x+1}}{e^{x^2}} = e^{2x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $f(x+1) \nsim f(x)$.

Quant au fait d'additionner les équivalents, je pense que l'immense majorité des candidat(e)s sait que c'est interdit, mais que beaucoup ne réalisent pas qu'ils sont précisément en train de le faire.

Quoiqu'il en soit, pour tout ce qui concerne les équivalents, en cas de doute, le plus efficace pour se prémunir contre les erreurs est de systématiquement revenir à la définition en faisant apparaître un quotient.

9 — Il y a souvent confusion entre limite et équivalent.

✎ Une erreur récurrente dans tous les sujets d'analyse !

Rappelons qu'une limite ne peut dépendre de la variable, et donc qu'on ne peut par exemple écrire $x^2 + x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} x$ ou encore $\frac{n}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Il s'agit là d'équivalents, et non de limites.

13 — Lors de la citation de l'inégalité de Taylor-Lagrange, le statut de la lettre M n'est pas clair, et il y a souvent oubli de la valeur absolue.

✎ De manière générale, l'inégalité de Taylor-Lagrange est souvent problématique, et dans le meilleur des cas se résume à la formule

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Mais il faut alors avoir les idées claires sur ce que doit être M : il s'agit d'un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$, sur $\mathbf{R}$ s'il existe ou plus simplement sur le segment d'extrémités a et x.

Les erreurs classiques sont l'oubli de la valeur absolue (ce qui signifierait que lorsque $f^{(n+1)}$ est négative, on peut prendre $M = 0$!), et une confusion entre $f^{(n)}$ et $f^{(n+1)}$.

Les candidat(e)s qui prouvent qu'ils maîtrisent cette inégalité et ses hypothèses sont généralement bien récompensés par le barème et peuvent espérer un peu de clémence du correcteur en cas de (petite) imprécision de leur part dans la suite du sujet.

EML 2009

Problème 1

Sujet : Calcul d'une intégrale impropre, applications. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ (partie 1) **Intérêt** : ★☆☆

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, produits scalaires, variables à densité

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : des notions classiques, l'ensemble est un peu décousu et sans but. Plutôt calculatoire.

Partie I - Calcul d'une intégrale

On note (a,b) un couple de réels strictement positifs.

1. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$ converge.

2. a. Établir, pour tout (ε, X) appartenant à $]0,+\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leqslant X$:

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}}{x}\,dx = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \text{ et } \int_\varepsilon^X \frac{e^{-bx}}{x}\,dx = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,dy.$$

(*À cet effet, on pourra utiliser des changements de variable*).

b. En déduire, pour tout (ε, X) appartenant à $]0;+\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leqslant X$:

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,dy.$$

3. a. Montrer que l'application $h : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbf{R},\ y \longmapsto h(y) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-y}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

b. En déduire : $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \ln\frac{b}{a}$.

c. Établir, pour tout X de $]0;+\infty[$: $\displaystyle\int_0^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$.

d. En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$.

Partie II - Étude d'un produit scalaire.

On note E l'ensemble des applications $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$, bornées, de classe $\mathscr{C}^1$, telles que $f(0) = 0$.

4. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de $[0;+\infty[$ dans $\mathbf{R}$.

5. On considère les applications f_1, f_2, f_3, f_4 définies, pour tout $x \in [0;+\infty[$, par :

$$f_1(x) = \sin(x),\ f_2(x) = \cos(x),\ f_3(x) = e^x - 1,\ f_4(x) = 1 - e^{-x}.$$

Pour chacune de ces applications, indiquer, en le justifiant, si elle est ou non un élément de E.

6. a. Montrer, pour tout $f \in E$: $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0)$.

b. Montrer que, pour tout $(f,g) \in E^2$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,dx$ converge.

On note $(\cdot|\cdot) \longrightarrow \mathbf{R},\ (f,g) \longmapsto (f|g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,dx$.

7. Établir que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.

8. Démontrer, pour tout $(f,g) \in E^2$: $(f|g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{x}\,dx$.

(*À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un segment*).

9. On note, pour tout $\alpha \in]0;+\infty[$, $u_\alpha : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$, définie, pour tout $x \in [0;+\infty[$, par : $u_\alpha(x) = 1 - e^{-\alpha x}$.

a. Vérifier : $\forall \alpha \in]0;+\infty[,\ u_\alpha \in E$.

b. Calculer, pour tout $(\alpha,\beta) \in]0;+\infty[^2$, le produit scalaire $(u_\alpha|u_\beta)$.
(À cet effet, on pourra utiliser les résultats des questions 8 et 3.d).

c. Établir, pour tout $(\alpha,\beta) \in]0;+\infty[^2$: $(u_\alpha|u_\beta) > 0$.

Partie III – Étude de densités de variables aléatoires
On note c un réel strictement positif.
On considère l'application $v : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie, pour tout réel x, par :

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}}{x\ln 4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

10. Montrer que v est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Soit X une variable aléatoire réelle, à valeurs positives ou nulles, admettant v comme densité.

11. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$ en fonction de c.

12. On note Y la variable aléatoire réelle définie par : $Y = \sqrt{X}$.
    a. Montrer que Y est une variable aléatoire réelle à densité et calculer une densité de Y.
    b. Montrer que la variable aléatoire réelle Y admet une espérance et une variance, et déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$ en fonction de c.

Problème 2

Sujet : Racines carrées de matrices. **Difficile**
Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆
Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire, diagonalisation, matrices symétriques
Commentaires : si les résultats prouvés sont très intéressants, les parties III et IV ne s'adressent qu'à des étudiants possédant de solides bases en algèbre linéaire.

Notations et définitions
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
- La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est notée I_n et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est notée 0_n.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On dit que M est nilpotente s'il existe un entier naturel non nul p tel que $M^p = 0_n$.
- Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et λ une valeur propre réelle de M. On note $\mathrm{SEP}(M,\lambda)$ le sous-espace propre de M associé à λ.
- On dit qu'une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est symétrique positive lorsqu'elle est symétrique et vérifie :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0.$$

- Soient $A, R \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On dit que R est une racine carrée de A lorsqu'elle vérifie $R^2 = A$.

Le but de ce problème est d'étudier la notion de racine carrée d'une matrice dans quelques cas particuliers.

Partie I – Deux exemples

1. Soient $\theta \in \mathbf{R}$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.
   Calculer $(R_\theta)^2$ et en déduire que la matrice I_2 admet une infinité de racines carrées.

2. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

Partie II – Racines carrées d'une matrice de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente

3. Donner le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de $t \mapsto \sqrt{1+t}$.
   On note $\sqrt{1+t} = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \underset{t\to 0}{o}(t^3)$ ce développement limité.

4. Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbf{R}[X]$ tel que

$$1 + X = (a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)^2 + X^4Q(X).$$

5. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $N^4 = 0_n$. Déduire de la question précédente une racine carrée de $I_n + N$.

Partie III – Racines carrées d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ admettant n valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes.

6. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbf{R}^n$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On suppose de plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.
   a. Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g.
   b. En déduire que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
   c. Justifier que f est diagonalisable.
   Montrer que, pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f, la matrice associée à g relativement à la base $\mathcal{B}$ est diagonale. En déduire que g est diagonalisable.
7. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ admettant n valeurs propres réelles strictement positives et deux à deux distinctes.
   a. Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
   b. Donner un exemple de racine carrée de A (on l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D).
   c. Soit R une racine carrée de A. Vérifier que $AR = RA$.
   En déduire que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.
   d. Établir que A admet exactement 2^n racines carrées.

Partie IV – Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique positive.

8. Montrer que toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.
9. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}SP$ soit diagonale.
10. Déterminer une racine carrée de S qui soit symétrique positive (on l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D).
11. On veut montrer que S admet une unique racine carrée symétrique positive.
    Soit R une matrice symétrique positive telle que $R^2 = S$.
    a. Soit λ une valeur propre de R. Montrer que λ^2 est une valeur propre de S et que les sous-espaces propres associés vérifient : $\mathrm{SEP}(R,\lambda) \subset \mathrm{SEP}(S,\lambda^2)$.

    On note p le nombre de valeurs propres deux à deux distinctes de R et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de R.

    b. Justifier : $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(R,\lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2)$.
    c. En déduire : $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{SEP}(R,\lambda_i)) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2)) \leqslant n$.
    d. Montrer que $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_p^2$ sont les seules valeurs propres de S et que
    $$\forall i \in \{1,\ldots,p\},\ \mathrm{SEP}(R,\lambda_i) = \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2).$$
    e. Montrer que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.
    f. En déduire que S admet une unique racine carrée symétrique positive.

EML 2009 : Corrigé

Problème 1

Partie I - Calcul d'une intégrale.

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
Au voisinage de 0, un développement limité du numérateur nous donne

$$e^{-ax}-e^{-bx} = 1-ax+o(x)-(1-bx+o(x)) = (b-a)x+o(x) \underset{x\to 0}{\sim} (b-a)x.$$

Et donc $\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \underset{x\to 0}{\sim} b-a \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} b-a$.
Et donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$ est faussement impropre, donc convergente.
Au voisinage de $+\infty$, il vient

$$x^2\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} = xe^{-ax}-xe^{-bx} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

de sorte que $\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$.
Et donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx \text{ converge.}}$

Danger !
Les $o(x)$ ne s'annulent pas, on a juste

$$o(x)+o(x) = o(x)$$

et de même

$$o(x)-o(x) = o(x).$$

Ceci vient du fait que $o(x)$ est juste une notation pratique qui peut désigner toute fonction négligeable devant x.
En particulier, le premier $o(x)$ et le second $o(x)$ ne désignent probablement pas la même fonction, et donc leur différence est non nulle.

2.a. Sur le segment $[\varepsilon, X]$, procédons au changement de variable[1] $y = ax$.
Alors $dy = a\,dx \Leftrightarrow dx = \dfrac{dy}{a}$ et donc

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}}{x}\,dx = \int_{a\varepsilon}^{aX}\frac{e^{-y}}{\frac{y}{a}}\frac{dy}{a} = \int_{a\varepsilon}^{aX}\frac{e^{-y}}{y}\,dy.$$

De même, le changement de variable $y = bx$ nous donne

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-bx}}{x}\,dx = \int_{b\varepsilon}^{bX}\frac{e^{-y}}{y}\,dy.$$

[1] Affine, donc légitime.

2.b. On a donc

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^X\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx &= \int_\varepsilon^X\frac{e^{-ax}}{x}\,dx - \int_\varepsilon^X\frac{e^{-bx}}{x}\,dx\\ &= \int_{a\varepsilon}^{aX}\frac{e^{-y}}{y}\,dy - \int_{b\varepsilon}^{bX}\frac{e^{-y}}{y}\,dy\\ &= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-y}}{y}\,dy + \int_{b\varepsilon}^{aX}\frac{e^{-y}}{y}\,dy - \left(\int_{b\varepsilon}^{aX}\frac{e^{-y}}{y}\,dy + \int_{aX}^{bX}\frac{e^{-y}}{y}\,dy\right)\\ &= \boxed{\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-y}}{y}\,dy - \int_{aX}^{bX}\frac{e^{-y}}{y}\,dy.}\end{aligned}$$

Relation de Chasles.

3.a. Il est clair que h est continue sur $]0,+\infty[$ car quotient de fonctions continues.
Au voisinage de 0, on a $1-e^{-y} \underset{y\to 0}{\sim} y$ et donc $h(y) \underset{y\to 0}{\sim} 1 \underset{y\to 0^+}{\longrightarrow} 1 = h(0)$.
Ainsi h est continue[2] en 0, et donc $\boxed{\text{est continue sur } [0,+\infty[.}$

[2] À droite.

3.b. Puisque h est continue sur $[0,+\infty[$, on a

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} h(y)\,dy = \int_0^{b\varepsilon} h(y)\,dy - \int_0^{a\varepsilon} h(y)\,dy \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^0 h(y)\,dy = 0.$$

Continuité
La continuité de h permet de garantir que les deux intégrales que nous venons d'écrire sont des intégrales sur un segment, et donc convergent.

Mais par linéarité de l'intégrale,

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} h(y)\,dy = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{dy}{y} - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,dy = \ln(b\varepsilon) - \ln(a\varepsilon) - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,dy.$$

Mais $\ln(b\varepsilon) - \ln(a\varepsilon) = \ln(b) + \ln(\varepsilon) - \ln(a) - \ln(\varepsilon) = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Et donc

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,dy = \ln\frac{b}{a}.}$$

3.c. Dans la relation de la question 2.b, en passant à la limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$, il vient, en utilisant le résultat de 3.b,

$$\boxed{\int_0^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,dy.}$$

3.d. Au voisinage de $+\infty$, on a $y^2\frac{e^{-y}}{y} = ye^{-y} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ de sorte que $\frac{e^{-y}}{y} \underset{y\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{y^2}\right)$.
On en déduit donc, par comparaison à des intégrales de Riemann convergentes, que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$ converge. Mais alors, pour $X \geqslant \frac{1}{a}$, $\int_{aX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$ est le reste de l'intégrale précédente, et donc

$$\lim_{X\to+\infty} \int_{aX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy = 0.$$

Et de même, $\int_{bX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent,

$$\int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,dy = \int_{aX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy - \int_{bX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc $\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$ de sorte que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}.}$$

Partie II – Étude d'un produit scalaire.

4. Notons $\mathscr{F}([0,+\infty[,\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $[0,+\infty[$.
Il est clair que $E \subset \mathscr{F}([0,+\infty[,\mathbf{R})$, et la fonction nulle appartient à E.
Soient donc $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $\lambda f + g$ est $\mathscr{C}^1$ et vérifie $(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0$.
D'autre part, f et g sont bornées, donc il existe deux constantes $M, N \in \mathbf{R}$ telles que

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ |f(x)| \leqslant M \text{ et } |g(x)| \leqslant N.$$

Et donc, pour tout $x \geqslant 0$,

$$|(\lambda f + g)(x)| \leqslant |\lambda f(x)| + |g(x)| \leqslant |\lambda| M + N.$$

Ainsi, $\lambda f + g$ est bornée et donc est un élément de E.
On en déduit que $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{F}([0,+\infty[,\mathbf{R}).}$

> **Méthode**
> Dans le théorème de caractérisation, attention à bien vérifier que $\lambda f + g$ satisfait à **toutes** les conditions définissant E.
> Ici, il faut donc vérifier qu'elle est $\mathscr{C}^1$, bornée, et s'annule en 0.

5. Notons que les quatre fonctions proposées sont toutes de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
On a $f_2(0) = 1 \neq 0$ et donc $\boxed{f_2 \notin E.}$
Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $|f_1(x)| \leqslant 1$, de sorte que f_1 est bornée, et puisque $f_1(0) = 0$, $\boxed{f_1 \in E.}$
On a $\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$, donc f_3 n'est pas bornée, de sorte que $\boxed{f_3 \notin E.}$
Enfin, $f_4(0) = 1 - e^0 = 0$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $0 \leqslant f_4(x) \leqslant 1$, donc f_4 est bornée : $\boxed{f_4 \in E.}$

6.a. Soit $f \in E$. Alors f est dérivable[3] en 0, de sorte que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \Leftrightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = f'(0).}$$

[3] À droite.

6.b. Soient $f, g \in E$. Alors la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)g(x)}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
De plus, f et g étant bornées, il existe deux réels M et N tels que pour tout $x \geqslant 0$, $|f(x)| \leqslant M$ et $|g(x)| \leqslant N$.
Et alors, pour tout $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \left|\dfrac{f(x)g(x)}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{MN}{x^2}$.
Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{MN}{x^2}\,dx$ converge, par critère de comparaison, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{f(x)g(x)}{x^2}\right| dx$. Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,dx$ converge absolument et donc converge.
Au voisinage de 0, on a

$$\frac{f(x)g(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x}\frac{g(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} f'(0)g'(0).$$

Et donc $x \mapsto \dfrac{f(x)g(x)}{x^2}$ est prolongeable par continuité en 0, de sorte que $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,dx$ converge.

Par conséquent, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,dx \text{ converge.}}$

Rédaction Ne pas oublier la positivité si on souhaite utiliser une majoration pour prouver une convergence.

7. Soient $f, g \in E$. Alors

$$(f|g) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{g(x)f(x)}{x^2}\,dx = (g|f).$$

Et donc $(\cdot|\cdot)$ est symétrique.
Soient $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, par linéarité de l'intégrale,

$$(\lambda f + g|h) = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda f(x) + g(x))h(x)}{x^2}\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} \frac{f(x)h(x)}{x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{g(x)h(x)}{x^2}\,dx = \lambda(f|h) + (g|h).$$

Donc $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à gauche, et étant symétrique, est bilinéaire.
Soit $f \in E$. Alors, par positivité de l'intégrale,

$$(f|f) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)^2}{x^2}\,dx \geqslant 0.$$

De plus, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)^2}{x^2}$ étant continue et positive sur $]0, +\infty[$, on a

$$(f|f) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[,\ \frac{f(x)^2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = 0.$$

Et puisque $f(0) = 0$ car $f \in E$, on a bien $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = 0$.
Ainsi, $(f|f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
Ceci achève donc de prouver que $\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

Fonction nulle Pour prouver que f est la fonction nulle (c'est-à-dire le vecteur nul de E), il faut prouver que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.
En particulier, on n'oubliera pas de mentionner que f est nulle en 0.

8. Soit $[\varepsilon, X]$ un segment inclus dans $]0, +\infty[$. Posons alors $u(x) = f(x)g(x)$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\varepsilon, X]$ avec $u'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
Une intégration par parties nous donne alors

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^X \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,dx &= \left[-\frac{f(x)g(x)}{x}\right]_\varepsilon^X + \int_\varepsilon^X \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x}\,dx \\ &= \frac{f(\varepsilon)g(\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{f(X)g(X)}{X} + \int_\varepsilon^X \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x}\,dx. \qquad (\star)\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0, on a $\dfrac{f(\varepsilon)g(\varepsilon)}{\varepsilon} = \dfrac{f(\varepsilon)}{\varepsilon}g(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} f'(0)g(0) = 0$.
Et donc pour tout $X > 0$,

$$\int_0^X \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,dx = -\frac{f(X)g(X)}{X} + \int_0^X \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x}\,dx.$$

Convergence Tous les termes de l'égalité $(\star)$, à l'exception peut-être de la seconde intégrale admettent une limite en 0. Donc nécessairement, l'intégrale de droite admet une limite lorsque $\varepsilon \to 0$, et donc $\displaystyle\int_0^X \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x}\,dx$ converge.

Mais lorsque $X \to +\infty$, $\dfrac{1}{X} \to 0$, et puisque la fonction $X \mapsto f(X)g(X)$ est bornée, $\dfrac{f(X)g(X)}{X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
Et donc

$$(f|g) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,dx = \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{x}\,dx.}$$

Rappel
Le produit d'une fonction **bornée** par une fonction de limite nulle tend vers 0.
Si on enlève l'hypothèse «bornée», ce résultat n'est plus vrai !

9.a. Soit $\alpha > 0$. Alors la fonction u_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ et vérifie $u_\alpha(0) = 1 - e^0 = 0$.
De plus, pour tout $x > 0$, on a $0 \leqslant u_\alpha(x) \leqslant 1$, et donc u_α est bornée. Ainsi, $\boxed{u_\alpha \in E.}$

9.b. Soient $(\alpha,\beta) \in]0,+\infty[^2$. Alors d'après le résultat de la question 8, il vient

$$(u_\alpha|u_\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha e^{-\alpha x}(1-e^{-\beta x}) + \beta e^{-\beta x}(1-e^{-\alpha x})}{x}\,dx = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\,dx + \beta \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\,dx.$$

En utilisant le résultat de la question 3.d, il vient alors

$$\boxed{(u_\alpha|u_\beta) = \alpha \ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha} + \beta\ln\frac{\alpha+\beta}{\beta}.}$$

9.c. D'après le résultat de la question précédente,

$$(u_\alpha|u_\beta) = \alpha\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right) + \beta\ln\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Mais α et β étant positifs strictement, $\ln\left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right) > 0$ et $\ln\left(1+\dfrac{\alpha}{\beta}\right) > 0$ et donc $\boxed{(u_\alpha|u_\beta) > 0.}$

Partie III – Étude de densités de variables aléatoires.

10. Il est facile de voir que v est continue sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être[4] en 0.
De plus, pour $x > 0$, on a $-c^2x > -4c^2x$, et donc par croissance de l'exponentielle, $e^{-c^2x} > e^{-4c^2x}$, de sorte que $v(x) \geqslant 0$.
Ainsi, v est positive sur $\mathbf{R}$.
Enfin, en utilisant le résultat de la question 3.d, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\,dx = \frac{1}{\ln 4}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}}{x}\,dx = \frac{1}{\ln 4}\ln\frac{4c^2}{c^2} = 1.$$

Et donc $\boxed{v \text{ est bien une densité de probabilités.}}$

[4] Puisqu'une densité a le droit d'avoir un nombre fini de points de discontinuité, il n'est pas nécessaire d'étudier la continuité de v en 0.

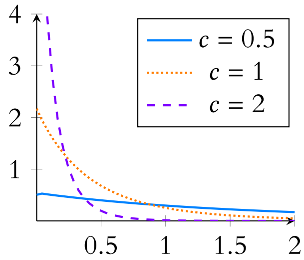


FIGURE 1– La densité v pour différentes valeurs de c.

11. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xv(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}}{\ln 4}\,dx$ converge.
Mais nous savons que

$$\int_0^{+\infty} e^{-c^2x}\,dx = \frac{1}{c^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-4c^2x}\,dx = \frac{1}{4c^2}$$

de sorte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} xv(x)\,dx$ converge et

$$E(X) = \frac{1}{\ln 4}\left(\int_0^{+\infty} e^{-c^2x}\,dx - \int_0^{+\infty} e^{-4c^2x}\,dx\right) = \frac{1}{\ln 4}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{4c^2}\right) = \boxed{\frac{3}{4c^2\ln 4}.}$$

Rappel
Pour tout $a > 0$,
$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}.$$

12.a. Notons que Y est à valeurs positives, et donc pour $x < 0$, $P(Y \leqslant x) = 0$.
Soit $x \geqslant 0$. Alors, par croissance de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$,

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(\sqrt{X} \leqslant x) = P(X \leqslant x^2) = F_X(x^2).$$

Mais X étant une variable à densité, F_X est continue sur $\mathbf{R}$, de sorte que par composition de fonctions continues, F_Y est continue sur $[0,+\infty[$.
Elle est évidemment continue sur $]-\infty, 0[$, et

$$\lim_{x\to 0^-} F_Y(x) = 0 = F_Y(0)$$

Rédaction ✎
La croissance justifie que l'on préserve le sens des inégalités, et doit donc être mentionnée.

donc F_Y est continue à gauche en 0 et donc continue sur $\mathbf{R}$.
De plus, F_X est $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0 et donc par composition de fonctions $\mathscr{C}^1$, F_Y est $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0.
Donc $\boxed{F_Y \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$
Une densité en est alors toute fonction qui coïncide avec F'_Y sur $\mathbf{R}^*$. Par exemple, on peut prendre

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2xF'_X(x^2) = 2xv(x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2\dfrac{e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2}}{x \ln 4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Astuce — Notons que lorsqu'on affirme que F_Y est continue sur $[0, +\infty[$, cela implique qu'elle est continue **à droite** en 0, et donc pour montrer qu'elle est continue en 0, il suffit de vérifier sa continuité à gauche.

12.b. Y admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2}}{\ln 2}\,dx$ converge[5].

Or, si N est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \dfrac{1}{2c^2}\right)$, une densité de N est $x \mapsto \dfrac{c\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2x^2}$, et donc $\dfrac{1}{2} = P(N \geqslant 0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2x^2}\,dx$.

Et ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-c^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2c}$.

Les mêmes calculs en remplaçant c par $2c$ montrent que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-4c^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4c}$.

Et donc Y admet une espérance et

$$E(X) = \frac{1}{\ln 2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-c^2x^2}\,dx - \int_0^{+\infty} e^{-4c^2x^2}\,dx\right) = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2c} - \frac{\sqrt{\pi}}{4c}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{4\ln(2)c}}.$$

[5] Absolument, mais il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive, donc la convergence absolue équivaut à la convergence.

Méthode — Pour calculer des intégrales de fonctions de la forme $x \mapsto e^{-cx^2}$, le plus pratique est de faire intervenir une loi normale dont la densité est, à multiplication par une constante près, e^{-cx^2}.

Puisque $Y = \sqrt{X}$, on a $Y^2 = X$, et puisque X admet une espérance, Y admet un moment d'ordre 2, et $E\left(Y^2\right) = E(X) = \dfrac{3}{8c^2\ln 2}$.
Par la formule de Huygens, il vient alors

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{3}{8c^2\ln(2)} - \frac{\pi}{16\ln(2)^2c^2} = \boxed{\frac{6\ln(2) - \pi}{16c^2\ln(2)^2}}.$$

Remarque — On aurait aussi pu calculer $E(Y^2)$ en utilisant le théorème de transfert, mais le calcul de l'intégrale est bien plus fastidieux.

Problème 2

Partie I - Deux exemples

1. On a

$$(R_\theta)^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = I_2.$$

Or, pour $\theta, \theta' \in]0, \pi[$, on a $\sin\theta \neq \sin\theta'$ et donc $R_\theta \neq R_{\theta'}$. Ainsi, il existe une infinité de matrices deux à deux distinctes de la forme R_θ. Toutes sont des racines carrées de I_2 et donc $\boxed{I_2 \text{ admet une infinité de racines carrées.}}$

Rappel — Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$,
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

2. Supposons par l'absurde que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une racine carrée de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + cb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par identification des coefficients, on a alors $c(a+d) = 0$.
Puisque $b(a+d) = 1$, nécessairement $a + d \neq 0$ et donc $c = 0$.
Mais alors $a^2 = 0$ et $d^2 = 0$, donc $a = d = 0$, ce qui contredit $a + d \neq 0$.

Donc $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ n'admet pas de racine carrée.}}$

Partie II – Racines carrées d'une matrice de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente

3. On a $\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2}$ et donc

$$\sqrt{1+t} = 1+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{t^2}{2!}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{t^3}{3!}+o(t^3) = \boxed{1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+\frac{1}{16}t^3+o(t^3).}$$

4. Calculons $1+X-(a_0+a_2X+a_2X^2+a_3X^3)^2$:

$$1+X-\left(1+\frac{X}{2}-\frac{X^2}{8}+\frac{1}{16}X^3\right)^2 = 1+X-\left(1+\frac{X^2}{4}+\frac{X^4}{64}+\frac{X^6}{256}+X-\frac{X^2}{4}+\frac{X^3}{8}-\frac{X^3}{8}+\frac{X^4}{16}-\frac{X^5}{64}\right)$$

$$= -\frac{5}{64}X^4+\frac{X^5}{64}-\frac{X^6}{256} = X^4\left(-\frac{5}{64}+\frac{X}{64}-\frac{X^2}{256}\right).$$

Ainsi, si on pose $Q(X) = \left(-\frac{5}{64}+\frac{X}{64}-\frac{X^2}{256}\right) \in \mathbf{R}[X]$, on a bien

$$\boxed{1+X = (a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3)^2+X^4Q(X).}$$

5. Si $N^4 = 0$, alors on a

$$I_n+N = \left(I_n+\frac{N}{2}-\frac{N^2}{8}+\frac{1}{16}N^3\right)^2+\underbrace{N^4Q(N)}_{=0}.$$

Et donc une racine carrée de I_n+N est $\boxed{I_n+\frac{N}{2}-\frac{N^2}{8}+\frac{1}{16}N^3.}$

Partie III – Racines carrées d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ admettant n valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes

6.a. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, et soit $x \in E_\lambda(f)$. Alors

$$f(g(x)) = (f\circ g)(x) = (g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Ainsi, $\boxed{\text{tous les sous-espaces propres de } f \text{ sont stables par } g.}$

Méthode

Montrer que $E_\lambda(f)$ est stable par g, c'est montrer que pour tout $x \in E_\lambda(f)$, $g(x) \in E_\lambda(f)$.
Soit encore $f(g(x) = \lambda g(x)$. C'est donc cette égalité que l'on doit démontrer, et pas autre chose.

6.b. Notons que par hypothèse, f possède n valeurs propres distinctes, donc ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
Soit x un vecteur propre de f, et soit λ la valeur propre associée. Puisque x est non nul[6] et que $\dim E_\lambda(f) = 1$, on a $E_\lambda(f) = \mathrm{Vect}(x)$.
De plus, nous avons prouvé à la question précédente que $g(x) \in E_\lambda(f) = \mathrm{Vect}(x)$. Et donc il existe un réel μ tel que $g(x) = \mu x$: x est un vecteur propre de g pour la valeur propre μ.
Ainsi, $\boxed{\text{tout vecteur propre de } f \text{ est vecteur propre de } g.}$

[6] Rappelons qu'un vecteur propre est non nul par définition.

6.c. f est diagonalisable car il possède n valeurs propres distinctes.
Si $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbf{R}^n$ formée de vecteurs propres de f, alors par la question précédente, c'est aussi une base de vecteurs propres de g. Et donc la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale.
Puisque f est diagonalisable, une telle base $\mathscr{B}$ existe, et donc la matrice de g dans cette base est diagonale : $\boxed{g \text{ est diagonalisable.}}$

7.a. A possède n valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable : il existe une matrice Q inversible et une matrice D diagonale telles que $A = Q^{-1}DQ$. Et si l'on pose $P = Q^{-1}$, alors $A = PDP^{-1}$ et donc $\boxed{P^{-1}AP = D \text{ est diagonale.}}$

7.b. Notons $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, de sorte que les λ_i sont les valeurs propres de A, et donc sont strictement positifs par hypothèse.
Soit $D_1 = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})$. Alors

$$(PD_1P^{-1}) = PD_1^2P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Ainsi, $\boxed{PD_1P^{-1} \text{ est une racine carrée de } A.}$

Rappel

Élever une matrice diagonale à la puissance p, c'est élever chacun de ses coefficients diagonaux à la puissance p, donc $D_1^2 = D$.

7.c. Si R est une racine carrée de A, alors $A = R^2$, et donc A est un polynôme en R, qui commute donc avec R.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A, et soit g l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est R.
Alors f possède n valeurs propres distinctes[7] et f et g commutent car A et R commutent.
Soit $\mathscr{B}$ la base de $\mathbf{R}^n$ telle que P soit la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$. Alors, par la formule de changement de base,

$$P^{-1}AP = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_{can}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f)P_{\mathscr{B}_{can},\mathscr{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f).$$

Et donc la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale : $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbf{R}^n$ formée de vecteurs propres de f. Et donc par la question 6.c, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ est diagonale.
Or, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = P^{-1}RP$: $\boxed{P^{-1}RP \text{ est une matrice diagonale.}}$

[7] Car A possède n valeurs propres distinctes et que $\mathrm{Spec}(f) = \mathrm{Spec}(A)$.

Matrices diagonales
La matrice d'un endomorphisme f dans une base $\mathscr{B}$ est diagonale si et seulement si $\mathscr{B}$ est formée de vecteurs propres de f.

7.d. Si R est une racine carrée de A, alors

$$(P^{-1}RP)^2 = P^{-1}R^2P = P^{-1}AP = D.$$

De plus, $P^{-1}RP$ est une matrice diagonale, donc de la forme $\mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.
On en déduit que $\mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)^2 = \mathrm{Diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Et donc $\mu_1^2 = \lambda_1, \dots, \mu_n^2 = \lambda_n$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$.
Inversement, il est facile de vérifier que toute matrice de la forme $P\mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)P^{-1}$, avec $a_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$ est une racine carrée de A.
Et donc $\boxed{A \text{ admet exactement } 2^n \text{ racines carrées.}}$

Dénombrement
Pour chaque coefficient diagonal de $P^{-1}RP$, on a 2 choix possibles ($\sqrt{\lambda_i}$ ou $-\sqrt{\lambda_i}$), donc en tout, on a 2^n choix.

Partie IV – Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$

8. Soit λ une valeur propre de S et soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Alors

$${}^tXSX = {}^tX(SX) = {}^tX\lambda X = \lambda {}^tXX.$$

Mais si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors ${}^tXX = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant 0$. Puisque X est non nul, l'un au moins des x_i est non nul et donc ${}^tXX > 0$.
D'autre part, puisque S est une matrice symétrique positive, on sait que ${}^tXSX \geqslant 0$.
On en déduit que $\lambda = \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} \geqslant 0$.
Et donc $\boxed{\text{toutes les valeurs propres de } S \text{ sont positives ou nulles.}}$

${}^tXX > 0$
Il est également possible de remarquer que ${}^tXX$ est la norme de X pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, et donc strictement positive car $X \neq 0$.

Classique
Ce type de question est extrêmement classique, et il faudrait savoir la traiter sans hésitation.

9. Puisque S est symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée : il existe P orthogonale telle que $P^{-1}SP$ soit diagonale.

10. Notons $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, de sorte que les λ_i sont les valeurs propres de S.
Posons alors $D_1 = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $R = P^{-1}D_1P$.
Alors, $R^2 = P^{-1}D_1^2P = P^{-1}DP = S$ et

$${}^tR = {}^t(P^{-1}D_1P) = {}^tP{}^tD_1{}^tP^{-1} = {}^tPD_1{}^tP^{-1}.$$

Puisque P est orthogonale, on a $P^{-1} = {}^tP$ et donc ${}^tP^{-1} = {}^t({}^tP) = P$ de sorte que ${}^tR = P^{-1}D_1P = R$. Ainsi, R est symétrique, et c'est donc une racine carrée de S symétrique.
Enfin, notons $X_1, \dots, X_n$ une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ formée[8] de vecteurs propres de R, telle que $RX_i = \sqrt{\lambda_i}X_i$. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Il existe des réels $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que $X = \sum_{i=1}^n \mu_i X_i$. Alors

$${}^tXRX = \left(\sum_{i=1}^n \mu_i {}^tX_i\right)R\left(\sum_{j=1}^n \mu_j X_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \mu_i\mu_j {}^tX_i(RX_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \mu_i\mu_j\lambda_j {}^tX_iX_j.$$

Or, $(X_1, \dots, X_n)$ étant orthonormée[9], on a ${}^tX_iX_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Et donc ${}^tXRX = \sum_{i=1}^n \lambda_i\mu_i^2 \underbrace{{}^tX_iX_i}_{=\|X_i\|^2 \geqslant 0} \geqslant 0$.

Détails
Si on veut être précis, on peut dire que c'est le cas lorsque P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ à une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de S (voir question 7.a).

[8] Une telle base existe car R est symétrique.

[9] Pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Ceci prouve donc que R est une matrice symétrique positive.
Et donc $\boxed{S \text{ admet une racine carrée symétrique positive.}}$

> **Plus généralement**
> La question 8 et cette question prouvent en fait qu'une matrice symétrique est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

11.a. Soit X un vecteur propre de R associé à la valeur propre λ. Alors $RX = \lambda X$, de sorte que

$$SX = R^2X = R(RX) = R(\lambda X) = \lambda RX = \lambda^2 X.$$

Donc X^2 est valeur propre de S. De plus, pour tout $X \in \mathrm{SEP}(R,\lambda)$, on a $SX = \lambda^2 X$, de sorte que $X \in \mathrm{SEP}(S,\lambda^2)$.
On a donc bien $\boxed{\mathrm{SEP}(R,\lambda) \subset \mathrm{SEP}(S,\lambda^2).}$

11.b. Notons que les $\mathrm{SEP}(R,\lambda_i)$ sont en somme directe car R est symétrique, donc ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux et donc en somme directe.
Il en est de même pour les $\mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2)$, car les λ_i étant positifs[10] et deux à distincts, il en est de même de λ_i^2.

> **Subtilité**
> Si les valeurs propres de R n'étaient pas toutes positives, il se pourrait que deux λ_i distincts aient des carrés égaux, et alors les $\mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2)$ ne seraient pas en somme directe.

Enfin, si $x \in \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(R,\lambda_i)$, alors il existe $x_1 \in \mathrm{SEP}(R,\lambda_1),\dots,x_p \in \mathrm{SEP}(R,\lambda_p)$ tels que $x = x_1 + \dots + x_p$. Mais alors

$$x = \underbrace{x_1}_{\in \mathrm{SEP}(S,\lambda_1^2)} + \dots + \underbrace{x_p}_{\in \mathrm{SEP}(S,\lambda_p^2)} \in \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2).$$

> **Remarque**
> De manière générale si on a pour tout i, $A_i \subset B_i$, alors
> $$\sum_{i=1}^{p} A_i \subset \sum_{i=1}^{p} B_i.$$

Et donc

$$\boxed{\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(R,\lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2).}$$

11.c. La dimension d'une somme directe de sous-espaces vectoriels est la somme des dimensions, donc

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} EP(R,\lambda_i)\right) \leqslant \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2)\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}(R,\lambda_i) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2).$$

De plus, R est diagonalisable car symétrique réelle, et donc

$$\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(R,\lambda_i) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}(R,\lambda_i) = n.$$

Enfin, $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2) \subset \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et donc $\sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2) \leqslant n$. Ainsi

$$\boxed{n \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}(R,\lambda_i) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2) \leqslant n.}$$

11.d. Les inégalités de la question précédente sont nécessairement[11] des égalités, et donc

$$\sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}(R,\lambda_i) = \sum_{i=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2) = n.$$

Puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres de S doit être égale à n, les $\mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2)$, $1 \leqslant i \leqslant p$ sont les seuls sous-espaces propres de S, et donc $\lambda_1^2,\dots,\lambda_p^2$ sont les seules valeurs propres de S.
Puisque $\forall i \in [\![1,p]\!]$, on a $\dim \mathrm{SEP}(R,\lambda_i) \leqslant \dim \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2)$, on en déduit que

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \dim \mathrm{SEP}(R,\lambda_i) = \dim \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2)$$

et donc[12]

$$\boxed{\forall i \in [\![1,p]\!],\ \mathrm{SEP}(R,\lambda_i) = \mathrm{SEP}(S,\lambda_i^2).}$$

[11] Car le terme de gauche est égal au terme de droite.

[12] Car on a une inclusion et l'égalité des dimensions.

11.e. P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ à une base $\mathscr{B}$, orthonormée, et formée de vecteurs propres de S. Elle est donc également formée de vecteurs propres de R. Si f est l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont la matrice dans la base canonique est R, alors[13] $P^{-1}RP$ est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$, qui est formée de vecteurs propres : c'est une matrice diagonale : $\boxed{P^{-1}RP \text{ est diagonale.}}$

[13] C'est la formule de changement de base.

11.f. D'après ce qui précède $P^{-1}RP$ est diagonale, à coefficients diagonaux positifs, et $(P^{-1}RP)^2 = P^{-1}R^2P = P^{-1}SP = D$. Donc si $D = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$, nécessairement

$$P^{-1}RP = \mathrm{Diag}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}).$$

Et donc

$$R = P\mathrm{Diag}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})P^{-1}.$$

Ainsi, il existe au plus une racine carrée de S qui soit symétrique positive, et nous avons déjà prouvé à la question 10 qu'il en existe une : $\boxed{S \text{ possède une unique racine carrée symétrique positive.}}$

EML 2008

Sujet : Autour des polynômes d'Hermite **Facile**
Abordable en première année : ✓ (partie II) **Intérêt** : ★★☆
Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, produits scalaires, diagonalisation, endomorphismes symétriques, séries, fonctions d'une variable, variables à densité
La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

On confond polynôme et application polynomiale de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

On note E l'ensemble des applications $u : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ continues sur $\mathbf{R}$ et telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2\, e^{-x^2}\, dx$ converge.

On note F le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
On note, pour tout $n \in \mathbf{N}$, F_n le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de degré inférieur ou égal à n.

Préliminaire : Valeur de l'intégrale de Gauss.

1. En considérant une variable aléatoire suivant une loi normale, justifier :

$$\forall m \in \mathbf{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Partie I : Un produit scalaire sur E.

2. Établir, pour tout $(\alpha, \beta) \in [0; +\infty[^2$: $\alpha\beta \leqslant \dfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$.
3. En déduire que, pour tout $(u, v) \in E^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2}\, dx$ converge.

On note $(\cdot|\cdot)$ l'application de E^2 dans $\mathbf{R}$ qui à tout $(u, v) \in E^2$ associe $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2}\, dx$.

On notera la présence du facteur $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

4. a. Démontrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
   b. Montrer que l'application $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.
5. Démontrer : $F \subset E$.

On note encore $(\cdot|\cdot)$ la restriction à F ou à F_n, pour $n \in \mathbf{N}$ du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur E. On admet que cette restriction est encore un produit scalaire sur F ou sur F_n.
On note $\|\cdot\|$ la norme sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, définie, pour tout $u \in E$, par : $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$.

Partie II : Polynômes d'Hermite

On note w l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $w(x) = e^{-x^2}$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note H_n l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x), \text{ où } w^{(n)} \text{ désigne la dérivée } n\text{-ème de } w.$$

En particulier, $H_0(x) = 1$.

6. Calculer, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $H_1(x), H_2(x), H_3(x)$.
   Faire figurer les calculs sur la copie.
7. a. Montrer, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x).$$

   b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est un polynôme de degré n.
   c. Contrôler alors les résultats obtenus question 6 et calculer H_4.
   Faire figurer les calculs sur la copie.
8. Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le coefficient du terme de plus haut degré de H_n.
9. Montrer, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$: $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.
   Qu'en déduit-on, en terme de parité, pour l'application H_n ?

Partie III : Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

10. a. Montrer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $P \in F$: $(P'|H_{n-1}) = (P|H_n)$, où $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire défini à la question 5.
À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.
   b. En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $P \in F_{n-1}$: $(P|H_n) = 0$.
   c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la famille $(H_0, \ldots, H_n)$ est orthogonale dans F.
11. Établir que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la famille $(H_0, \ldots, H_n)$ est une base de F_n.
12. Soit $n \in \mathbf{N}$.
   a. Montrer : $\|H_n\|^2 = \left(H_n^{(n)}|H_0\right)$ où $\|\cdot\|$ est défini question 5.
   b. En déduire la valeur de $\|H_n\|$.

Partie IV : Un endomorphisme symétrique.

On note f, g, h les application définies de F dans F, pour tout $P \in F$ par :

$$f(P) = -P'' + 2XP' + P, \quad g(P) = 2XP - P' \quad h(P) = P'.$$

Ainsi, par exemple, pour tout $P \in F$ et tout $x \in \mathbf{R}$: $(g(P))(x) = 2xP(x) - P'(x)$.

13. Montrer que f est un endomorphisme de F.

On admet que g et h sont aussi des endomorphismes de F, et on note Id_F l'application identique de F.

14. a. Établir : $g \circ h = f - \mathrm{Id}_F$ et $h \circ g = f + \mathrm{Id}_F$.
   b. En déduire : $f \circ g - g \circ f = 2g$.
15. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ et tout $P \in F$, si $f(P) = \lambda P$, alors $f(g(P)) = (\lambda + 2)g(P)$.
16. a. Calculer $f(H_0)$.
   b. Calculer, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $g(H_k)$ et en déduire, pour tout $k \in \mathbf{N}$: $f(H_k) = (2k+1)H_k$.
17. Établir, pour tout $(P, Q) \in F^2$: $(P'|Q') = (f(P)|Q) - (P|Q)$.
À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.
18. Soit $n \in \mathbf{N}$.
   a. Montrer : $\forall P \in F_n,\ f(P) \in F_n$.
   On note f_n l'endomorphisme de F_n défini par : $\forall P \in F_n,\ f_n(P) = f(P)$.
   b. Montrer que f_n est un endomorphisme symétrique de F_n.
   c. Donner une base orthonormale de F_n constituée de vecteurs propres de f_n.

Partie V : Intervention d'exponentielles

On note, pour tout $a \in \mathbf{R}$, φ_a l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par : $\varphi_a(x) = e^{ax}$.

19. Vérifier, pour tout $a \in \mathbf{R}$: $\varphi_a \in E$.
20. Montrer, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$: $(\varphi_a|\varphi_b) = e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$.
21. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^{-2}$.
22. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} \|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2}$ converge et calculer sa somme.

Partie VI : Une limite de probabilité conditionnelle.

Soit la fonction Φ définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[,\ \Phi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

23. Montrer que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et déterminer sa dérivée Φ'.
24. Soient G et K les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad G(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3}\right)\frac{e^{-x^2}}{2} \text{ et } K(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

   a. Déterminer les limites des fonctions Φ, G et K en $+\infty$.
   b. Déterminer le sens de variation des fonctions $G - \Phi$ et $\Phi - K$.

c. En déduire : $\forall x \in]0;+\infty[$, $G(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant K(x)$.

d. Montrer : $\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$.

25. Soit X une variable aléatoire normale d'espérance égale à 0 et d'écart-type égal à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

a. Pour tout réel x strictement positif, exprimer la probabilité $P(X \leqslant x)$ à l'aide de la fonction Φ.

b. Soit c un réel strictement positif.
Pour tout réel x, on considère la probabilité conditionnelle $P_{[X>x]}(X \leqslant x+c)$.
Montrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} P_{[X>x]}(X \leqslant x+c) = 1$.

EML 2008 : Corrigé

Préliminaire : Valeur de l'intégrale de Gauss.

1. La densité d'une loi normale $\mathcal{N}\left(m, \frac{1}{2}\right)$ est

$$x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2(x-m)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-m)^2}.$$

Et donc on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-m)^2}\, dx = 1 \Leftrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2}\, dx = \sqrt{\pi}.}$$

Partie I : Un produit scalaire sur E.

2. On a $(\alpha-\beta)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geqslant 0$. Et donc

$$2\alpha\beta \leqslant \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha\beta \leqslant \boxed{\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2).}$$

3. Soient u et v deux fonctions continues sur $\mathbf{R}$, telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)^2 e^{-x^2}\, dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)^2 e^{-x^2}\, dx$ convergent.
Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a, d'après l'inégalité de la question 2,

$$|u(x)v(x)| = |u(x)|\cdot|v(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|u(x)|^2 + |v(x)|^2\right) \text{ et donc } 0 \leqslant |u(x)v(x)|e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{2}u(x)^2e^{-x^2} + \frac{1}{2}v(x)^2e^{-x^2}.$$

Puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}u(x)^2e^{-x^2} + \frac{1}{2}v(x)^2e^{-x^2}\right) dx$ converge[1], il en est de même de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)v(x)e^{-x^2}|\, dx$.Et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2}\, dx$ converge absolument, donc converge.

> **Signes**
> Notons que le recours à l'absolue convergence était indispensable ici : u et v ne sont pas nécessairement de signe constant, et la positivité est une hypothèse indispensable pour prouver une convergence à l'aide d'une majoration.

4.a. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
E est donc bien inclus dans l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, il contient bien la fonction nulle car $\int_{-\infty}^{+\infty} 0\, dx$ converge.
Soient donc $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$(\lambda u(x) + v(x))^2 e^{-x^2} = \lambda^2 u(x)^2 e^{-x^2} + 2\lambda u(x)v(x)e^{-x^2} + v(x)^2e^{-x^2}.$$

Et alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda u(x) + v(x))^2 e^{-x^2}\, dx$ converge car somme d'intégrales convergentes. Et donc $\lambda u + v \in E$.
Ainsi, $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions continues de } \mathbf{R} \text{ dans } \mathbf{R}.}$

4.b. Soient $u, v \in E$. Alors

$$(u|v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x)u(x)e^{-x^2}\, dx = (v|u).$$

Donc $(\cdot|\cdot)$ est symétrique.
Soient $u, v, w \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}(\lambda u + v|w) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda u(x) + v(x))w(x)e^{-x^2}\, dx \\ &= \lambda \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)w(x)e^{-x^2}\, dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x)w(x)e^{-x^2}\, dx = \lambda(u|w) + (v|w).\end{aligned}$$

Donc $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à gauche, et étant symétrique, est bilinéaire.
Si $u \in E$, alors $(u|u) = \displaystyle\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)^2 e^{-x^2}\, dx$.

Or la fonction $x \mapsto u(x)^2 e^{-x^2}$ est positive sur $\mathbf{R}$, et donc, par positivité de l'intégrale, $(u|u) \geqslant 0$.
Enfin, puisque $x \mapsto u(x)^2 e^{-x^2}$ est continue et positive sur $\mathbf{R}$, son intégrale est nulle si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R}$, $u(x)^2 e^{-x^2} = 0$, soit encore[2] si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R}$, $u(x) = 0$.
Et donc $(u|u) = 0$ si et seulement si $u = 0$.
Ainsi, $\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

[2] Une exponentielle n'est jamais nulle.

5. Les fonctions polynomiales sont bien évidemment continues sur $\mathbf{R}$, donc il s'agit de prouver que si $u \in F$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-x^2}\,dx$ converge.
Soit donc $u : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynomiale de degré n.
Alors u est continue sur $\mathbf{R}$, et au voisinage de $+\infty$, on a $u(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$. Alors

$$x^2 u(x)e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^{n+2} e^{-x^2}.$$

Mais puisque $e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o((e^{-x})$, on a $x^{n+2}e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^{n+2}e^{-x}\right)$.
Mais, par croissance comparée, $x^{n+2}e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que $x^{n+2}e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et donc $u(x)e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale absolument convergente, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(x)e^{-x^2}\,dx$.
De même, on prouve que $u(x)e^{-x^2} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, et puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} u(x)e^{-x^2}\,dx$.
Et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)e^{-x^2}\,dx$ converge. Ainsi, on a bien $\boxed{F \subset E.}$

Degré
Rappelons que si un polynôme est de degré n, alors son coefficient de degré n est non nul. Ici on a donc $a_n \neq 0$.

Convergence
Notons qu'il n'y a pas besoin d'une étude de convergence de l'intégrale entre -1 et 1, car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, elle converge donc.

Partie II : Polynômes d'Hermite.

6. On a, par dérivations successives,

$$w'(x) = -2xe^{-x^2},\ w''(x) = e^{-x^2}(-2+4x^2),\ w^{(3)}(x) = e^{-x^2}(12x-8x^3).$$

Et donc

$$H_1(x) = -e^{x^2}e^{-x^2}(-2x) = 2x,\ H_2(x) = e^{x^2}e^{-x^2}(4x^2-2) = 4x^2-2,\ H_3(x) = -e^{x^2}e^{-x^2}(12x-8x^3) = 8x^3-12x.$$

7.a. On a $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$. Et donc,

$$H_n'(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n+1)}(x) + (-1)^n 2xe^{x^2} w^{(n)}(x) = -H_{n+1}(x) + 2xH_n(x).$$

Et donc $\boxed{H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x).}$

7.b. Montrons par récurrence que H_n est un polynôme de degré n.
Pour $n = 0$, $H_0 = 1$ est bien un polynôme de degré 0.
Supposons donc que H_n soit un polynôme de degré n.
Alors $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$ est un polynôme car H_n' est un polynôme, et $2xH_n(x)$ également.
De plus, $2xH_n(x)$ est de degré $n+1$ et H_n' est de degré $n-1$, donc H_{n+1} est de degré $n+1$.
D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ H_n \text{ est un polynôme de degré } n.}$

Rappel
Si P et Q sont de degré distincts, alors $P+Q$ est de degré égal à $\max(\deg P, \deg Q)$.
Si P et Q ont même degré, alors on a juste une inégalité, les termes de plus haut degré de P et Q pouvant se compenser, faisant de $P+Q$ un polynôme de degré strictement inférieur à $\deg(P)$.
En revanche, si $\deg(P) = \deg(Q)$, c'est toujours une égalité, le polynôme de plus haut degré «imposant» son degré à la somme.

7.c. Les fonctions H_1, H_2, H_3 obtenues à la question 6 sont bien des polynômes de degrés respectifs 1, 2 et 3.
De plus, on a $2xH_0(x) - H_0'(x) = 2x = H_1(x)$ et

$$2xH_1(x) - H_1'(x) = 4x^2-2 = H_2(x) \text{ et } 2xH_2(x) - H_2'(x) = 8x^3-4x-8x = 8x^3-12x = H_3(x).$$

Il vient alors

$$H_4(x) = 2xH_3(x) - H_3'(x) = 16x^4 - 24x^2 - 24x^2 + 8 = \boxed{16x^4 - 48x^2 + 8.}$$

8. Les formules obtenues pour H_0, H_1, H_2, H_3 et H_4 laissent à penser que le coefficient de degré n de H_n est 2^n. Prouvons-le par récurrence.
Pour $n \leqslant 4$, ceci est vérifié, donc la récurrence est[3] initialisée.
Supposons que le coefficient dominant de H_n est 2^n. Alors $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - \underbrace{H_n'(x)}_{\in \mathbf{R}_{n-1}[X]}$,
de sorte que le coefficient de degré $n+1$ de H_{n+1} est celui de $2xH_n(x)$, soit $2 \times 2^n = 2^{n+1}$.
Et donc, par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le coefficient dominant de H_n est 2^n.

[3] Largement !

9. Encore une fois, procédons par récurrence. Pour $n = 0$, on a bien $H_0(-x) = 1 = (-1)^0 H_0(x)$.
Supposons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.
Alors

$$H_{n+1}(-x) = -2xH_n(-x) - H_n'(-x) = (-1)^{n+1}2xH_n(x) - H_n'(-x).$$

Mais en dérivant $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$, il vient $-H_n'(-x) = (-1)^n H_n'(x)$, soit encore $H_n'(-x) = (-1)^{n+1} H_n(x)$.
Et donc

$$H_{n+1}(-x) = (-1)^{n+1}2xH_n(x) - (-1)^{n+1}H_n'(x) = (-1)^{n+1}\left(2xH_n(x) - H_n'(x)\right) = (-1)^{n+1}H_{n+1}(x).$$

D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\boxed{H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).}$
On en déduit que si n est un entier pair, H_n est une fonction paire, et si n est impair, H_n est impaire.

Partie III : Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite.

10.a. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et pour $P \in F$,

$$(P'|H_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2}\, dx.$$

Soit donc $[A, B]$ un segment inclus dans $\mathbf{R}$, et procédons à une intégration par parties sur ce segment en posant $u(x) = P(x)$ et $v(x) = H_{n-1}(x)e^{-x^2}$, qui sont deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[A, B]$, avec $u'(x) = P'(x)$ et $v'(x) = H_{n-1}'(x)e^{-x^2} - 2xH_{n-1}(x)e^{-x^2}$. Alors, il vient

$$\begin{aligned}\int_A^B P'(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2}\, dx &= \left[P(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2}\right]_A^B - \int_A^B P(x)\left(H_{n-1}' - 2xH_{n-1}(x)\right)e^{-x^2}\, dx \\ &= P(B)H_{n-1}(B)e^{-B^2} - P(A)H_{n-1}(A)e^{-A^2} + \int_A^B H_n(x)e^{-x^2}\, dx.\end{aligned}$$

On a utilisé la relation de la question 7.a :
$H_{n-1}'(x) - 2xH_{n-1}(x) = -H_n(x)$.

Notons $a_k X^k$ le terme de plus haut degré de P, de sorte que, au voisinage de $\pm\infty$, $P(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_k x^k$ et donc $P(x)H_{n-1}(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} 2^{n-1}a_k x^{n-1+k}$.
Alors, en posant $t = x^2$, il vient

$$P(x)H_{n-1}(x)e^{-x^2} \underset{x \to \pm\infty}{\sim} 2^{n-1}a_k x^{n-1+k} = 2^{n-1}a_k t^{\frac{n-1+k}{2}} e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée.
Et donc $\lim\limits_{A \to -\infty} P(A)H_{n-1}(A)e^{-A^2} = \lim\limits_{B \to +\infty} P(B)H_{n-1}(B)e^{-B^2} = 0$.
Ainsi, en prenant successivement la limite lorsque $A \to -\infty$, puis $B \to +\infty$, il vient

$$\int_{-\infty}^B P'(x)H_{n-1}(x)\, dx = -P(B)H_{n-1}(B)e^{-B^2} + \int_{-\infty}^B P(x)H_n(x)\, dx$$

puis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)H_{n-1}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)H_n(x)\, dx.$$

En multipliant par $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, il vient alors $\boxed{(P'|H_{n-1}) = (P|H_n).}$

Coeff. dominant
Ne pas oublier le coefficient dominant lorsqu'on prend un équivalent en $\pm\infty$ d'un polynôme.
Par exemple, $2x^2 + x + 1$ est équivalent à $2x^2$, mais pas à x^2.

10.b. On a alors $(P|H_n) = (P'|H_{n-1}) = (P''|H_{n-2}) = \cdots = (P^{(n)}|H_0)$.
En particulier, si $P \in F_{n-1}$, alors $P^{(n)} = 0$, et donc $(P^{(n)}|H_0) = 0$. Ainsi, $\boxed{(P|H_n) = 0.}$

10.c. Il s'agit de montrer que pour $i \neq j$, on a $(H_i|H_j) = 0$.
Supposons que $i > j$. Alors H_j est de degré $j < i$, et donc par la question 10.b, $(H_j|H_i) = 0$.
De même si $j > i$, alors H_i est de degré strictement inférieur à i, et donc $(H_i|H_j) = 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (H_0, \dots, H_n) \text{ est une famille orthogonale.}}$

11. $(H_0, \dots, H_n)$ est une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul[4], elle est donc libre.
De plus, elle est de cardinal $n+1 = \dim \mathbf{R}_n[X] = \dim F_n$. $\boxed{\text{C'est donc une base de } F_n.}$

[4] H_i possède $2^i \neq 0$ comme coefficient dominant, donc ne peut être égal au polynôme nul.

12.a. On a $\|H_n\|^2 = (H_n|H_n)$ et donc, en utilisant n fois le résultat de la question 10.a, il vient

$$\|H_n\|^2 = (H_n|H_n) = (H_n'|H_{n-1}) = (H_n''|H_{n-2}) = \cdots = \boxed{(H_n^{(n)}|H_0).}$$

Rappelons que $H_n(x) = 2^n x^n + Q_n(x)$, où Q_n est un polynôme de degré au plus $n-1$.
En particulier, $Q_n^{(n)}(x) = 0$. Et on a donc

$$H_n'(x) = n2^n x^{n-1} + Q_n'(x), H_n''(x) = n(n-1)2^n + Q_n''(x)x^{n-2}, \dots, H_n^{(n)}(x) = n!2^n + \underbrace{Q_n^{(n)}(x)}_{=0}.$$

12.b. Ainsi,

$$\|H_n\|^2 = (n!2^n|1) = n!2^n(1|1) = \frac{n!2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{n!2^n}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = n!2^n.$$

Et donc $\boxed{\|H_n\| = \sqrt{2^n n!}.}$

Partie IV : Un endomorphisme symétrique.

13. Si $P \in F$, alors P' et P'' sont encore des polynômes, de sorte que $f(P) = -P'' + 2XP' + P \in F$.
Soient $P, Q \in F$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$f(\lambda P+Q) = -(\lambda P+Q)''+2X(\lambda P+Q)'+(\lambda P+Q) = \lambda(-P''+2XP'+P)+(-Q''+2XQ'+Q) = \lambda f(P)+f(Q).$$

Ainsi, f est linéaire et donc $\boxed{\text{est un endomorphisme de } F.}$

14.a. Soit $P \in F$. Alors

$$(g \circ h)(P) = g(h(P)) = g(P') = 2XP' - P'' = (-P'' + 2XP' + P) - P = f(P) - \mathrm{Id}_F(P).$$

Ceci étant vrai pour tout $P \in F$, on a donc $\boxed{g \circ h = f - \mathrm{Id}_F.}$
De même, pour $P \in F$, on a

$$(h \circ g)(P) = h(g(P)) = (2XP - P')' = 2XP' + 2P - P'' = (-P'' + 2XP' + P) + P = f(P) + \mathrm{Id}_F(P).$$

Et donc $\boxed{h \circ g = f + \mathrm{Id}_F}$.

14.b. En utilisant les relations précédentes, on a

$$\begin{aligned} f \circ g - g \circ f &= (g \circ h + \mathrm{Id}_F) \circ g - g \circ (h \circ g - \mathrm{Id}_F) \\ &= g \circ h \circ g + g - g \circ h \circ g + g \\ &= \boxed{2g.} \end{aligned}$$

Alternative

Si on n'a pas vu comment utiliser le résultat de la question précédente, il est tout de même possible de calculer directement

$$(f \circ g - g \circ f)(P)$$

et de constater qu'il s'agit de $2g(P)$, mais cette méthode est plus laborieuse.

15. Puisque $f \circ g = g \circ f + 2g$, si $f(P) = \lambda P$, alors

$$f(g(P)) = g(f(P)) + 2g(P) = g(\lambda P) + 2g(P) = \lambda g(P) + 2g(P) = \boxed{(\lambda+2)g(P).}$$

16.a. Puisque $H_0 = 1$, $H_0' = H_0'' = 0$. Et donc $f(H_0) = H_0 = 1$.

16.b. En utilisant le résultat de la question 7.a, on a $g(H_k) = 2XH_k - H_k' = H_{k+1}$.
Montrons alors par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ que $f(H_k) = (2k+1)H_k$.
Pour $k = 0$, c'est le résultat de la question 16.a.
Supposons que $f(H_k) = (2k+1)H_k$.
Alors $f(H_{k+1}) = f(g(H_k))$, et d'après la question 15, avec $\lambda = 2k+1$, on a

$$f(H_{k+1}) = g(H_k) = ((2k+1)+2)\,g(H_k) = (2k+3)H_{k+1} = (2(k+1)+1)H_{k+1}.$$

Ainsi, la relation est vérifiée au rang $k+1$.
Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbf{N}, f(H_k) = (2k+1)H_k.}$

17. Soient $P, Q \in F$. On a alors

$$(f(P)|Q) - (P|Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-P''(t) + 2tP'(t))eQ(t)^{-t^2}\, dt.$$

Comme indiqué dans l'énoncé, procédons à une intégration par parties sur un segment de la forme $[A, B]$, en posant $u(t) = -P'(t)e^{-t^2}$ et $v(t) = Q(t)$, qui sont bien deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ avec $u'(t) = -P''(t)e^{-t^2} + 2tP'(t)e^{-t^2}$ et $v'(t) = Q'(t)$. Alors

$$\begin{aligned}\int_A^B (-P''(t) + 2tP'(t))\, Q(t)e^{-t^2}\, dt &= \left[-P'(t)Q(t)e^{-t^2}\right]_A^B + \int_A^B P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\, dt \\ &= P'(A)Q(A)e^{-A^2} - P'(B)Q(B)e^{-B^2} + \int_A^B P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\, dt.\end{aligned}$$

Or nous avons déjà mentionné à la question 5 que pour tout polynôme R, $R(x) = \underset{x\to\pm\infty}{o}(e^{x^2})$, de sorte que $P'(A)Q(A)e^{-A^2} \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et de même $P'(B)Q(B)e^{-B^2} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc

$$(f(P)|Q) - (P|Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-P''(t)+2tP'(t))Q(t)e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\, dt = \boxed{(P'|Q').}$$

18.a. Soit $P \in F_n$. Alors $\deg P' \leqslant n-1$ et $\deg P'' \leqslant n-2$, de sorte que

$$\deg f(P) = \deg(-P'' + 2XP' + P) \leqslant n.$$

Et donc $f(P) \in F_n$.

18.b. Soient $P, Q \in F_n$. Alors, d'après le résultat de la question 17, on a

$$(f_n(P)|Q) = (P'|Q') + (P|Q) = (Q'|P') + (Q|P) = (f(Q)|P) = (P|f_n(Q)).$$

Et donc $\boxed{f_n \text{ est un endomorphisme symétrique de } F_n.}$

18.c. Nous avons prouvé à la question 16.b que $H_0, H_1, \dots, H_n$ sont des vecteurs propres de f, associés à des valeurs propres distinctes.
Puisque de plus $\deg H_i = i$, $H_0, \dots, H_n$ sont dans F_n, et donc sont des vecteurs propres de f_n.
Étant associés à des valeurs propres distinctes, il forment une famille orthogonale de F_n, ce qui avait déjà été prouvé à la question 10.c.
Enfin, puisque $\|H_n\| = \sqrt{2^n n!}$, la famille $\left(H_0, \frac{H_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{H_n}{\sqrt{2^n n!}}\right)$ est une famille[5] orthonormée de F_n.
C'est donc $\boxed{\text{une base orthonormée de } F_n \text{ formée de vecteurs propres.}}$

[5] Et même une base d'après la question 11.

Rappel
Si on multiplie un vecteur propre par une constante non nulle, on obtient encore un vecteur propre.

Partie V : Intervention d'exponentielles.

19. Il est évident que φ_a est continue sur $\mathbf{R}$.
D'autre part, $\varphi_a(x)^2 e^{-x^2} = e^{-x^2+2ax} = e^{-(x-a)^2+a^2}$.
En procédant au changement de variable[6] $t = x - a$, on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(x)^2 e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a^2} e^{-t^2}\, dt.$$

Or cette dernière intégrale converge, de sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(x)^2 e^{-x^2}\, dx$ converge. Par conséquent, $\boxed{\varphi_a \in E.}$

[6] Affine.

Rappel
Le théorème de changement de variable nous dit que l'intégrale avant changement de variable et l'intégrale après changement de variable sont de même nature. Donc il suffit d'étudier la convergence de l'une des deux intégrales.

20. Par définition, on a

$$(\varphi_a|\varphi_b) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax}e^{bx}e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+b)x-x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\, dx.$$

Mais, en utilisant le résultat de la question 1,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}\, dx = \sqrt{\pi},$$

de sorte que

$$(\varphi_a|\varphi_b) = e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}\,dx = \boxed{e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}.}$$

21. On a donc $\|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^2 = (\varphi_{\sqrt{\ln n}}|\varphi_{\sqrt{\ln n}}) = e^{(\ln n)} = n$.
Et donc $\|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^{-2} = \dfrac{1}{n}$.
Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^{-2}$ n'est autre que la série harmonique, qui $\boxed{\text{diverge.}}$

22. De même, on a $\|\varphi_{\sqrt{n}}\|^2 = (\varphi_{\sqrt{n}}|\varphi_{\sqrt{n}}) = e^n$ de sorte que $\|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2} = e^{-n}$.
Et donc, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2}$ est une série géométrique de raison e^{-1}, avec $0 < e^{-1} < 1$, donc elle converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2} = \frac{1}{1-e^{-1}} = \boxed{\frac{e}{e-1}.}$$

Partie VI : Une limite de probabilité conditionnelle.

23. Notons que

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt - \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Or, d'après le théorème fondamental de l'analyse, $x\mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et sa dérivée est $x\mapsto e^{-x^2}$.
Puisque d'autre part, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est une constante ne dépendant pas de x, Φ est $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est

$$\boxed{\Phi' : x\mapsto -e^{-x^2}.}$$

> **Remarque**
> À toute fin utile, signalons qu'il existe un théorème difficile (le théorème de Liouville) qui affirme qu'on ne peut pas exprimer de primitive de e^{-t^2} à l'aide des fonctions usuelles.
> Si vous en trouvez une (celle que je vois le plus souvent dans les copies étant $\frac{e^{-t^2}}{2t}$), alors est elle fausse !

24.a. Puisque Φ est le reste d'une intégrale convergente $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right)$, on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x) = 0.}$
Pour K et G, il n'y a rien à dire : toutes deux sont le produit de fonctions de limite nulle, donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} K(x) = \lim_{x\to+\infty} G(x) = 0.}$$

24.b. Les fonctions G et Φ sont $\mathscr{C}^1$, donc il en est de même de $G-\Phi$, avec pour tout x de $\mathbf{R}_+^*$

$$\begin{aligned}(G-\Phi)'(x) = G'(x)-\Phi'(x) &= \left(-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2x^4}\right)\frac{e^{-x^2}}{2} - 2x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}\right)\frac{e^{-x^2}}{2} - e^{-x^2}\\ &= -\frac{1}{x^2}e^{-x^2}+\frac{3}{4x^4}e^{-x^2} - \cancel{e^{-x^2}} + \frac{1}{2x}e^{-x^2} + \cancel{e^{-x^2}}\\ &= \frac{3}{4x^4}e^{-x^2}.\end{aligned}$$

Donc $G-\Phi$ est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, et étant de limite nulle, on en déduit que pour tout $x\in\mathbf{R}_+^*$, $G(x)-\Phi(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{G(x)\leqslant\Phi(x).}$
De même, $\Phi-K$ est dérivable et pour tout $x\in\mathbf{R}_+^*$,

$$(\Phi-K)'(x) = -\cancel{e^{-x^2}} + \cancel{e^{-x^2}} - \frac{e^{-x^2}}{2x^2} = -\frac{e^{-x^2}}{2x^2}\leqslant 0.$$

Comme précédemment, on en déduit que $\Phi-K$ est décroissante, et étant de limite nulle, pour tout $x\in\mathbf{R}_+^*$, $\Phi(x)-K(x)\leqslant 0\Leftrightarrow\boxed{\Phi(x)\leqslant K(x).}$

24.c. Il suffit d'utiliser l'encadrement précédent :

$$\frac{2xG(x)}{e^{-x^2}}\leqslant\frac{2x\Phi(x)}{e^{-x^2}}\leqslant\frac{2xK(x)}{e^{-x^2}}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2x^2}\leqslant\frac{2\Phi(x)}{e^{-x^2}}\leqslant 1.$$

Par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\Phi(x)}{e^{-x^2}} = 1$ et donc $\boxed{\Phi(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{e^{-x^2}}{2x}.}$

25.a. Une densité de X est $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$. Et donc

$$P(X \leqslant x) = 1 - P(X > x) \int_x^{+\infty} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\, dt = \boxed{1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Phi(x).}$$

25.b. Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a

$$P_{[X>x]}(X \leqslant x + c) = \frac{P([X > x] \cap [X \leqslant x + c])}{P(X > x)} = \frac{P(x < X < x + c)}{P(X > x)}.$$

Or, $P(x < X < x + c) = P(X < x + c) - P(X < x)$, de sorte que

$$\begin{aligned} P_{[X>x]}(X < x + c) &= \frac{P(X < x + c) - 1 + P(X > x)}{P(X > x)} = \frac{-P(X > x + c) + P(X > x)}{P(X > x)} \\ &= 1 - \frac{P(X > x + c)}{P(X > x)} = 1 - \frac{\Phi(x + c)}{\Phi(x)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'équivalent obtenu à la question précédente, on a

$$\frac{\Phi(x + c)}{\Phi(x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-(x+c)^2} x}{e^{-x^2}(x + c)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-(x+c)^2}}{e^{-x^2}} = e^{-2xc - c^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} P_{[X>x]}(X \leqslant x + c) = 1.}$$

EML 2007

Problème 1

Sujet : Autour de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ (sauf partie IV) **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : fonction d'une variable, séries numériques, intégrale sur un segment, fonctions de deux variables

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : plutôt intéressant pour réviser l'analyse, à part les intégrales impropres, on y trouve de tout !

On considère l'application

$$f \; : \; [0;+\infty[\to \mathbf{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude de l'application f.

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. On considère l'application
$$A \; : \; [0;+\infty[\to \mathbf{R},\ x \mapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$
   a. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{A(x)}{x^2}$.
   b. Montrer que f' admet $-\dfrac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.
   c. Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ et préciser $f'(0)$.
   d. Dresser le tableau de variation de A.
   En déduire que f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
   e. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On considère l'application
$$B \; : \; [0;+\infty[\to \mathbf{R},\ x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x).$$
   a. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$, et que, pour tout $x \in]0;+\infty[$,
$$f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}.$$
   b. Dresser le tableau de variation de B.
   En déduire que f est convexe sur $]0;+\infty[$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II : Un développement en série

5. Montrer, pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $t \in [0;1]$:
$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$
6. En déduire, pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [0;1]$:
$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$
   où on a noté $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}\, dt$.

7. Établir, pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [0;1]$: $|J_N(x)| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.

8. En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ converge et que :
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

Partie III : Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

9. Montrer, en utilisant le résultat de la question 7, pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [0;1]$:
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

10. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

11. Montrer, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$:
$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \end{cases}$$

12. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi^2}{12}$.

Partie IV : Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $F :]0;+\infty[\to \mathbf{R}$, $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

et $G :]0;+\infty[^2 \to \mathbf{R}$, $(x,y) \mapsto G(x,y) = F(xy) - F(x) - F(y)$.

13. Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[^2$.
Exprimer, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, les dérivées partielles premières et secondes de G en (x,y) en fonction de x, y, $f(x)$, $f(y)$, $f(xy)$, $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(xy)$.

14. Établir que G admet $(1,1)$ comme unique point critique.

15. Est-ce que G admet un extremum local ?

Problème 2

Sujet : Étude d'une famille de polynômes orthogonaux (polynômes de Jacobi). Moyen

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : polynômes, diagonalisation, produits scalaires, endomorphismes symétriques

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : la première partie est très classique, la deuxième partie demande de l'aisance avec les polynômes, et notamment la notion de multiplicité d'une racine. Idéal pour réviser les polynômes.

On note n un nombre entier fixé supérieur ou égal à 2, E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.

Partie I : Étude d'un endomorphisme de E.

1. Montrer que, pour tout polynôme P de E, le polynôme $((X^2-1)P)''$ est un élément de E, où $((X^2-1)P)''$ désigne le polynôme dérivée seconde de $(X^2-1)P$.

On note $\Phi : E \to E$ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe $\Phi(P) = ((X^2-1)P)''$.

2. Vérifier : $\Phi(1) = 2$, $\Phi(X) = 6X$.

3. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

4. Calculer $\Phi(X^k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et écrire la matrice A de Φ dans la base $\mathscr{B}$.

5. a. Montrer que Φ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes que l'on notera $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.

   b. Est-ce que Φ est bijectif ?

   c. Montrer que Φ est diagonalisable et déterminer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la dimension du sous-espace propre de Φ associé à λ_k.

6. Soient $k \in [\![0, n]\!]$ et P un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ_k.

   a. Montrer que le degré du polynôme P est égal à k.

   b. Montrer que le polynôme Q défini par $Q(X) = P(-X)$ est un vecteur propre de Φ associé à λ_k.

7. En déduire qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de Φ telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$. Que peut-on en déduire sur la parité de P_k ?

8. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3.

Partie II : Un produit scalaire sur E.

9. Montrer que l'application : $(P, Q) \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)P(x)Q(x)\,dx$ est un produit scalaire sur E.

On munit dorénavant E de ce produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.

10. a. À l'aide d'intégrations par parties, établir que Φ est un endomorphisme symétrique de E.

    b. Montrer que la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ obtenue à la question 7 est orthogonale.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

11. a. Montrer que pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à $j-1$, on a : $(S|P_j) = 0$.

    b. En considérant $(1|P_j)$, montrer que P_j ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $]-1, 1[$.

    c. En déduire que P_j admet au moins, dans l'intervalle $]-1, 1[$, une racine d'ordre de multiplicité impair.

12. On note $\{x_1, \ldots, x_m\}$ l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de P_j appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$ et $S_m = (X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_m)$.

    a. Justifier : $m \leqslant j$.

    b. Montrer que le polynôme $S_m P_j$ (produit des polynômes S_m et P_j) garde un signe constant sur l'intervalle $]-1, 1[$.

    c. En considérant $(S_m|P_j)$, montrer que $m = j$.

    d. En déduire que P_j admet j racines simples réelles, toutes situées dans l'intervalle $]-1, 1[$.

EML 2007 : Corrigé

Problème 1

Partie I : Étude de l'application f.

1. Sur $\mathbf{R}_+^*$, f est continue car quotient de deux fonctions continues.
De plus, lorsque $x \to 0^+$, on a

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x}{x} = 1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1 = f(0).$$

Et donc f est continue[1] en 0, de sorte que $\boxed{f \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$

[1] À droite.

2.a. f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ car quotient de deux fonctions $\mathscr{C}^1$, dont le dénominateur ne s'annule pas.
On a alors, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}x - \ln(1+x)}{x^2} = \boxed{\frac{A(x)}{x^2}.}$$

2.b. Lorsque $x \to 0^+$, on a

$$\begin{aligned}A(x) &= x\frac{1}{1+x} - \ln(1+x) = x\left(1 - x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)\\ &= x - x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) - x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\\ &= -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).\end{aligned}$$

Et donc $f'(x) = -\frac{1}{2} + \underset{x\to 0^+}{o}(1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \boxed{\frac{1}{2}.}$

> **Danger !**
> La notation o est subtile, et $o\left(x^2\right)$ peut désigner n'importe quelle fonction négligeable devant x^2.
> En particulier, les deux $o\left(x^2\right)$ de la ligne précédente n'ont aucune raison d'être égaux, et donc ne vont pas se compenser dans le calcul.
> On peut retenir que, contrairement à ce que dicte l'intuition,
> $$o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$$
> $$o(x^2) - o(x^2) = o(x^2)$$
> et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$,
> $$\lambda o(x^2) = o(\lambda x^2) = o(x^2).$$

2.c. Il s'agit de prouver que f est dérivable en 0, et que sa dérivée est continue en 0.
Or, lorsque $x \to 0^+$, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)-1}{x} = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

Ceci prouve donc que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
Mais alors, d'après la question précédente,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2} = f'(0).$$

Ainsi, f' est continue en 0, et puisque nous savons déjà[2] qu'elle est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, f' est donc continue sur $[0;+\infty[$.
Et donc $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0;+\infty[.}$

[2] Car f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

2.d. A est dérivable sur $[0,+\infty[$ car somme de fonctions dérivables, et

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ A'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-(1+x)}{(1+x)^2} = -\frac{x}{(1+x)^2} \leqslant 0.$$

Et donc A est décroissante sur $[0,+\infty[$, et même strictement décroissante puisque pour tout $x \in]0,+\infty[$, $A'(x) < 0$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$A'(x)$	0 $\qquad$ $-$
$A(x)$	0 $\searrow$ $-\infty$

> **Stricte monotonie**
> Le fait que la dérivée soit nulle en un seul point (et même en un nombre fini de points) n'empêche pas une fonction d'être strictement monotone.
> Plus précisément : si f est dérivable sur $[a, b]$ et si $f'(x) > 0$ sur $]a, b]$, alors f est strictement décroissante sur $[a, b]$.

Puisque $A(0)=0$, on en déduit que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $A(x)<0$.
Et donc $f'(x)<0$ sur $]0,+\infty[$: $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbf{R}_+.}$

2.e. Lorsque $x\to+\infty$, $x \underset{x\to+\infty}{\sim} 1+x$ et donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

Mais par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln(X)}{X} = \boxed{0.}$

> **Danger !**
> Attention à suffisamment détailler les croissances comparées : la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$ est dans le cours, celle de $\frac{\ln(1+x)}{x}$ ne l'est pas, et il faut donc expliquer comment elle se déduit de la première.
> En particulier, attention aux raisonnement trop rapides du genre «toute puissance de x l'emporte sur tout logarithme».
> C'est vrai pour $\frac{\ln(x)}{x}$ ou $\frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$, mais par exemple c'est faux pour $\frac{\ln(1+e^x)}{x}$.

3.a. Nous avons déjà mentionné que A est dérivable sur $]0;+\infty[$, et donc $f'(x)=\dfrac{A(x)}{x^2}$ est dérivable car quotient de fonctions dérivables.
Et donc f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.
On a alors, pour tout $x\in]0;+\infty[$,

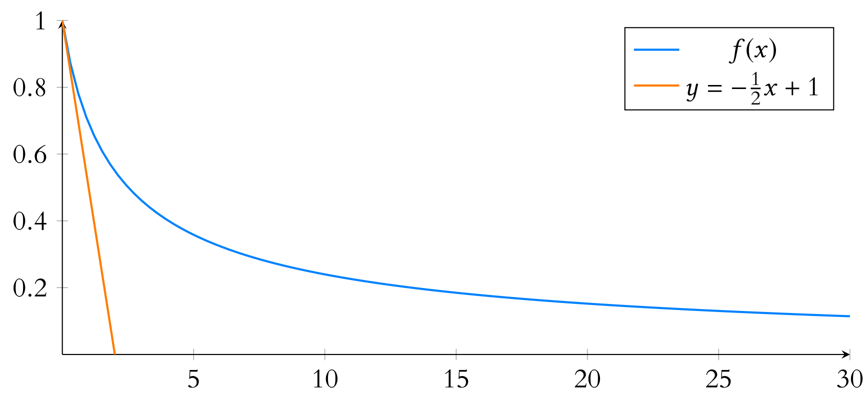
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{A'(x)x^2-2xA(x)}{x^4} = \frac{-\frac{x^3}{(1+x)^2}-\frac{2x^2}{1+x}+2x\ln(1+x)}{x^4}\\ &= \frac{-\frac{x^2+2x(1+x)}{(1+x)^2}+2\ln(1+x)}{x^3} = \boxed{\frac{B(x)}{x^3}.}\end{aligned}$$

3.b. B est dérivable sur $]0,+\infty[$ car somme de fonctions dérivables, et pour tout $x\in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned} B'(x) &= -\frac{(6x+2)(1+x)^2-(3x^2+2x)2(1+x)}{(1+x)^4}+\frac{2}{1+x}\\ &= \frac{-(6x+2)(1+x)+(6x^2+4x)+2(1+x)^2}{(1+x)^3}\\ &= \frac{-6x^2-8x-2+4x+6x^2+2(1+x)^2}{(1+x)^3}\\ &= \frac{-4x-2+2(1+2x+x^2)}{(1+x)^3}\\ &= \frac{2x^2}{(1+x)^3} \geqslant 0.\end{aligned}$$

On en déduit donc que B est croissante sur $[0;+\infty[$. Puisque $B(0)=0$, on en déduit que B est positive sur $]0,+\infty[$ et donc que $f''(x)\geqslant 0$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est convexe sur }]0,+\infty[.}$

4. Le dessin doit faire apparaître les points mis en évidence dans les questions précédentes. En particulier, la fonction tracée doit bien être convexe, valoir 1 en 0, tendre vers 0 et avoir une dérivée en 0 égale[3] à $-\frac{1}{2}$.



[3] Ce qui se traduit sur la pente de la tangente, tangente qu'on peut éventuellement tracer (nous connaissons son coefficient directeur et savons qu'elle passe par le point de coordonnées $(0,1)$).

Partie II : Un développement en série.

5. Pour $t\in[0,1]$, on a

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{N}(-t)^k = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}.$$

> **Détails**
> Il s'agit de la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $-t\neq 1$.

Et donc

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t} = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t} + \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t} = \boxed{\frac{1}{1+t}.}$$

6. Soit $x \in [0,1]$. En intégrant la relation précédente entre $[0,x]$, il vient

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \int_0^x t^k\,dt + \underbrace{\int_0^1 \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\,dt}_{=J_N(x)}.$$

Mais $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^x = \ln(1+x)$.

Et de même, $\displaystyle\int_0^x t^k\,dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

Ainsi, nous avons donc prouvé :

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + J_N(x).}$$

7. Sur $[0,x]$, on a $1+t \geqslant 1$ et donc $\left|\dfrac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\right| \leqslant t^{N+1}$.

Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\int_0^x \left|\frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\right| dt \leqslant \int_0^x t^{N+1}\,dt = \frac{x^{N+2}}{N+2}.$$

Et alors, d'après l'inégalité triangulaire

$$|J_N(x)| \leqslant \int_0^x \left|\frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\right| dt \leqslant \boxed{\frac{x^{N+2}}{N+2}.}$$

8. Puisque $x \in [0,1]$, pour tout $N \in \mathbf{N}$, $|x^{N+2}|| \leqslant 1$ et donc $|J_N(x)| \leqslant \dfrac{1}{N+2}$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{N\to+\infty} J_N(x) = 0$. Et donc

$$\lim_{N\to+\infty}\left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\right| = \lim_{N\to+\infty}|J_N(x)| = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x).$$

Ceci signifie donc que la série de terme général $\dfrac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x).$$

Et alors un petit changement d'indice nous donne

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x).}$$

Convergence

Rappelons que par **définition**, une série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge. La limite de cette suite est alors (toujours par définition) la somme de la série.

Partie III : Égalité d'une intégrale et d'une somme de série.

9. Soit $x \in]0,1]$. Reprenons l'inégalité prouvée dans la question 7 :

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\right| = |J_N(x)| \leqslant \frac{x^{N+2}}{N+2}.$$

En divisant cette inégalité par x, il vient donc

$$\left|\underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{=f(x)} - \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^k}{k+1}\right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

Enfin, pour $x=0$, on a $f(x)=1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{x^k}{k+1} = 1$.

Et donc l'inégalité est trivialement vérifiée.

> **Rappel**
> Par convention, $0^0 = 1$, alors $0^k = 0$ pour $k \geqslant 1$.

10. Intégrons entre 0 et 1 l'inégalité précédente :

$$\int_0^1 \left|f(x) - \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^k}{k+1}\right| dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{N+2}\,dx \leqslant \frac{1}{(N+2)^2}.$$

De plus, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^k}{k+1}\right) dx\right| \leqslant \int_0^1 \left|f(x) - \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^k}{k+1}\right| dx.$$

On en déduit que

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\right| = \left|\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^k}{k+1}\right) dx\right| \leqslant \frac{1}{(N+2)^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{(k+1)^2}$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Enfin, un changement d'indice donne

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \int_0^1 f(x)\,dx.}$$

11. En séparant les termes pairs des termes impairs, on a

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}.$$

> **Détails**
> Un nombre impair compris entre 1 et $2N+1$ s'écrit $2p+1$, avec $0 \leqslant p \leqslant N$.
> Et un nombre pair entre 1 et $2p+1$ (c'est-à-dire un nombre pair entre 2 et $2N$) s'écrit $2p$, avec $1 \leqslant p \leqslant N$.

Et de même,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{N-1}}{n^2} &= \sum_{p=0}^{N} \frac{(-1)^{2p+1-1}}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{(-1)^{2p-1}}{(2p)^2}\\ &= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}.\end{aligned}$$

12. Nous savons que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{4p^2}$ sont des séries de Riemann convergentes. Et de même, $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{(2p+1)^2}$ converge car $\dfrac{1}{(2p+1)^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4p^2}$.

D'autre part, nous venons de prouver que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge, et donc en faisant tendre N vers $+\infty$ dans les égalités de la question précédente, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\Leftrightarrow\frac{\pi^2}{6}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}-\frac{\pi^2}{24}.$$

Et donc $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{3\pi^2}{24}=\boxed{\frac{\pi^2}{8}.}$

D'autre part, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans la seconde relation de la question 11, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}-\frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Et donc, d'après le résultat de la question 10,

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\boxed{\frac{\pi^2}{12}.}$$

Partie IV : Recherche d'extremums pour une fonction de deux variables réelles.

13. Puisque f est continue sur $[0,+\infty[$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F:x\mapsto\int_0^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, et $F'=f$.
Mais f est $\mathscr{C}^1$, donc F est $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
D'autre part, les fonctions $(x,y)\mapsto xy$, $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[^2$ car elles sont polynomiales. Notons qu'elles sont alors à valeurs dans $]0;+\infty[$.
Par composition par F, les fonctions $(x,y)\mapsto F(xy)$, $(x,y)\mapsto F(x)$ et $(x,y)\mapsto F(y)$ sont donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[^2$.
Par conséquent G est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[^2$ car somme de fonctions $\mathscr{C}^2$.
On a alors

$$\partial_1 G(x,y)=yF'(xy)-F'(x)=\boxed{yf(xy)-f(x)}\text{ et }\partial_2 G(x,y)=xF'(xy)-F'(y)=\boxed{xf(xy)-f(y).}$$

Et alors en dérivant de nouveau,

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,1}G(x,y)&=y^2f'(xy)-f'(x)\\\partial^2_{2,2}G(x,y)&=x^2f'(xy)-f'(y)\\\partial^2_{1,2}G(x,y)&=\partial^2_{2,1}G(x,y)=f(xy)+xyf'(xy).\end{aligned}$$

> **Rappel**
> Une fonction f est $\mathscr{C}^k$ si et seulement si f' est $\mathscr{C}^{k-1}$.

> **Rédaction**
> Puisque F n'est définie que sur $]0,+\infty[$, préciser que ces deux fonctions sont à valeurs dans $]0;+\infty[$ permet de montrer qu'on a bien vu que les composer par F a bien un sens.

14. Un couple $(x,y)\in]0,+\infty[^2$ est un point critique de G si et seulement si

$$\begin{cases}\partial_1G(x,y)=0\\\partial_2G(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}yf(xy)=f(x)\\xf(xy)=f(y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(xy)=\frac{f(y)}{x}\\f(xy)=\frac{f(x)}{y}\end{cases}$$

Et donc (x,y) est un point critique si et seulement si

$$\begin{cases}\frac{\ln(1+xy)}{xy}=\frac{\ln(1+y)}{xy}\\\frac{\ln(1+xy)}{xy}=\frac{\ln(1+x)}{xy}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(1+xy)=\ln(1+y)\\\ln(1+xy)=\ln(1+x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=x\\xy=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1.$$

Donc $\boxed{(1,1)\text{ est l'unique point critique de }G.}$

> **Détails**
> La fonction $t\mapsto\ln(1+t)$ est injective car strictement croissante.
> Donc
> $\ln(1+xy)=\ln(1+y)\Leftrightarrow xy=y$

15. En $(1,1)$, on a

$$\partial^2_{1,1}G(1,1)=\partial^2_{2,2}G(1,1)=0,\ \partial^2_{1,2}G(x,y)=f(1)+f'(1)=\ln(2)+\frac{1}{2}-\ln(2)=\frac{1}{2}.$$

Et donc la matrice hessienne de G en $(1,1)$ est $\nabla^2 G(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
Un réel λ en est valeur propre si et seulement si $\nabla^2 G(1,1) - \lambda I_2$ n'est pas inversible, soit si et seulement si $\det\left(\nabla^2 G(1,1) - \lambda I_2\right) = 0$.
Soit encore si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Et donc $\nabla^2 G(1,1)$ possède deux valeurs propres distinctes : $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.
Ces deux valeurs propres étant non nulles et de signes opposés, G ne possède pas d'extremum local en $(1,1)$.

PROBLÈME 2

Étude d'un endomorphisme de E.

1. Si $P \in E$, alors $(X^2-1)P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+2$ et donc $((X^2-1)P)''$ est de degré inférieur ou égal à n, et donc $\boxed{\text{est un élément de } E.}$

2. On a $\Phi(1) = (X^2-1)'' = (2X)' = \boxed{2}$ et de même, $\Phi(X) = (X^3 - X)'' = (3X^2-1)' = \boxed{6X.}$

3. Puisque nous savons déjà que pour tout $P \in E$, $\Phi(P) \in E$, il suffit de vérifier la linéarité de Φ. Soient donc $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a alors

$$\Phi(\lambda P + Q) = \left((X^2-1)(\lambda P + Q)\right)'' = \left(\lambda(X^2-1)P + (X^2-1)Q\right)'' = \lambda\left((X^2-1)P\right)'' + \left((X^2-1)Q\right)'' = \lambda\Phi(P) + \Phi(Q).$$

Et donc Φ est linéaire et donc $\boxed{\text{est un endomorphisme de } E.}$

4. Pour $k=0$ et $k=1$, le calcul a déjà été effectué à la question 2.
Si $k \in [\![2, n]\!]$, alors il vient

$$\Phi(X^k) = \left((X^2-1)X^k\right)'' = (X^{k+2} - X^k)'' = (k+2)(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}.$$

On en déduit que la matrice de Φ dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\Phi) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \Phi(1) & \Phi(X) & \Phi(X^2) & \Phi(X^3) & \dots & \dots & \Phi(X^{n-1}) & \Phi(X^n) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 12 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 20 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & & & \ddots & n(n+1) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & (n+1)(n+2), \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \\ \vdots \\ X^{n-2} \\ X^{n-1} \\ X^n \end{matrix} \end{array}.$$

5.a. A est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : ce sont donc les $(k+1)(k+2)$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
Et donc ce sont également les valeurs propres de Φ, qui possède donc $(n+1)$ valeurs propres distinctes.

> **Remarque**
> Notons qu'avec les notations de l'énoncé, on a
> $$\lambda_k = (k+1)(k+2).$$

5.b. 0 n'est pas valeur propre de Φ, et donc $\boxed{\Phi \text{ est bijectif.}}$

5.c. Puisque Φ possède $n+1 = \dim E$ valeurs propres distinctes, Φ est diagonalisable, et ses $\boxed{\text{sous-espaces propres sont tous de dimension 1.}}$

> **Degré**
> Supposer que $a_d \neq 0$ revient à supposer que $\deg P = d$.

6.a. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ^k, avec $a_d \neq 0$.
Alors

$$\Phi(P) = \left((X^2-1)P\right)'' = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k X^{k+2} - \sum_{k=0}^{d} a_k X^k\right)'' = \sum_{k=0}^{d} a_k(k+2)(k+1)X^k - \sum_{k=2}^{d} a_k k(k-1)X^{k-2}.$$

Le coefficient de degré d de $\Phi(P)$ est alors $a_d(d+2)(d+1)$.
D'autre part, $\Phi(P) = \lambda_k P = (k+2)(k+1)P$, qui est de degré d, avec un coefficient de degré d égal à $(k+2)(k+1)a_d$.
Et donc, par identification des coefficients de degré d, on a $a_d(d+1)(d+2) = a_d(k+1)(k+2)$.
Puisque $a_d \neq 0$ par hypothèse, c'est que $(d+1)(d+2) = (k+1)(k+2)$.
Or, la fonction $x \mapsto (x+1)(x+2) = x^2+3x+2$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, et donc en particulier injective.
Et donc $(d+1)(d+2) = (k+1)(k+2) \Leftrightarrow d = k$.
Ainsi, $\boxed{P \text{ est nécessairement de degré } d.}$

6.b. Soit $Q(X) = P(-X)$. Alors $Q'(X) = -P'(-X)$ et $Q''(X) = P''(-X)$.
Ainsi, il vient

$$\Phi(Q) = \left((X^2-1)Q\right)'' = \left((X^2-1)Q' - 2XQ\right)' = (X^2-1)Q''+2XQ'+2XQ'-2Q = (X^2-1)Q''+4XQ'-2Q.$$

Soit encore $\Phi(Q) = (X^2-1)P''(-X) - 4XP'(-X) - 2P(-X)$.
Or, on a de même $\Phi(P) = (X^2-1)P'' + 4XP' - 2P = \lambda_k P$, et donc, en remplaçant X par $-X$, il vient

$$((-X)^2-1)P''(-X) - 4XP'(-X) - 2P(-X) = \lambda_k P(-X) \Leftrightarrow \Phi(Q) = \lambda_k Q.$$

Et donc $\boxed{Q \text{ est un vecteur propre de } \Phi, \text{ associé à la valeur propre } \lambda_k.}$

7. Soit $(P_0, \dots, P_n)$ une base de vecteurs propres de Φ, avec $P_k \in E_{\lambda_k}(\Phi)$.
Alors, d'après la question 6.a, P_k est de degré k, et quitte à le diviser par son coefficient dominant, on peut le supposer unitaire.
Et alors, d'après la question 6.b, $P_k(-X)$ est encore un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ_k, de coefficient dominant égal à $(-1)^k$.
Mais $E_{\lambda_k}(\Phi)$ étant de dimension 1, on a donc $E_{\lambda_k}(\Phi) = \mathrm{Vect}(P_k)$ et donc il existe une constante $\mu_k \in \mathbf{R}$ telle que $P_k(-X) = \mu_k P_k(X)$.
Par identification des coefficients de degré k, il vient $\mu_k = (-1)^k$, et donc $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.
Ainsi, il existe bien une base vérifiant les conditions de l'énoncé.

> **Remarque**
> Une telle base existe, puisque Φ est diagonalisable.

Soit $(Q_0, \dots, Q_n)$ une autre base de vecteurs propres de Φ, avec $Q_k \in E_{\lambda_k}(\Phi)$, et Q_k unitaire.
Alors comme précédemment, Q_k s'écrit $\nu_k P_k$, et par identification des coefficients dominants, $\nu_k = 1 \Leftrightarrow P_k = Q_k$.
Et donc $(Q_0, \dots, Q_n) = (P_0, \dots, P_n)$: il existe une unique base de E vérifiant les conditions de l'énoncé.

> **Mieux**
> En fait, la preuve montre que toute famille unitaire de vecteurs propres vérifie automatiquement $\deg P_k = k$ et $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.

On en déduit notamment que P_k est de la parité de k.

8. Nous avons déjà $\Phi(1) = 2 = \lambda_0 \times 1$ et 1 est unitaire, donc $\boxed{P_0 = 1.}$
De même, $\Phi(X) = 6X = \lambda_1 X$, de sorte que $\boxed{P_1 = X.}$
Cherchons P_2 sous la forme X^2+aX+b, vérifiant $\Phi(P_2) = \lambda_2 P_2 \Leftrightarrow 12X^2 - 2 + 6aX + 2b = 12(X^2+aX+b)$.

Par identification des coefficients, on doit donc avoir $\begin{cases} 6a = 12a \\ 2b-2 = 12b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$

Et donc $\boxed{P_2 = X^2 - \frac{1}{5}.}$

> **Unicité**
> Notons qu'il y a bien une **unique** solution en vertu de ce qui a été dit précédemment : P_2 est l'unique polynôme unitaire de $E_{\lambda_2}(\Phi)$.

De même cherchons P_3 sous la forme $P_3 = X^3+aX^2+bX+c$ vérifiant $\Phi(P_3) = \lambda_3 P_3 = 20P_3$.
On a alors $\Phi(P_3) = 20X^3 - 6X + 12aX^2 - 2a + 6bX + 2c$, et donc $\Phi(P_3) = 20P_3$ si et seulement si $\begin{cases} 12a = 20a \\ -6+6b = 20b \\ 20c = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 0 \\ b = -\frac{3}{7} \end{cases}$

Et donc $\boxed{P_3 = X^3 - \frac{3}{7}X.}$

Partie II : Un produit scalaire sur E.

9. Notons que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, et donc est nécessairement convergente.

Pour $P, Q \in E$, on a

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)P(x)Q(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)Q(x)P(x)\,dx = (Q|P)$$

donc $(\cdot|\cdot)$ est symétrique.
Soient $P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$(\lambda P+Q|R) = \int_{-1}^{1}(1-x^2)(\lambda P(x)+Q(x))R(x)\,dx = \lambda \int_{-1}^{1}(1-x^2)P(x)R(x)\,dx+\int_{-1}^{1}(1-x^2)Q(x)R(x)\,dx = \lambda(P|R)+(Q|R)$$

donc $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à gauche, et étant symétrique, est bilinéaire.
Soit $P \in E$. Alors la fonction $x \mapsto (1-x^2)P^2(x)$ étant positive sur $[-1, 1]$, par croissance de l'intégrale, on a $(P|P) \geqslant 0$.
Enfin, $x \mapsto (1-x^2)P^2(x)$ étant continue et positive sur $[-1, 1]$, on a $(P|P) = 0$ si et seulement si $\forall x \in [-1, 1]$, $(1-x^2)P(x)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-1, 1[$, $P(x) = 0$.
Mais $]-1, 1[$ contient une infinité de réels, et donc si $(P|P) = 0$, alors P possède une infinité de racines, et donc est le polynôme nul.
On en déduit que $\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

10.a. Soient $(P, Q) \in E^2$. Alors on a

$$(\Phi(P)|Q) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\left((x^2-1)P(x)\right)'' Q(x)\,dx.$$

Procédons à une intégration par parties sur le segment $[-1, 1]$, en posant $u(x) = \left((x^2-1)P(x)\right)'$ et $v(x) = (x^2-1)Q(x)$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, avec $u'(x) = \left((x^2-1)P(x)\right)''$ et $v'(x) = \left((x^2-1)Q(x)\right)'$. On a alors

$$\begin{aligned}
(\Phi(P)|Q) &= -\int_{-1}^{1} u'(x)v(x)\,dx \\
&= -[u(x)v(x)]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} u(x)v'(x)\,dx \\
&= -\underbrace{v(1)}_{=0}u(1) + \underbrace{v(-1)}_{=0}u(-1) + \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)P(x)\right)'\left((x^2-1)Q(x)\right)'\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)P(x)\right)'\left((x^2-1)Q(x)\right)'\,dx.
\end{aligned}$$

Ce calcul étant valable pour tout $P, Q \in E$, alors il vient également

$$(P|\Phi(Q)) = (\Phi(Q)|P) = \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)Q(x)\right)'\left((x^2-1)P(x)\right)'\,dx = \int_{-1}^{1} \left((x^2-1)P(x)\right)'\left((x^2-1)Q(x)\right)'\,dx = (\Phi(P)|Q).$$

Et donc $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme symétrique de } E.}$

10.b. Puisque Φ est symétrique, une famille de vecteurs propres de Φ associés à des valeurs propres distinctes est nécessairement orthogonale. En particulier, puisque les λ_i sont deux à deux distincts, $\boxed{(P_0, \dots, P_n) \text{ est orthogonale.}}$

11.a. La famille $(P_0, \dots, P_{j-1})$ étant formée de polynômes de degrés deux à deux distincts, elle est libre.
De plus, c'est une famille à j éléments de $\mathbf{R}_{j-1}[X]$, qui est de dimension j : c'est donc une base de $\mathbf{R}_{j-1}[X]$.

Et donc si $S \in \mathbf{R}_{j-1}[X]$, alors il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{j-1}$ tels que $S = \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i P_i$.

Et donc

$$(S|P_j) = \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i (P_i|P_j) = 0$$

car d'après la question précédente, P_j est orthogonal à tous les $P_i, i \leqslant j-1$.

11.b. On a $(1|P_j) = 0$ d'après ce qui précède. Mais par définition,

$$(1|P_j) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)P_j(x)\,dx.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que P_j est de signe constant sur $[-1,1]$.
Alors $x \mapsto (1-x^2)P_j(x)$ est également de signe constant, et elle est continue sur $[-1,1]$.
Puisque son intégrale est nulle, c'est donc la fonction nulle sur $[-1,1]$.
Mais alors $\forall x \in]-1,1[$, $P_j(x) = 0$, et donc P_j possède une infinité de racines, donc est nul.
Ceci est incohérent avec le fait que P_j est de degré j, et donc P_j n'est pas de signe constant sur $]-1,1[$.

Remarque
En général, on utilise ce résultat pour une fonction positive, mais dans le cas d'une fonction f négative, $-f$ est positive, et donc son intégrale est nulle si et seulement si $-f$ est nulle, c'est-à-dire si et seulement si f est nulle.

11.c. Puisque P_j change de signe sur $]-1,1[$, il existe $a, b \in]-1,1[$ tels que $P_j(a) > 0$ et $P_j(b) < 0$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, qui s'applique bien puisque P_j est continue, il existe $c \in]-1,1[$ tel que $P_j(c) = 0$.
Et donc P_j possède au moins une racine dans $]-1,1[$.

Notons donc $r_1, \dots, r_p$ les racines de P_j situées dans l'intervalle $]-1,1[$, et notons $m_1, \dots, m_p$ leurs multiplicités respectives.
Alors $P = (X-r_1)^{m_1} \cdots (X-r_p)^{m_p} Q$, où Q est un polynôme ne s'annulant pas dans l'intervalle $]-1,1[$.
En particulier, Q étant continu, il est de signe constant sur $]-1,1[$.
Si tous les m_i étaient pairs, alors $x \mapsto (x-r_1)^{m_1} \cdots (x-r_p)^{m_p}$ serait positive sur $]-1,1[$, et donc P serait de signe constant car produit de deux fonctions de signe constant.
Par conséquent, l'une[4] des racines de P est d'ordre de multiplicité impair.

Signe
Si Q n'était pas de signe constant, le théorème des valeurs intermédiaires prouverait l'existence d'une racine de Q dans $]-1,1[$.

12.a. Puisque P_j est de degré j, il possède au plus j racines réelles, et en particulier, au plus j racines dans $]-1,1[$. Et donc $\boxed{m \leqslant j.}$

12.b. Notons que P_j se factorise sous la forme

$$P_j(X) = Q_j(X)\prod_{i=1}^{m}(X-x_i)^{m_i}$$

où m_i est l'ordre de multiplicité de la racine x_i (et donc est un entier impair).
Le polynôme Q_j peut éventuellement posséder des racines dans $]-1,1[$, mais ce sont alors les racines de P_j d'ordre de multiplicité pair, et donc Q_j se factorise sous la forme

$$Q_j(X) = \prod_{i=1}^{p}(X-y_i)^{n_i} R_j(X)$$

où les y_i sont les racines d'ordre pair de P_j situées dans $]-1,1[$, les n_i sont leurs ordres de multiplicité et R_j est un polynôme qui ne s'annule pas sur $]-1,1[$.
En particulier, R_j est de signe constant sur $]-1,1[$.
Et puisque les n_i sont pairs, les $(X-y_i)^{n_i}$ sont positifs sur $\mathbf{R}$ tout entier.
Donc Q_j est un polynôme de signe constant sur $]-1,1[$.
Et alors

$$S_m P_j = \prod_{i=1}^{m}(X-x_i)^{m_i+1} Q_j$$

est de signe constant sur $]-1,1[$ car les m_i+1 sont pairs, de sorte que les $(X-x_i)^{m_i+1}$ restent positifs sur $\mathbf{R}$.

12.c. On a $(S_m|P_j) = \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)S_m(x)P_j(x)\,dx$.
D'après la question précédente, il s'agit donc de l'intégrale d'une fonction de signe constant sur $[-1,1]$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $m < j$, alors $\deg S_m = m < j$ et donc d'après la question 11.a, $(S_m|P_j) = 0$.
Et alors la fonction $x \mapsto (1-x^2)S_m(x)P_j(x)$ étant continue et de signe constant sur $]-1,1[$, c'est qu'elle est nulle sur $]-1,1[$.
En particulier, pour tout $x \in]-1,1[$, $S_m(x)P_j(x) = 0$, et donc $S_m P_j$ possède une infinité de racines, et donc est nul.
Mais ni P_j ni S_m étant nuls, ceci est impossible.
On en déduit donc que $\boxed{m = j.}$

[4] Au moins !

12.d. Nous venons de prouver que P_j possède j racines d'ordre de multiplicité impair dans $]-1,1[$.
Mais étant de degré j, il possède au plus j racines comptées avec multiplicité.
Et donc chacune des j racines situées dans l'intervalle $]-1,1[$ est d'ordre de multiplicité 1, et P_j ne possède pas d'autres racines[5].

Autrement dit, $\boxed{P_j \text{ possède } j \text{ racines réelles simples, toutes situées dans }]-1,1[.}$

[5] Ni réelles, ni complexes.

EML 2006

Problème 1

Sujet : Étude d'intégrales à paramètres **Moyen**

Abordable en première année : ✓ (sauf partie I) **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : fonctions de plusieurs variables, calcul différentiel d'ordre 1, intégrales impropres, séries

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Préliminaires

1. a. Justifier, que pour tout $n \in \mathbf{N}$: $t^n e^{-t^2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$ est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2}\,dt$ converge.

On admet dans tout le problème que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

On note, dans tout le problème, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$.

3. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

   a. Montrer, pour tout $p \in \mathbf{N}$: $I_{2p+1} = 0$.

   b. Montrer, pour tout $p \in \mathbf{N}$: $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$.

I. Recherche d'extremums pour une fonction de deux variables réelles

On note $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, par :

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2}\,dt.$$

4. Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$: $F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2$.

5. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de $\mathbf{R}^2$, et en déduire les trois points critiques de F.

6. Déterminer si ces points critiques correspondent ou non à des extremums de F. On pourra à cet effet essayer d'écrire $F(x, y) = \left(xy + \frac{1}{2}\right)^2 + g(x, y) + \alpha$, où $g(x, y)$ est une fonction positive sur $\mathbf{R}^2$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.

II. Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

7. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \cos(xt)te^{-t^2}\,dt$ convergent.

On note $S : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $C : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}\,dt \text{ et } C(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)te^{-t^2}\,dt.$$

8. Établir, pour tout $a \in \mathbf{R}$, et tout $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$|\sin(a+\lambda) - \sin a - \lambda\cos a| \leqslant \frac{\lambda^2}{2}.$$

   On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

9. a. Démontrer, pour tout $x \in \mathbf{R}$: $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

b. En déduire que S est dérivable sur $\mathbf{R}$, et que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $S'(x) = C(x)$.

10. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $x \in \mathbf{R}$: $C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}S(x)$.

b. Montrer, pour tout $x \in \mathbf{R}$: $2e^{\frac{x^2}{4}}S(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt$.

c. En déduire, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$S(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt \text{ et } C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt.$$

III. Obtention d'un développement limité

11. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2}\,dt$ converge.

On note $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par : $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2}\,dt$.

12. **a.** Montrer, pour tout $u \in [0;+\infty[$: $0 \leqslant (1-u+u^2) - \dfrac{1}{1+u} \leqslant u^3$.

b. En déduire, pour tout $x \in \mathbf{R}$: $0 \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2}\,dt - g(x) \leqslant \frac{15\sqrt{\pi}}{8}x^6$.

13. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

IV. Nature d'une série

14. Montrer que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2}\,dt$ converge.

On note, pour tout $p \in \mathbf{N}$: $u_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2}\,dt$.

15. Montrer, pour tout $p \in \mathbf{N}$: $0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{I_{2p}}{(2p)!}$.

En déduire que la série de terme général u_p est convergente.

Problème 2

Sujet : Matrices compagnon | Moyen

Abordable en première année : ✗ | **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire, diagonalisation.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n, la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
On considère un n-uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de $\mathbf{C}^n$ et le polynôme : $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.

On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

On dit que C est la matrice compagnon du polynôme P.
On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{C}^n$.
On note id l'application identité de $\mathbf{C}^n$ et on appelle f l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ tel que C soit la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_0$.
On note $f^0 = \text{id}$ et, pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

1. **a.** Exprimer, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1}.

b. En déduire : $\forall j \in [\![1, n-1]\!], f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \dots + a_{n-1}e_n)$.

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0\text{id}$.

a. Vérifier : $g(e_1) = 0$.

b. Montrer : $\forall i \in \mathbf{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.

c. En déduire : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $g(e_i) = 0$.

d. Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f.
Application 1 : Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbf{C})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.

e. Établir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P.

3. **a.** Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$.
On note $Q(f)$ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ défini par $Q(f) = \alpha_0 \mathrm{id} + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1}f^{n-1}$.
Calculer $Q(f)(e_1)$.

b. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$ et annulateur de f.

c. Soit λ une racine du polynôme P. Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P = (X-\lambda)R$.
Vérifier que $(f - \lambda \mathrm{id}) \circ R(f) = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ est l'endomorphisme nul de $\mathbf{C}^n$.

d. Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C.

4. **a.** Montrer que, pour tout nombre complexe x, la matrice $(C - xI_n)$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$. En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.

b. En déduire que C est diagonalisable si et seulement si P admet n racines deux à deux distinctes.

5. **a.** *Application 2* : Montrer que la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbf{C})$ est diagonalisable.

b. *Application 3* : Montrer que la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbf{C})$ n'est pas diagonalisable.

6. On note $B = {}^tC$ la matrice transposée de C.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe t, la matrice $(B - tI_n)$ est inversible si et seulement si la matrice $(C - tI_n)$ est inversible.

b. En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.

c. Soit λ une valeur propre de B. Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ.

d. On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que B est diagonalisable et en déduire que la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible.

7. Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ deux à deux distinctes.
L'endomorphisme u est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés à $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

a. Soit $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ est une base de E.

b. Montrer qu'il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1.

EML 2006 : CORRIGÉ

PROBLÈME 1

Préliminaires

1.a. Posons $T = t^2$. Alors $T \to \infty$ lorsque $t \to +\infty$, et $t^{n+2}e^{-t^2} = T^{\frac{n+1}{2}}e^{-T} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ceci prouve bien que $t^n e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

> **Rédaction** Une réponse du type «la limite est nulle par croissances comparées» ne saurait suffire. En effet, dans le cours, on ne trouve pas la limite de $t^n e^{-t^2}$ mais de $t^\alpha e^{-t}$, limite que l'on fait apparaître grâce au changement de variable.

1.b. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est soit paire soit impaire (suivant la parité de n), mais dans les deux cas on sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge.

La fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $[0;+\infty[$, donc le seul problème de convergence est en $+\infty$. D'après la question précédente, $t^n e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$, qui est convergente, $\int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge et donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt \text{ converge.}}$

2. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$. Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $P(t)e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k e^{-t^2}$, et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2} dt$ converge car somme d'intégrales convergentes.

3. Procédons à une intégration par parties sur le segment $[-A, A]$, $A > 0$ en posant $u(t) = -\frac{e^{-t^2}}{2}$, et $v(t) = t^{n+1}$, qui sont bien de classe $\mathscr{C}^1$, de sorte que

$$\int_{-A}^{A} t^{n+2}e^{-t^2} dt = \left[-t^{n+1}\frac{e^{-t^2}}{2}\right]_{-A}^{A} + \frac{n+1}{2}\int_{-A}^{A} t^n e^{-t^2} dt = e^{-A^2}\left(\frac{(-A)^{n+1} - A^{n+1}}{2}\right) + (n+1)\int_{-A}^{A} t^n e^{-t^2} dt.$$

Puisque l'intégrale I_n converge, alors $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} t^n e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = I_n$, et de même pour I_{n+2}.

De plus, par croissances comparées, $\lim_{A\to+\infty} A^{n+1}e^{-A^2} = \lim_{A\to+\infty} (-A)^{n+1}e^{-A^2} = 0$, et donc en passant à la limite dans l'égalité précédente, il vient

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n.}$$

3.a. Si $p \in \mathbf{N}$, alors la fonction $t \mapsto t^{2p+1}e^{-t^2}$ est impaire sur $\mathbf{R}$, et d'intégrale convergente, de sorte que

$$\boxed{I_{2p+1} = 0.}$$

> **Convergence** Rappelons que même pour une fonction impair, il est indispensable de vérifier que l'intégrale converge avant d'affirmer qu'elle est nulle (une intégrale qui diverge n'a pas de valeur, et donc ne peut valoir 0).

3.b. Prouvons par récurrence que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$.

Nous avons admis que $I_0 = \sqrt{\pi}$, et donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons que $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$. Alors

$$I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2} I_{2p} = \frac{(2p+1)}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2p+2)}\frac{(2p)!}{2^{2p+1}p!}\sqrt{\pi} = \frac{(2p+2)!}{2(p+1)2^{2p+1}p!}\sqrt{\pi} = \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!}\sqrt{\pi}.$$

Ainsi, la formule reste vraie au rang $p+1$, et par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{N},\ I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}.}$$

I. Recherche d'extremums pour une fonction de deux variables réelles

4. Développons les carrés : $\forall t \in \mathbf{R}$,

$$(t-x)^2(t-y)^2 = (t^2-2xt+x^2)(t^2-2yt+y^2) = t^4-2t^3y+t^2y^2-2xt^3+4xyt^2-2xy^2t+x^2t^2-2yx^2t^2+x^2y^2.$$

En multipliant par $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$ et en intégrant[1], il vient

[1] Toutes les intégrales en question sont convergentes.

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(I_4 - 2yI_3 + y^2I_2 - 2xI_3 + 4xyI_2 - 2xy^2I_1 + x^2I_2 - 2x^2yI_2 + x^2y^2I_0\right).$$

Or, nous savons que $I_0 = \sqrt{\pi}, I_1 = I_3 = 0, I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $I_4 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$, et donc

$$\boxed{F(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(x^2+4xy+y^2\right) + x^2y^2.}$$

5. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ car polynomiale, et on a

$$\partial_1 F(x,y) = x + 2y + 2xy^2, \partial_2 F(x,y) = 2x + y + 2yx^2.$$

Ainsi, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ est un point critique de F si et seulement si

$$\begin{cases} x(1+2y^2)+2y = 0 \\ y(1+2x^2)+2x = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la seconde ligne à la première, il vient par linéarité de l'intégrale :

$$y - x + 2xy(y-x) = 0 \Leftrightarrow (y-x)(1+2xy) = 0.$$

Donc soit $x = y$, soit $2xy = -1$.
Si $x = y$, alors la première équation devient $3x+3x^3 = 0 \Leftrightarrow 3x(1+x^2) = 0$, donc $x = y = 0$.
Si $2xy = -1$, alors $x \neq 0$, et donc $y = -\frac{1}{2x}$. La seconde équation du système se réécrit alors

$$2x - \frac{1}{2x} - x = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2-1-2x^2}{2x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0$$

et donc $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Nous obtenons donc deux nouveaux points critiques : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Ainsi, F admet bien trois points critiques qui sont :

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ et } (0,0).}$$

6. On a

$$F(0,0) = \frac{3}{4} \text{ et } F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

De plus, on a $F(x,x) = \frac{3}{4} + 3x^2 + x^4 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc F n'admet pas de maximum.
Nous pouvons facilement conclure que $\frac{3}{4}$ n'est pas non plus un minimum puisque $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{4}$.
Reste à étudier si $\frac{1}{2}$ est un minimum de F. Mais

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ F(x,y) = \underbrace{\left(xy+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(x+y)^2}_{\geqslant 0} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Donc $\boxed{\frac{1}{2} \text{ est bien le minimum de } F\text{, atteint en } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ et } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).}$

Remarque

La somme de carrés s'annule si et seulement si on à la fois $xy = \frac{1}{2} = 0$ et $x + y = 0$, ce qui est le cas uniquement pour

$$(x,y) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

On retrouve ainsi les deux points où F atteint son minimum, et si l'on dispose dès le départ de l'écriture de F comme somme de carrés, il est inutile de calculer le gradient de F.
Toutefois, il semble peu probable de deviner sans indications qu'une telle écriture de F est possible...

II. Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

7. Soit $x \in \mathbf{R}$. Les fonctions $t \mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$ et $t \mapsto \cos(xt)te^{-t^2}$ sont continues sur $[0, +\infty[$, donc le seul problème de convergence est au voisinage de $+\infty$.
De plus, on a $\forall t \in [0, +\infty[$,

$$|\sin(xt)e^{-t^2}| \leqslant e^{-t^2} \text{ et } |\cos(xt)te^{-t^2}| \leqslant te^{-t^2}.$$

Puisque $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ et $\int_0^\infty te^{-t^2}\,dt$ convergent, alors

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)te^{-t^2}\,dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}\,dt$$

sont absolument convergentes, et par conséquent sont convergentes.

8. Soit $f : t \mapsto \sin t$, qui est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$.
Alors $f'(t) = \cos(t)$ et $f''(t) = -\sin(t)$, de sorte que $\sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |f''(t)| = 1$.
L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à f au point a donne

$$\forall \lambda \in \mathbf{R},\ |f(a+\lambda) - f(a) - \lambda f'(a)| \leqslant \frac{\sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |f''(t)|}{2!}\lambda^2 \leqslant \boxed{\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Majorant

L'inégalité de Taylor-Lagrange nécessite **un** majorant de $|f''|$ sur $[a, a+\lambda]$. Si f'' est bornée sur $\mathbf{R}$, on peut alors prendre un majorant de f'' sur $\mathbf{R}$, qui n'est peut-être pas le meilleur majorant de $|f''|$ sur $[a, a+\lambda]$ mais qui ici nous suffit.

9.a. Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. Alors

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin(xt+ht) - \sin(xt)}{h} - t\cos(xt)\right)e^{-t^2}\,dt.$$

Or, d'après la question précédente,

$$\forall (t,h) \in \mathbf{R}^2,\ |\sin(xt+ht) - \sin(xt) - ht\cos(xt)| \leqslant \frac{h^2t^2}{2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\left|\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x)\right| &\leqslant \int_0^\infty \left|\frac{\sin(xt+xh) - \sin(xt) - ht\cos(xt)}{h}\right| e^{-t^2} dt \\ &\leqslant \int_0^\infty \frac{h^2t^2}{2h} e^{-t^2} dt \\ &\leqslant \frac{h}{2} I_2.\end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite lorsque $h \to 0$, il vient, par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) = 0.}$$

9.b. On déduit de la question précédente que pour $x \in \mathbf{R}$ fixé

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = C(x).$$

Ceci signifie bien que S est dérivable en x, de dérivée égale à $C(x)$.

10.a. Soit $A > 0$. Alors procédons à une intégration par parties sur le segment $[0, A]$, avec $u = \cos(xt)$, $v(t) = -\frac{e^{-t^2}}{2}$, qui sont bien de classe $\mathscr{C}^1$:

$$\int_0^A \cos(xt)te^{-t^2}\,dt = \left[-\cos(xt)\frac{e^{-t^2}}{2}\right]_0^A - \int_0^A x\sin(xt)\frac{e^{-t^2}}{2}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{e^{-A^2}}{2}\cos(xA) - \frac{x}{2}\int_0^A \sin(xt)e^{-t^2}\,dt.$$

En passant à la limite lorsque $A \to +\infty$, alors $e^{-A^2} \to 0$, et donc $|e^{-A^2}\cos(xA)| \leqslant e^{-A^2} \to 0$.
Il vient alors

$$C(x) = \int_0^\infty \cos(xt)te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\int_0^\infty \sin(xt)e^{-t^2}\,dt = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x).}$$

10.b. Nous savons que $x \mapsto \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt$ est l'unique primitive de $t \mapsto e^{\frac{t^2}{4}}$ qui s'annule en 0.

La fonction $x \mapsto 2e^{\frac{x^2}{4}}S(x)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée égale à

$$xe^{\frac{x^2}{4}}S(x) + 2e^{\frac{x^2}{4}}S'(x) = 2e^{\frac{x^2}{4}}\left(\frac{x}{2}S(x) + \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)\right) = e^{\frac{x^2}{4}}.$$

De plus, on a $2e^{0^2/4}S(0) = 0$ car $S(0) = 0$ (c'est l'intégrale de la fonction nulle).

Donc $x \mapsto 2e^{\frac{x^2}{4}}S(x)$ est également une primitive de $t \mapsto e^{\frac{t^2}{4}}$ et s'annule également en 0, de sorte que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ 2e^{\frac{x^2}{4}}S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt$$

10.c. En divisant la relation obtenue à la question précédente par $e^{\frac{x^2}{4}}$, on obtient

$$\boxed{S(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt.}$$

Et en remplaçant $S(x)$ par l'expression que nous venons d'obtenir dans la relation $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)$, il vient

$$\boxed{C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt.}$$

III. Obtention d'un développement limité

11. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbf{R}$, et elle y est paire.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2}\,dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2}\,dt$ converge.

Or, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{t^2}{1+x^2t^2}e^{-t^2} \sim \dfrac{t^2}{x^2t^2}e^{-t^2} \sim \dfrac{e^{-t^2}}{x^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $\dfrac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, et donc[2]

$$\boxed{\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2}dt \text{ et } \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2}dt \text{ convergent.}}$$

[2] Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente.

12.a. On a, pour tout $u \in [0;+\infty[$,

$$1 - u + u^2 - \frac{1}{1+u} = \frac{1+u-u-u^2+u^2+u^3-1}{1+u} = \frac{u^3}{1+u}.$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\forall u \in [0;+\infty[,\ 0 \leqslant 1 - u + u^2 - \frac{1}{1+u} \leqslant u^3.}$$

12.b. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, en posant $u = t^2x^2$, on a

$$0 \leqslant 1 - t^2x^2 + t^4x^4 - \frac{1}{1+x^2t^2} \leqslant x^6t^6.$$

et donc

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall t \in \mathbf{R}_+,\ 0 \leqslant \left(1 - t^2x^2 + t^4x^4 - \frac{1}{1+x^2t^2}\right)e^{-t^2} \leqslant x^6t^6e^{-t^2}.$$

Par croissance de l'intégrale[3], il vient alors

$$0 \leqslant \int_0^{\infty}\left(1 - x^2t^2 + x^4t^- \frac{1}{1+x^2t^2}\right)e^{-t^2}\,dt \leqslant \int_0^{\infty}x^6t^6e^{-t^2}\,dt$$

soit

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^{\infty}(1 - x^2t^2 + x^4t^4)e^{-t^2}dt - g(x) \leqslant I_6x^6 = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}x^6.}$$

[3] Toutes les intégrales en jeu convergent.

13. Nous venons de prouver que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ 0 \leqslant I_0 - I_2x^2 + I_4x^4 - g(x) \leqslant \frac{15\sqrt{\pi}}{8}x^6.$$

Ainsi, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(I_0 - I_2x^2 + I_4x^4 - g(x)\right) = 0$$

et donc

$$I_0 - I_2x^2 + I_4x^4 - g(x) = o(x^5).$$

On en déduit que le développement limité de g à l'ordre 5 en 0 est :

$$\boxed{g(x) = I_0 - I_2x^2 + I_4x^4 + o(x^5) = \sqrt{\pi}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^4\right) + o(x^5).}$$

> **Unicité du DL**
> Par définition, un développement limité de g à l'ordre 5 en 0 est, si un telle expression existe,
> $$g(x) = P(x) + o(x^5)$$
> où $P \in \mathbf{R}_5[X]$.
> Nous venons de trouver une telle expression, et une propriété du cours garantit alors qu'elle est unique. Nous avons donc bien **le** développement limité de g à l'ordre 5.

IV. Nature d'une série

14. La fonction $t \mapsto \dfrac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbf{R}$, elle y est positive et paire, donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2}\,dt \text{ converge si et seulement si } \int_0^{\infty} \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2}\,dt \text{ converge.}$$

Or, au voisinage de $+\infty$, on a $\dfrac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{2(p-1)}e^{-t^2}$.
Donc pour $p \geqslant 1$, l'intégrale converge car $I_{2(p-1)}$ converge.
Pour $p = 0$, on a $\dfrac{t^2}{t^2+1}e^{-t^2} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc

$$\frac{1}{1+t^2}e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Puisque l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}e^{-t^2}dt$ et donc

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}e^{-t^2}dt \text{ converge.}}$$

15. Soit $p \in \mathbf{N}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $(2p)! + t^2 \geqslant (2p)! \geqslant 0$, et donc $0 \leqslant \dfrac{1}{t^2+(2p)!} \leqslant \dfrac{1}{(2p)!}$.
Et ainsi,

$$\forall t \in \mathbf{R},\ 0 \leqslant \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}e^{-t^2} \leqslant \frac{t^{2p}}{(2p)!}e^{-t^2}$$

de sorte que, par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{0 \leqslant u_p \leqslant \frac{I_{2p}}{(2p)!}.}$$

On a alors

$$0 \leqslant u_p \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p}p!} \leqslant \sqrt{\pi}\frac{1}{4^p}.$$

Mais la série de terme général $\dfrac{1}{4^p}$ est une série géométrique convergente[4], et donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

[4] Car de raison $\frac{1}{4}$.

Problème 2

1.a. Les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base canonique se lisent sur la i-ème colonne de C, et donc $f(e_i) = 0 + \cdots + e_{i+1} + 0 + \cdots + 0 = \boxed{e_{i+1}.}$

1.b. On a $f(e_1) = e_2, f^2(e_1) = f(f(e_1)) = f(e_2) = e_3, \dots$.
De proche en proche[5], on prouve ainsi que pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, $\boxed{f^j(e_1) = e_{j+1}.}$
Et alors, on a

$$f^n(e_1) = f(f^{n-1}(e_1)) = f(e_n) = \boxed{-(a_0e_1 + a_1e_2 + \cdots + a_{n-1}e_n).}$$

[5] Ou mieux : par une récurrence finie sur j.

Détails
Il suffit de lire la dernière colonne de C.

2.a. On a, en posant $a_n = 1$,

$$g(e_1) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k(e_1) = f^n(e_1) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(e_1) = -\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}e_k\right) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1} = \boxed{0.}$$

2.b. f et g sont tous deux des polynômes en f. Et donc ils commutent : $\boxed{f^i \circ g = g \circ f^i.}$

2.c. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Si $i = 1$, nous avons déjà prouvé que $g(e_1) = 0$.
Si $i > 1$, alors $e_i = f^{i-1}(e_1)$, et alors

$$g(e_i) = g(f^{i-1})(e_1) = f^{i-1}(g(e_1)) = f^{i-1}(0) = \boxed{0.}$$

2.d. Nous venons de montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $g(e_i) = 0$.
Alors si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathbf{C}^n$, on a, par linéarité de g,

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \times 0 = 0.$$

Alternative
Puisque tous les $g(e_i)$ sont nuls, la matrice de g dans la base $\mathscr{B}_0$ est la matrice nulle. Et donc $g = 0$.

Donc g est l'endomorphisme nul.
Or, $g = P(f)$, et donc $\boxed{P \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$
Posons $P = X^5 - X^3 - 2X^2 - 1$.

Alors, nous savons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est annulée par le polynôme P.

On a donc

$$A^5 - A^3 - 2A^2 - I_5 = 0 \Leftrightarrow A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5.$$

Remarque
Cette méthode permet facilement de construire des matrices dont un polynôme annulateur est fixé. Il faut toutefois que le degré du polynôme annulateur soit égal à la taille de la matrice (même si la méthode peut s'adapter dans un cadre plus général).

2.e. Les valeurs propres de C sont nécessairement des racines de tout polynôme annulateur, et en particulier de P.

3.a. En utilisant le résultat de la question 1, il vient

$$Q(f)(e_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(e_1) = \boxed{\alpha_0 e_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_{k+1}.}$$

3.b. Si $Q \neq 0$, alors l'un des α_i est non nul. Et alors $Q(f)(e_1)$ est non nul car il s'agit d'une combinaison linéaire des e_i, à coefficients non tous nuls.
Et donc il n'existe pas de polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $Q(f)(e_1) = 0$, et a fortiori, pas de tel polynôme tel que $Q(f) = 0$.

Comb. linéaire
La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base donc elle est libre. Ainsi, la seule combinaison linéaire des e_i qui est nulle est celle dont tous les coefficients sont nuls.

3.c. P est annulateur de f, donc $P(f) = \tilde{0}$.
Mais d'autre part, $P(f) = ((X - \lambda)R)(f) = (f - \lambda \mathrm{id}) \circ R(f)$.
Donc $\boxed{(f - \lambda \mathrm{id}) \circ R(f) = \tilde{0}.}$

3.d. Supposons que l'une des racines[6] λ de P ne soit pas valeur propre de f.
Alors $(f - \lambda \mathrm{id})$ est inversible.
Et, comme à la question précédente, il existe un unique polynôme $R \in \mathbf{C}[X]$ tel que

[6] Complexe.

$P = (X-\lambda)Q$. Ce polynôme Q est alors de degré $n-1$ et est non nul car $P \neq 0$.
On a alors $(f-\lambda \mathrm{id}) \circ R(f) = \tilde{0}$.
En composant cette relation à gauche par $(f-\lambda \mathrm{id})^{-1}$, il vient $R(f) = \tilde{0}$, ce qui contredit le résultat de la question 3.b.
Donc $\boxed{\text{toutes les racines de } P \text{ sont des valeurs propres de } f.}$

Autrement dit
En combinant le résultat ce cette question à celui de la question 2.e, on remarque que les valeurs propres de f sont exactement les racines de P.

4.a. On a $C - xI_n = \begin{pmatrix} -x & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & -x & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1}-x \end{pmatrix}$.
Les $n-1$ premières colonnes de cette matrice forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, ce qui se voit aisément à l'aide de la position des coefficients nuls.
Donc l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de $C - xI_n$ est de dimension au moins $n-1$ et donc $\boxed{\mathrm{rg}(C - xI_n) \geqslant n-1.}$
Si λ est une valeur propre[7] de C, on a alors $\dim E_\lambda(C) = n - \mathrm{rg}(C-\lambda I_n) \leqslant 1$.
Puisque d'autre part, on a $\dim E_\lambda(C) \geqslant 1$ par définition d'une valeur propre, on en déduit que $\dim E_\lambda(C) = 1$: $\boxed{\text{tous les sous-espaces propres de } C \text{ sont de dimension 1.}}$

[7] Complexe.

4.b. Notons r le nombre de racines distinctes de P, avec $1 \leqslant r \leqslant n$.
D'après 3.d et 4.a, la somme des dimensions des sous-espaces propres de C est égale au nombre de valeurs propres distinctes de C, c'est-à-dire à r.
Et donc C est diagonalisable[8] si et seulement si $r = n$, c'est-à-dire si et seulement si P possède n racines deux à deux distinctes.

[8] Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

5.a. *Application 2* : A_1 est la matrice compagnon du polynôme $P_1 = X^4 - 1$. Ce polynôme possède quatre racines distinctes, qui sont $1, -1, i$ et $-i$.
Donc $\boxed{A_1 \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_4(\mathbf{C}).}$

5.b. *Application 3* : A_2 est la matrice compagnon du polynôme $P_2 = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4$.
1 est une racine évidente de P_2, et $P_2' = 4X^3 - 6X^2 - 6X + 8$ possède également 1 pour racine. Donc P_2 est une racine double[9] de P_2, qui ne possède donc au plus que trois racines distinctes : $\boxed{A_2 \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

[9] Et peut-être même une racine triple, mais il n'est pas utile de le vérifier.

6.a. La matrice $B - tI_n$ est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(B - tI_n) = n$.
Or, $\mathrm{rg}(B - tI_n) = \mathrm{rg}({}^tC - tI_n) = \mathrm{rg}({}^t(C - tI_n)) = \mathrm{rg}(C - tI_n)$, et donc $B - tI_n$ est inversible si et seulement si $C - tI_n$ l'est.

Rang
Rappelons que le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

6.b. $\lambda \in \mathbf{C}$ est valeur propre de B si et seulement si $B - \lambda I_n$ est inversible.
Donc si et seulement si $C - \lambda I_n$ est inversible, c'est-à-dire si et seulement si λ est valeur propre de C.
Ainsi, $\boxed{B \text{ et } C \text{ possèdent les mêmes valeurs propres.}}$

6.c. Un vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ est dans $E_\lambda(B)$ si et seulement si

$$B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

La seconde égalité est la transposée de la première.

Soit encore

$$\begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ x_3 & = \lambda x_2 \\ & \vdots \\ x_n & = \lambda x_{n-1} \\ -a_0x_1 & -a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ x_3 & = \lambda^2 x_1 \\ & \vdots \\ x_n & = \lambda^{n-1} x_1 \\ -a_0x_1 & -a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n = \lambda^{n-1} x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ P(\lambda)x_1 = 0 \end{cases}$$

La dernière équation est automatiquement vérifiée d'après 3.e.

Et donc $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\text{une base de } E_\lambda(C) \text{ est } \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}}$.

6.d. Puisque P possède n racines distinctes, C possède n valeurs propres distinctes, et donc c'est également le cas de B qui est alors diagonalisable.
Une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ formée de vecteurs propres de B est alors obtenue par concaténation de bases des sous-espaces propres, et par la question précédente, une telle base est

$$\boxed{\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2^2 \\ \vdots \\ \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_n \\ \lambda_n^2 \\ \vdots \\ \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \right).}$$

La matrice V est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ à la base $\mathscr{B}$, et donc est inversible[10].

[10] Comme toute matrice de passage.

7.a. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et tout $j \in \mathbf{N}$, on a $u^j(\varepsilon_i) = \mu_i^j \varepsilon_i$. Et donc $u^j(a) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^j \varepsilon_i$.

Ainsi la matrice de la famille $(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ dans la base $\mathscr{E}$ est la matrice

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & u(a) & \dots & u^{n-1}(a) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} = V.$$

Puisque V est inversible, $\boxed{\mathscr{B}_a \text{ est alors une base de } E.}$

7.b. La matrice de u dans la base $\mathscr{B}_a$ possède nécessairement les $n-1$ mêmes premières colonnes qu'une matrice compagnon car $u(a) = u(a)$, $u(u(a)) = u^2(a), \dots$.
De plus, il existe une unique famille $(b_0, \dots, b_{n-1})$ de complexes telle que

$$u^n(a) = -b_0 a - b_1 u(a) - \cdots - b_{n-1} u^{n-1}(a).$$

Et alors, la dernière colonne de la matrice de u dans la base $\mathscr{B}_a$ est $\begin{pmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

La matrice de u dans la base $\mathscr{B}_a$ est donc la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u(a) & u^2(a) & \dots & \dots & u^{n-1}(a) & u^n(a) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2}a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} a \\ u(a) \\ \vdots \\ \vdots \\ u^{n-2}(a) \\ u^{n-1}(a) \end{array}.$$

On reconnaît alors la matrice compagnon associée au polynôme $\boxed{P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_0.}$

EML 2005

Problème 1

Sujet : Polynômes de Tchebychev de seconde espèce

Moyen

Abordable en première année : ✓ (Partie I) **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : polynômes, fonctions trigonométriques, diagonalisation, endomorphismes symétriques

Modifications apportées au sujet d'origine : ajout de questions intermédiaires de trigonométries.

On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = 2X, \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 2,\ T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

On pourra confondre polynôme et fonction fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel x,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

Partie I : Étude de la suite de polynômes $(T_n)n \in \mathbf{N}$.

1. Calculer T_2 et T_3.
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n, dont on déterminera le coefficient du terme de degré n.

   b. Établir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).
3. Calculer, pour tout entier naturel n, $T_n(1)$ en fonction de n.
4. a. Établir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0,\pi[$: $T_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $]-1,1[$, que l'on explicitera.

   c. Établir, pour tout entier naturel non nul n : $T_n = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

   d. En déduire, pour tout entier naturel non nul n, la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n.
5. a. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0,\pi[$:

$$\sin^2\theta T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta T_n'(\cos\theta) + (n^2+2n)T_n(\cos\theta) = 0.$$

   Indication : on pourra dériver deux fois la fonction (nulle) : $\theta \mapsto \sin\theta T_n(\cos\theta) - \sin((n+1)\theta)$.

   b. En déduire, pour tout entier naturel n :

$$(X^2-1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2+2n)T_n = 0.$$

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel fixé tel que $n \geqslant 2$, et on note E l'espace vectoriel réel des polynômes de $\mathbf{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.
On note L l'application qui, à un polynôme P de E, associe le polynôme $L(P)$ défini par :

$$L(P) = (X^2-1)P'' + 3XP'.$$

Partie II : Étude de l'endomorphisme L.

6. Montrer que L est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.
7. a. Calculer $L(T_k)$ pour tout k de $[\![0,n]\!]$.

   b. En déduire les valeurs propres de L et, pour chaque valeur propre de L, une base et la dimension du sous-espace propre associé.

Partie III : Étude d'un produit scalaire.

Dans la suite du problème, on note φ l'application qui, à un couple (P, Q) de polynômes de E, associe le réel $\varphi(P, Q)$ défini par :

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} P(x) Q(x)\, dx.$$

8. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
9. Démontrer, pour tous polynômes P, Q de E :

$$\varphi(L(P), Q) = \varphi(P, L(Q)).$$

Indication : on pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\varphi(L(P), Q) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} P'(x) Q'(x)\, dx.$$

10. Établir que $(T_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthogonale de E.

Problème 2

Sujet : Calcul de $\zeta(2)$ et étude d'une fonction définie par une série. **Difficile**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : nombres complexes et trigonométrie, séries numériques.

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : la première partie demande de l'aisance en calcul, notamment sur les complexes et la trigonométrie. La seconde partie est très typique des problèmes de Lyon.

Partie I : Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt)\, dt = \frac{1}{n^2}$.
2. Établir, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $t \in]0, \pi]$:

$$\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} = \frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} e^{i\frac{(m+1)t}{2}}, \text{ puis } \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

3. Soit $u : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\int_0^{\pi} u(t) \sin(\lambda t)\, dt \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. Soit l'application $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin \frac{t}{2}} \text{ si } t \in]0, \pi] \text{ et } f(0) = -1.$$

   a. Montrer que f est continue sur $[0, \pi]$.
   b. Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
   c. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5. a. Pour $a, b \in \mathbf{R}$, exprimer $\sin(a + b)$ et $\sin(a - b)$ en fonction de $\cos a, \sin a, \cos b$ et $\sin b$. En déduire l'expression de $\sin a \cos b$ en fonction de $\sin(a + b)$ et $\sin(a - b)$.

   b. Montrer : $\forall m \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin \frac{(2m + 1)t}{2}\, dt$.

   c. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$, et montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente.

6. a. Montrer que, pour tout couple $(x,y)\in(\mathbf{R}_+^*)^2$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

   b. Montrer que, pour tout $x\in[0,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)$ converge.

On note S l'application définie, pour tout $x\in[0,+\infty[$ par $\displaystyle S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)$.

7. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

8. a. Établir, pour tous $(x,y)\in(\mathbf{R}_+)^2$, $\quad \displaystyle S(y)-S(x)=(y-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

   b. En déduire : $\forall(x,y)\in(\mathbf{R}_+)^2,\quad |S(x)-S(y)|\leqslant\dfrac{\pi^2}{6}|y-x|$.

   c. Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0,+\infty[$.

9. a. Montrer, pour tout couple $(x,y)\in(\mathbf{R}_+)^2$ tel que $x\neq y$:

$$\left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right|\leqslant|y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

   b. En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que :

$$\forall x\in[0,+\infty[,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.$$

   c. Préciser les valeurs de $S'(0)$ et de $S'(1)$.

10. On admet que S est $\mathscr{C}^1$. Montrer que S est concave.

11. Soit $x\in]0,+\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par

$$\forall t\in[1,+\infty[,\varphi(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}.$$

   a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt$ converge et calculer sa valeur.

   b. Montrer : $\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad \displaystyle\varphi(n+1)\leqslant\int_n^{n+1}\varphi(t)\,dt\leqslant\varphi(n)$, et en déduire :

$$\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt\leqslant S(x)\leqslant 1+\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,dt.$$

   c. Conclure : $S(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln(x+1)$.
   En déduire que $S(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln(x)$.

12. a. Dresser le tableau de variations de S, en précisant la limite de S en $+\infty$.

   b. Tracer l'allure de la courbe représentative de S.

EML 2005 : CORRIGÉ

PROBLÈME 1

Partie I : Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

1. On a $T_2 = 2XT_1 - T0 = \boxed{4X^2-1}$ et

$$T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(4X^2-1) - 2X = \boxed{8X^3-4X.}$$

2.a. Au vu des 4 premiers polynômes, il semble raisonnable de supposer que le coefficient dominant de T_n est 2^n.
Montrons donc par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$ que T_n est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est 2^n.
Il est clair que T_0 est un polynôme de degré 0 dont le coefficient dominant est $1 = 2^0$ et T_1 est un polynôme de degré 1 dont le coefficient dominant est $2 = 2^1$.
Supposons donc que T_n soit de degré n avec 2^n comme coefficient dominant et que T_{n+1} soit de degré $n+1$ avec 2^{n+1} comme coefficient dominant.
En particulier, $T_{n+1} = 2^{n+1}X^{n+1} + R_n$, avec $R_n \in \mathbf{R}_n[X]$.
Et alors $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n = 2^{n+2}X^{n+2} + \underbrace{2XR_n - T_n}_{\in\mathbf{R}_n[X]}$.
Ceci prouve bien que T_{n+2} est de degré $n+2$ et que son coefficient dominant est 2^{n+2}.
D'après le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbf{N}$, T_n est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est 2^n.

> **Méthode**
> Rappelons qu'une récurrence double est nécessaire lorsque, pour prouver qu'une propriété est vraie au rang $n+1$, il est nécessaire de la supposer vraie aux rangs n et $n-1$.
> Ici, T_{+1} est défini en fonction de T_n et de T_{n-1}, ce qui doit faire penser à une récurrence double.

2.b. Prouvons par récurrence double que T_n a même parité que n.
Il est clair que $T_0 = 1$ est pair, et $T_1 = 2X$ est impair.
Supposons donc que T_n et T_{n+1} soient respectivement de même parité que n et $n+1$.
Alors $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.
Si $n+2$ est pair : alors $n+1$ est impair et n est pair, de sorte que

$$T_{n+2}(-X) = -2XT_{n+1}(-X) - T_n(-X) = -2X\left(-T_{n+1}(X)\right) - T_n(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X) = T_{n+2}(X).$$

Et donc T_{n+2} est pair.
Si $n+2$ est impair : alors $n+1$ est pair et n est impair.
On a alors

$$T_{n+2}(-X) = -2XT_{n+1}(-X) - T_n(-X) = -2XT_{n+1}(X) + T_n(X) = -T_{n+2}(X)$$

et donc T_{n+2} est impair.
Dans les deux cas, T_{n+2} a même parité que $n+2$.
Par le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbf{N}$, T_n a même parité que n. **Remarque** : notons qu'il était possible d'éviter la distinction de cas en prouvant que pour tout n, $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.

> **Autrement dit**
> Nous souhaitons prouver que si n est un entier pair, alors la fonction $x \mapsto T_n(x)$ est une fonction paire, et que si n est un entier impair, c'est une fonction impaire.

> **Parité**
> Pour un polynôme, on peut montrer qu'il est pair (resp. impair) si et seulement si ses seuls coefficients non nuls sont de degré pair (resp. impair).

3. On a $T_0(1) = 1$, $T_1(1) = 2$, $T_3(1) = 3$, $T_4(1) = 4$.
Il semble donc légitime de supposer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T_n(1) = n+1$.
Montrons donc ceci par récurrence[1], la récurrence étant largement initialisée.
Supposons donc que $T_{n+1}(1) = n+2$ et $T_n(1) = n+1$.
Alors $T_{n+2}(1) = 2\times(n+2) - (n+1) = 2n+4-(n+1) = n+3 = (n+2)+1$.
Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ T_n(1) = n+1.}$

[1] Encore une fois, il s'agit d'une récurrence double.

4.a. Commençons par prouver la formule de trigonométrie indiquée dans l'énoncé : nous savons que $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ et que $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$. En ajoutant ces deux relations, il vient

$$\boxed{2\sin(a)\cos(b) = (\sin(a+b) + \sin(a-b)).}$$

Procédons, une fois n'est pas coutume, par récurrence double.
On a $T_0(\cos\theta) = 1 = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$ et $T_1(\cos\theta) = 2\cos\theta$.
D'autre part, on a

$$\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta \text{ et donc } \frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta} = 2\cos(\theta) = T_1(\cos\theta).$$

Ainsi, la récurrence est initialisée.
Supposons donc que $T_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$ et $T_{n+1}(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+2)\theta)}{\sin\theta}$.
Alors

$$T_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta\frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} = \frac{2\sin((n+2)\theta)\cos\theta - \sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.$$

Or, grâce à la relation précédente,

$$2\sin((n+2)\theta)\cos(\theta) = (\sin((n+3)\theta) + \sin((n+1)\theta)).$$

Et donc $T_{n+2}(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+3)\theta)}{\sin\theta}$.

Par le principe de récurrence, on a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\boxed{T_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}.}$

4.b. On a $\sin((n+1)\theta) = 0$ si et seulement si $(n+1)\theta = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
Soit si et seulement si $\theta = \dfrac{k\pi}{n+1}$, $k \in \mathbf{Z}$.
Pour $\theta \in]0,\pi[$, cela n'est possible que pour $\theta \in \left\{\dfrac{k\pi}{n+1}, k \in [\![1,n]\!]\right\}$.
Et donc, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $T_n\left(\cos\dfrac{k\pi}{n+1}\right) = \dfrac{\sin(k\pi)}{\sin\frac{k\pi}{n+1}} = 0$.
De plus, la fonction cos est strictement décroissante sur $]0,\pi[$, et en particulier injective, de sorte que les $\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$, $k \in [\![1,n]\!]$ sont deux à deux distincts.
Nous avons donc trouvé n racines distinctes de T_n, toutes dans l'intervalle $]-1,1[$.
Puisque T_n est de degré n, il possède au plus n racines réelles, et donc n'en possède pas d'autres que celles que nous venons de trouver.

> **Remarque**
> Même sans réussir à tenir ce raisonnement, il n'était pas difficile de deviner les racines de T_n en regardant la question suivante.
> Et dans ce cas, il ne restait qu'à vérifier que les $\frac{k\pi}{n+1}$ sont bien des racines de T_n.

4.c. Puisque T_n possède les $\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$ comme racines, il se factorise par $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right)$: il existe donc un polynôme Q_n tel que

$$T_n = Q_n \times \prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Un argument de degré prouve alors que $\deg Q_n = 0$, c'est-à-dire que Q_n est constant.
Enfin, par identification des coefficients dominants, on trouve $Q_n = 2^n$, de sorte que

$$\boxed{T_n = 2^n\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right).}$$

4.d. Nous savons que $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.
Et donc $\boxed{\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}.}$
En particulier, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Et puisque $\sin\dfrac{k\pi}{2(n+1)} \geqslant 0$, il vient donc

$$\sin\frac{k\pi}{2(n+1)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n+1}\right)}.$$

En multipliant ces relations pour k allant de 1 à n, il vient

$$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2(n+1)} = \sqrt{\frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n+1}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^n}\frac{T_n(1)}{2^n}}$$
$$= \frac{1}{2^n}\sqrt{n+1}.$$

C'est la factorisation de T_n de la question 4.c.

5.a. Suivons l'indication et dérivons la fonction $\theta \mapsto \sin(\theta)T_n(\cos\theta) - \sin((n+1)\theta)$, qui est nulle d'après la question 4.a. Il vient alors

$$\cos(\theta)T_n(\cos\theta) - \sin^2(\theta)T_n'(\cos\theta) - (n+1)\cos((n+1)\theta) = 0.$$

Puis en dérivant de nouveau,

$$-\sin(\theta)T_n(\cos\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta)T_n'(\cos\theta) - 2\sin(\theta)\cos(\theta)T_n'(\cos\theta) + \sin^3(\theta)T_n''(\cos\theta) + (n+1)^2\sin((n+1)\theta) = 0.$$

Mais $\sin((n+1)\theta) = \sin(\theta)T_n(\cos\theta)$, de sorte que cette relation devient, après division par $\sin\theta \neq 0$: $\sin^2(\theta)T_n''(\cos\theta) - 3\cos(\theta)T_n'(\cos\theta) + \left((n+1)^2 - 1\right)T_n(\cos\theta) = 0$.
Soit encore $\boxed{\sin^2(\theta)T_n''(\cos\theta) - 3\cos(\theta)T_n'(\cos\theta) + \left(n^2+2n\right)T_n(\cos\theta) = 0.}$

5.b. D'après ce qui précède, pour tout $\theta \in]0,\pi[$, on a

$$\Big(\underbrace{1-\cos^2\theta}_{=\sin^2\theta}\Big)T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta T_n'(\cos\theta) + (n^2+2n)T_n(\cos\theta) = 0.$$

Soit encore $(\cos^2\theta - 1)T_n''(\cos\theta) + 3\cos\theta T_n'(\cos\theta) - (n^2+2n)T_n(\cos\theta) = 0$.
Or, la fonction $\theta \mapsto \cos\theta$ réalise une bijection de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$, de sorte que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(x^2-1)T_n''(x) + 3xT_n'(x) - (n^2+2n)T_n(x) = 0.$$

Ainsi, le polynôme $(X^2-1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2+2n)T_n$ possède une infinité de racines, et donc est le polynôme nul :

$$\boxed{(X^2-1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2+2n)T_n = 0.}$$

Bijection
Nous utilisons en fait que l'aspect surjectif du cosinus : tout réel $x \in]-1,1[$ s'écrit sous la forme $x = \cos(\theta)$, avec $\theta \in]0,\pi[$, de sorte qu'on peut utiliser la question précédente.

Partie II : Étude de l'endomorphisme L.

6. Si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, alors $\deg(P) \leqslant n$.
Et donc $\deg P' \leqslant n-1$ et $\deg P'' \leqslant n-2$.
On a alors $\deg(X^2-1)P'' = 2 + \deg P'' \leqslant n$ et de même $\deg XP' \leqslant 1 + \deg P' \leqslant n$.
Par conséquent, $\deg L(P) \leqslant n$, de sorte que $L(P) \in \mathbf{R}_n[X]$.
Soient $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} L(\lambda P + Q) &= (X^2-1)(\lambda P+Q)'' + 3X(\lambda P+Q) \\ &= (X^2-1)(\lambda P'' + Q'') + 3X(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda\left((X^2-1)P'' + 3XP'\right) + \left((X^2-1)Q'' + 3XQ'\right) \\ &= \lambda L(P) + L(Q). \end{aligned}$$

Ainsi, L est linéaire, et donc est $\boxed{\text{un endomorphisme de } \mathbf{R}_n[X].}$

7.a. D'après la question 5.b, nous avons, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$(X^2-1)T_k'' + 3XT_k' - (k^2+2k)T_k = 0 \Leftrightarrow (X^2-1)T_k'' + 3XT_k' = (k^2+2k)T_k.$$

Et donc $\boxed{L(T_k) = (k^2+2k)T_k.}$

7.b. Par la question précédente, la famille $(T_0,\dots,T_n)$ est une famille de vecteurs propres de L. De plus, elle est libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts. Étant de cardinal $n+1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$, c'est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Et alors la matrice de L dans cette base est

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} L(T_0) & L(T_1) & \dots & L(T_{n-1}) & L(T_n) \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 3 & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\ddots & 0 & & n^2-1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & n^2+2n
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_{n-1} \\ T_n \end{array}
\end{array}.$$

Remarque
Cette matrice est diagonale, et donc nécessairement, L est un endomorphisme diagonalisable.

Cette matrice est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses coefficient diagonaux :

$$\boxed{\mathrm{Spec}(L) = \{k^2 + 2n,\ k \in [\![0, n]\!]\}.}$$

En particulier, puisque la fonction $t \mapsto t^2 + 2t$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, ces valeurs propres sont deux à deux distinctes, et donc les sous-espaces propres de L sont tous de dimension 1.
Comme $T_k \in E_{k^2+2k}(L)$, on en déduit que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\boxed{T_k \text{ est une base de } E_{k^2+2k}(L).}$

Partie III : Étude d'un produit scalaire.

8. Si $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$, alors

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}P(x)Q(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}Q(x)P(x)\,dx = \varphi(Q, P).$$

Donc φ est symétrique.
Soient $P, Q, R \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P + Q, R) &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}(\lambda P(x) + Q(x))R(x)\,dx \\
&= \lambda \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}P(x)R(x)\,dx + \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}Q(x)R(x)\,dx \\
&= \lambda\varphi(P, R) + \varphi(Q, R).
\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche, et étant symétrique, est bilinéaire.
Pour $P \in \mathbf{R}_n[X]$, on a

$$\varphi(P, P) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}P(x)^2\,dx \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale.
D'autre part, la fonction $t \mapsto \sqrt{1-x^2}P(x)^2$ est continue et positive sur $[-1, 1]$.
Et donc si on a $\varphi(P, P) = 0$, alors pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sqrt{1-x^2}P(x)^2$.
Et donc pour tout $x \in]-1, 1[$, $P(x) = 0$.
Mais alors P possède une infinité de racines, et donc est le polynôme nul.
Ainsi, $\varphi(P, P) = 0 \Rightarrow P = 0$.
Par conséquent, $\boxed{\varphi \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathbf{R}_n[X].}$

Détail
Notons que pour $x = \pm 1$, $\sqrt{1-x^2} = 0$, et donc nous ne pouvons pas en déduire (pour l'instant) que $P(x) = 0$.

9. Notons qu'on a $\varphi(L(P), Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\left((x^2-1)P''(x) + 2xP'(x)\right)Q(x)\,dx$ et de même $\varphi(P, L(Q)) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}P(x)\left((x^2-1)Q''(x) + 2xQ'(x)\right)\,dx$.
Partons du résultat indiqué dans l'énoncé, et procédons à une intégration par parties sur $[-1, 1]$, en posant $u(x) = (1-x^2)^{3/2}P'(x)$ et $v(x) = Q(x)$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1, 1]$, avec $u'(x) = -3x\sqrt{1-x^2}P'(x) + (1-x^2)^{3/2}P''(x)$ et $v'(x) = Q'(x)$.
Alors

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{3/2}P'(x)Q'(x)\,dx \\
&= \underbrace{\left[(1-x^2)^{3/2}P'(x)Q(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0} + \int_{-1}^{1} \left(3x\sqrt{1-x^2}P'(x) - (1-x^2)^{3/2}P''(x)\right)Q(x)\,dt
\end{aligned}$$

$$= \varphi(L(P), Q).$$

Ceci étant valable pour tout P et pour tout Q, on a alors

$$\varphi(P, L(Q)) = \varphi(L(Q), P) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{3/2} Q'(x) P'(x)\, dx = \varphi(L(P), Q).$$

Notons que L est donc un endomorphisme symétrique, et qu'on retrouve ainsi qu'il est diagonalisable.

10. Nous savons déjà que $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
De plus, il s'agit d'une famille de vecteurs propres de L, associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.
Puisque L est un endomorphisme symétrique, nécessairement il s'agit d'une famille orthogonale.
Et donc $\boxed{(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base orthogonale de } E.}$

Rédaction Pour montrer qu'un endomorphisme est symétrique, on procède en général comme on vient de le faire : on transforme l'expression de $\langle f(x), y\rangle$ jusqu'à obtenir une expression où x et y jouent des rôles symétriques.
On pourrait ensuite refaire le même type de calcul pour $\langle x, f(y)\rangle$, mais on peut s'en passer en remarquant que le premier calcul est valable si on échange les rôles de x et y.

PROBLÈME 2

Partie I : Calcul de la somme d'une série convergente

1. Procédons à une intégration par parties en posant $u(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$ et $v'(t) = \cos(nt)$. Alors $u'(t) = \frac{t}{\pi} - 1$ et $v(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$, et les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$. On a alors

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\, dt = \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{1}{n}\sin(nt)\, dt$$
$$= -\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)\, dt$$

Trigonométrie Pour tout entier n,
$$\sin(n\pi) = 0.$$

Alors une seconde intégration par parties en posant $f(t) = \frac{t}{\pi} - 1$ et $g'(t) = \sin(nt)$, soit $f'(t) = \frac{1}{\pi}$ et $g(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt)$, où f et g sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$ nous donne

$$\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) dt = \left[-\frac{1}{n^2}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\cos(nt)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\cos(nt)\, dt$$
$$= -\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}[\sin(nt)]_0^{\pi}$$
$$= -\frac{1}{n^2}.$$

On en déduit alors que

$$\boxed{\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\, dt = \frac{1}{n^2}.}$$

2. Transformons plutôt le terme de droite pour arriver à celui de gauche[2]. On a

$$\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} e^{i\frac{(m+1)t}{2}} = \frac{\frac{e^{imt/2} - e^{-imt/2}}{2i}}{\frac{e^{it/2} - e^{-it/2}}{2i}} e^{i\frac{mt}{2}} e^{i\frac{t}{2}}$$
$$= \frac{e^{imt} - 1}{(e^{it} - 1)\, e^{-it/2}} e^{i\frac{t}{2}}$$
$$= \boxed{\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it}.}$$

Trigonométrie Formules d'Euler : on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x.$$

[2] Lorsqu'il s'agit de montrer une **égalité**, si on ne sait pas comment transformer le terme de gauche en celui de droite, rien n'interdit d'essayer dans l'autre sens !

Remarque *: cette question demandait une grande aisance en calcul, puisqu'en plus des formules d'Euler, elle nécessitait de bien manipuler correctement des fractions complexes ainsi que les propriétés de l'exponentielle.*

Commençons par remarquer que le terme de droite est la partie réelle de $\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} e^{i\frac{(m+1)t}{2}}$, car nous savons que

$$e^{i\frac{(m+1)t}{2}} = \cos\frac{(m+1)t}{2} + i\sin\frac{(m+1)t}{2}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\cos(nt) = \mathrm{Re}(e^{int})$, et donc

$$\sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \sum_{n=1}^{m} \mathrm{Re}(e^{int}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{m} e^{int}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{m} (e^{it})^n\right).$$

Mais pour $t \in]0,\pi]$, $e^{it} \neq 1$ et donc

$$\sum_{n=1}^{m} (e^{it})^n = e^{it}\left(\sum_{n=0}^{m-1} (e^{it})^n\right) = e^{it}\frac{1-e^{imt}}{1-e^{it}}.$$

Précaution

La formule

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$

n'est pas valable pour $q = 1$.

Et donc en prenant la partie réelle des deux membres, il vient

$$\sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{1-e^{imt}}{1-e^{it}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} e^{i\frac{(m+1)t}{2}}\right) = \boxed{\frac{\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}}.$$

3. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ fixé. Procédons, comme indiqué, à une intégration par parties, ce qui est légitime car les fonctions u et $t \mapsto \cos(\lambda t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. Alors

$$\int_0^{\pi} u(t)\sin(\lambda t)\,dt = \left[-u(t)\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi} u'(t)\cos(\lambda t)\,dt = \frac{u(0)}{\lambda} - \frac{u(\pi)}{\lambda}\cos(\lambda\pi) + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi} u'(t)\cos(\lambda t)\,dt$$

Il est évident que lorsque $\lambda \to +\infty$, alors $\frac{u(0)}{\lambda} \to 0$. De même, on a

$$\left|\frac{1}{\lambda}u(\pi)\cos(\lambda\pi)\right| \leqslant \left|\frac{u(\pi)}{\lambda}\right| \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi} u'(t)\cos(\lambda t)\,dt\right| &\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\int_0^{\pi} |u'(t)\cos(\lambda t)|\,dt \\ &\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\int_0^{\pi} |u'(t)|\,dt \\ &\underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Remarque

Cette intégrale ne dépend pas de λ, ni d'aucune autre variable : c'est une constante !

Et donc on en déduit que $\boxed{\int_0^{\pi} u(t)\cos(\lambda t)\,dt \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

4.a. La fonction $t \mapsto \sin\frac{t}{2}$ est continue et ne s'annule pas sur $]0,\pi]$, donc f est continue sur $]0,\pi]$ par quotient de fonctions continues. De plus, au voisinage de 0, on a

$$\frac{t^2}{2\pi} - t \sim -t \text{ et } 2\sin\frac{t}{2} \sim 2\frac{t}{2} \sim t$$

de sorte que $\dfrac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\frac{t}{2}} \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{-t}{t} = -1 \underset{t\to0}{\longrightarrow} -1.$

On en déduit que f est continue en 0, et donc $\boxed{\text{est continue sur } [0,\pi].}$

4.b. Pour $t \neq 0$, on a

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t + 2\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} \times \frac{1}{t} = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t + o(t^2) + t}{2t\sin\frac{t}{2}} \underset{t\to0}{\sim} \frac{\frac{t^2}{2\pi}}{t^2} \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}.$$

Méthode

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction, si on ne peut utiliser les résultats sur les fonctions usuelles, on revient à la définition : on étudie l'existence d'une limite au taux d'accroissement.

Donc f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = \frac{1}{2\pi}.}$

4.c. Sur $]0,\pi]$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ comme quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. On a alors

$$\forall t \in]0,\pi], \quad f'(t) = \frac{\left(\frac{t}{\pi}-1\right)2\sin\frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}}.$$

Or, au voisinage de 0, on a

$$\left(\frac{t}{\pi}-1\right)2\sin\frac{t}{2}-\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos\frac{t}{2}=\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\left(t+o(t^2)\right)-\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)(1-o(t))=\frac{t^2}{2\pi}+o(t^2)$$

Comme de plus, $4\sin^2\frac{t}{2}\sim 4\left(\frac{t}{2}\right)^2\sim t^2$, on en déduit que

$$f'(t)\underset{t\to 0}{\sim}\frac{\frac{t^2}{2\pi}}{t^2}=\frac{1}{2\pi}\underset{t\to 0}{\longrightarrow}\frac{1}{2\pi}.$$

Donc $\lim\limits_{t\to 0^+} f'(t)=f'(0)$: f' est continue en 0, et donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\pi].}$

Astuce

On sait que pour une fonction impaire, tous les termes d'ordre pair du développement limité en 0 sont nuls. Donc on peut écrire

$$\sin t = t+o(t)$$

mais ça ne coûte pas plus cher d'écrire directement

$$\sin t = t+o(t^2).$$

5.a. On a

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

Rappel

Il suffit de connaître la première formule et de remplacer b par $-b$ pour trouver la seconde.

En sommant ces deux relations, on a alors

$$\boxed{\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right).}$$

5.b. D'après la première question, on a

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{m}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(nt)\,dt=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(\sum_{m=1}^{n}\cos(mt)\right)dt.$$

Et en utilisant le résultat de la question 2, il vient

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}=\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}}{\frac{\sin t}{2}}\,dt=\int_0^\pi 2f(t)\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}\,dt.$$

Mais d'après la question 5.a, avec $b=\frac{(m+1)t}{2}$ et $a=\frac{mt}{2}$, on a

$$\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2m+1)t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right).$$

Et donc

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}=\int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,dt-\frac{1}{2}\int_0^\pi 2f(t)\sin\frac{t}{2}\,dt=\int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,dt-\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt.$$

Reste juste à calculer cette dernière intégrale :

$$\int_0^\pi\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt=\left[\frac{t^3}{6\pi}-\frac{t^2}{2}\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{2}=-\frac{\pi^2}{3}.$$

Il vient donc

$$\boxed{\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,dt.}$$

5.c. f étant de classe $\mathscr{C}^1$, d'après la question 3, on a

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}\,dt=0 \text{ et donc } \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

On en déduit donc que $\sum\frac{1}{n^2}$ converge et que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.}$$

Culture

Si l'on sait que toutes les séries de Riemann avec $\alpha>1$ convergent, on ne sait calculer la somme de la série que si α est un entier pair. Par exemple, pour $\alpha=5$, on ne sait même pas si la somme de la série de Riemann est un nombre rationnel ou non.

Partie II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente.

6.a. On a $\dfrac{1}{(n+x)(n+y)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{(n+x)^2(n+y)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$.
De plus, il est évident qu'il s'agit là de séries à termes positifs. Puisque les séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^3}$ convergent, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \text{ et } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \text{ convergent.}}$$

6.b. Pour $x \geqslant 0$, on a

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{n+x-n}{n(n+x)} = \frac{x}{n(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$$

Si $x = 0$, la convergence est immédiate, et si $x \neq 0$, alors la série de Riemann $\sum \dfrac{x}{n^2}$ converge, donc par critère de comparaison pour les séries positives,

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \text{ converge.}}$$

7. Nous avons

$$S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = \boxed{0.}$$

De même, on a $S(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.
Nous reconnaissons là une série télescopique. Pour calculer sa somme, repassons par les sommes partielles. Soit donc $N \in \mathbf{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{N-1}} - \cancel{\frac{1}{N}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{N}} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Et donc $\boxed{S(1) = 1.}$.

8.a. Soient $(x, y) \in \mathbf{R}^+$. Alors

$$\begin{aligned}
S(y) - S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+y}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+y-(n+x)}{(n+x)(n+y)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y-x}{(n+x)(n+y)} \\
&= \boxed{(y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.}
\end{aligned}$$

Notons que cette série converge car c'est la somme de deux séries convergentes.

8.b. En passant à la valeur absolue dans l'identité obtenue précédemment, il vient

$$|S(y) - S(x)| = |y-x| \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \right| \leqslant |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{(n+x)(n+y)} \right|$$

Inégalité triangulaire.

Or, pour $x, y \in \mathbf{R}_+$, on a $0 \leqslant n^2 \leqslant (n+x)(n+y)$ et donc $0 \leqslant \dfrac{1}{(n+x)(n+y)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

On en déduit alors que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et donc

$$|S(y) - S(x)| \leqslant |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \boxed{|y-x|\frac{\pi^2}{6}.}$$

8.c. Soit $x_0 \in \mathbf{R}_+$. Alors, grâce au résultat de la question précédente et au théorème des gendarmes, on a

$$\lim_{y \to x_0} |S(y) - S(x_0)| = 0.$$

Et donc $\displaystyle\lim_{y \to x_0} S(y) = S(x_0)$. Ainsi, S est continue en x_0, et ceci étant valable pour tout $x_0 \in \mathbf{R}_+$, $\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbf{R}_+.}$

9.a. En réutilisant le résultat de la question 6.a, on a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+x)(n+y)} - \frac{1}{(n+x)^2} \right) \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+x-(n+y)}{(n+x)^2(n+y)} \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x-y}{(n+x)^2(n+y)} \right| \\
&= |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \\
&\boxed{\leqslant |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.}
\end{aligned}$$

> **Détail**
> Pour tous x, $y \in \mathbf{R}_+^*$, on a
> $$0 \leqslant \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$
> et
> $$0 \leqslant \frac{1}{n+y} \leqslant \frac{1}{n}.$$

9.b. ⚠ Puisque la dérivation est linéaire, la dérivée d'une somme est la somme des dérivées. Et comme la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{(n+x)^2}$, nous avons envie d'affirmer que la dérivée de $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$ est $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.
Nous allons prouver que ceci est vrai, mais ce n'est pas immédiat. En effet, le fait que la dérivée d'une somme soit la somme des dérivées est vrai pour une somme finie. Mais ce n'est pas vrai en toutes généralités pour une somme infinie. En effet, une somme infinie est en réalité en limite, et nous ne disposons d'aucun théorème affirmant que la dérivée d'une limite est la limite des dérivées.
C'est vrai sous certaines hypothèses, mais les énoncés en question ne sont pas au programme en ECS.
Donc lorsqu'on doit dériver une fonction définie par une série, nous n'avons qu'une option : revenir à la définition d'une dérivée en tant que limite d'un taux d'accroissement.

Puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ est une constante, lorsque $y \to x$, on a, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{y \to x} \left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{y \to x} \frac{S(y) - S(x)}{y - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

Ainsi, S est dérivable en x, et de plus

$$\boxed{S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.}$$

9.c. C'est un simple calcul : on a

$$S'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}} \text{ et } S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{1^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{6} - 1.}$$

Attention !
On a l'habitude de caractériser la convexité/concavité via le signe de la dérivée seconde. Ceci est valable pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Mais il ne faut pas oublier que pour une fonction $\mathcal{C}^1$, on a une caractérisation en fonction du sens de variation de la dérivée.

10. Puisque S est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est concave si et seulement si S' est décroissante.
Soient donc $(x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2$, avec $x \leqslant y$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\frac{1}{(n+x)^2} \geqslant \frac{1}{(n+y)^2}$ et donc

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+y)^2} = S'(y).$$

Donc S' est décroissante et par conséquent, $\boxed{S \text{ est concave.}}$

11.a. La fonction φ est continue sur $[1, +\infty[$, donc le seul éventuel problème de convergence de l'intégrale est en $+\infty$.
Soit $A \geqslant 1$. Alors

$$\int_1^A \varphi(t)\,dt = [\ln(t) - \ln(t+x)]_1^A = \ln(A) - \ln(A+x) + \ln(1+x) = \ln\left(\frac{A}{A+x}\right) + \ln(1+x).$$

Lorsque $A \to +\infty$, $\frac{A}{A+x} \to 1$, et donc $\ln\left(\frac{A}{A+x}\right) \to 0$.
On en déduit que donc

$$\int_1^A \varphi(t)\,dt \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1+x)$$

et donc $\boxed{\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt \text{ converge et } \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \ln(1+x).}$

11.b. La fonction φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+x)^2} \leqslant 0$ car $\frac{1}{t^2} \geqslant \frac{1}{(t+x)^2}$.
Ainsi, φ est décroissante. Donc pour tout $t \in [n, n+1]$, on a

$$\varphi(n+1) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(n).$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\varphi(n+1) = \int_n^{n+1} \varphi(n+1)\,dt \leqslant \int_n^{n+1} \varphi(t)\,dt \leqslant \int_n^{n+1} \varphi(n)\,dt = \varphi(n).$$

Hypothèses
Pour utiliser la croissance de l'intégrale, il nous faut absolument avoir une inégalité valable **pour tout** t dans l'intervalle d'intégration.

Astuce
L'intégrale d'une constante sur un segment de longueur 1 est égale à cette constante.

Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Alors en sommant les relations précédemment obtenues pour n allant de 1 à N, il vient

$$\sum_{n=1}^{N+1} \varphi(n) - \varphi(1) = \sum_{n=2}^{N+1} \varphi(n) = \sum_{n=1}^{N} \varphi(n+1) \leqslant \int_1^{N+1} \varphi(t)\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{N} \varphi(n).$$

En passant à la limite lorsque $N \to +\infty$, on a alors

$$S(x) - \varphi(1) = S(x) - 1 \leqslant \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt \leqslant S(x).$$

Soit encore

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt \leqslant S(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt + 1.}$$

11.c. Puisque nous savons que $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \ln(1+x)$, l'inégalité précédente se réécrit

$$\ln(1+x) \leqslant S(x) \leqslant \ln(1+x) + 1.$$

En divisant cette inégalité par $\ln(1+x) \geqslant 0$ il vient

$$1 \leqslant \frac{S(x)}{\ln(1+x)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(1+x)}.$$

Signes
Quand on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un réel λ, il est important de vérifier le signe de λ pour savoir si l'on change le sens de l'inégalité ou non.

D'après le théorème des gendarmes, lorsque $x \to +\infty$, on a alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{\ln(1+x)} = 1 \text{ et donc } \boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(1+x).}$$

Il reste donc à prouver que $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$.
Pour cela, calculons le quotient

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = \frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}.$$

Or, $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc le quotient $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$ tend vers 0 et donc $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
On en déduit que $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$ et donc $\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x).}$

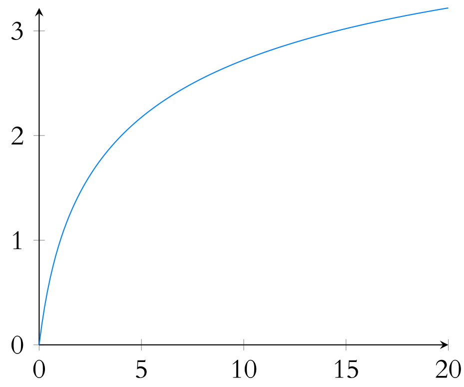
Danger !
Bien que $x+1 \sim x$, cela ne saurait suffire à conclure : on n'a pas le droit de composer les équivalents à gauche !

12. Pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{(n+x)^2} > 0$ et donc

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} > 0.$$

On en déduit que S est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ et donc on a

x	0	$+\infty$
$S'(x)$	$\|$	$+$
$S(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$



Asymptotiquement
L'équivalent obtenu précédemment nous dit qu'au voisinage de $+\infty$, $S(x)$ se comporte «comme» $\ln(x)$, et donc tend vers $+\infty$, mais lentement, comme le fait $\ln(x)$.

Notons qu'il est important de faire apparaître sur le graphique les propriétés de S mises en évidence dans les questions précédentes. Au delà des limites et de la croissance, on n'oubliera pas la concavité.

EML 2004

Problème 1

Sujet : Calcul de l'intégrale de Dirichlet via la transformée de Laplace — **Moyen**

Abordable en première année : ✓ — **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés :

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : très classique de Lyon : étude d'une fonction définie par une intégrale. Assez calculatoire, mais bien guidé.

I - Étude de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$.

On note $F :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ et $G :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ les applications définies, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{u}\,du \text{ et } G(x) = \int_1^x \frac{\cos u}{u}\,du.$$

1. a. Montrer, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$: $F(x) = -\dfrac{\cos x}{x} + \cos 1 - \displaystyle\int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,du$.
   En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$. On note α cette limite.

   b. De manière analogue, montrer que G admet une limite finie en $+\infty$, on note β cette limite.

   c. En déduire que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ convergent, et que : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \alpha - F(x)$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = \beta - G(x)$.

2. a. Montrer, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ et tout réel $T \in]0;+\infty[$:

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t+x}\,dt = \cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u}\,du.$$

   b. En déduire que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du.$$

On note $A :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, par :

$$A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt.$$

3. Montrer que l'application A est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:

$$A''(x) + A(x) = \frac{1}{x}.$$

4. Établir que $A(x)$ et $A'(x)$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

5. a. Montrer : $\forall x \in]0;1],\ 0 \leqslant \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du \leqslant -\ln x$.

   b. En déduire que $\sin x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

   c. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge, et établir que $A(x)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

II - Étude de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

6. Montrer que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ et tout entier naturel k, l'application $t \longmapsto t^k e^{-xt}$ est bornée sur $[0;+\infty[$ et en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$ converge.
   On note, pour tout entier naturel k, B_k : $]0;+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ par : $B_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.
7. a. Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange :
$$\forall u \in \mathbf{R},\ |e^u - 1 - u| \leqslant \frac{u^2}{2} e^{|u|}.$$
   b. En déduire, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, pour tout entier naturel k et pour tout réel h tel que $0 < |h| \leqslant \dfrac{x}{2}$:
$$\left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| \leqslant \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right).$$
   c. En déduire que B_0 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:
$$B_0''(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}.$$
8. Montrer, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:
$$0 \leqslant B_0(x) \leqslant \frac{1}{x} \text{ et } 0 \leqslant -B_0'(x) \leqslant \frac{1}{x^2},$$
   et en déduire les limites de $B_0(x)$ et $B_0'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
9. a. Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad e^{-\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant B_0(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt.$
   b. En déduire la limite de $B_0(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

III - Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$.

On considère l'application φ :$]0;+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ définie, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, par :
$$\varphi(x) = A(x) - B_0(x)$$
où A a été définie dans la partie I et B_0 a été définie dans la partie II.
On note U : $]0;+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, par :
$$U(x) = (\varphi(x))^2 + (\varphi'(x))^2.$$

10. Montrer que U est constante sur $]0;+\infty[$.
11. Quelle est la limite de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
12. En déduire : $\forall x \in]0;+\infty[,\ A(x) = B_0(x)$?
13. Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$?

Problème 2 — Non corrigé

Sujet : Matrices productives

Abordable en première année : ✓

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Intérêt : ★☆☆

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
$\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes.
Une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ ou de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est dite positive si et seulement si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls.
On notera alors $M \geqslant 0$.
Si M et N sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ ou deux matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, la notation $M \geqslant N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geqslant 0$ (resp. $M - N > 0$).
Une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est dite productive si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes : M est positive et il existe une matrice positive P de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telle que $P - MP > 0$.

I - Étude d'exemples.

1. En considérant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est productive.

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.

II - Caractérisation des matrices positives.
Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

3. Montrer que, si M est positive, alors pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, le produit MX est positif.

4. Réciproquement, montrer que si, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

III - Caractérisation des matrices productives.

5. Soit A une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le coefficient de i-ème ligne et de la j-ième colonne est noté $a_{i,j}$, et P une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telles que $P - AP > 0$. On note $p_1, \ldots, p_n$ les coefficients de la matrice colonne P.
   a. Montrer que $P > 0$.
   b. Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telle que $X \geqslant AX$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les coefficients de la matrice colonne X.
   On désigne par c le plus petit des réels $\dfrac{x_j}{p_j}$ lorsque l'entier j décrit l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et k un indice tel que $c = \dfrac{x_k}{p_k}$.
   Établir que $c\left(p_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} p_j\right) \geqslant 0$. En déduire que $c \geqslant 0$ et que X est positive.
   c. Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telle que $X = AX$. En remarquant que $-X \geqslant A(-X)$, montrer que X est nulle.
   En déduire que $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   d. Montrer que, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1} X$ est positive (on pourra utiliser 5.b).
   En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

6. Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. On note $V = (I_n - B)^{-1} U$, où U est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   Montrer que $V - BV > 0$. Conclure.

7. Donner une caractérisation des matrices productives.

8. *Application* : soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $2M^2 = M$.
   Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.

EML 2004 : CORRIGÉ

PROBLÈME 1

I - Étude de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$.

1.a. Procédons à une intégration par parties, en posant $f(u) = -\cos u$ et $g(u) = \dfrac{1}{u}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[1,x]$ avec $f'(u) = \sin u$ et $g'(u) = -\dfrac{1}{u^2}$. Alors

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{u}\,du = \left[-\frac{\cos u}{u}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,du = \boxed{-\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,du.}$$

La fonction cos étant bornée, puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

De plus, pour tout $u \geqslant 1$, on a $0 \leqslant \left|\dfrac{\cos u}{u^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{u^2}$.

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,du$ converge, par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos u}{u^2}\right|\,du$ et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,du$ converge absolument, et en particulier, converge.

On en déduit que lorsque $x \to +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\cos u}{u^2}\,du = \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,du$.

Et donc,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\,du.$$

> **Rappel**
> Le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 tend vers 0.

> **Méthode**
> Pour prouver la convergence de l'intégrale d'une fonction qui n'est pas de signe constant, on étudie en priorité la convergence absolue. On peut éventuellement utiliser un o (ici on aurait pu dire que $\dfrac{\cos u}{u^2} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$), mais surtout pas de majoration ou d'équivalents, car ces critères ne valent que pour des fonctions de signe constant.

1.b. De même, une intégration par parties sur le segment $[1,x]$ nous donne

$$\int_1^x \frac{\cos u}{u}\,du = \left[\frac{\sin u}{u}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin u}{u^2}\,du = \frac{\sin x}{x} - \sin 1 + \int_1^x \frac{\sin u}{u^2}\,du.$$

On a alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,du$ converge absolument car $\left|\dfrac{\sin u}{u^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{u^2}$.

Et donc

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = -\sin(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,du.$$

1.c. Soit $x > 0$ fixé et soit $A > 0$. Alors, par la relation de Chasles,

$$\int_x^A \frac{\sin u}{u}\,du = \int_1^A \frac{\sin u}{u}\,du - \int_1^x \frac{\sin u}{u}\,du = \int_x^A \frac{\sin u}{u}\,du - F(x) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - F(x) = \alpha - F(x).$$

En particulier, puisque cette limite existe, on en déduit que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge et vaut $\alpha - F(x)$.

De même, on prouve que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ converge et vaut $\beta - G(x)$.

2.a. Procédons au changement de variable $u = x + t$, qui est légitime car affine :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{\sin t}{x+t}\,dt &= \int_x^{x+T} \frac{\sin(u-x)}{u}\,du \\
&= \int_x^{x+T} \frac{\cos(x)\sin(u) - \sin(x)\cos(u)}{u}\,du \\
&= \boxed{\cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u}\,du.}
\end{aligned}$$

> **Rappel**
> Pour tous $a, b \in \mathbf{R}$,
> $\sin(a-b) =$
> $\sin a \cos b - \cos a \sin b$.

2.b. Lorsque T tend vers $+\infty$, on a alors[1]

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T \frac{\sin t}{x+t}\,dt = \cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du - \sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du.$$

Et donc ceci prouve que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\,dt$ converge et que

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\,dt = \cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du - \sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du.}$$

[1] Car nous avons prouvé en 1.c que les intégrales en question convergent.

3. Pour tout $x > 0$, on a $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du = \int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du - \int_1^{x}\frac{\sin u}{u}\,du.$

Mais $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$ est une constante et $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, de sorte que $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, de dérivée égale à $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

Ainsi, $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$ est dérivable car somme de fonctions dérivables, et sa dérivée est $x \mapsto -\dfrac{\sin x}{x}$.

De même, $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, de dérivée égale à $x \mapsto -\dfrac{\cos x}{x}$.
Et donc A est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car somme et produit de fonctions dérivables. On a alors

$$\begin{aligned}
A'(x) &= -\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du - \frac{\cos x\sin x}{x} - \cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du + \frac{\sin x\cos x}{x}\\
&= -\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du - \cos x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du.
\end{aligned}$$

A' est alors encore dérivable car somme de produits de fonctions dérivables, et

$$\begin{aligned}
A''(x) &= -\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du + \frac{\sin^2 x}{x} + \sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du + \frac{\cos^2 x}{x}\\
&= -A(x) + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x}\\
&= -A(x) + \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

En particulier, puisque A est continue[2], A'' est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ car somme de fonctions continues, et donc elle est de classe $\mathscr{C}^2$.

Et alors on a bien $\boxed{A''(x) + A(x) = \dfrac{1}{x}.}$

Rappel

Si f est une fonction continue sur I, alors pour tout $a \in I$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est $\mathscr{C}^1$ sur I, de dérivée égale à f.
Ici, les bornes sont dans l'autre sens, donc on peut remarquer que

$$\int_x^1 \frac{\sin u}{u}\,du = -\int_1^x \frac{\sin u}{u}\,du$$

qui est donc $\mathscr{C}^1$, de dérivée égale à

$$x \mapsto -\frac{\sin x}{x}.$$

[2] Car dérivable.

Fonction $\mathscr{C}^2$

Rappelons qu'une fonction $\mathscr{C}^2$ n'est pas simplement une fonction deux fois dérivable : encore faut-il que la dérivée seconde soit continue.

4. Lorsque $x \to +\infty$, on a $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du \to 0$ car il s'agit du reste d'une intégrale convergente.

La fonction cos étant bornée sur $\mathbf{R}$, on a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du = 0.$

De même, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\,du = 0.$

Et donc, par somme de limites, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} A(x) = 0.}$

On montre de même que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} A'(x) = 0.$

5.a. Nous savons que la fonction cosinus est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $\frac{\pi}{2} > 1$, et donc pour $u \in]0,1]$, on a $0 \leqslant \cos u \leqslant 1$, et donc

$$0 \leqslant \frac{\cos u}{u} \leqslant \frac{1}{u}.$$

Par croissance de l'intégrale, il vient donc

$$0 \leqslant \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du \leqslant \int_x^1 \frac{du}{u} = [\ln u]_x^1 = -\ln(x).$$

5.b. On a $\sin x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = \sin x \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du + \sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$.

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ est une constante et que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sin x = 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = 0$.

De plus, la fonction sinus étant positive sur $[0, 1]$, on a, pour tout $x \in]0, 1]$,

$$0 \leqslant \sin x \int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,du \leqslant -\sin x \ln x.$$

Or, au voisinage de 0, $\sin x \sim x$ et donc $\sin x \ln x \sim x \ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

Et par le théorème des gendarmes, il vient alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = 0$.

Par somme de limites, on a alors

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = 0.}$$

5.c. Nous savons déjà que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge, et donc il suffit d'établir la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin u}{u}\,du$.

La fonction $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ étant continue sur $]0, 1]$, le seul problème de convergence est au voisinage de 0.

Mais lorsque $u \to 0$, on a $\sin u \sim u$ et donc $\dfrac{\sin u}{u} \sim \dfrac{u}{u} = 1 \underset{u\to 0^+}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin u}{u}\,du$ est une intégrale faussement impropre[3], donc convergente.

[3] Autrement dit, $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.

Et donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du \text{ converge.}}$

On a donc

$$A(x) = \underbrace{\cos x}_{\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1} \underbrace{\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du}_{\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du} - \underbrace{\sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du}_{\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du.}$$

II - Étude de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

6. Pour $x > 0$ fixé, la fonction $f_k : t \mapsto t^k e^{-tx}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+$, de dérivée égale à

$$f_k'(t) = kt^{k-1}e^{-xt} - xt^k e^{-xt} = t^{k-1}e^{-xt}(k - xt).$$

De plus, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^k e^{-xt} = 0$ par croissance comparée.

Son tableau de variations est donc le suivant

x	0		$\frac{k}{x}$		$+\infty$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	$f_k(0)$	$\nearrow$		$\searrow$	0

Et donc pour tout $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant f_k(0) \leqslant t^k e^{-xt} \leqslant f_k\left(\dfrac{k}{x}\right) \leqslant \left(\dfrac{k}{x}\right)^k e^{-k}$, et donc f_k est bornée.

Fonction bornée
Rappelons qu'une fonction est bornée si elle est à la fois majorée et minorée, il ne suffit pas de la majorer.

En particulier, il vient, pour tout $t \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \left(\frac{k}{x}\right)^k e^{-k} \frac{1}{1+t^2}.$$

Or, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge car le seul éventuel problème de convergence en au voisinage de $+\infty$ et que $\frac{1}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$.

Et donc[4] $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}\, dt \text{ converge également.}}$

Alternative

On pourrait aussi calculer explicitement cette intégrale en notant qu'une primitive de $\frac{1}{1+t^2}$ est Arctan(t).

[4] $\left(\frac{k}{x}\right)^k e^{-k}$ est une constante qui ne dépend pas de t.

7.a. La fonction $f(t) = e^t$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, et $f'(t) = f''(t) = e^t$.
Si $u \geqslant 0$, alors, par croissance de l'exponentielle, on a, pour tout $t \in [0, u]$, $0 \leqslant f''(t) \leqslant e^u = e^{|u|}$. Et donc $|f''(t)| \leqslant e^{|u|}$.
D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en 0, on a donc

$$|f(u) - f(0) - f'(0)u| \leqslant \frac{|u|^2}{2!} e^{|u|} \Leftrightarrow |e^u - 1 - u| \leqslant \frac{u^2}{2} e^{|u|}.$$

Si $u < 0$, alors pour $t \in [u, 0]$, on a $0 \leqslant f''(t) \leqslant 1 \leqslant e^{|u|}$ et donc, toujours par l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$|f(u) - f(0) - f'(0)u| \leqslant \frac{|u|^2}{2!} e^{|u|} \Leftrightarrow \boxed{|e^u - 1 - u| \leqslant \frac{u^2}{2} e^{|u|}.}$$

Méthode

Pour appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange entre a et x, il faut un majorant de $|f^{(n+1)}|$ **sur le segment d'extrémités a et x.**
Lorsque, comme c'est le cas ici, $f^{(n)}$ n'est pas bornée sur $\mathbf{R}$, il faut donc faire preuve d'un peu de finesse pour majorer $|f^{(n+1)}|$.
Cela nous conduit en particulier à distinguer deux cas, car si $u \geqslant 0$, le segment d'extrémités 0 et u est $[0, u]$, alors que si $u \leqslant 0$, il s'agit de $[u, 0]$.

7.b. D'après le résultat de la question précédente, on a, pour tout $t \geqslant 0$,

$$|e^{-th} - 1 + th| \leqslant \frac{t^2h^2}{2} e^{th}.$$

En multipliant par $\frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}$, on a, pour tout $t > 0$,

$$\left| \frac{t^k e^{-t(x+h)}}{1+t^2} - \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} + \frac{t^{k+1} h e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leqslant \frac{t^{k+2}h^2}{2(1+t^2)} e^{-t(x+h)}.$$

Et donc, après division par $|h| > 0$, il vient

$$\left| \frac{1}{h}\left(\frac{t^k e^{-t(x+h)}}{1+t^2} - \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} \right) + \frac{t^{k+1} e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leqslant \frac{t^{k+2}|h|}{2(1+t^2)} e^{-t(x+h)}.$$

Précaution

On ne connaît pas le signe de h, donc $\frac{h^2}{|h|} = |h|$.

Notons que $|h| > \frac{x}{2}$ et donc $x + h > \frac{x}{2}$, de sorte que, pour $t > 0$, $e^{-t(x+h)} \geqslant e^{t\frac{x}{2}}$.
Enfin, on a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{B_k(x+) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| &= \left| \frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-t(x+h)}}{1+t^2}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}\, dt \right) + \int_0^{+\infty} \frac{t^{k+1} e^{-xt}}{1+t^2}\, dt \right| \\
&= \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{h}\left(\frac{t^k e^{-t(x+h)}}{1+t^2} - \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} \right) + \frac{t^{k+1} e^{-xt}}{1+t^2} \right) dt \right| \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{h}\left(\frac{t^k e^{-t(x+h)}}{1+t^2} - \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} \right) + \frac{t^{k+1} e^{-xt}}{1+t^2} \right| dt \\
&\leqslant \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{k+2} e^{-tx/2}}{1+t^2}\, dt \\
&\boxed{\leqslant \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right).}
\end{aligned}$$

Valeur absolue

Ne pas oublier que l'intégrale de la valeur absolue n'est pas égale à la valeur absolue de l'intégrale, on dispose juste d'une inégalité (l'inégalité triangulaire).

7.c. Soit $x > 0$ fixé. Alors, on a $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right) = 0$, et donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} = -B_{k+1}(x).$$

Ceci prouve donc que B_k est dérivable en x et que $B_k'(x) = -B_{k+1}(x)$.
En particulier, B_k est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.

Et donc B_0 est dérivable, et sa dérivée est $-B_1$, qui est elle même dérivable, de dérivée B_2.
Puisque $B_2 = (B_0)''$ est dérivable, elle est continue et donc $\boxed{B_0 \text{ est de classe } \mathscr{C}^2.}$
Et donc, pour tout $x > 0$, on a

$$B_0(x)+B_0''(x) = B_0(x)+B_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt+\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}(1+t^2)}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \boxed{\frac{1}{x}.}$$

8. Il est clair que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $B_k(x) \geqslant 0$ car intégrale d'une fonction positive.
En particulier, on a $B_0(x) \geqslant 0$ et $B_2(x) \geqslant 0$, de sorte que

$$B_0(x) = \frac{1}{x} - B_0''(x) = \frac{1}{x} - B_2(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

De même, en dérivant la relation de la question 7.c, ce qui est légitime car $B_0'' = B_2$ est dérivable, de dérivée $-B_3$, il vient $-B_3(x) + B_0'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
Et donc $-B_0'(x) = \dfrac{1}{x^2} - B_3(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.
De plus, $-B_0'(x) = B_1(x) \geqslant 0$.
Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} B_0(x) = \lim\limits_{x\to 0} B_0'(x) = 0.}$

9.a. Par la relation de Chasles, on a

$$B_0(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt.$$

Par croissance de l'intégrale, la seconde intégrale est positive car intégrale d'une fonction positive.
Et donc $B_0(x) \geqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.
De plus, pour $t \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$, $-xt \geqslant -\sqrt{x}$.

Par croissance de l'exponentielle, on a donc $e^{-xt} \geqslant e^{-\sqrt{x}}$, puis $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \geqslant \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{1+t^2}$.
Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$B_0(x) \geqslant \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \geqslant e^{\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Enfin, pour tout $t \geqslant 0$, on a $e^{-xt} \leqslant 1$ et donc $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$, de sorte que, par croissance de l'intégrale,

$$B_0(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Et donc on a bien

$$\boxed{e^{-\sqrt{t}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant B_0(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt.}$$

9.b. D'une part, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{A\to+\infty} [\operatorname{Arctan}(t)]_0^A = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{Arctan}(A) = \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et donc[5],

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

[5] Par composition de limites.

Enfin, $\lim_{x\to 0^+} e^{-\sqrt{x}} = 1$ et donc

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\boxed{\lim_{x\to 0^+} B_0(x) = \frac{\pi}{2}.}$

Partie III – Calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$.

10. Puisqu'il a déjà été prouvé que A et B_0 sont toutes les deux de classe $\mathscr{C}^2$, il en est de même de φ. Et donc φ' est dérivable, de sorte que U l'est également. On a alors, pour tout $x > 0$,

$$U'(x) = 2\varphi(x)\varphi'(x) + 2\varphi'(x)\varphi''(x) = 2\varphi'(x)\left(\varphi(x) + \varphi''(x)\right).$$

Or, on a $\varphi''(x) = A''(x) - B_0''(x)$.
D'après les relations obtenues aux questions 3 et 7.c, on a

$$A''(x) - B_0''(x) = \frac{1}{x} - A(x) - \frac{1}{x} + B_0(x) = -\varphi(x)$$

de sorte que $U'(x) = 0$.
Et donc $\boxed{U \text{ est constante sur l'intervalle }]0, +\infty[.}$

11. Lorsque $x \to +\infty$, il a déjà été prouvé que $\lim_{x\to+\infty} A(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} B_0(x) = 0$, et donc $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
De même, il a été prouvé à la question 4 que $\lim_{x\to+\infty} A'(x) = 0$ et à la question 8 que $\lim_{x\to+\infty} B_0'(x) = 0$, et donc $\lim_{x\to+\infty} \varphi'(x) = 0$.
On en déduit donc que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} U(x) = 0.}$

12. D'après les questions 11 et 12, U est la fonction constante égale à 0.
Mais une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul, donc pour tout $x \in]0, +\infty[$, $U(x) = (\varphi(x))^2 + (\varphi'(x))^2 = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi'(x) = 0$.
En particulier, on a

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{A(x) = B_0(x).}$$

Détail
Pour une fonction constante égale à λ, sa limite en $+\infty$ est nécessairement égale à λ.

13. Nous savons d'une part que $\lim_{x\to 0^+} B_0(x) = \frac{\pi}{2}$ et d'autre part que $\lim_{x\to 0^+} A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$.
Mais les fonctions A et B_0 étant égales, elles ont mêmes limites et donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}.}$$

EML 2003

Problème 1

Sujet : Intégrales des puissances du sinus cardinal

Facile

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, séries numériques

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

On considère l'application $\varphi : [0;+\infty[\to \mathbf{R}$ définie, pour tout réel $t \in [0;+\infty[$, par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

et on considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} (\varphi(t))^n \, dt, \qquad J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n \, dt, \qquad K_n = \int_1^{+\infty} (\varphi(t))^n \, dt.$$

Partie I : Résultats généraux sur φ et J_n

1. Montrer que φ est continue sur $[0;+\infty[$ et que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale J_n existe.
2. a. Montrer que φ est strictement positive sur $[0;1]$ et que φ est strictement décroissante sur $[0;1]$.
   b. Établir, pour tout réel $t \in]0,+\infty[$: $|\varphi(t)| < 1$.
3. a. Montrer, pour tout réel $t \in [0;+\infty[$: $\varphi(t) \geqslant 1 - t$.
   (On pourra étudier les variations sur $[0;+\infty[$ de l'application $t \mapsto \sin t - t + t^2$).
   b. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$: $J_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Partie II : Étude de I_1.

4. a. Montrer, pour tout réel $x \in [1;+\infty[$: $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt.$
   b. En déduire que les intégrales K_1 et I_1 sont convergentes.
5. a. Montrer, pour tout réel $t \in [0;+\infty[$: $|\sin t| \geqslant \sin^2 t = \dfrac{1}{2}(1-\cos(2t))$.
   b. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\, dt$ converge.
   c. Déduire des deux questions précédentes que l'intégrale I_1 n'est pas absolument convergente.

Partie III : Étude de I_n, pour $n \geqslant 2$.

6. a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale K_n est convergente.
   b. Établir, pour tout entier $n \geqslant 2$: $|K_n| \leqslant \dfrac{1}{n-1}$.
7. a. Montrer que la suite $(J_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
   b. Montrer que la suite $(J_n)_{n\geqslant 2}$ converge ; on note ℓ sa limite.
   c. Établir, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $a \in]0;1[$:

$$\int_0^a (\varphi(t))^n \, dt \leqslant a \text{ et } \int_a^1 (\varphi(t))^n \, dt \leqslant (1-a)(\varphi(a))^n .$$

   (On pourra utiliser la question 2.)
   d. En déduire, pour tout réel $a \in]0;1[$: $0 \leqslant \ell \leqslant a$ et conclure : $\ell = 0$.
8. a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale I_n est convergente.
   b. Établir : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Partie IV : Étude de la série de terme général I_n, $n \geqslant 2$.

9. Montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$: $K_{2p} + K_{2p+1} \geqslant 0$.
10. En déduire, pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\sum_{p=1}^{N}(I_{2p} + I_{2p+1}) \geqslant \sum_{p=1}^{N}(J_{2p} + J_{2p+1}).$$

11. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 2} I_n$ diverge. (On pourra utiliser la question 3.b).

Problème 2

Sujet : Pseudo-inverse d'un endomorphisme symétrique

Difficile

Abordable en première année : ✗

Intérêt : ★★☆

Thèmes du programme abordés : Diagonalisation, projecteurs orthogonaux

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Modifications apportées au sujet d'origine : La notation pour les sous-espaces propres a été remplacée par le plus conventionnel $E_\lambda(f)$.

Commentaires : Pour creuser davantage ce thème, on pourra consulter le sujet 2012 de l'ESSEC (bien plus difficile).

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et E est un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée est notée $\|\cdot\|$.. On note id_E l'application identique de E, et $\tilde{0}$ l'application nulle de E.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp$ le sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal de F dans E.
Le projecteur de E sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelé projecteur orthogonal sur F.
Pour tout endomorphisme f de E et toute valeur propre λ de f, on note $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Partie I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique.

On considère un endomorphisme symétrique f de E, c'est-à-dire un endomorphisme f tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

On suppose de plus que f est non inversible et non nul.

1. Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au moins une valeur propre non nulle.
2. a. Soient λ et μ deux valeurs propres de f. Montrer, pour tout vecteur x de $E_\lambda(f)$ et pour tout vecteur y de $E_f(\mu)$:

$$\lambda\langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

   b. En déduire que les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.
3. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

On suppose que f admet exactement $k + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ avec $k \geqslant 1$, $\lambda_0 = 0$ et $0 < |\lambda_1| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_k|$.
Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, on note p_j le projecteur orthogonal sur $E_{\lambda_j}(f)$.

4. Soit x un vecteur de E.
   a. Montrer qu'il existe un unique $(k+1)$-uplet $(x_0, x_1 \dots, x_k)$ de $E_0(f)\times E_{\lambda_1}(f)\times\cdots\times E_{\lambda_k}(f)$ tel que $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k$.
   b. Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, montrer : $p_j(x) = x_j$.

   Ainsi, la relation suivante est clairement vérifiée :

$$\mathrm{id}_E = p_0 + p_1 + \cdots + p_k.$$

5. a. Établir, pour tout couple (i, j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à k :

$$i \neq j \Longrightarrow p_i \circ p_j = \tilde{0}.$$

   b. Montrer : $f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_k p_k$.
   c. Montrer que le projecteur orthogonal p sur $\mathrm{Im}\, f$ vérifie :

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$

On note $f^\sharp$ l'endomorphisme de E défini par $f^\sharp = \dfrac{1}{\lambda_1}p_1 + \dfrac{1}{\lambda_2}p_2 + \cdots + \dfrac{1}{\lambda_k}p_k$.

On dit que $f^\sharp$ est l'inverse généralisé de f.

6. a. Montrer : $f \circ f^\sharp = p$.

   b. En déduire : $\forall (x,y) \in E^2, \big(f(x) = p(y) \iff x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f\big)$.

7. Soit y un vecteur de E.

   a. Montrer : $\forall x \in E, \left(\|f(x) - y\| = \inf\limits_{z\in E} \|f(z) - y\| \iff x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f\right)$.

   b. En déduire que $f^\sharp(y)$ est le vecteur x de E de plus petite norme vérifiant :

$$\|f(x) - y\| = \inf_{z\in E} \|f(z) - y\|.$$

Partie II : Application à un exemple.

Dans cette question, E est un espace euclidien de dimension 4 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E associé à la matrice A relativement à la base $\mathscr{B}$.

8. Justifier que f est un endomorphisme symétrique non nul et non inversible.

9. Montrer que f admet exactement trois valeurs propres distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

On note p_1 le projecteur orthogonal sur $E_{\lambda_1}(f)$ et M_1 la matrice associée à p_1 relativement à la base $\mathscr{B}$.
On note p_2 le projecteur orthogonal sur $E_{\lambda_2}(f)$ et M_2 la matrice associée à p_2 relativement à la base $\mathscr{B}$.

10. Montrer : $A = 2M_1 + 4M_2$.

11. a. Montrer que $E_{\lambda_2}(f)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de $E_{\lambda_2}(f)$ tel que $\|v_2\| = 1$.

    b. Montrer : $\forall x \in E, \quad p_2(x) = \langle x, v_2\rangle v_2$.

    c. Déterminer la matrice M_2.

12. En déduire la matrice associée à $f^\sharp$ relativement à la base $\mathscr{B}$.

EML 2003 : Corrigé

Problème 1

Partie I : Résultats généraux sur φ et J_n.

1. La fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$ car quotient de fonctions continues.
D'autre part, au voisinage de 0, $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1 \underset{t\to 0^+}{1} = \varphi(0)$.
Et donc φ est continue en 0 et donc sur $[0;+\infty[$.
Par conséquent, pour tout entier $n \geqslant 1$, φ^n est continue et donc J_n est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, et donc $\boxed{\text{converge.}}$

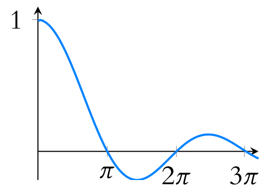


Figure 1– La fonction φ.

2.a. Nous savons que la fonction sinus est strictement positive sur $]0,\pi[$ et que $1<\pi$, donc pour tout $t\in]0,1]$, $\sin(t)>0$, de sorte que $\varphi(t)>0$.
Et puisque $\varphi(0)>0$, $\boxed{\varphi \text{ est strictement positive sur } [0,1].}$
D'autre part, φ est dérivable sur $]0,1]$ car quotient de fonctions dérivables, et

$$\forall t\in]0,1],\ \varphi'(t)=\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}.$$

Soit donc g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(t)=t\cos t-\sin t$. Alors g est dérivable et

$$g'(t)=\cos t-t\sin t-\cos t=-t\sin t<0.$$

Donc g est strictement décroissante sur $[0,1]$, avec $g(0)=0$.

On en déduit donc que pour tout $t\in]0,1]$, $g(t)<0$ et donc $\varphi'(t)=\frac{g(t)}{t^2}<0$.

Par conséquent, $\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante sur } [0,1].}$

> **Rappel**
> Si φ est continue sur $[0,1]$ et que φ' est strictement négative sur $]0,1]$, alors φ est strictement décroissante sur $[0,1]$.
> Il n'est pas utile de se préoccuper de la dérivabilité de φ en 0, ni du signe éventuel de $\varphi'(1)$.

2.b. Soit $t>1$. Alors $|\sin t|\leqslant 1$ et donc $|\varphi(t)|=\left|\frac{\sin t}{t}\right|\leqslant\frac{1}{t}<1$.
D'autre part, $\varphi(0)=1$ et donc, par stricte décroissance de φ sur $[0,1]$, pour tout $t\in]0,1]$, $\varphi(t)<1$.
Puisqu'enfin φ est positive sur $[0,1]$, donc pour tout $t\in]0,1]$, $\boxed{|\varphi(t)|<1.}$

3.a. Pour $t=0$, il est évident que $\varphi(0)=1\geqslant 1-1$.

Pour $t>0$, on a $\varphi(t)-(1-t)=\frac{\sin t-t+t^2}{t}$.

Soit donc $h: t\mapsto \sin t-t+t^2$.
Alors h est deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$, et $h'(t)=\cos t-1+2t$.
Donc $h''(t)=-\sin t+2>0$, de sorte que h' est croissante.
Or, $h'(0)=0$, donc pour tout $t\geqslant 0$, $h'(t)\geqslant 0$.
Ceci signifie donc que h est croissante, avec $h(0)=0$, donc pour tout $t\geqslant 0$, $h(t)\geqslant 0$.
Et donc pour tout $t\in]0,+\infty[$, $\varphi(t)-1+t\geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{\varphi(t)\geqslant 1-t.}$

> **Remarque**
> On pourrait aussi remarquer que h est convexe (car de dérivée seconde positive) et donc au dessus de toutes ses tangentes.
> Mais en particulier, sa tangente en 0 est la droite horizontale d'équation $y=0$, et donc pour tout t, $h(t)\geqslant 0$.

3.b. Pour tout $t\in[0,1]$, et pour tout $n\geqslant 1$, on a $\varphi(t)^n\geqslant(1-t)^n$.
Et donc, par croissance de l'intégrale,

$$J_n=\int_0^1(\varphi(t))^n\,dt\geqslant\int_0^1(1-t)^n\,dt=\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\boxed{\frac{1}{n+1}.}$$

Partie II : Étude de I_1.

4.a. Procédons à une intégration par parties sur le segment $[1,x]$, en posant $u(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=-\cos(t)$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ avec $u'(t)=-\frac{1}{t^2}$ et $v'(t)=\sin(t)$. Alors

$$\int_1^x\frac{\sin t}{t}\,dt=\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x-\int_1^x\frac{\cos t}{t^2}\,dt=\boxed{\cos 1-\frac{\cos x}{x}-\int_1^x\frac{\cos t}{t^2}\,dt.}$$

4.b. Puisque la fonction cos est bornée sur $\mathbf{R}$, lorsque $x \to +\infty$, $\dfrac{\cos x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'autre part, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

Donc par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ converge, et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ converge absolument, donc converge.

Par définition d'une intégrale convergente, cela signifie que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ existe.

Et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ existe, de sorte que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = K_1$ converge.

Et puisque J_1 converge également, on en déduit que $\boxed{I_1 = J_1 + K_1 \text{ converge.}}$

5.a. Soit $t \geqslant 0$. Puisque $|\sin t| \leqslant 1$, on a donc $|\sin t|^2 \leqslant |\sin t|$, soit encore $\boxed{\sin^2 t \leqslant |\sin t|.}$

D'autre part, nous savons que

$$\cos(2t) = \cos(t+t) = \cos^2 - \sin^2 t = (1-\sin^2 t) - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t.$$

Et donc $\boxed{\sin^2 t = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}.}$

Trigonométrie

Rappelons que

$\cos(a+b) =$

$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

5.b. De même qu'à la question 4.a, une intégration par parties sur $[0,x]$ nous donne

$$\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t}\, dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin(2t)}{2t^2}\, dt = \frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{\sin(2)}{2} + \int_1^x \frac{\sin(2t)}{2t^2}\, dt.$$

On montre alors comme en 4.a que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{2t^2}\, dt$ converge absolument, et donc que $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t}\, dt$ admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$ et donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\, dt$ converge.

5.c. En utilisant la question 5.a., il vient, pour tout $t \geqslant 1$,

$$\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - \frac{\cos(2t)}{t}\right).$$

Mais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\, dt$ converge, de sorte que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2}(1-\cos(2t))\, dt$ diverge.

Et donc par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ diverge.

Et donc $\boxed{I_1 \text{ ne converge pas absolument.}}$

Rappel

La somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente diverge. En revanche, on ne peut rien dire de la somme de deux intégrales divergentes.

Remarque

Nous avons donc ici un exemple d'intégrale convergente, mais pas absolument convergente.

Partie III : Étude de I_n, pour $n \geqslant 2$.

6.a. Nous avons déjà prouvé que K_1 converge.

Et pour $n \geqslant 2$, on a pour tout $t > 0$, $|\varphi(t)^n| \leqslant \dfrac{1}{t^n}$.

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n}$ converge, par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\varphi(t)^n|\, dt$, et donc K_n converge absolument. Et en particulier converge.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ K_n \text{ converge.}}$

6.b. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} |K_n| &= \left|\int_1^{+\infty} \varphi(t)^n\, dt\right| \\ &\leqslant \int_1^{+\infty} |\varphi(t)^n|\, dt \end{aligned}$$

$$\leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n}$$
$$\boxed{= \frac{1}{n-1}.}$$

Intégrales de Riemann

Nous avons utilisé ici le fait que pour $\alpha > 1$,
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$
Si on ne se souvient pas de cette formule, il est aisé de la retrouver à l'aide d'une primitive de $\frac{1}{t^\alpha}$.

7.a. Pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$, de sorte que $\varphi(t)^{n+1} \leqslant \varphi(t)^n$.
Et donc par croissance de l'intégrale,
$$J_{n+1} = \int_0^1 \varphi(t)^{n+1}\,dt \leqslant \int_0^1 \varphi(t)^n\,dt = J_n.$$
Ceci prouve donc que $\boxed{(J_n) \text{ est décroissante.}}$

7.b. Puisque $\varphi(t)^n \geqslant 0$ sur $[0,1]$, par positivité de l'intégrale, $J_n \geqslant 0$.
Et donc (J_n) est décroissante et minorée[1], donc par le théorème de la limite monotone, elle converge.

[1] Par 0.

7.c. Il a été prouvé à la question 2.a. que φ est décroissante sur $[0,1]$, avec $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) \geqslant 0$.
Donc pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant \varphi(t)^n \leqslant 1$.
Par croissance de l'intégrale, on a donc $\displaystyle\int_0^a (\varphi(t))^n\,dt \leqslant \int_0^a 1\,dt = a$.
De même, φ est décroissante sur $[a,1]$ et donc pour tout $t \in [a,1]$, $\varphi(t) \geqslant \varphi(a) \geqslant 0$ et donc $\varphi(t)^n \geqslant \varphi(a)^n$.
Donc par croissance de l'intégrale,
$$\int_a^1 \varphi(t)^n\,dt \geqslant \int_a^1 \varphi(a)^n\,dt = (1-a)\varphi(a)^n.$$

7.d. Pour $a \in]0,1[$ fixé, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous venons de prouver que
$$0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^a \varphi(t)^n\,dt + \int_a^1 \varphi(t)^n\,dt \leqslant a^n + (1-a)\varphi(a)^n.$$
Mais $\varphi(a) < 1$ par stricte décroissance de φ sur $[0,1]$, et donc $\varphi(a)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, lorsque $n \to +\infty$, on a
$$0 \leqslant \ell \leqslant a.$$
Et ceci est vrai pour tout $a \in]0,1[$, donc en faisant tendre a vers 0, il vient donc[2] $\boxed{\ell = 0.}$

[2] Par le théorème des gendarmes.

8.a. Nous avons déjà prouvé que pour tout n, K_n est convergente, et J_n est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, donc convergente.
On en déduit que $\boxed{I_n = K_n + J_n \text{ est convergente.}}$

8.b. La majoration de la question 6.b prouve, à l'aide du théorème des gendarmes, que
$$\lim_{n\to+\infty} |K_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} K_n = 0.$$
Et d'autre part, nous venons de prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.
Donc par somme de limites,
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} J_n + \lim_{n\to+\infty} K_n = 0.$$

Partie V : Étude de la série de terme général I_n, $n \geqslant 2$.

9. On a
$$K_{2p} + K_{2p+1} = \int_1^{+\infty} \left(\varphi(t)^{2p} + \varphi(t)^{2p+1}\right)dt = \int_1^{+\infty} \varphi(t)^{2p}\left(1 + \varphi(t)\right)dt.$$
Or il est évident que $\varphi(t)^{2p} \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 1$, et puisque nous avons prouvé à la question 2.b que $|\varphi(t)| \leqslant 1$, il vient
$$-1 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \varphi(t) + 1 \leqslant 2.$$
Et donc en particulier, $\varphi(t)^{2p}(1 + \varphi(t)) \geqslant 0$.
Par croissance de l'intégrale, on a donc
$$K_{2p} + K_{2p+1} = \int_1^{+\infty} \varphi(t)^{2p}\left(\varphi(t) + 1\right)dt \boxed{\geqslant 0.}$$

10. En sommant les relations de la question précédente pour p allant de 1 à N, il vient

$$\sum_{p=1}^{N}(K_{2p}+K_{2p+1}) \geqslant 0.$$

Mais d'autre part, $K_n = I_n - J_n$, donc

$$\sum_{p=1}^{N}(K_{2p}+K_{2p+1}) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sum_{p=1}^{N}(I_{2p}+I_{2p+1}-J_{2p}-J_{2p+1}) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sum_{p=1}^{N}(I_{2p}+I_{2p+1}) \geqslant \sum_{p=1}^{N}(J_{2p}+J_{2p+1}).$$

11. On a $\displaystyle\sum_{p=1}^{N}(J_{2p}+J_{2p+1}) = \sum_{k=2}^{2N+1} J_k$, et de même $\displaystyle\sum_{p=1}^{N}(I_{2p}+I_{2p+1}) = \sum_{p=1}^{2N+1} I_k$.

Or, à la question 3.b, nous avons prouvé que $J_k \geqslant \dfrac{1}{k+1}$.

Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{k+1}$ diverge, et qu'il s'agit d'une série à termes positifs, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=2}^{2N+1}\frac{1}{k+1} = +\infty$.

Et donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=2}^{2N+1} I_k = +\infty$.

On en déduit que $\boxed{\text{la série de terme général } I_n \text{ diverge.}}$

Positivité

La suite des sommes partielles de $\sum \frac{1}{k+1}$ tend vers $+\infty$ car il s'agit d'une série à termes positifs. En effet, la suite de ses sommes partielles est alors croissante, et ne convergeant pas, elle tend vers $+\infty$.
Pour des séries divergentes qui ne sont pas de signe constant, il n'est pas obligatoire que la suite des sommes partielles tende vers $+\infty$.
Par exemple, les sommes partielles de la série (grossièrement) divergente de terme général $(-1)^n$ sont bornées.

PROBLÈME 2

Partie I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique.

1. Puisque f est non inversible, $\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } f.}$

De plus, f est diagonalisable[3]. S'il possédait 0 comme unique valeur propre, sa matrice dans une base de vecteurs propres serait la matrice nulle, et donc on aurait $f = 0$, ce qui n'est pas le cas par hypothèse.

Donc $\boxed{f \text{ possède au moins une valeur propre non nulle.}}$

[3] Car symétrique.

2.a. On a

$$\lambda\langle x,y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x,y\rangle.$$

2.b. Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de f, alors pour $x \in E_\lambda(f)$ et $y \in E_\mu(f)$, on a

$$\lambda\langle x,y\rangle = \mu\langle x,y\rangle \Leftrightarrow (\lambda-\mu)\langle x,y\rangle = 0.$$

Puisque $\lambda - \mu \neq 0$, il vient donc $\langle x,y\rangle = 0$.
Et donc tout vecteur de $E_\lambda(f)$ est orthogonal à tout vecteur de $E_\mu(f)$, de sorte que $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont orthogonaux.

Remarque

Notons que ce résultat est un résultat de cours. Mais si on nous le demande, c'est visiblement qu'on en attend une preuve.

3. soit $x \in \operatorname{Ker} f$ et soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors $f(x) = 0_E$, et il existe $z \in E$ tel que $f(z) = y$.
On a alors

$$\langle x,y\rangle = \langle x, f(z)\rangle = \langle f(x), z\rangle = \langle 0_E, z\rangle = 0.$$

Et donc $\operatorname{Ker} f \subset (\operatorname{Im} f)^\perp$.

D'autre part, nous savons que

$$\dim(\operatorname{Im} f)^\perp = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f.$$

Et donc puisqu'on a une inclusion entre deux espaces de même dimension, il s'agit d'une égalité : $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$.

Et donc $\boxed{\operatorname{Ker} f \text{ est le supplémentaire orthogonal de } \operatorname{Im} f.}$

☠ Danger !

Nous n'avons pas ici prouvé une égalité, seulement une inclusion.
Notons qu'on pourrait également affirmer que $(\operatorname{Im} f) \subset (\operatorname{Ker} f)^\perp$, ce qui est équivalent à l'inclusion que nous avons donnée, et **n'est pas l'inclusion réciproque !**
Il va nous falloir utiliser un argument de dimension pour cela.

4.a. Puisque f est diagonalisable, $E = \displaystyle\bigoplus_{i=0}^{k} E_{\lambda_i}(f)$.

Et donc x, comme tout vecteur de E, s'écrit de manière unique

$$x = \sum_{i=0}^{k} x_i,\ (x_0, x_1, \dots, x_k) \in E_0(f) \times E_{\lambda_1}(f) \times \cdots \times E_{\lambda_k}(f).$$

4.b. Soit $j \in [\![0,k]\!]$. D'après la question 2, pour $i \neq j$, $E_{\lambda_i}(f)$ est orthogonal à $E_{\lambda_j}(f)$.
Ce qui s'écrit encore $E_{\lambda_i}(f) \subset E_{\lambda_j}(f)^{\perp} = \operatorname{Ker} p_j$.
Et donc
$$p_j(x) = \sum_{i=0}^{k} p_j(x_i) = p_j(x_j) + \sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k} \underbrace{p_j(x_i)}_{=0_E} = p_j(x_j) = \boxed{x_j.}$$

Détails
Puisque $x_j \in E_{\lambda_j}(f) = \operatorname{Im} p_j$, on a
$$p_j(x_j) = x_j.$$

5.a. Soit $x \in E$, et reprenons les notations précédentes : $x = x_0 + \cdots + x_k$.
Alors pour $i \neq j$, on a $p_j(x) = x_j \in E_{\lambda_j}(f) \subset E_{\lambda_i}(f)^{\perp} = \operatorname{Ker}(p_i)$.
Et donc $p_i(p_j(x)) = 0_E$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que
$$\boxed{p_i \circ p_j = \tilde{0}.}$$

Soit $x \in E$. Alors de manière unique, $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k$, avec $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$.
En particulier, pour $i \neq 0$, on a
$$x_i \in E_{\lambda_i}(f) \Leftrightarrow f(x_i)\lambda_i x_i \Leftrightarrow x_i = f\left(\frac{1}{\lambda_i}x_i\right).$$

Et par conséquent, $x_i \in \operatorname{Im} f$.
Puisque $\operatorname{Im} f$ est stable par combinaisons linéaires, $x_1 + \cdots + x_k \in \operatorname{Im} f$.
Et donc $x = x_0 + (x_1 + \cdots + x_k)$ est l'unique décomposition de x comme somme d'un élément de $\operatorname{Ker} f$ plus un élément de $\operatorname{Im} f$.
Et alors, par définition de p, $p(x) = x_1 + \cdots + x_k = p_1(x) + \cdots + p_k(x)$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, $\boxed{p = p_1 + \cdots + p_k.}$

Alternative : nous savons déjà que $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Ker} p)^{\perp}$. Et donc p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $(\operatorname{Im} p)^{\perp} = \operatorname{Ker} p$, alors que dans le même temps, p_0 est la projection sur $\operatorname{Ker} p$ parallèlement à $(\operatorname{Ker} p)^{\perp} = \operatorname{Im} p$.
Et donc p et p_0 sont liés par la relation $p + p_0 = \mathrm{id}$.
Or nous savons déjà que $\mathrm{id} = p_0 + p_1 + \cdots + p_k$, donc $p = p_1 + \cdots + p_k$.

Détails
Si vous n'êtes par convaincus par cette relation, écrivez $x \in E$ comme somme d'un élément de $\operatorname{Im} p$ plus un élément de $\operatorname{Ker} p$, et constatez que
$$(p + p_0)(x) = x.$$

6.a. On a
$$\begin{aligned} f \circ f^{\sharp} &= \left(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} p_j\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} p_i \circ p_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\lambda_i} p_i = \boxed{p.} \end{aligned}$$

Si $i \neq j$, alors $p_i \circ p_j = 0$.

6.b. Soient $x, y \in E$. Alors
$$f(x) = p(y) \Leftrightarrow f(x) - f(f^{\sharp}(y)) = 0_E \Leftrightarrow f\left(x - f^{\sharp}(y)\right) = 0_E \Leftrightarrow x - f^{\sharp}(y) \in \operatorname{Ker} f.$$

7.a. Lorsque z parcourt E, $f(z)$ parcourt $\operatorname{Im} f$. Et donc pour y fixé,
$$\inf_{z\in E} \|f(z) - y\| = \inf_{u \in \operatorname{Im} f} \|u - y\|.$$

Mais un théorème du cours nous garantit que cette borne inférieure est en réalité un minimum, atteint uniquement pour $u = p(y)$.
Et donc
$$\|f(x) - y\| = \inf_{z\in E} \|f(z) - y\| \Leftrightarrow f(x) = p(y) \Leftrightarrow x - f^{\sharp}(y) \in \operatorname{Ker} f.$$

7.b. Pour commencer, notons que
$$\|f(f^{\sharp}(y)) - y\| = \|p(y) - y\| = \min_{u\in \operatorname{Im} f} \|u - y\| = \inf_{z \in E} \|f(x) - y\|.$$

Il reste donc à montrer que si x est un autre vecteur vérifiant $\|f(x) - y\| = \inf_{z\in E} \|f(z) - y\|$, alors $\|x\| \geqslant \|f^{\sharp}(y)\|$.

Soit x un tel vecteur. D'après la question précédente, on a $x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f$.
Et donc $x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f$. Or, $f^\sharp(y) \in \operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.
Il vient alors, par le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|\underbrace{x - f^\sharp(y)}_{\in \operatorname{Ker} f} + \underbrace{f^\sharp(y)}_{\in (\operatorname{Ker} f)^\perp}\|^2 = \|f^\sharp(y)\|^2 + \|x - f^\sharp(y)\|^2.$$

Et donc $\|x\| \geqslant \|f^\sharp(y)\|$, avec égalité si et seulement si

$$\|x - f^\sharp(y)\| = 0 \Leftrightarrow x = f^\sharp(y).$$

Et donc $f^\sharp(y)$ est l'unique vecteur de norme minimale parmi ceux vérifiant $\|f(x) - y\| = \inf_{z\in E} \|f(z) - y\|$.

Unicité
Si on oublie d'étudier le cas d'égalité, on aura bien prouvé que $f^\sharp(y)$ est de norme minimale parmi les vecteurs vérifiant la condition requise, mais il se pourrait encore tout à fait qu'il existe plusieurs vecteurs ayant tous la même norme.

Partie II : Application à un exemple.

8. La base $\mathscr{B}$ est orthonormale, et A est symétrique, donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme symétrique.}}$
Il est évidemment non nul puisque $A \neq 0$.
Enfin, notons que la seconde et la dernière colonne de A sont proportionnelles, de sorte que $\operatorname{rg}(A) \leqslant 3 < 4$, et donc A n'est pas inversible, donc $\boxed{f \text{ n'est pas bijectif.}}$

9. Nous savons déjà que 0 est valeur propre de A car A n'est pas inversible.
De plus, notons que $A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, qui est de rang 2, car la première et la troisième colonne sont colinéaires, de même que la seconde et la dernière. Et de plus, la première et la seconde ne sont pas colinéaires.
Donc 2 est valeur propre de A et $\dim E_2(A) = 4 - \operatorname{rg}(A - 2I_4) = 2$.
Enfin, A étant symétrique, elle est diagonalisable, et elle possède donc une dernière valeur propre λ, et donc est semblable à $D = \operatorname{Diag}(0, 2, 2, \lambda)$.
Mais alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D) \Leftrightarrow 4 + \lambda = 8 \Leftrightarrow \lambda = 4$.
Et donc $\boxed{\operatorname{Spec}(A) = \{0, 2, 4\}.}$

Remarque
Notons que nous n'avons pas calculé le rang de A, et que l'on pourrait encore avoir $\lambda = 0$.

10. D'après la question 5.b, en notant que $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$, on a $f = 2p_1 + 4p_2$.
Et donc matriciellement, cela se traduit en $\boxed{A = 2M_1 + 4M_2.}$

11.a. Puisque $\sum_{i=0}^{2} \dim E_{\lambda_i}(f) = 4$, et que $\dim E_{\lambda_1}(f) = 2$ et $\dim E_{\lambda_0}(f) \geqslant 1$, nécessairement, $\dim E_{\lambda_2}(f) = 1$.
On a

$$A - 4I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

et les colonnes de cette matrice sont liées par la relation $C_1 = C_3 \Leftrightarrow C_1 - C_3 = 0$.
Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre 4.
Et donc $e_1 - e_3$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 4.
Pour trouver un vecteur unitaire de $E_{\lambda_2}(f)$, il suffit de diviser ce vecteur par sa norme. Or

$$\|e_1 - e_3\|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

de sorte que $\boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)}$ est un vecteur unitaire de $E_{\lambda_2}(f)$.

Rappel
Dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

11.b. Nous venons de prouver que v_2 est une base orthonormée de $E_{\lambda_2}(f)$.
Et donc une formule bien connue pour les projecteurs orthogonaux nous donne directement : $\boxed{\forall x \in E,\ p_2(x) = \langle x, v_2\rangle v_2.}$

11.c. On a $p_2(e_1) = \langle e_1, v_2\rangle v_2 = \dfrac{e_1 - e_3}{2}$, $p_2(e_3) = \langle e_3, v_2\rangle v_2 = \dfrac{e_3 - e_1}{2}$ et $p_2(e_2) = p_2(e_4) = 0_E$.
Et donc

$$M_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_2(e_1) & p_2(e_2) & p_2(e_3) & p_2(e_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}.$$

12. On a donc $M_1 = \dfrac{1}{2}(A - 4M_2)$ et par conséquent,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^\sharp) = \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{4}M_2 = \frac{1}{4}A - \frac{3}{4}M_2 = \boxed{\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

EML 2001

Problème 2 **Non relu**

Sujet : Endomorphismes cycliques **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : nombres complexes, diagonalisation

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : la présence de racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité fait que ce sujet est à la frontière du nouveau programme : abordable mais difficile.

Rappel : pour tout élément n de $\mathbf{N}^*$, l'équation $z^n = 1$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$, possède exactement n solutions distinctes qui sont

$$1, e^{i\theta}, e^{2i\theta}, \dots, e^{i(n-1)\theta} \text{ avec } \theta = \frac{2\pi}{n}.$$

Définitions : soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$.

- On note id_E l'application identique de E.
- Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = \mathrm{id}_E$, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.
- Soit $p \in \mathbf{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme est **cyclique d'ordre** p s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les conditions suivantes :
  - ⋆ $f^p(x_0) = x_0$
  - ⋆ la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E
  - ⋆ la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

  La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est alors appelée un **cycle** de f.

Partie I : Étude d'un exemple

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ de dimension 3, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $\mathscr{B}' = (e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.
2. Montrer que f est cyclique d'ordre 4 et que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f.
3. Montrer que $f^4 = \mathrm{id}_E$. En déduire un polynôme annulateur de f.
4. Montrer que f est diagonalisable, et déterminer une base de E formée de vecteurs propres de f.

Partie II : Cas général

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ de dimension n $(n \in \mathbf{N}^*)$, et on considère un endomorphisme f de E, cyclique d'ordre p. Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f.

5. Montrer que $p \geqslant n$.
6. Montrer que $f^p = \mathrm{id}_E$. En déduire que f est bijective.
7. On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0))$ est libre.
   a. Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.
   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à m, le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.
   c. En déduire que $m = n$ et que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
8. On note $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les n nombres complexes tels que

$$f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0).$$

   a. On considère l'endomorphisme g de E défini par $g = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.
   Montrer que $\forall k \in \mathbf{N}, g(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0)$.
   En déduire que $f^n = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.

b. Exprimer la matrice M de f dans la base $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ en fonction des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

c. Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \operatorname{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \geqslant n - 1.$$

En déduire que les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

9. On suppose dans cette question que f est cyclique d'ordre n (où $n = \dim E$).
Soit $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ un cycle de f.

a. Montrer que si un nombre complexe λ est valeur propre de f, alors $\lambda^n = 1$.

b. Déterminer la matrice de f dans la base $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$.

c. Montrer que f est diagonalisable en déterminant une base de E constituée de vecteurs propres de f.

EML 2001 : CORRIGÉ

PROBLÈME 2

Partie I : Étude d'un exemple

1. En utilisant la matrice, on a $f(e_1) = e_1 + e_2 - 2e_3$ et

$$f^2(e_1) = f(e_1+e_2-2e_3) = e_1+e_2-2e_3+2e_1+e_2-2e_3-4e_1-4e_2+6e_3 = -e_1-2e_2+2e_3.$$

Puisque $\mathcal{B}'$ est une famille de cardinal 3 dans un espace vectoriel de dimension 3, il s'agit de prouver qu'elle est libre.
Soient donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{C}^3$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 f(e_1) + \lambda_3 f^2(e_1) = 0$. Alors puisque (e_1, e_2, e_3) est une base[1] de E, il vient

[1] Et donc en particulier une famille libre.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 2\lambda_3 \\ \lambda_2 = \lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une famille libre de E : $\boxed{\text{c'est une base de } E.}$
De plus, on a

$$\begin{aligned} f(f^2(e_1)) = -f(e_1)-2f(e_2)+2f(e_3) &= -(e_1+e_2-2e_3)-2(2e_1+e_2-2e_3)+2(2e_1+2e_2-3e_3) \\ &= -e_1+e_2 = -e_1 - f(e_1) - f^2(e_1). \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$\boxed{\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(f(e_1)) & f(f^2(e_1)) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ f(e_1) \\ f^2(e_1) \end{array} \end{array}.}$$

2. Les conditions 2 et 3 définissant un endomorphisme cyclique d'ordre 4 sont bien vérifiées.
De plus, on a

$$f^4(e_1) = f(f^3(e_1)) = f(-e_1+e_2) = e_1.$$

Donc f est cyclique d'ordre 4, et $\boxed{(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)) \text{ est un cycle de } f.}$

Détails
La famille $(x_0, \dots, f^3(x_0))$ contient la base de la question 1, donc est évidemment génératrice.

3. Pour prouver que deux endomorphismes sont égaux, il suffit de vérifier qu'ils coïncident sur une base Montrons que f^4 et id_E coïncident sur la base $\mathcal{B}'$.
On a $f^4(e_1) = e_1$, $f^4(f(e_1)) = f(f^4(e_1)) = f(e_1)$ et $f^4(f^2(e_1)) = f^2(f^4(e_1)) = f^2(e_1)$.
Ainsi, on a bien $\boxed{f^4 = \mathrm{id}_E.}$
Un polynôme annulateur de f est alors $X^4 - 1$.

Détails
Si deux endomorphismes f et g coïncident sur une base, alors ils ont la même matrice dans cette base.
Et donc sont égaux.

4. Les racines de $X^4 - 1$ sont $\{1, -1, i, -i\}$, et ce sont donc les seules valeurs propres possibles de f.
Soit $x = x_1 e_1 + x_2 f(e_1) + x_3 f^2(e_1)$ un élément de E.
On a

$$f(x) = -x \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_3 = -x_1 \\ x_1 - x_3 = -x_2 \\ x_2 - x_3 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit que -1 est valeur propre de f et que $E_{-1}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 + f^2(e_1))$.
De même,

$$f(x) = ix \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_3 = ix_1 \\ x_1 - x_3 = ix_2 \\ x_2 - x_3 = ix_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -ix_1 \\ x_2 = (1-i)x_1 \end{cases}$$

Donc i est valeur propre de f et $E_i(f) = \mathrm{Vect}(e_1 + (1-i)f(e_1) - if^2(e_1))$.
Enfin,

$$f(x) = -ix \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_3 = -ix_1 \\ x_1 - x_3 = -ix_2 \\ x_2 - x_3 = -ix_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = ix_1 \\ x_2 = (1+i)x_1 \end{cases}$$

Donc $-i$ est valeur propre de f, et $E_{-i}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 + (1+i)f(e_1) + if^2(e_1))$.
Puisque f possède trois valeurs propres distinctes, f est diagonalisable, et de plus, par concaténation des bases des sous-espaces propres de f, une base de E formée de vecteurs propres de f est donnée par

$$\boxed{(e_1 + f^2(e_1), e_1 + (1-i)f(e_1) - if^2(e_1), e_1 + (1+i)f(e_1) + if^2(e_1)).}$$

Partie II : Cas général

5. Puisque $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice, son cardinal est supérieur ou égal à n. $\boxed{\text{Donc } p \geqslant n.}$

6. Par hypothèse, $f^p(x_0) = x_0$, et donc en appliquant f^k, $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $f^{k+p}(x_0) = f^k(x_0)$.
Or, la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E, donc si $x \in E$, il existe des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ tels que

$$x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0).$$

Et alors

$$f^p(x) = f^p\left(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0)\right) = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^{p+i}(x_0) = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x_0) = x.$$

Donc $\forall x \in E$, $f^p(x) = x$: on a bien $\boxed{f^p = \mathrm{id}_E.}$

On en déduit que f est bijective, et que $\boxed{f^{-1} = f^{p-1}.}$

7.a. Par définition, $(x_0, f(x_0), \dots, f^m(x_0))$ est une famille liée. Donc il existe des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbf{C}^{m+1}$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f^i(x_0) = 0.$$

> **Non tous nuls**
> Rappelons que non tous nuls n'est pas pareil que tous non nuls : cela signifie que l'un au moins de λ_i est non nul, mais les autres peuvent être nuls.

Supposons que $\lambda_m = 0$. Alors $\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$, et puisque la famille $(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre, cela signifie que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0$. Ceci contredit le fait que les scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ sont non tous nuls.
Donc $\lambda_m \neq 0$, et par conséquent

$$f^m(x_0) = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_m} f^i(x_0).$$

Ceci prouve donc que $\boxed{f^m(x_0) \text{ est combinaison linéaire de } x_0, \dots, f^{m-1}(x_0).}$

7.b. Montrons par récurrence que pour tout $k \geqslant m$, $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire de $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$, c'est-à-dire que $f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.
La question précédente prouve que le résultat est vrai pour $k = m$.
Supposons que $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire de $x_0, \dots, f^{m-1}(x_0)$, et soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$ tels que $f^k(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} f^i(x_0)$. Alors

$$f^{k+1}(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i f^{i+1}(x_0) = \sum_{i=0}^{m-2} \lambda_i f^{i+1}(x_0) + \lambda_{m-1} f^m(x_0).$$

Mais d'après la question précédente $f^m(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$, et donc $f^{k+1}(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$.
Par le principe de récurrence, on en déduit que

$$\boxed{\forall k \geqslant m, f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)).}$$

7.c. La famille $(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre par hypothèse.
On a alors $m \leqslant n$ (par cardinalité d'une famille libre), et donc par la question *a*, $m \leqslant p$.
La question précédente prouve que tout élément de la famille $(x_0, \dots, f^{p-1}(x_0))$ est combinaison linéaire de $(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$.
Mais $(x_0, \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E, ce qui signifie que tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de $(x_0, \dots, f^{p-1}(x_0))$. Et donc tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$. Par conséquent, $(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$ est génératrice de E : $\boxed{\text{c'est une base de } E.}$
Puisqu'il s'agit d'une base de E, de cardinal m, c'est donc que $\boxed{m = n.}$

8.a. Puisque g est un polynôme en f, f et g commutent. Et donc f^k et g commutent. Donc

$$g(f^k(x_0)) = f^k(g(x_0)) = f^k\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x_0)\right) = f^k(f^n(x_0)) = \boxed{f^{n+k}(x_0).}$$

En particulier, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$g(f^k(x_0)) = f^n(f^k(x_0)).$$

Autrement dit, les endomorphismes g et f^n coïncident sur la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$: ils sont donc égaux.

8.b. Puisque $f^n(e_1) = a_0 e_1 + a_1 f(e_1) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(e_1)$, la matrice M est donnée par

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & f(f(e_1)) & \dots & f(f^{n-2}(e_1)) & f(f^{n-1}(e_1)) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ f(e_1) \\ \vdots \\ f^{n-2}(e_1) \\ f^{n-1}(e_1) \end{array}.$$

8.c. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$. La matrice de $f - \lambda \mathrm{id}_E$ dans la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est

$$M - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Calculons son rang par la méthode du pivot :

$$M - \lambda I_n \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & 0 & a_1 \\ -\lambda & 0 & \dots & \vdots & a_0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & 0 & a_1 \\ 0 & -\lambda^2 & & \vdots & a_0 + \lambda a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & a_2 \\ 0 & -\lambda^2 & & \vdots & a_0 + \lambda a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \underset{L_3 + \lambda^2 L_2}{\longleftrightarrow} \cdots$$

De proche en proche, en répétant les opérations $L_i \leftrightarrow L_{i+1}$ et $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} + \lambda^i L_i$, on se ramène à une matrice triangulaire supérieure dont les $n-1$ premiers coefficients diagonaux sont non nuls (ils valent tous 1). Ceci signifie donc que le rang de $M - \lambda I_n$ est supérieur ou égal à $n-1$.

On a bien, comme annoncé, $\boxed{\operatorname{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \geqslant n-1.}$

Ainsi, si λ est une valeur propre de f, on a

$$\boxed{\dim E_\lambda(f) = n - \operatorname{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \leqslant n - (n-1) = 1.}$$

Comme de plus, pour λ valeur propre, on a toujours $\dim E_\lambda(f) = 1$, c'est que tous les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

9.a. Soit λ une valeur propre de f. Nous avons prouvé précédemment que $f^n = \mathrm{id}_E$ ce qui signifie que f est annulé par $X^n - 1$. Et donc λ doit être une racine de $X^n - 1$, donc vérifier $\lambda^n = 1$.

9.b. Si $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est un cycle, par définition $f^n(x_0) = x_0$. Et donc les coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$ étudiés précédemment sont tous nuls, sauf a_0 qui vaut 1. On en déduit que la matrice de f dans la base $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

9.c. Notons que nous avons prouvé que f possède au plus n valeurs propres (qui sont parmi $1, e^{i\theta}, \dots, e^{i(n-1)\theta}$, avec $\theta = \frac{2\pi}{n}$), et que les sous-espaces propres sont tous de dimension un.

Montrer que f est diagonalisable, c'est prouver qu'il y a bien n valeurs propres distinctes, et donc que $1, e^{i\theta}, \dots, e^{i(n-1)\theta}$ sont tous des valeurs propres de f.

Soit donc $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrons que $e^{ik\theta}$ est valeur propre de f.

Pour cela, il suffit de montrer que l'équation $MX = e^{ik\theta}X$ possède au moins une solution non nulle :

$$MX = e^{ik\theta}X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e^{ik\theta} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = e^{ik\theta} x_1 \\ x_1 = e^{ik\theta} x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = e^{ik\theta} x_n \end{cases}$$

Alors $X_k = \begin{pmatrix} e^{i(n-1)k\theta} \\ \vdots \\ e^{2ik\theta} \\ e^{ik\theta} \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution du système, car $\left(e^{ik\theta}\right)^n = 1$.

De plus, puisque $E_{e^{ik\theta}}(M)$ est de dimension un par la question 4.c, nécessairement X_k est une base de $E_{e^{ik\theta}}(M)$.

Et les sous-espaces propres de M étant en somme directe, par concaténation des bases des sous-espaces propres, $(X_0, \dots, X_{n-1})$ est une base de $M_{n,1}(\mathbf{C})$ formée de vecteurs propres de M.

On en déduit que M est diagonalisable, et donc $\boxed{f \text{ est également diagonalisable.}}$

EML 1999

Problème 1

Sujet : Diagonalisation d'une matrice de Toeplitz

Moyen

Abordable en première année : ✗

Intérêt : ★★☆

Thèmes du programme abordés : diagonalisation, suites récurrentes, trigonométrie.

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Modifications apportées au sujet d'origine : reformulation des dernières questions.

Notations

- n désigne un entier supérieur ou égal à 3
- $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficient réels.
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est muni du produit scalaire canonique noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \forall Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \langle X, Y\rangle = {}^tXY = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- A_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le coefficient à la i-ème ligne et j-ème colonne est $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi, par exemple, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie I : Détermination des valeurs propres de A_n.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A_3.
2. Soit $\theta \in]0, \pi[$. On désigne par S_θ l'ensemble des suites réelles $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telles que $s_0 = 0$ et pour tout entier naturel k, $s_{k+2} - 2\cos(\theta)s_{k+1} + s_k = 0$.

   Montrer que, si la suite $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ appartient à S_θ, alors pour tout entier naturel k : $s_k = s_1 \dfrac{\sin(k\theta)}{\sin\theta}$.

   En déduire que S_θ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles, engendré par la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ définie par

$$\forall k \in \mathbf{N}, u_k = \frac{\sin(k\theta)}{\sin\theta}.$$

3. Soit λ une valeur propre réelle de A_n, et soit $X_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ.

   On note m le plus grand des réels $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$.

   a. Montrer que :
      - $\lambda x_1 = x_2$
      - $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $\lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$
      - $\lambda x_n = x_{n-1}$

      En déduire que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda||x_k| \leqslant 2m$, puis que $|\lambda| \leqslant 2$.

   b. On suppose que $|\lambda| < 2$. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\lambda = 2\cos\theta$.

      Montrer que la suite $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de S_θ déterminée par $s_1 = x_1$ vérifie : $\begin{cases} \forall k \in [\![1, n]\!],\ s_k = x_k \\ s_{n+1} = 0 \end{cases}$

      En déduire qu'il existe un entier p de $[\![1, n]\!]$ tel que $\theta = \dfrac{p\pi}{n+1}$.

Pour tout entier p de $[\![1, n]\!]$, on note $\theta_p = \dfrac{p\pi}{n+1}$, $\lambda_p = 2\cos\theta_p$ et $X_p = \begin{pmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{pmatrix}$.

4. a. Pour tout $a, b \in \mathbf{R}$, exprimer $\sin(a-b)+\sin(a+b)$ en fonction de $\sin a$ et $\cos b$.

   b. En déduire que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, λ_p est valeur propre de A_n et que X_p est un vecteur propre associé à λ_p.

5. En déduire que $\mathrm{Spec}(A_n) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ et que $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Partie II : Diagonalisation de A_n

6. Soit $U_n = (u_{p,q})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de terme général $u_{p,q} = \sin \dfrac{pq\pi}{n+1}$.
   Montrer, à l'aide de la question 5 que U_n est inversible, et déterminer la matrice $D_n \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $D_n = U_n^{-1} A_n U_n$.

7. a. Montrer que pour tout couple $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$, $\lambda_p {}^tX_p X_q = \lambda_q {}^tX_p X_q$.
   En déduire que la base $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est orthogonale.

   b. Montrer, pour tout p de $[\![1, n]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta_p) = 0$.

   En déduire que, pour tout entier p de $[\![1, n]\!]$, on a : $\|X_p\|^2 = \dfrac{n+1}{2}$.

   c. En déduire que $U_n^2 = \dfrac{n+1}{2} I_n$, puis $A_n = \dfrac{2}{n+1} U_n D_n U_n$.

EML 1999 : CORRIGÉ

Partie I : Détermination des valeurs propres de A_n.

1. λ est valeur propre de A_3 si et seulement $\mathrm{rg}(A_3 - \lambda I_3) < 3$. Or on a

$$A_3 - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda^2-1)L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda - \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, λ est valeur propre de A_3 si et seulement si $2\lambda - \lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda^2) = 0$.
On en déduit que $\mathrm{Spec}(A_3) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.
De plus, comme on a trois valeurs propres distinctes[1], nous savons déjà que chacun des sous-espaces propres de A_3 est de dimension 1.

[1] Et que A_3 est une matrice de taille 3.

On a $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A_3)$ si et seulement si

$$A_3X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases} \quad \text{Donc } \boxed{E_0(A_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).}$$

De même, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\sqrt{2}}(A_3)$ si et seulement si $AX = \sqrt{2}X$ soit

$$\begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ x + z = \sqrt{2}y \\ y = \sqrt{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ 2x = \sqrt{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \sqrt{2}x \end{cases}$$

Et donc $E_{\sqrt{2}}(A_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Enfin, on prouverait de même que $E_{-\sqrt{2}}(A_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Remarque
Comme prévu, notons que nous avons bien obtenu trois sous-espaces propres de dimension 1.

2. Si (s_k) est une suite de S_θ, alors il s'agit d'une suite récurrente linéaire, dont l'équation caractéristique est $\lambda^2 - 2\cos(\theta)\lambda + 1 = 0$, de discriminant égal à

$$\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = 4(\cos^2(\theta) - 1) = -4\sin^2(\theta) < 0.$$

Donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées qui sont

$$\lambda_1 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = e^{i\theta} \text{ et } \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = e^{-i\theta}.$$

Complexes
Nous donnons ces deux racines sous forme exponentielle, ce qui permet de voir directement qu'elles sont de module 1 et d'argument $\pm\theta$.

On en déduit qu'il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall k \in \mathbf{N}, s_k = A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta).$$

Comme de plus $s_0 = 0$, alors

$$\begin{cases} 0 = A \\ s_1 = B\sin(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{s_1}{\sin\theta} \end{cases}$$

Et donc, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $s_k = B\sin(k\theta) = s_1\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}$.
Inversement, si (s_k) est une suite telle que $\forall k \in \mathbf{N}, s_k = s_1\dfrac{\sin(k\theta)}{\sin\theta}$, alors[2] elle vérifie la

[2] En effet, elle est de la forme $A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta)$, donc elle fait partie de l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence.

relation de récurrence, et de plus $s_0 = \sin(0) = 0$. Et donc $(s_k) \in S_\theta$.
Ainsi,

$$S_\theta = \{(s_k) : \exists \lambda \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{N}, s_k = \lambda u_k\} = \{(\lambda u_k), k \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}((u_k)).$$

Et donc S_θ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites, engendré par la suite (u_k).

> **Détails** Ce Vect est pris dans l'espace vectoriel des suites réelles (qui est très gros).

3.a. Par définition, on a $A_n X = \lambda X$. Soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}$$

Pour $k = 1$, on a $|\lambda||x_1| = |x_2| \leqslant m \leqslant 2m$.
De même, pour $k = n$, on a $|\lambda||x_n| = |x_{n-1}| \leqslant m \leqslant 2m$.
Pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, alors

$$|\lambda||x_k| = |x_{k-1} + x_{k+1}| \leqslant |x_{k-1}| + |x_{k+1}| \leqslant 2m.$$

Ainsi, on a bien, $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], |\lambda| \cdot |x_k| \leqslant 2m.}$
En particulier, si $i \in [\![1, n]\!]$ est tel que $m = |x_i|$. Alors $|\lambda||x_i| = |\lambda| m \leqslant 2m$ et en divisant[3] par $m \neq 0$, il vient $|\lambda| \leqslant 2$.

> **Maximum** Autrement dit, i est le numéro d'une ligne telle que $|x_i|$ soit maximal.

[3] Il est légitime de diviser par m car X est un vecteur propre, donc non nul, de sorte que l'un au moins de ses coefficients est non nul, donc $m \neq 0$.

3.b. Si $|\lambda| < 2$, alors $-1 < \dfrac{\lambda}{2} < 1$. Puisque la fonction $\theta \mapsto \sin\theta$ réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur $]-1, 1[$, il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\frac{\lambda}{2} = \sin\theta \Leftrightarrow \lambda = 2\sin\theta$.
La suite (s_k) vérifie $s_0 = 0$ et donc $s_2 = 2\cos\theta s_1 = \lambda s_1 = \lambda x_1 = x_2$.
Montrons par récurrence double sur k que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $s_k = x_k$.
Nous venons de prouver que $s_1 = x_1$ et $s_2 = x_2$.
Supposons donc que pour $k \leqslant n-1$, on ait $s_{k-1} = x_{k-1}$ et $s_k = x_k$. Alors

$$s_{k+1} = 2\cos(\theta) s_k - s_{k-1} = \lambda x_k - x_{k-1} = x_{k+1}$$

> **Détail** On a ici utilisé le résultat de la question précédente : puisque X_n est un vecteur propre, on a
> $$\lambda x_k - x_{k-1} = x_{k+1}.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$, et donc par le principe de récurrence (double), pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $s_k = x_k$.
Enfin, puisqu'on a $\lambda x_n = x_{n-1} \Leftrightarrow \lambda s_n = s_{n-1}$, il vient

$$s_{n+1} = 2\cos(\theta) s_n - s_{n-1} = \lambda s_n - s_{n-1} = 0.$$

D'autre part, nous savons que $s_{n+1} = x_1 \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = 0$.
Supposons que x_1 soit nul. Alors

$$\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = s_k = x_1 \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} = 0 \text{ et donc } X_n = 0.$$

Ceci est contradictoire avec le fait que X_n est un vecteur propre de A_n, et donc non nul.
Ainsi, $x_1 \neq 0$, et par conséquent, $\sin(n+1)\theta = 0$.
Il existe donc $p \in \mathbf{N}$ tel que $(n+1)\theta = p\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{p\pi}{n+1}$.
Comme de plus, $\theta \in]0, \pi[$, alors $p \in [\![1, n]\!]$.

4.a. On a $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$, de sorte que

$$\boxed{\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b).}$$

4.b. Il s'agit de montrer que $A_n X_p = \lambda_p X_p$. Mais on a

$$A_n X_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta_p \\ \sin(2\theta_p) \\ \vdots \\ \vdots \\ \sin(n\theta_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\theta_p) \\ \sin(\theta_p) + \sin(3\theta_p) \\ \vdots \\ \sin((n-2)\theta_p) + \sin(n\theta_p) \\ \sin((n-1)\theta_p) \end{pmatrix}$$

Or, pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$,

$$\sin((k-1)\theta_p) + \sin((k+1)\theta_p) = \sin(k\theta_p - \theta_p) + \sin(k\theta_p + \theta_p) = 2\cos(\theta_p)\sin(k\theta_p).$$

De même, on a $\sin(2\theta_p) = 2\cos(\theta_p)\sin(\theta_p)$ et

$$2\cos(\theta_p)\sin(n\theta_p) = \underbrace{\sin((n+1)\theta_p)}_{=0} + \sin((n-1)\theta_p) = \sin((n-1)\theta_p).$$

On en déduit que

$$A_nX_p = \begin{pmatrix} 2\cos\theta_p\sin(\theta_p) \\ 2\cos(\theta_p)\sin(2\theta_p) \\ \vdots \\ 2\cos(\theta_p)\sin((n-1)\theta_p) \\ 2\cos(\theta_p)\sin(n\theta_p) \end{pmatrix} = \lambda_p X_p.$$

Donc λ_p est bien valeur propre de A_n, et X_p est un vecteur propre[4] associé à la valeur propre λ_p.

5. Nous avons donc obtenu à la question précédente n valeurs propres de A_n. Il s'agit bien de valeurs propres distinctes car pour tout $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$, si $p \neq q$, alors $\theta_p \neq \theta_q$. Comme la fonction cosinus est injective sur $]0,\pi[$, on en déduit que $\lambda_p \neq \lambda_q$.
Comme A_n ne peut avoir plus de n valeurs propres distinctes, on a donc bien

$$\mathrm{Spec}(A_n) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Et, A_n possédant n valeurs propres distinctes, les sous-espaces propres associés sont tous de dimension 1.
Nous avons prouvé à la question précédente que $X_p \in E_{\lambda_p}(A_n)$, et donc $E_{\lambda_p}(A_n) = \mathrm{Vect}(X_p)$.
Enfin, on a[5] $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) = \bigoplus_{p=1}^{n} E_{\lambda_p}(A_n)$, et donc la concaténation de bases des sous-espaces propres forme une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. En particulier, $\boxed{(X_1, \dots, X_n) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}).}$

[4] Il est évident que $X_p \neq 0$, par exemple car

$$0 < \theta_p < \pi$$

et donc $\sin\theta_p \neq 0$.

[5] toujours car A_n possède n valeurs propres distinctes

Partie II : Diagonalisation de A_n

6. Il s'agit de remarquer que U_n est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ à la base $(X_1, \dots, X_n)$. Par conséquent, elle est inversible.
De plus, A_n est la matrice, dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de l'endomorphisme $f_{A_n} : X \mapsto A_nX$.
Par la formule de changement de base, on a D_n qui est la matrice de f_{A_n} dans la base $(X_1, \dots, X_n)$.
Mais pour tout $p \in [\![1,p]\!]$, on a $f_{A_n}(X_p) = A_nX_p = \lambda_pX_p$, de sorte que

$$D_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En effet

La q-ème colonne de U_n est

$$\begin{pmatrix} \sin\frac{q\pi}{n+1} \\ \vdots \\ \sin\frac{nq\pi}{n+1} \end{pmatrix} = X_q$$

7.a. Pour $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$\lambda_p{}^tX_pX_q = {}^t(\lambda_pX_p)X_p = {}^t(A_nX_p)X_q = {}^tX_p{}^tA_nX_q = {}^tX_p(A_nX_q) = {}^tX_p(\lambda_qX_q) = \lambda_q{}^tX_pX_q.$$

En particulier, si $p \neq q$, alors on a

$$\lambda_p\langle X_p, X_q\rangle = \lambda_q\langle X_p, X_q\rangle \Leftrightarrow (\lambda_p - \lambda_q)\langle X_p, X_q\rangle = 0.$$

Or $\lambda_p \neq \lambda_q$, et donc $\boxed{\langle X_p, X_q\rangle = 0.}$ Par conséquent, $\boxed{\text{la base } (X_1, \dots, X_n) \text{ est orthogonale.}}$

7.b. Pour $k \in \mathbf{N}$, on a $\cos(2k\theta_p) = \mathrm{Re}(e^{2ik\theta_p})$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta_p) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{2ik\theta_p}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(e^{2i\theta_p}\right)^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2i(n+1)\theta_p} - 1}{e^{2i\theta_p} - 1}\right).$$

Mais $e^{2i(n+1)\theta_p} = e^{2ip\pi} = 1$. Et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta_p) = 0.}$$

On a, par définition de la norme

$$\|X_p\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \sin^2(k\theta_p) = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta_p).$$

De plus, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $\cos(2k\theta_p) = 1 - 2\sin^2(k\theta_p)$, de sorte que

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta_p) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \left(1 - 2\sin^2(k\theta_p)\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta_p) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{n+1}{2}.$$

Et donc, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $\boxed{\|X_p\| = \sqrt{\frac{n+1}{2}}.}$

7.c. La base $(X_1, \dots, X_n)$ est orthogonale et formée de vecteurs de norme $\sqrt{\frac{n+1}{2}}$ de sorte que $\mathscr{B} = \left(\sqrt{\frac{2}{n+1}}X_1, \dots, \sqrt{\frac{2}{n+1}}X_n\right)$ est une base orthonormée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
De plus, la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ à cette base $\mathscr{B}$ est alors $\sqrt{\frac{2}{n+1}}U_n$.
En tant que matrice de passage entre bases orthonormées, cette matrice est orthogonale, de sorte que

$$\sqrt{\frac{2}{n+1}}{U_n}^t\left(\sqrt{\frac{2}{n+1}}U_n\right) = I_n \Leftrightarrow {U_n}^t U_n = \frac{n+1}{2}I_n.$$

Comme de plus, U_n est symétrique[6], il vient donc

$$U_n^2 = \frac{n+1}{2}I_n \Leftrightarrow U_n^{-1} = \frac{2}{n+1}U_n.$$

Et donc

$$A_n = U_n D_n U_n^{-1} \Leftrightarrow \boxed{A_n = \frac{2}{n+1}U_n D_n U_n.}$$

Rappel

La base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est orthonormée **pour le produit scalaire canonique de** $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, qui est celui que l'on considère ici.

[6] En effet, pour tous p, q, on a

$$u_{p,q} = \sin\frac{pq\pi}{n+1} = u_{q,p}.$$

3 EDHEC

EDHEC-3 2018

Ce sujet est le sujet qui a été reprogrammé le 18 mai 2018. Il s'agit de l'épreuve qui a finalement compté lors des concours.

Exercice 1

Sujet : Étude d'une suite et d'une série définies par une équation implicite. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : Suites, séries numériques

Commentaires : la question 3.b est plutôt technique, le reste est assez classique.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbf{R}_+,\ f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue x possède une seule solution notée u_n.
2. a. Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
   b. En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
   c. Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
   d. Montrer par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   a. Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$.
   b. Établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\dfrac{-\ln v_n}{nv_n}\right)}{\ln v_n} = 0$ et en déduire que : $\ln v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n$.
   c. Montrer enfin que : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.
4. Donner la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2.

Exercice 2

Sujet : Endomorphismes antisymétriques de $\mathbf{R}^3$. **Facile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★☆☆

Thèmes du programme abordés : Matrices, produits scalaires, supplémentaire orthogonal

On considère l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$, muni du produit scalaire noté $\langle\, ,\, \rangle$ défini par :

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbf{R}^3\right)^2,\ x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3),\ \langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

La norme du vecteur x est alors définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
On considère un endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ qui vérifie la condition suivante :

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbf{R}^3\right)^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle.$$

1. Établir que : $\forall x \in \mathbf{R}^3,\ \langle f(x), x\rangle = 0$.
2. On admet que tout endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ admet au moins une valeur propre réelle. Montrer, en utilisant l'égalité obtenue à la question 1, que 0 est la seule valeur propre réelle de f.

Dans la suite, on se propose de montrer qu'il existe une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{avec } \alpha \text{ réel.}$$

3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{R}^3$.
4. Résoudre le problème posé si $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3$.
5. On suppose, dans cette question, que $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$.

a. Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$, où e_1 appartient à $\operatorname{Im}(f)$ et où (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\operatorname{Ker}(f)$.

b. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Vérifier que $\operatorname{Im}(f)$ est stable par f, puis montrer que b et c sont nuls.

d. En considérant le réel $\langle f(e_1), e_1 \rangle$, donner la valeur de a. Que dire de l'hypothèse $\dim \operatorname{Ker}(f) = 2$?

6. On suppose, dans cette question, que $\dim \operatorname{Ker}(f) = 1$.

a. Montrer que l'on peut trouver une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$, où (e_1, e_2) est une base orthonormale de $\operatorname{Im}(f)$ et où e_3 appartient à $\operatorname{Ker}(f)$.

b. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Montrer que a et d sont nuls et que $c = -b$.

d. Conclure.

Exercice 3

Sujet : Étude d'une variable à densité (loi de Rayleigh)

Facile

Abordable en première année : ✗

Intérêt : ★★☆

Thèmes du programme abordés : Variables à densité, `Scilab`

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et on pose $Y = \sqrt{X}$.

1. On rappelle qu'en `Scilab` , la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire une (ou des) commande(s) `Scilab` utilisant `grand` et permettant de simuler Y.

2. a. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

   b. En déduire que Y est une variable à densité, et donner une densité f_Y de Y.

3. a. Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.

   b. En déduire que Y a une espérance et donner sa valeur.

4. On pose $U = 1 - e^{-X/2}$.

   a. Vérifier que $U(\Omega) = [0, 1[$.

   b. Déterminer la fonction de répartition F_U de U et reconnaître la loi de U.

   c. Exprimer X en fonction de U, puis en déduire une simulation `Scilab` de Y utilisant uniquement la fonction `rand`.

Problème — Non corrige

Abordable en première année : ✗

Dans ce problème, on désigne par λ un réel strictement positif.
On admet que toutes les variables aléatoires présentées dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

On s'intéresse aux appels parvenant à un central téléphonique et on suppose, d'une part, qu'ils arrivent de façon indépendante au central, et d'autre part, que le nombre d'appels reçus par le central pendant un certain intervalle de temps est indépendant du nombre d'appels reçus par le central pendant un intervalle de temps disjoint du précédent.

Pour tout réel t positif, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus par le central pendant l'intervalle de temps $[0, t]$ et on pose, pour tout entier naturel n : $p_n(t) = P(N_t = n)$.

1. Justifier que $p_0(0) = 1$ et $p_n(0) = 0$ pour n supérieur ou égal à 1. En déduire la loi de N_0.

On admet que, pour tout entier naturel n, p_n est dérivable sur $\mathbf{R}_+$, et que :

$$\forall t \geqslant 0, \begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \\ \forall n \in \mathbf{N}^*, \ p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \end{cases}$$

2. Pour tout entier naturel n et pour tout réel t positif, on pose : $f_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t)$.
   a. Montrer que la fonction f_0 est constante, puis utiliser la première questions pour déterminer cette constante.
   b. Exprimer, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $f_n'(t)$ en fonction de λ et $f_{n-1}(t)$.
   c. On suppose que, pour un certain entier naturel n non nul, on a : $\forall t \geqslant 0,\ f_{n-1}(t) = \dfrac{(\lambda t)\, n-1}{(n-1)!}$.
      i. Montrer qu'il existe une constante K telle que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \geqslant 0,\ f_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} + K$.
      ii. En utilisant la valeur de $p_n(0)$ pour n supérieur ou égal à 1, donner enfin, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, l'expression explicite de $f_n(t)$ en fonction de λ, n et t.
3. a. Donner $p_n(t)$ pour tout entier naturel n et pour tout réel t positif.
   b. Conclure que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt
4. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note S_n la variable aléatoire égale à l'instant où survient le $n^{\text{ème}}$ appel.
   a. Comparer, pour tout réel t positif, les événements $[S_1 > t]$ et $[N_t = 0]$ puis reconnaître la loi de S_1.
   b. Comparer, pour tout réel t positif, les événements : $[S_n > t]$ et $[N_t \leqslant n-1]$.
   c. Montrer que S_n est une variable aléatoire à densité dont une densité est la fonction f_n définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Soit (t, u) un couple de réels positifs tels que $u < t$.
   a. Justifier sans calcul que les variables aléatoires N_u et $N_t - N_u$ sont indépendantes.
   b. Établir l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbf{N},\ P(N_t = n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(N_u = i) P(N_t - N_u = n-i)$.
   c. En déduire la valeur de $P(N_t - N_u = 0)$ puis celle de $P(N_t - N_u = 1)$.
   d. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N},\ P(N_t - N_u = n) = \dfrac{[\lambda(t-u)]^n}{n!} e^{-\lambda(t-u)}$.
6. On pose, pour tout ω de Ω, $R_t(\omega) = \begin{cases} S_{N_t(\omega)} & \text{si } N_t(\omega) \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } N_t(\omega) = 0 \end{cases}$ et on admet que R_t est une variable aléatoire.
   a. Décrire ce que représente la variable aléatoire R_t.
   b. Utiliser le système complet d'événements $([N_t = n])_{n \in \mathbf{N}}$ pour montrer que :

$$\forall t > 0,\ \forall u \in [0, t],\ P(R_t > u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P([N_u = i] \cap [N_t - N_u = n-i]).$$

   c. Montrer enfin que la fonction de répartition de R_t est la fonction F_t définie par :

$$F_t(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ e^{-\lambda(t-u)} & \text{si } 0 \leqslant u \leqslant t \\ 1 & \text{si } u > t \end{cases}$$

   d. La variable R_t est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

EDHEC-3 2018 : Corrigé

Exercice 1

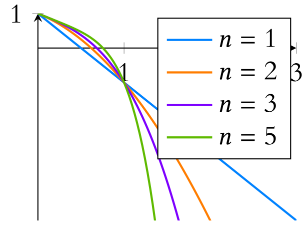


Figure 1– La fonction f_n pour quelques valeurs de n.

1. La fonction f_n est continue sur $\mathbf{R}_+$, et elle y est même dérivable, avec $f_n'(x) = -1-nx^{n-1} < 0$. Donc f_n est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Puisque d'autre part, $f_n(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$, par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbf{R}_+$ sur $]-\infty, 1]$.
Par conséquent, $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur } \mathbf{R}_+.}$

2.a. On a $f_n(0) = 1 > 0 = f(u_n)$, donc par décroissance de f_n, $\boxed{u_n > 0.}$
Et d'autre part, $f_n(1) = -1 < 0 = f_n(u_n)$, donc par décroissance de f_n, $u_n < 1$.
Ainsi, on a bien $\boxed{u_n \in]0,1[.}$

2.b. Puisque $u_n \in]0,1[$, on a $u_n^{n+1} < u_n^n$. Et donc

$$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} > 1 - u_n - u_n^n = f_n(u_n) = 0.$$

On a donc $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$ et donc par décroissance de f_{n+1}, cela implique $u_n < u_{n+1}$.
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$[1].

2.c. La suite (u_n) est croissante, et majorée[2], et donc par le théorème de la limite monotone, elle converge.
De plus, puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 < u_n < 1$, il vient alors $\boxed{0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant 1.}$

2.d. Supposons par l'absurde que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n < 1$.
On aurait alors, par continuité du logarithme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell) < 0$ de sorte que $n\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Mais $u_n = 1 - u_n^n = 1 - e^{n\ln u_n}$, et donc par passage à la limite, $\ell = 1 - 0 = 1$, ce qui est absurde.
Et donc on a bien $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.}$

3.a. Puisque $u_n \in]0,1[$, alors on a $v_n \in]0,1[$.
D'autre part, $f_n(u_n) = 0$ s'écrit encore $v_n = u_n^n$.
Soit $\ln(v_n) = n\ln(u_n) = n\ln(1 + (u_n - 1)) = n\ln(1 - v_n)$.
Puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, l'équivalent classique $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ nous donne alors $\ln(1 - v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$.
Et donc $\boxed{\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n.}$

3.b. L'équivalent de la question précédente nous indique que $\dfrac{\ln v_n}{-nv_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(-\dfrac{\ln v_n}{nv_n}\right) = 0$.
D'autre part, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln v_n = -\infty$.
Par quotient de limites, on a donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(-\frac{\ln v_n}{nv_n}\right)}{\ln v_n} = 0.}$$

Ce qui s'écrit aussi sous la forme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln v_n) - \ln(n) - \ln(v_n)}{\ln v_n} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln v_n) - \ln n}{\ln v_n} = 1.$$

Mais puisque $-\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, il vient donc par composition de limites

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln v_n)}{-\ln(v_n)} = 0.$$

[1] Et même strictement croissante.

[2] Par 1 d'après la question 2.a.

⚠ Attention !
Le passage à la limite transforme les inégalités strictes en inégalités larges : on ne peut pas affirmer que

$$0 < \lim_{n\to+\infty} u_n < 1.$$

Et donc
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-\ln n}{\ln v_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(-\ln v_n)-\ln(n)}{\ln v_n}-\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(-\ln v_n)}{\ln v_n}=1.$$

Et donc $\boxed{\ln v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n.}$

3.c. Grâce aux équivalents des deux questions précédentes, on a $-nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln n$.

Et par conséquent, $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.}$

4. Pour $n \geqslant 3$, on a $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{\ln n}{n}$. Puisque la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, il en est donc de même de la série de terme général $\frac{\ln n}{n}$.
Et donc par le critère des équivalents pour les séries à termes **positifs**, on en déduit que la série de terme général v_n diverge.

> **Remarque**
> Cette majoration n'est pas valable pour $n = 1$ ou $n = 2$, mais comme les premiers termes ne changent rien à la nature de la série, le raisonnement qui suit reste valable.

D'autre part, on a $n^{3/2}v_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
Et donc $v_n^2 = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
Puisque la série[3] de terme général $\frac{1}{n^{3/2}}$ converge, il en est de même de la série de terme général v_n.

[3] De Riemann.

Exercice 2

1. Soit $x \in \mathbf{R}^3$. Prenons alors $x = y$ dans la condition vérifiée par f, de sorte que
$$\langle f(x), x\rangle = -\langle x, f(x)\rangle = -\langle f(x), x\rangle.$$

On en déduit donc[4] que $\boxed{\langle f(x), x\rangle = 0.}$

2. Soit λ une valeur propre[5] réelle de f, et soit x un vecteur propre associé. Alors
$$\langle f(x), x\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \lambda x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda\|x\|^2 = 0.$$

Mais puisque x est un vecteur propre de f, il est non nul, de sorte que $\|x\| \neq 0$.
On en déduit donc que $\lambda = 0$, et donc $\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre réelle de } f.}$

[4] Le seul réel égal à son opposé est zéro.
[5] Le résultat admis dans l'énoncé nous garantit qu'une valeur propre existe.

3. Commençons par prouver que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux.
Soit donc $y \in \mathrm{Im}(f)$ et $x \in \mathrm{Ker}(f)$.
Alors $f(x) = 0_E$, et il existe $z \in \mathbf{R}^3$ tel que $y = f(z)$. Et donc
$$\langle x, y\rangle = \langle x, f(z)\rangle = -\langle \underbrace{f(x)}_{=0_E}, z\rangle = 0.$$

Et donc x et y sont orthogonaux, de sorte que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux.
Ceci implique notamment qu'il sont en somme directe, et donc que $\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
D'autre part, par le théorème du rang, on a $\dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathbf{R}^3$, et donc[6] $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires.
Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}(f) \text{ et } \mathrm{Ker}(f) \text{ sont supplémentaires orthogonaux.}}$

[6] Car on a déjà prouvé que
$$\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

4. Si $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3$, alors par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}(f) = 0$, de sorte que $\mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ et donc f est l'endomorphisme nul.
Ainsi, la matrice de f dans n'importe quelle base de $\mathbf{R}^3$ est la matrice nulle, qui est bien de la forme souhaitée, avec $\alpha = 0$.
Et donc toute base de $\mathbf{R}^3$ vérifie bien la condition requise.

5.a. Si $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$, alors $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$.
Soit e_1 une base orthonormée de $\mathrm{Im}(f)$ et (e_2, e_3) une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(f)$.
Alors, la concaténation $\mathscr{B}$ de ces deux bases forme une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$, qui satisfait bien aux conditions requises.

> **Rappel**
> Pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^3$, la concaténation d'une base orthonormée de F et d'une base orthonormée de $F^\perp$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$.
> Ici on l'applique avec $F = \mathrm{Im}(f)$, car d'après la question 3, $F^\perp = \mathrm{Ker}(f)$.

5.b. Le vecteur $f(e_1)$ s'écrit de manière unique $f(e_1) = ae_1 + be_2 + ce_3$ où a, b, c sont des réels.
D'autre part, $f(e_2) = f(e_3) = 0_E$. Et donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & \\ \end{array}$$

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}.$$

5.c. C'est du cours : pour tout endomorphisme f, $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f. La preuve en est très simple : si $x \in \mathrm{Im}(f)$, $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, et donc $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f.
Par conséquent, $f(e_1) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1)$, et donc il existe un unique réel λ tel que $f(e_1) = \lambda e_1$.
Et donc, par unicité de l'écriture de $f(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$,

$$f(e_1) = \lambda e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 = ae_1 + be_2 + ce_3,$$

de sorte que $\boxed{b = c = 0.}$

5.d. Puisque $f(e_1) = ae_1$, on a

$$\langle f(e_1), e_1\rangle = \langle ae_1, e_1\rangle = a\langle e_1, e_1\rangle = a\|e_1\|^2 = a.$$

> **Détails**
> Puisque $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, $\|e_1\| = 1$.

Or, nous savons d'après la question 1 que $\langle f(e_1), e_1\rangle = 0$ et donc $a = 0$.
On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = 0$, et donc f est l'endomorphisme nul.
Par conséquent, $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3$, contredisant le fait que $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$.
Ainsi, $\boxed{\text{le cas où } \dim \mathrm{Ker}(f) = 2 \text{ n'est pas possible.}}$

6.a. Il s'agit du même raisonnement qu'à la question 5.a, en notant cette fois que $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$.

6.b. Comme à la question 5.c, $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f, et donc $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont dans $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.
Donc de manière unique, $f(e_1) = ae_1 + ce_2$ et $f(e_2) = be_1 + de_2$.
Et puisque $e_3 \in \mathrm{Ker}(f)$, $f(e_3) = 0_E$, de sorte que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}.$$

6.c. On a toujours $\langle f(e_1), e_1\rangle = 0$. Or,

$$\langle f(e_1), e_1\rangle = \langle ae_1 + ce_2, e_1\rangle = a\langle e_1, e_1\rangle + c\langle e_2, e_1\rangle = a\|e_1\|^2 = a.$$

> **Détail**
> Puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée, $\langle e_1, e_2\rangle = 0$.

Et donc $a = 0$.
Sur le même principe, en utilisant $\langle f(e_2), e_2\rangle = 0$, on prouve que $d = 0$.
Enfin, on a $\langle f(e_1), e_2\rangle = -\langle e_1, f(e_2)\rangle$.
Mais $\langle f(e_1), e_2\rangle = \langle ce_2, e_2\rangle = c\langle e_2, e_2\rangle = c\|e_2\|^2 = c$ et de même $\langle e_1, f(e_2)\rangle = \langle e_1, be_1\rangle = b$.
Et donc $\boxed{b = -c.}$

6.d. Nous venons de prouver que si $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est bien la condition demandée.
D'autre part, puisque 0 est valeur propre de f, on a $\dim \mathrm{Ker}(f) = \dim E_0(f) \geqslant 1$.
Donc $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$, ou $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$, ou $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3$.
Comme nous avons bien traité ces trois cas, nous avons bien prouvé qu'il existe toujours une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque *: nous avons même prouvé un peu mieux que le résultat demandé, puisque nous avons prouvé qu'on peut toujours trouver une telle base qui soit en plus orthonormée.*

Exercice 3

1. Le programme suivant fait l'affaire :

```
Y = sqrt(grand(1,1,'exp',2))
```

Paramètre
Même si l'énoncé le rappelait, on prendra garde au fait que grand attend comme dernier paramètre la valeur de $1/\lambda$ (ici 2), et non de λ.

2.a. Une racine carrée étant positive, il est évident que Y ne prend que des valeurs positives, et donc pour $x < 0$, $F_Y(x) = 0$.
Soit à présent $x \geqslant 0$. Alors

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leqslant x) = P(\sqrt{X} \leqslant x) \\ &= P(X \leqslant x^2) = 1 - e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

La fonction carré est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

Et donc la fonction de répartition de Y est

$$\boxed{F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

2.b. Commençons par prouver que Y est une variable à densité.
Il est évident, par opérations sur les fonctions usuelles, que F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0. De plus, on a $\lim_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} F_Y(x)$, de sorte que F_Y est continue en 0 et donc[7] sur $\mathbf{R}$.
Ainsi, Y est une variable à densité. Une densité en est alors toute fonction qui coïncide avec F'_Y là où celle-ci est définie, c'est-à-dire sur $\mathbf{R}^*$. On peut par exemple prendre

$$\boxed{f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ xe^{-x^2/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

[7] Puisque F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$, elle y est en particulier continue.

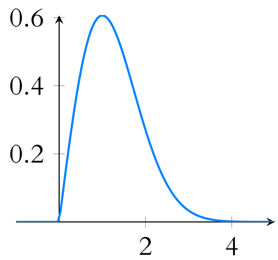


Figure 2– La densité f_Y.

3.a. Soit N une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors, par la formule de Huygens, on a

$$E\left(N^2\right) = V(N) + E(N)^2 = 1 + 0^2 = \boxed{1.}$$

3.b. Par définition de l'espérance, Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}\,dt$ converge.
Mais, une densité de N est $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, de sorte que

$$1 = E\left(N^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}\,dt \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} = \sqrt{2\pi}.$$

Puisque la fonction $t \mapsto t^2 e^{-t^2/2}$ est paire, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Et donc Y admet une espérance et $\boxed{E(Y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$

4.a. Puisque X est à valeurs positives, $e^{-X/2}$ est à valeurs dans $]0,1]$ et donc U est à valeurs dans $[0,1[$.

4.b. D'après la question précédente, on a $F_U(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_U(x) = 1$ si $x \geqslant 1$.
Soit à présent $x \in [0,1[$. On a alors

$$\begin{aligned} F_U(x) &= P(U \leqslant x) = P\left(1 - e^{-X/2} \leqslant x\right) \\ &= P\left(e^{-X/2} \geqslant 1 - x\right) = P\left(-\frac{X}{2} \geqslant \ln(1-x)\right) \\ &= P(X \leqslant -2\ln(1-x)) = 1 - e^{\ln(1-x)} = x. \end{aligned}$$

La fonction ln est croissante donc préserve le sens des inégalités.

Donc la fonction de répartition de U est

$$\boxed{F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,1]$, de sorte que $\boxed{U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]).}$

4.c. On a $e^{-X/2} = 1 - U \Leftrightarrow X = -2\ln(1-U)$.
Et donc on peut simuler X à l'aide de la commande suivante :

```
X = -2*log(1-rand())
```

EDHEC-2 2018

Ce sujet est le sujet de secours, qui a été posé le 8 mai 2018. L'épreuve a finalement été annulée.

Exercice 1

Sujet : Étude d'une suite **Difficile**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : suites, séries numériques, fonctions d'une variable réelle

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $a_n = \dfrac{1}{n \ln n}$.

   a. Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t}\, dt \leqslant \frac{1}{k \ln k}$.

   b. En déduire, par sommation, la nature de la série de terme général a_n.

Dans la suite, on considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty, 0\cup]0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. a. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.

   b. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

3. a. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

   b. Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$ lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.

   c. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis dresser son tableau de variation.

4. a. Établir que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, il existe un seul réel de $[0, 1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.

   b. Montrer que la suite (u_n) converge et que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

   c. Pour tout entier naturel n non nul, calculer $f\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis en déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a : $u_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

   d. En déduire, à l'aide de la première question, que la série de terme général $\dfrac{-1}{n \ln(1-u_n)}$ est divergente.

   e. Conclure, en revenant à la définition de u_n, que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.

Exercice 2

Sujet : Étude probabiliste de familles de vecteurs d'un espace euclidien **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : Variables aléatoires discrètes, espaces euclidiens

Commentaires : Rien n'est extrêmement dur, mais le fait de mélanger ainsi probabilités et algèbre linéaire peut paraître déroutant au premier abord

On désigne par n et p deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
On se place dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^p$. Le produit scalaire canonique des vecteurs x et y de $\mathbf{R}^p$ est noté $\langle x, y\rangle$, et la norme du vecteur x est notée $\|x\|$.

1. Dans cette question, on considère n vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de $\mathbf{R}^p$, tous de norme égale à 1.

   À tout n-uplet $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on associe le vecteur $w_x = \displaystyle\sum_{k=1}^n x_k u_k$.

   On se propose de montrer qu'il existe des n-uplets $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dont les coordonnées sont éléments de $\{-1, 1\}$, pour lesquels $\|w_x\| \leqslant \sqrt{n}$ et d'autres pour lesquels $\|w_x\| \geqslant \sqrt{n}$.

À cet effet, on considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, et telles que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on ait :

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère l'application X, qui, à tout ω de Ω, associe le réel $X(\omega) = \left\| \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) u_k \right\|^2$.

On admet que X est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

a. Calculer, pour tout couple (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, la valeur de $E(X_i X_j)$.

b. En déduire l'existence et la valeur de $E(X)$.

c. Conclure quant à l'objectif de cette question.

2. Dans cette question, on considère n réels $p_1, p_2, \dots, p_n$, tous éléments de $]0, 1[$, ainsi que n vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_n$ de $\mathbf{R}^p$ vérifiant : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\|v_k\| \leqslant 1$.

On pose $z = \sum_{k=1}^{n} p_k v_k$ et on se propose de montrer qu'il existe un n-uplet $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dont les coordonnées sont dans $\{0, 1\}$, tel que, en notant $y_x = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$, on ait :

$$\|z - y_x\| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

À cet effet, on considère n variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, et telles que, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, Y_k suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p_k)$.

On considère l'application Y, qui à tout ω de Ω, associe le réel $Y(\omega) = \left\| \sum_{k=1}^{n} (p_k - Y_k(\omega)) v_k \right\|^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

a. Calculer, pour tout couple (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, la valeur de $E\left((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\right)$.

b. Justifier que Y possède une espérance, et montrer que : $E(Y) \leqslant \frac{n}{4}$.

c. Conclure quant à l'objectif de cette question.

Exercice 3

Sujet : Déplacement d'un mobile sur une droite **Facile**

Abordable en première année : ✓ (à condition d'accepter de manipuler des variables aléatoires indépendantes, notion qui bien qu'asez intuitive, ne figure pas au programme de première année) **Intérêt** : ★☆☆

Thèmes du programme abordés : Variables aléatoires discrètes,séries.

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.
Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant n ($n \in \mathbf{N}^*$), il se place de façon équiprobable, sur l'un des points d'abscisses $0, 1, \dots, n$.
Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).
On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. a. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, X_n possède une espérance et une variance, puis déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

2. On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que Y est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

   a. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $[Y = n]$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$.

   b. En déduire que la loi de Y est définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.

   c. Vérifier par le calcul que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1$.

d. La variable Y admet-elle une espérance ?

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

   b. En déduire que : $\forall j \geqslant 2,\ \ln j \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leqslant \ln j + 1 - \frac{1}{j}$.

   c. Conclure alors que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j\to+\infty}{\sim} \ln j$.

4. On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

   a. Déterminer pour tout $i \geqslant j$, la probabilité $P_{[Y=i]}(Z=j)$.

   b. Établir que :

$$\forall i \leqslant j-1,\ P_{[Y=i]}(Z=j) = \frac{i+1}{j(j+1)}.$$

   c. Écrire, pour tout entier naturel j supérieur ou égal à 2, la probabilité $P(Z=j)$ comme une somme finie.

   d. La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance ?

5. **Informatique**
   On rappelle qu'en `Scilab` , l'instruction `grand(1,1,'uin',a,b)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme à valeurs dans $[\![a, b]\!]$.

   a. Écrire des commandes `Scilab` calculant et affichant la valeur de l'abscisse du mobile après son $n^{\text{ème}}$ déplacement lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.

   b. Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette d'afficher dans cet ordre les valeurs prises par les variables aléatoires Y et Z.

```
n = 0
a = 0
while a<2
        n = n+1
        if grand(1,1,'uin',0,n) == 0 then
                a = a+1
                if a ==1 then y=n, end
        end
end
disp(---,'y=')
disp(---,'z=')
```

Problème

Sujet : Intégrales de Wallis, étude d'une suite de variables aléatoires **Moyen**

Abordable en première année : ✓ (partie 1) **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : suites, intégrales sur un segment, variables à densité, convergences de variables aléatoires, `Scilab`

Commentaires : l'ensemble est un peu décousu, et l'utilisation de la partie 1 dans la seconde partie est bien timide (on n'utilise en réalité que la limite de la suite (u_n), qui pourrait se prouver plus simplement). La première partie reste tout de même un classique, et la seconde permet de s'entraîner sur les méthodes de base sur les variables à densité.

Partie 1

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt$.

1. **a.** Calculer u_0 et u_1.

   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   c. Établir que : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n > 0$.

2. **a.** Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbf{N},\ (n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.

   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

c. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ (n+1)u_{n+1}u_n = \dfrac{\pi}{2}$.

d. En déduire la valeur de u_{2n+1}.

3. a. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n}$.

b. En déduire, par encadrement, que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

c. Montrer enfin que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4. Utiliser la question 2.c pour compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent de calculer u_n lorsque n est entré par l'utilisateur.

```
n = input('entrez la valeur de n :'),
u = %pi/2
for ----
end
disp(u)
```

Partie 2

On note f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

5. Vérifier que f est une densité de probabilité. Dans la suite, on considère une variable aléatoire réelle X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et ayant f pour densité.

6. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

7. a. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

b. Montrer que X possède également une variance et la calculer.

8. On considère maintenant une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires toutes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la même loi que X.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $I_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et on admet que I_n est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

a. Déterminer la fonction de répartition, notée F_n de la variable aléatoire I_n.

b. La suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge-t-elle en loi ?

c. Déterminer une densité de I_n, puis montrer que I_n possède un moment d'ordre 2 :

$$E\left(I_n^2\right) = 2\int_0^{\pi/2} x(\cos x)^n \, dx.$$

d. Établir que : $E\left(I_n^2\right) \leqslant \pi u_n$.

e. En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

9. Soit h la restriction de la fonction cosinus à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

a. Montrer que h réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$.

b. Justifier que l'on peut poser $Y = h(X)$. On admet alors que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Déterminer la fonction de répartition G de Y, puis vérifier que Y suit une loi uniforme.

c. On rappelle que la commande `grand(1,1,'unf',a,b)` renvoie une simulation `Scilab` d'une variable aléatoire à densité suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ et on admet que la fonction h^{-1} s'obtient par l'instruction `acos`. Compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent de simuler la variable aléatoire X.

```
Y = grand(1,1,'unf',---,---)
X = ---
```

EDHEC-2 2018 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1.a. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est décroissante sur le segment $[k, k+1]$, et donc pour tout $t \in [k, k+1]$, $h(t) \leqslant h(k) \Leftrightarrow \dfrac{1}{t\ln t} \leqslant \dfrac{1}{k\ln k}$.
Et donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k\ln k}\,dt = \frac{1}{k\ln k}(k+1-k) = \frac{1}{k\ln k}.$$

Astuce
L'intégrale d'une constante λ sur un intervalle $[a, b]$ est égale à

$\lambda(b-a)$.

Graphiquement, c'est juste l'aire d'un rectangle !

1.b. Sommons les relations précédentes pour k allant de 2 à $N \geqslant 2$. Alors

$$\sum_{k=2}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}\,dt \leqslant \sum_{k=2}^{N} a_k.$$

Mais par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=2}^{N} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t\ln t} = \int_2^{N+1} \frac{dt}{t\ln t} = [\ln(\ln t)]_2^{N+1} = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln 2) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Et donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{N} a_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, de sorte que $\boxed{\displaystyle\sum_k a_k \text{ diverge.}}$

Convergence
Par **définition**, une série converge si la suite de ses sommes partielles converge, ce qui n'est donc pas le cas ici.

2.a. Par quotient[1] de fonctions usuelles continues, f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.
Lorsque $x \to 0$, on a $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$ et donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x}{-x(1-x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, de sorte que $\boxed{f \text{ est continue en } 0 \text{ et donc sur }]-\infty, 1[.}$

[1] Le dénominateur ne s'annule pas pour $x \neq 0$.

2.b. Soit $x \neq 0$. Alors

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)}.$$

Or,

$$\begin{aligned}
-x-(1-x)\ln(1-x) &= -x-(1-x)\left(-x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)\\
&= -x+x+\frac{x^2}{2}-x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)-\frac{x^3}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\\
&= -\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\\
&\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

Puisque d'autre part $x(1-x)\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2$, on a donc

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{-x^2} = \frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

et donc $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ avec } f'(0) = \dfrac{1}{2}.}$

Danger !
Une grave erreur serait de dire que puisque $f(0) = 1$, alors $f'(0) = 1' = 0$.
Par exemple, si $f(x) = x^2$, alors $f(2) = 4$ est une constante, mais on n'en déduit pas que $f'(2) = 0$.
Pour dériver une fonction en x_0, il ne suffit pas de connaître sa valeur en x_0, mais bien d'étudier la limite du taux d'accroissement.

$o\left(x^2\right) / o\left(x^3\right)$
Rappelons qu'un $o(x^3)$ est aussi un $o(x^2)$.
Et qu'à partir du moment où une expression contient un $o(x^2)$, tous les termes de degré 3 ou plus sont inutiles, et peuvent être englobés dans le $o(x^2)$.

3.a. Sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, f est un quotient de fonctions dérivables, donc est dérivable.
On a alors, pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$,

$$f'(x) = \frac{-(1-x)\ln(1-x)+x\left((1-x)\times\frac{-1}{1-x}-\ln(1-x)\right)}{(1-x)^2\ln^2(1-x)} = \boxed{\frac{-\ln(1-x)-x}{(1-x)^2\ln^2(1-x)}}.$$

3.b. La fonction $g : x \mapsto \ln(1-x)$ est concave sur $]-\infty, 1[$ car sa dérivée $g' : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est décroissante sur $]-\infty, 1[$. Sa courbe représentative est donc sous ses tangentes.
Or, en particulier, la tangente en $x = 0$ est la droite d'équation $y = h'(0)x + h(0) = -x$.
Ainsi, pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $h(x) \leqslant -x \Leftrightarrow \boxed{\ln(1-x) + x \leqslant 0.}$
On en déduit donc que pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, $f'(x) \geqslant 0$, et donc f est croissante sur $]-\infty, 1[$.

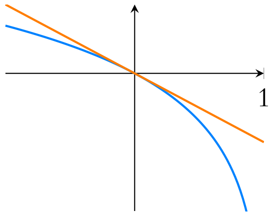
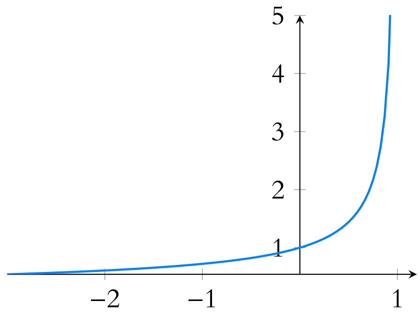


FIGURE 1– La fonction $\ln(1-x)$ et sa tangente en 0

3.c. Lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $(1-x)\ln(1-x)$ tend vers 0 par valeurs inférieures[2].
Et donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(1-x)\ln(1-x)} = -\infty$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty.}$
Et lorsque $x \to -\infty$, $1 - x \underset{x\to-\infty}{\sim} -x$ de sorte que

$$f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{-x}{-x\ln(1-x)} \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(1-x)} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

x	$-\infty$		1
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$



[2] C'est-à-dire en restant négatif.

4.a. La fonction f est strictement croissante sur son ensemble de définition, et elle y est continue. Puisque d'autre part $f(0) = 1$, par le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de $[0, 1[$ sur $[1, +\infty[$.
En particulier, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \text{ il existe un unique réel } u_n \in [0, 1[\text{ tel que } f(u_n) = n.}$
Et puisque $f(0) = 1$, $u_1 = f^{-1}(1) = \boxed{0.}$

4.b. Par définition, $u_n = f^{-1}(n)$. Or, $\lim\limits_{n\to 1^-} f(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = 1$.
Et donc on en déduit, par continuité de f^{-1}, que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = 1.}$$

4.c. On a

$$f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = -n\sqrt{n}\left(\frac{1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}}{\ln\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}\right) = \frac{n\sqrt{n} - 1}{\ln(n\sqrt{n})} = \boxed{\frac{n\sqrt{n} - 1}{\frac{3}{2}\ln(n)}.}$$

En particulier,

$$\frac{f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{n} = \frac{\sqrt{n} - \frac{1}{n}}{\frac{3}{2}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Et donc il existe un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{f\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{n} \geqslant 1 \Leftrightarrow f\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right) \geqslant n$.

Par croissance de f^{-1}, on a donc, $\boxed{\text{pour } n \geqslant n_0, u_n = f^{-1}(n) \leqslant 1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}.}$

4.d. Toujours pour $n \geqslant n_0$, $1 - u_n \geqslant \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, et donc $\ln(1 - u_n) \geqslant -\ln(n\sqrt{n}) = -\dfrac{3}{2}\ln(n)$.
On en déduit donc[3] que

$$-\frac{1}{n\ln(1-u_n)} \geqslant \frac{2}{3}\frac{1}{n\ln(n)} \geqslant 0.$$

[3] Le passage à l'inverse change le sens des inégalités, puisqu'il ne s'agit que de nombres négatifs, et que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbf{R}_-^*$.

Mais d'après la question 1, la série de terme général $\dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge, donc il en est de même de la série de terme général $\dfrac{-1}{n\ln(1-u_n)}$.

4.e. Par définition de u_n, $f(u_n) = n$ et donc

$$-\frac{u_n}{(1-u_n)\ln(1-u_n)} = n \Leftrightarrow 1-u_n = -\frac{u_n}{n\ln(1-u_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n\ln(1-u_n)}.$$

Et donc par la question précédente, par critère de comparaison pour des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } 1-u_n \text{ diverge.}}$

$n \geqslant n_0$

L'inégalité que nous venons d'établir n'est valable que pour $n \geqslant n_0$.
Ce n'est pas important, car les premiers termes d'une série ne jouent pas sur sa nature, seuls les termes «à l'infini» comptent.

Exercice 2

1.a. Si $i = j$, alors $E(X_iX_j) = E\left(X_i^2\right)$. Mais X_i^2 est une variable certaine égale à 1, donc $E\left(X_i^2\right) = 1$.
En revanche, si $i \neq j$, puisque X_i et X_j sont indépendantes,

$$E(X_iX_j) = E(X_i)E(X_j) = 0 \times 0 = 0.$$

Ainsi, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\boxed{E(X_iX_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$

Rappel

L'espérance d'un produit de variables indépendantes est le produit des espérances (sous réserve que celles-ci existent).

1.b. On a, par bilinéarité du produit scalaire,

$$X = \left\langle \sum_{i=1}^n X_iu_i, \sum_{j=1}^n X_ju_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n X_iX_j\langle u_i, u_j\rangle.$$

Et donc par linéarité de l'espérance,

$$E(X) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n E(X_iX_j)\langle u_i,u_j\rangle = \sum_{i=1}^n \langle u_i,u_i\rangle = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 = \boxed{n.}$$

1.c. Comme X est une variable à support fini[4], elle prend donc une plus petit valeur m, et une plus grande valeur M.
On a alors, par croissance de l'espérance, $m \leqslant E(X) \leqslant M$.
Et donc $m \leqslant n \leqslant M$, de sorte que X prend à la fois des valeurs plus grandes et des valeurs plus petites que n.
Ainsi, il existe $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \leqslant n$.
Notons alors $x_1 = X_1(\omega), \dots, x_n = X_n(\omega)$. Alors

$$\|w_x\| = \left\|\sum_{k=1}^n x_ku_k\right\| = \sqrt{X(\omega)} \leqslant \sqrt{n}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{il existe } x \in \{-1,1\}^n \text{ tel que } \|w_x\| \leqslant \sqrt{n}.}$
On montre de même, en utilisant $M \geqslant n$ qu'il existe $x \in \{-1,1\}^n$ tel que $\|w_x\| \geqslant \sqrt{n}$.

[4] Elle ne peut prendre au maximum que 2^n valeurs, puisque les X_i peuvent prendre chacun 2 valeurs.

2.a. Notons que $p_k = E(Y_k)$, de sorte que

$$E\left((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\right) = E\left((E(Y_i) - Y_i)\left(E(Y_j) - Y_j\right)\right) = \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j).$$

Si $i = j$, alors $\operatorname{Cov}(Y_i,Y_i) = V(Y_i) = p_i(1-p_i)$.
Et si $i \neq j$, les variables Y_i et Y_j étant indépendantes, leur covariance est nulle. Ainsi,

$$\boxed{E\left((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\right) = \begin{cases} p_i(1-p_i) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$$

2.b. Comme précédemment, on a

$$Y = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\langle v_i, v_j\rangle$$

et donc par linéarité de l'espérance,

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E\left((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\right)\langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)\|v_i\|^2.$$

Or, il est classique[5] que pour tout $x \in [0,1]$, $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
Et puisque les normes des v_i sont inférieures ou égales à 1, on a donc

$$E(Y) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4} \leqslant \boxed{\frac{n}{4}.}$$

[5] Ce résultat peut se retrouver par une rapide étude de la fonction $x \mapsto x(1-x)$.

2.c. Puisque $E(Y) \leqslant \dfrac{n}{4}$, on prouve comme à la question 1.c que la plus petite valeur prise par Y est nécessairement inférieure ou égale à $\dfrac{n}{4}$.
Il existe donc $\omega \in \Omega$ tel que $Y(\omega) \leqslant \dfrac{n}{4}$.
Notons alors $x_1 = Y_1(\omega), \dots, x_n = Y_n(\omega)$, de sorte que tous les x_i sont dans $\{0,1\}$.
On a alors

$$\|z - y_x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|(p_i - x_i)v_i\|^2 = Y(\omega) \leqslant \frac{n}{4}$$

et donc $\|z - y_x\| \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

EXERCICE 3

1.a. La variable X_n prend de façon équiprobable les valeurs $0, 1, \dots, n$: elle suit donc $\boxed{\text{une loi uniforme sur } [\![0,n]\!].}$

1.b. Il s'agit d'une loi usuelle dont l'espérance et la variance sont connues :

$$E(X) = \frac{0+n}{2} = \boxed{\frac{n}{2}} \text{ et } \boxed{V(X) = \frac{(n+1)^2-1}{12}.}$$

2.a. L'événement $[Y = n]$ est réalisé si le premier retour à l'origine a lieu à l'instant n, et donc

$$[Y = n] = [X_1 \neq 0] \cap \dots [X_{n-1} \neq 0] \cap [X_n = 0] = \boxed{\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} [X_i \neq 0]\right) \cap [X_n = 0].}$$

2.b. Notons que Y est à valeurs dans $\mathbf{N}^*$.
Par indépendance des X_i, il vient donc, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
P(Y = n) &= \prod_{i=1}^{n-1} P(X_i \neq 0) \times P(X_n = 0)\\
&= \prod_{i=1}^{n-1} (1 - P(X_i = 0)) \times P(X_n = 0)\\
&= \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{i+1}\right) \times \frac{1}{n+1}\\
&= \prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \dots \times \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}}\frac{\cancel{n-1}}{n}\frac{1}{n+1} = \boxed{\frac{1}{n(n+1)}.}
\end{aligned}$$

Méthode
Les sommes et produits «télescopiques» peuvent aussi bien se traiter à l'aide de pointillés comme nous l'avons fait que de manière plus rigoureuse, à l'aide de changements d'indices.
Les deux rédactions sont convenables, mais si on utilise des pointillés, il faut bien s'assurer de n'avoir pas oublié de termes.

2.c. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ et donc pour $N \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} P(Y = n) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{N+1}$$
$$\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Et donc on a bien $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n) = 1.}$

2.d. On a $nP(Y=n) = \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
Et donc par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $nP(Y=n)$ diverge : $\boxed{Y \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

3.a. Soit $k \geqslant 1$ fixé. La fonction $f : t \mapsto \ln(t)$ est dérivable sur $[k, k+1]$, de dérivée $f' : t \mapsto \dfrac{1}{t}$.
En particulier, pour tout $t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant f'(t) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à f entre k et $k+1$, on a donc

$$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1}(k+1-k) \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}(k+1-k) = \frac{1}{k}.$$

3.b. Sommons les relations précédemment obtenues pour k variant de 1 à $j-1$:

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{j-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leqslant \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}.$$

Un changement d'indice facile dans la première somme nous donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k}$.

La seconde somme est une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{j-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) = (\cancel{\ln(2)} - \underbrace{\ln(1)}_{=0}) + (\cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)}) + \cdots + (\cancel{\ln(j-1)} - \cancel{\ln(j-2)}) + (\ln(j) - \cancel{\ln(j-1)}) = \ln(j).$$

Et donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k} \leqslant \ln(j) \leqslant \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}$, ce qui prouve déjà l'une des deux inégalités demandées.
D'autre part, on a

$$\sum_{k=2}^{j} \frac{1}{k} \leqslant \ln(j) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{j} \leqslant \ln(j) \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leqslant \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}.}$$

3.c. Divisons les inégalités de la question précédente par $\ln(j)$:

$$1 \leqslant \frac{1}{\ln j} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln j} - \frac{1}{j \ln(j)}.$$

Alors, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{1}{\ln j} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j\to+\infty}{\sim} \ln(j).}$$

4.a. Par définition, le second retour à l'origine doit avoir lieu après le premier, et donc pour $i \geqslant j$, $\boxed{P_{[Y=i]}(Z=j) = 0.}$

4.b. Pour $i \leqslant j-1$, par définition d'une probabilité conditionnelle,

$$P_{[Y=i]}(Z=j) = \frac{P([Y=i] \cap [Z=j])}{P(Y=i)}.$$

Chgt d'indice
On a posé $k = n+1$, et changé les bornes en conséquence :
$1 \leqslant n \leqslant N \Leftrightarrow 2 \leqslant k \leqslant N+1$.

Remarque
Il n'est a priori pas évident que le mobile finisse toujours par revenir à l'origine.
Le fait que la somme que nous venons de calculer vaille 1 signifie que le mobile revient presque sûrement (c'est-à-dire avec probabilité 1) à l'origine. Et donc la probabilité qu'il n'y revienne jamais est nulle (et donc Y est bien définie).

Or nous avons déjà prouvé que à la question 2.a que $[Y=i]=\left(\bigcap_{k=1}^{i-1}[X_k\neq 0]\right)\cap[X_i=0]$.

Et sur le même principe,

$$[Y=i]\cap[Z=j]=\left(\bigcap_{k=1}^{i-1}[X_k\neq 0]\right)\cap[X_i=0]\cap\left(\bigcap_{\ell=i+1}^{j-1}[X_\ell\neq 0]\right)\cap[X_j=0].$$

Par indépendance des X_n, il vient donc

$$\begin{aligned}P_{[Y=i]}(Z=j)&=\frac{\left(\prod_{k=1}^{i-1}P(X_k\neq 0)\right)P(X_i=0)\left(\prod_{\ell=i+1}^{j-1}P(X_\ell\neq 0)\right)P(X_j=0)}{\left(\prod_{k=1}^{i-1}P(X_k\neq 0)\right)P(X_i=0)}\\&=\left(\prod_{\ell=i+1}^{j-1}P(X_\ell\neq 0)\right)P(X_j=0).\end{aligned}$$

Soit encore

$$P_{[Y=i]}(Z=j)=\left(\prod_{\ell=i+1}^{j-1}\frac{\ell}{\ell+1}\right)\frac{1}{j+1}=\frac{i+1}{\cancel{i+2}}\frac{\cancel{i+2}}{\cancel{i+3}}\cdots\frac{\cancel{j-2}}{\cancel{j-1}}\frac{\cancel{j-1}}{j}\frac{1}{j+1}=\boxed{\frac{i+1}{j(j+1)}}.$$

4.c. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[Y=i],\ i\in\mathbf{N}^*\}$, on a

$$P(Z=j)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(Y=i)P_{[Y=i]}(Z=j)=\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i(i+1)}\frac{i+1}{j(j+1)}=\boxed{\frac{1}{j(j+1)}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}}.$$

Subtilité

En réalité, il s'agit d'un système quasi-complet d'événements : pour avoir un système complet, il faudrait ajouter l'événement «le mobile ne revient jamais à l'origine».
Mais comme celui-ci est de probabilité nulle, comme expliqué dans la remarque de la question 2.b, il n'est pas nécessaire de le faire apparaître dans les calculs.

4.d. Notons qu'il n'est pas besoin de calculs pour répondre à cette question : on a $0\leqslant Y\leqslant Z$. Si Z admettait une espérance, alors il en serait de même de Y, ce qui n'est pas le cas d'après la question 2.d. $\boxed{\text{Donc } Z \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

Toutefois, cette méthode n'est pas forcément totalement satisfaisante[6] car elle utilise un résultat qui est bien au programme (l'existence d'une espérance par domination), mais qui a été admis et non démontré.

Notons plutôt que $jP(Z=j)=\frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}$.

Et donc d'après la question 3.c, $jP(Z=j)\underset{j\to+\infty}{\sim}\frac{\ln(j)}{j}$.

Mais pour $j\geqslant 3$, $\frac{\ln(j)}{j}\geqslant\frac{1}{j}\geqslant 0$, et puisque la série de terme général $\frac{1}{j}$ diverge, il en est de même de la série de terme général $jP(Z=j)$, de sorte que Z n'admet pas d'espérance.

[6] Et n'est probablement pas celle qu'avait en tête le concepteur du sujet.

5. Informatique

5.a. Notons qu'il n'y a aucun besoin de calculer les déplacements successifs du mobile pour obtenir sa position après le $n^{\text{ème}}$ déplacement : indépendamment de ce qui s'est passé précédemment, lors du $n^{\text{ème}}$ déplacement, il se place de manière équiprobable sur l'un des points d'abscisses $0,1,\dots,n$.
Et donc il suffit de tirer au hasard un nombre entre 0 et n, suivant la loi $\mathscr{U}([\![0,n]\!])$.

```
n = input('Entrez la valeur de n :') ;
x = grand(1,1,'uin',0,n) ;
disp(x)
```

5.b. Le script proposé simule les différents déplacements du mobile, et augmente `a` de 1 en cas de retour à l'origine, jusqu'au deuxième retour à l'origine (`while a<2`).
Donc à la fin du programme `a` contient le rang du deuxième retour à l'origine, c'est-à-dire

la valeur de Z.
Enfin, la ligne 7 permet de stocker dans la variable y le rang du premier retour à l'origine, c'est-à-dire Y.
Donc les dernières lignes doivent être complétées comme suit :

```
10 disp(y,'y=') ;
11 disp(a,'z=') ;
```

Problème

Partie 1

1.a. On a $u_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^0\, dt = \int_0^{\pi/2} 1\, dt = \boxed{\frac{\pi}{2}.}$

Et $u_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t)\, dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = \boxed{1.}$

1.b. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$. Et donc $(\cos t)^{n+1} \leqslant (\cos t)^n$.
Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$u_{n+1} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1}\, dt \leqslant \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\, dt = u_n.$$

Et donc $\boxed{(u_n) \text{ est une suite décroissante.}}$

Attention !
Si $x > 1$, alors la suite $(x^n)_n$ est croissante, mais pour $x \in [0, 1[$, la suite $(x^n)_n$ est décroissante.

1.c. La fonction $t \mapsto (\cos t)^n$ est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc par croissance de l'intégrale, $\boxed{u_n \geqslant 0.}$

D'autre part, $t \mapsto (\cos t)^n$ est continue, positive, et n'est pas la fonction nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Et donc[7] $u_n \neq 0$, de sorte que $\boxed{u_n > 0.}$

[7] Une fonction **continue positive** est d'intégrale nulle si et seulement si il s'agit de la fonction nulle.

2.a. Procédons à une intégration par parties en posant $u(t) = \sin(t)$ et $v(t) = (\cos t)^{n+1}$ qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $u'(t) = \cos(t)$ et $v'(t) = -(n+1)\sin(t)(\cos t)^n$.
On a alors

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos t(\cos t)^{n+1}\, dt \\
&= \underbrace{\left[\sin(t)(\cos t)^{n+1}\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^2(t)(\cos t)^n\, dt \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)(\cos t)^n\, dt \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\, dt - (n+1)\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+2}\, dt \\
&= (n+1)u_n - (n+1)u_{n+2}.
\end{aligned}$$

Rappel
Pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Et donc en regroupant les termes en u_{n+2}, il vient

$$\boxed{(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n.}$$

2.b. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2 \times 0)!}{(2^0 \times 0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Supposons donc que $u_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)}\dfrac{\pi}{2}$. Alors par la question 2.a,

$$\begin{aligned}
u_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2}u_n = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{2n+2}{2n+2}\frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{(2^n \times n!)}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(2(n+1))^2(2^n \times n)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1} \times (n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Astuce
Puisque nous voulons faire apparaître $(2n+2)!$ au numérateur, et que nous avons déjà $(2n+1)!$, il suffit de multiplier le numérateur (et donc également le dénominateur) par $2n+2$.

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$, et donc par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2}\frac{\pi}{2}.}$$

2.c. Multiplions la relation de la question précédente par u_{n+1} :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ (n+2)u_{n+2}u_{n+1} = (n+1)u_{n+1}u_n.$$

Cela signifie donc que la suite $((n+1)u_{n+1}u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante.
Or, nous avons déjà calculé u_0 et u_1, et on a donc $1 \times u_1 u_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
Et donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}.}$

2.d. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(2n+1)u_{2n+1}u_{2n} = \dfrac{\pi}{2}$.
Et donc en utilisant l'expression de u_{2n} obtenue à la question 2.b, il vient

$$u_{2n+1} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2n+1}\frac{1}{u_{2n}} = \frac{1}{2n+1}\frac{(2^n \times n)^2}{(2n)!} = \boxed{\frac{(2^n \times n!)^2}{(2n+1)!}}.$$

3.a. D'après la relation de la question 2.a,

$$\frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

3.b. Puisque la suite (u_n) est décroissante, on a $u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Et donc $\dfrac{u_{n+2}}{u_n} \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{u_n}{u_n} \leqslant 1$.
Par le théorème des gendarmes, on a donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1}$.

3.c. Le résultat de la question précédente prouve que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
Et donc en utilisant la question 3.c,

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)u_{n+1}u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} nu_n^2 \Leftrightarrow u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}.$$

Et ainsi, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$

Danger !
Cet équivalent peut sembler trivial, et est vrai pour toute suite qui converge vers une limite ℓ non nulle, puisqu'alors u_n et u_{n+1} sont tous deux équivalents à ℓ.
Mais il n'est pas nécessairement vrai pour des suites de limite nulle, comme le montre par exemple le cas de la suite $u_n = e^{-n}$. En effet, on a alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-n-1}}{e^{-n}} = e^{-1}.$$

4. La relation obtenue à la question 2.c s'écrit encore, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{nu_{n-1}}\dfrac{\pi}{2}$.
Et donc on peut utiliser le programme suivant pour calculer successivement $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

```
n = input('entrez la valeur de n :'),
u = %pi/2
for i=1 :n
        u = 1/(i*u)*%pi/2
end
disp(u)
```

Partie 2

5. La fonction f est positive sur $\mathbf{R}$, et elle est continue sauf éventuellement[8] en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$.
De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1.$$

Et donc $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$

[8] En réalité, f est continue en 0, mais il n'est pas nécessaire de le vérifier.

6. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Pour $x \leqslant 0$, on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.

Pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $F(x) = \int_{0}^{x} \sin t\,dt = [-\cos t]_0^x = 1 - \cos x$.

Enfin, pour $x \geqslant \frac{\pi}{2}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\pi/2} \sin(t)\,dt + \int_{\pi/2}^{x} 0\,dt = 1.$$

Donc $\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1-\cos(x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}}$

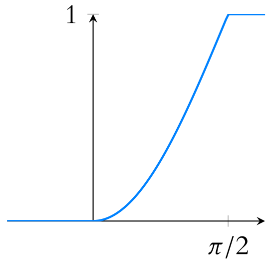


FIGURE 2– La fonction F.

7.a. On a

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_{0}^{\pi/2} t\sin(t)\,dt.$$

Convergence
Notons que l'intégrale qui suit est une intégrale sur un segment, donc convergente, de sorte que X admet une espérance.

En procédant par une intégration par parties, on a

$$\int_{0}^{\pi/2} t\sin(t)\,dt = [-t\cos(t)]_0^{\pi/2} + \int_{0}^{\pi/2} \cos(t)\,dt = 1.$$

Donc $\boxed{E(X) = 1.}$

7.b. De même, par une double intégration par parties, on a[9]

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \int_{0}^{\pi/2} t^2\sin(t)\,dt \\ &= \left[-t^2\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + 2\int_{0}^{\pi/2} t\cos(t)\,dt = 2\int_{0}^{\pi/2} t\cos(t)\,dt \\ &= 2\,[t\sin t]_0^{\pi/2} - 2\int_{0}^{\pi/2} \sin(t)\,dt \\ &= \pi - 2. \end{aligned}$$

[9] Là encore toutes les intégrales convergent car intégrales sur un segment.

Ainsi, X possède une variance, et par la formule de Huygens,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \pi - 2 - 1 = \boxed{\pi - 3.}$$

8.a. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $[I_n > x] = [\min(X_1, \dots, X_n) > x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]$.

Et donc par indépendance des X_i,

$$\begin{aligned} F_n(x) = P(I_n \leqslant x) = 1 - P(I_n > x) &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F(X_i \leqslant x)) \\ &= 1 - (1-F(x))^n = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1-(\cos x)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}} \end{aligned}$$

8.b. Pour $x \leqslant 0$, il est évident que $F_n(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos x < 1$ et donc $F_n(x) = 1 - (\cos x)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Pour $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, $F_n(x) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Si G est la fonction de répartition d'une variable certaine égale à 0, on a $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

et donc pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} G(x)$.

En pour $x = 0$?
Notons que la convergence mentionnée ici n'a pas lieu pour $x = 0$, ce qui n'a pas d'incidence puisqu'il s'agit d'un point de discontinuité de G.

Ainsi, $\boxed{I_n \xrightarrow{\mathscr{L}} 0.}$

8.c. Puisque I_n est une variable à densité , une densité de I_n est toute fonction coïncidant avec F_n' là où cette dernière est définie.

Par exemple, on peut prendre $f_n : x \mapsto \begin{cases} n\sin(x)(\cos x)^{n-1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi, on a[10]

$$E(I_n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} nt^2 \sin t(\cos t)^{n-1}\,dt.$$

Procédons alors à une intégration par parties, en posant $u(t) = t^2$ et $v(t) = -(\cos t)^n$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ avec $u'(t) = 2t$ et $v'(t) = n\sin t(\cos t)^{n-1}$.

$$E\left(I_n^2\right) = \left[t^2(\cos t)^n\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2t(\cos t)^n\,dt = \boxed{2\int_0^{\pi/2} t(\cos t)^n\,dt.}$$

Remarque

L'énoncé nous demandait ici d'admettre que I_n est à densité, mais il ne serait pas difficile de le prouver en vérifiant que F_n est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$.

[10] L'intégrale converge car intégrale sur un segment.

8.d. Pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leqslant t\,(\cos t)^n \leqslant \frac{\pi}{2}(\cos t)^n$.

Et donc par croissance de l'intégrale,

$$E\left(I_n^2\right) = 2\int_0^{\pi/2} t(\cos t)^n\,dt \leqslant 2\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}(\cos t)^n\,dt \leqslant \boxed{\pi u_n.}$$

8.e. Par l'inégalité de Markov appliquée à la variable I_n^2, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(I_n^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{E(I_n^2)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{\pi u_n}{\varepsilon^2}.$$

Or, l'équivalent prouvé à la question 3.c prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(I_n^2 \geqslant \varepsilon^2\right) = 0$.

Mais $[I_n^2 \geqslant \varepsilon^2] = [|I_n| \geqslant \varepsilon]$ et donc $P(|I_n| \geqslant \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $\boxed{I_n \xrightarrow{P} 0.}$.

Markov

L'inégalité de Markov s'applique bien ici car I_n^2 est une variable positive admettant une espérance.

9.a. La fonction h est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puisque sa dérivée est $h'(t) = -\sin(t)$ qui est strictement négative sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

D'autre part, on a $h(0) = 1$ et $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Puisque h est continue, par le théorème de la bijection, h réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$.

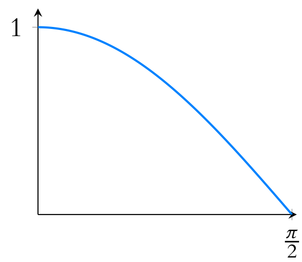


FIGURE 3– La fonction h.

9.b. L'expression de F prouve que X prend ses valeurs dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et donc il est légitime de poser $Y = h(X)$.

La variable aléatoire Y est alors à valeurs dans $[0,1]$, de sorte que $P(Y \leqslant x) = 0$ si $x < 0$ et $P(Y \leqslant x) = 1$ si $x \geqslant 1$.

Pour $x \in [0,1[$, on a

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leqslant x) = P(h(X) \leqslant x) \\ &= P(X > h^{-1}(x)) = F(h^{-1}(x)) = \cos(h^{-1}(x)) = h(h^{-1}(x)) \\ &= x. \end{aligned}$$

h^{-1} est décroissante (car h l'est), donc le sens de l'inéga-
li

Donc $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

On reconnaît alors la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,1]$, de sorte que $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1]).}$

Déjà vu ?

Notons que le résultat que nous venons de prouver n'est rien d'autre qu'un cas particulier de la méthode d'inversion vue en TP pour simuler des variables à densité.

9.c. Puisqu'on a $X = h^{-1}(Y)$, le code suivant convient :

```
Y = grand(1,1,'unf',0,1)
X = acos(Y)
```

EDHEC-1 2018

Ce sujet était le sujet prévu à l'origine, qui a par erreur été diffusé plus tôt, et a été remplacé par le sujet de secours. Il a tout de même été posé par erreur dans un centre d'examen, ce qui a conduit à l'annulation de l'épreuve de remplacement.

Exercice 1

Sujet : Autour de la loi logistique **Moyen**

Abordable en première année : ✓ (sauf question 3.b) **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : Variables à densité, `Scilab`

Commentaires : la question 2 est la plus dure car il faut être un peu astucieux pour trouver une primitive de f, le reste est assez classique.

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

1. Étudier la parité de f.
2. Montrer que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X.
3. a. Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.
   b. Montrer que X possède une variance.
4. On note F la fonction de répartition de X. Montrer que F est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0,1[$.
5. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = F(X)$.
   a. Déterminer la loi de Y.
   b. Déterminer explicitement $F(x)$ pour tout réel x.
   c. Établir que la fonction F^{-1}, bijection réciproque de F, est définie par :
   $$\forall x \in]0,1[,\ F^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$
   d. En déduire un script `Scilab` permettant de simuler la variable aléatoire X.

Exercice 2

Sujet : Endomorphismes nilpotents d'un espace de dimension 2 **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★☆☆

Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire

Modifications apportées au sujet d'origine : l'inclusion de la question 4.b était à l'envers ($\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$), elle a été remplacée par la bonne.

Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E, on note $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ termes}}$ et on pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$, où Id_E est l'endomorphisme identité de E.
On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbf{N}^*$) si l'on a :

$$f^k = 0 \text{ et } f^{k-1} \neq 0.$$

On note I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbf{N}^*$) si l'on a $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (avec la convention $A^0 = I_2$).

Partie 1

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a+d)A$ en fonction de I_2.
2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k.
   a. Établir l'égalité : $ad - bc = 0$.
   b. Monter que k est supérieur ou égal à 2.
   c. En déduire alors que $a + d = 0$.
3. Conclure que : A nilpotente $\Longleftrightarrow A^2 = 0$.

Partie 2

On considère dans cette partie un endomorphisme f non nul d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de E de dimension 2.

4. a. Montrer que, si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$, alors on a : $f^2 = 0$.
   b. On suppose que $f^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Établir alors que $\mathrm{rg}(f) = 1$ puis conclure que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
   c. En déduire, à l'aide de la partie 1, l'équivalence :
   $$f \text{ nilpotent} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f).$$

On suppose dans toute la suite que f est nilpotent et on en étudie quelques propriétés.

5. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de f est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
6. On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E, nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.
   a. Montrer les inclusions : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   b. En déduire les égalités : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(f)$.
   c. En déduire l'égalité : $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(v)$.
   d. Conclure.

Exercice 3

Sujet : Étude d'une fonction de n variables

Facile

Abordable en première année : ✗

Intérêt : ★★★

Thèmes du programme abordés : Fonctions de plusieurs variables, calcul différentiel d'ordre 2, diagonalisation, inégalité de Cauchy-Schwarz

Commentaires : l'exercice reprend tous les thèmes classiques sur les fonctions de plusieurs variables. S'il ne présente que peu de difficultés conceptuelles, les calculs sont parfois délicats.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. a. Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
   b. Vérifier que le vecteur V_n élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, dont toutes les composantes sont égales à 1, est vecteur propre de J_n.
   c. À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n.

Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n,\ f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).$$

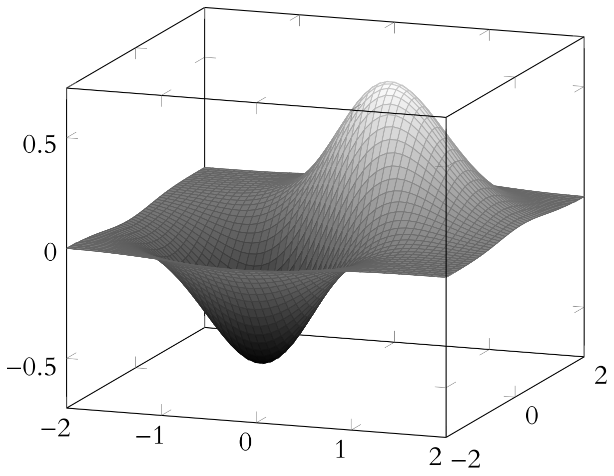
2. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^n$.
3. a. Montrer que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $\partial_i(f_n)(x) = \left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$.
   b. En déduire que f_n possède deux points critiques $a = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \ldots, 1)$ et $b = -a$.
4. a. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_n.
   b. Vérifier que la hessienne de f_n en a est $H_n(a) = \dfrac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)$.
   c. À l'aide de la première question, donner les valeurs propres de $H_n(a)$.
   d. En déduire que f_n possède un extremum local en a.
   e. Sans refaire tous les calculs, donner une conclusion concernant le point critique b.
5. a. Étudier la fonction h qui, à tout t de $\mathbf{R}_+$, associe $h(t) = te^{-t^2}$.
   b. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbf{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, montrer que :
   $$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

c. Déduire des deux questions précédentes que f_n admet en a et en b des extrema globaux.

6. **Question d'informatique.**

a. Écrire des commandes `Scilab` permettant de calculer et d'afficher $H_n(a)$ pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

b. Dans le cas $n = 2$, la nappe suivante est-elle acceptable en tant que représentation graphique de la fonction f_2 ? Justifier.



Problème

Sujet : Étude d'une suite de lancers, loi binomiale négative **Difficile**

Abordable en première année : ✓ (Parties 1 et 2) **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : Variables aléatoires discrètes, espérance conditionnelle, `Scilab`, estimation ponctuelle

On effectue des lancers d'une pièce donnant «Pile» avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et donnant «face» avec la probabilité $q = 1-p$, les différents lancers étant supposés indépendants.
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (resp. F_k) l'événement : «la pièce donne «pile» (resp. «face») au $k^{\text{ème}}$ lancer», on note également S_k le rang du $k^{\text{ème}}$ pile et T_k le rang d'apparition du dernier «pile» de la première série de k «piles» consécutifs. On suppose que S_k et T_k sont deux variables aléatoires toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Par exemple, si les lancers donnent $F_1, P_2, F_3, P_4, F_5, P_6, P_7, P_8$, alors S_1 et T_1 prennent la valeur 2, S_2 prend la valeur 4, T_2 prend la valeur 7, S_3 prend la valeur 6, T_3 prend la valeur 8, S_4 prend la valeur 7 et S_5 prend la valeur 8.

Partie 1 : simulations de S_k et T_k.

1. Compléter les lignes 7 et 10 du script `Scilab` suivant pour qu'il affiche la valeur prise par S_k lorsque k et p sont entrés par l'utilisateur :

```
1   k = input('donnez une valeur pour k  :')
2   p = input('donnez une valeur pour p  :')
3   n = 0
4   c = 0
5   while c<k
6           n=n+1
7           if --- then c = c+1
8           end
9   end
10  disp(---)
```

2. On souhaite que le script précédent affiche la valeur prise par T_k. Remplacer la ligne 7 par la suivant, dûment complétée :

```
7           if --- then c = c+1, else ---
```

Partie 2 : calcul de l'espérance S_k.

3. Donner la loi de S_1 ainsi que son espérance.
4. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k, on note X_{n-1} la variable aléatoire égale au nombre de «piles» obtenus lors des $n-1$ premiers lancers.
   a. Donner la loi de X_{n-1}.
   b. Donner $S_k(\Omega)$ puis écrire l'événement $[S_k = n]$ à l'aide de la variable X_{n-1}.
   c. En déduire que la loi de S_k est donnée par :
   $$\forall n \geqslant k,\ P(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$
5. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On pose $Z_1 = S_1$ et, pour tout entier naturel i supérieur ou égal à 2, on pose $Z_i = S_i - S_{i-1}$. On admet que $(Z_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.
   a. Donner la loi des variables aléatoires Z_i.
   b. Exprimer S_k à l'aide de certaines des variables Z_i.
   c. En déduire que S_k possède une espérance et donner sa valeur.
6. **Estimation.**
   On suppose le paramètre p inconnu et on souhaite trouver un estimateur de p. On admet que, si une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire Y, alors pour toute fonction f continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ tel que $P(Y \in I) = 1$, la suite $(f(Y_k))_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers $f(Y)$.
   a. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on pose $\overline{Z_k} = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} Z_i$.
   Montrer que la suite $\left(\overline{Z_k}\right)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité.
   b. En déduire que $\dfrac{k}{S_k}$ est un estimateur convergent de p.
   c. Donner sans calcul la valeur de $\displaystyle\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1} = j)$. Monter alors que la variable aléatoire $\dfrac{k-1}{S_k - 1}$ possède une espérance et que l'on a : $E\left(\dfrac{k-1}{S_k-1}\right) = p$.
   d. En déduire que $\dfrac{k}{S_k}$ est un estimateur biaisé de p (on ne cherchera pas à calculer la valeur de ce biais).

Partie 3 : calcul de l'espérance de T_k.

7. Comparer les variables aléatoires S_1 et T_1.
8. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On admet que T_k possède une espérance que l'on se propose de déterminer.
   a. Justifier, en utilisant la variable aléatoire W égale au rang du premier face lors de l'expérience décrite au début de ce problème, que les événements $F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2 \cap F_3, P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4, \ldots, P_1 \cap \ldots \cap P_{k-1} \cap F_k$ et $P_1 \cap \ldots \cap P_{k-1} \cap P_k$, forment un système complet d'événements.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k, on a $P_{F_1}(T_k = n) = P(T_k = n-1)$, puis en déduire que l'espérance conditionnelle $E(T_k|F_1)$ est égale à $1 + E(T_k)$.
   c. De la même façon, déterminer, pour tout i de $[\![2, k]\!]$, la valeur de $E(T_k|P_1 \cap \ldots \cap P_{i-1} \cap F_i)$.
   d. Justifier que $E(T_k|P_1 \cap \ldots \cap P_k) = k$.
9. a. Déduire des questions précédentes, la relation : $E(T_k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j q + E(T_k)\sum_{j=0}^{k-1} p^j q + kp^k$.
   b. Établir finalement que :
   $$E(T_k) = \frac{1-p^k}{qp^k}.$$
10. Justifier que $E(S_k) \leqslant E(T_k)$ puis utiliser certains résultats des parties 2 et 3 pour établir, sans étude de fonction, que l'on a :
    $$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \forall p \in]0,1[,\ (k-1)p^k \geqslant kp^{k-1} - 1.$$

EDHEC-1 2018 : Corrigé

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$f(-x) = \frac{2}{(e^{-x}+e^{x})^2} = \frac{2}{(e^{x}+e^{-x})^2} = f(x).$$

Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire.}}$

2. La fonction f est évidemment positive et continue sur $\mathbf{R}$.

On a $f(t) = \dfrac{2}{e^{2t}\left(1+e^{-2t}\right)^2} = \dfrac{2e^{-2t}}{\left(1+e^{-2t}\right)^2}$.

Et donc[1] une primitive de f est $t \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-2t}}$.

On a donc, pour $A > 0$,

$$\int_0^A f(t)\,dt = \left[\frac{1}{1+e^{-2t}}\right]_0^A = \frac{1}{1+e^{-2A}} - \frac{1}{2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, et donc par parité de f, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge également et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 2\frac{1}{2} = 1.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$

3.a. La fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire sur $\mathbf{R}$. Et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge.

Mais la fonction $t \mapsto tf(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$, et au voisinage de $+\infty$,

$$t^2 tf(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2t^3}{e^{2t}} = 2t^3e^{-2t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc $tf(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$.

Et alors, par imparité de $t \mapsto tf(t)$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = 0$.

Donc X possède une espérance, et $\boxed{E(X) = 0.}$

3.b. La fonction $t \mapsto t^2f(t)$ est paire, et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2f(t)\,dt$ converge.

Or, on montre comme précédemment, par croissance comparée que $t^2f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\,dt$ converge.

Ainsi, $\boxed{X \text{ possède un moment d'ordre 2 et donc une variance.}}$

4. La fonction F est continue sur $\mathbf{R}$ puisqu'il s'agit de la fonction de répartition d'une variable à densité.

De plus, sa dérivée est f, qui est strictement positive sur $\mathbf{R}$, et donc F est strictement croissante.

Enfin, comme pour toute fonction de répartition, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, donc par le théorème de la bijection, $\boxed{F \text{ réalise une bijection de } \mathbf{R} \text{ sur }]0,1[.}$

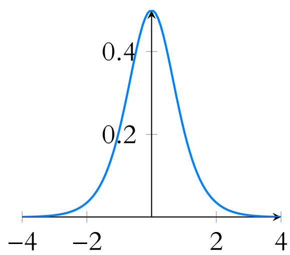


Figure 1– La fonction f.

[1] Nous venons de prouver que f est de la forme $-\frac{u'}{u^2}$, donc une primitive en est $\frac{1}{u}$.

Danger !
L'intégrale d'une fonction impaire, si elle existe, est nulle. Mais ceci ne dispense pas d'une étude de convergence, on ne peut affirmer directement que $E(X) = 0$.

Comparaison
A priori, la comparaison à $\frac{1}{t^2}$ nous donnerait juste la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} tf(t)\,dt$, mais puisque $tf(t)$ est continue sur $[0,1]$, l'intégrale entre 0 et 1 est automatiquement convergente car intégrale d'une fonction continue sur un segment.

5.a. Puisque F est à valeurs dans $]0,1[$, il est évident que $P(Y \leqslant x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $P(Y \leqslant x) = 1$ si $x \geqslant 1$.
Pour $x \in]0,1[$, on a

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(F(X) \leqslant x) = P(X \leqslant F^{-1}(x)).$$

Et donc $F_Y(x) = F\left(F^{-1}(x)\right) = x$.

Ainsi, $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$. Nous reconnaissons là la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,1]$, et donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]).}$

Détails
Puisque F est croissante, sa bijection réciproque F^{-1} l'est également, et donc le sens des inégalités est préservé.

5.b. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{1+e^{-2t}}\right]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{1+e^{-2x}} = \boxed{\frac{1}{1+e^{-2x}}.} \end{aligned}$$

Astuce
On pourrait également calculer $\int_A^x f(t)\,dt$ puis faire tendre A vers $-\infty$, mais puisque nous avons déjà calculé $\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$, l'utilisation de la relation de Chasles (valable également si $x < 0$) permet d'éviter un passage à la limite.

5.c. Soit $x \in]0,1[$. On a alors

$$\begin{aligned} y = F^{-1}(x) &\Leftrightarrow x = F(y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+e^{-2y}} \\ &\Leftrightarrow 1 + e^{-2y} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow e^{-2y} = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow -2y = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right). \end{aligned}$$

Et donc $\boxed{\text{la bijection réciproque de } F \text{ est bien } x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right).}$

Méthode
Pour déterminer la bijection réciproque de F, il faut partir de $x = F(y)$, et exprimer y en fonction de x. Si on sait que F est bijective, il n'y a qu'une solution.
Notons qu'ici, l'expression de F^{-1} étant donnée, on pouvait se contenter de vérifier que $F\left(F^{-1}(x)\right) = x$.

5.d. D'après ce qui précède, $Y = F(X)$ suit une loi uniforme, donc $X = F^{-1}(Y)$, où Y suit la loi $\mathcal{U}([0,1])$.
On peut donc faire appel au script suivant, en se rappelant que `rand()` simule une loi uniforme sur $[0,1]$.

```
x = rand() ;
X = 1/2*log(x/(1-x)) ;
```

EXERCICE 2

Partie 1

1. On a

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} \\ &= \boxed{-(ad-bc)I_2.} \end{aligned}$$

Remarque
Ceci prouve que
$$\begin{aligned} X^2 - (a+d)X + (ad-bc) \\ = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) \end{aligned}$$
est un polynôme annulateur de A.

2.a. Nous savons que $ad - bc$ est le déterminant de A, et qu'il est nul si et seulement si A n'est pas inversible.
Or, si A était inversible, en multipliant à gauche par A^{-1} l'égalité $A^k = A \times A^{k-1} = 0$, il viendrait $A^{k-1} = 0$, ce qui est contraire aux hypothèses.
Donc A n'est pas inversible, et par conséquent, $\boxed{ad - bc = 0.}$

2.b. Une matrice nilpotente d'ordre 1 est une matrice telle que $A^1 = A = 0$.
Or ici, nous avons supposé A non nulle, donc $\boxed{k \geqslant 2.}$

2.c. Puisque $ad - bc = 0$, d'après le résultat de la question 1, $A^2 = (a+d)A$.
Alors $A^3 = A^2A = (a+d)AA = (a+d)^2A$, et une récurrence rapide prouve que pour tout $n \geqslant 2$, $A^n = (a+d)^{n-1}A$.
Et en particulier $A^k = (a+d)^{k-1}A$.
Mais $A^k = 0$ et $A \neq 0$, donc nécessairement $(a+d)^{k-1} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a+d=0.}$

3. Si A est nilpotente, nous venons de prouver que $A^2 = (a+d)A = 0$.
Et inversement, si $A^2 = 0$, alors A est nilpotente d'indice 2.
Donc $\boxed{A \text{ est nilpotente si et seulement si } A^2 = 0.}$

Autrement dit
Une matrice nilpotente non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ possède nécessairement un indice de nilpotence égal à 2.
Plus généralement, on peut montrer qu'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ possède un indice de nilpotence **au plus** égal à n.

Partie 2

4.a. Supposons donc que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$. Soit alors $x \in E$.
Le vecteur $f(x)$ est dans $\operatorname{Im}(f)$, et par conséquent dans $\operatorname{Ker}(f)$.
Et donc $f^2(x) = f(f(x)) = 0_E$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, $\boxed{f^2 = 0.}$

Remarque
Le raisonnement reste valable si on suppose seulement $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$.

4.b. Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et alors $f(y) = f^2(x) = 0$, de sorte que $y \in \operatorname{Ker}(f)$.
Ceci prouve donc que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.
On en déduit donc que $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg}(f)$.
Mais d'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg}(f) = \dim E = 2$.
On a donc soit $\operatorname{rg}(f) = 1$, soit $\operatorname{rg}(f) = 0$.
Mais f étant non nul, ce second cas n'est pas possible[2], et donc $\operatorname{rg}(f) = 1$.
Et alors, toujours par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = 2 - \operatorname{rg}(f) = 1$.
Puisque $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$, ces deux espaces sont donc égaux : $\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f).}$

Plus généralement
Sur le même principe, on peut prouver que $f \circ g = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.

[2] Une application linéaire de rang 0 possède $\{0_E\}$ comme image, ce qui n'est possible que pour l'application nulle.

4.c. Puisque la composition des endomorphismes correspond au produit des matrices, un endomorphisme est nilpotent d'indice k si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base est nilpotente d'indice k.
Ainsi, si $\mathcal{B}$ est une base de E et si $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors f est nilpotent si et seulement si A est nilpotente, et donc d'après la partie 1, si et seulement si $A^2 = 0 \Leftrightarrow f^2 = 0$.
Or, les questions 4.a et 4.b prouvent que $f^2 = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)$.
Donc $\boxed{f \text{ est nilpotent si et seulement si } \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f).}$

Méthode
Commencer par analyser ainsi la matrice qu'on cherche à obtenir nous donne des conditions sur les vecteurs de la base qu'on cherche. Cette étape n'a pas besoin de figurer sur la copie, mais la faire au brouillon permet de se faire une idée plus précise de comment trouver les vecteurs e_1 et e_2.

5. Supposons qu'une telle base (e_1, e_2) existe. Alors nécessairement $f(e_1) = 0 \Leftrightarrow e_1 \in \operatorname{Ker}(f)$, et de plus $f(e_2) = e_1$.

Soit donc e_1 un élément non nul de $\operatorname{Ker}(f)$. Puisque $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$, $e_1 \in \operatorname{Im}(f)$, et donc il existe[3] $e_2 \in E$ tel que $f(e_2) = e_1$.
Montrons que la famille (e_1, e_2) est alors une famille libre de E : soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda e_1 + \mu e_2 = 0_E$. En appliquant f à cette égalité, il vient

$$\lambda f(e_1) + \mu f(e_2) = 0_E \Leftrightarrow \lambda \cdot 0_E + \mu e_1 = 0_E.$$

Puisque $e_1 \neq 0_E$, alors $\mu = 0$. Et donc la relation de départ devient $\lambda e_1 = 0_E$, et donc $\lambda = 0$.
Ainsi, la famille (e_1, e_2) est libre, et étant de cardinal $2 = \dim E$, c'est une base de E.
La matrice de f dans cette base est donc

$$\operatorname{Mat}_{(e_1,e_2)}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array} = A.$$

[3] Notons que f n'étant pas bijective, un tel e_2 n'est pas nécessairement unique, mais l'essentiel est qu'il en existe au moins un.

6.a. Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$.
Et donc y possède un antécédent[4] par u, et donc est dans $\operatorname{Im}(u)$. Donc $\boxed{\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(u).}$

Soit $x \in \operatorname{Ker} v$. Alors $f(x) = u(v(x)) = u(0_E) = 0_E$, de sorte que $x \in \operatorname{Ker}(f)$.
Donc $\boxed{\operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Ker}(f).}$

[4] En l'occurrence $v(x)$.

Plus généralement
Pour deux applications linéaires u et v, on a toujours

$$\operatorname{Im}(u \circ v) \subset \operatorname{Im}(u)$$

et

$$\operatorname{Ker}(v) \subset \operatorname{Ker}(u \circ v).$$

6.b. Puisque f est non nul, ni u et v ne sont nuls, et donc les résultats de la question 4 s'appliquent à u et à v.
Donc $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Ker}(v)$ sont de dimension 1, tout comme $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)$.
Les inclusions de la question 6.a sont donc des inclusions entre espaces de mêmes dimensions : ce sont des égalités : $\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(u) \text{ et } \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(v).}$

6.c. Nous savons déjà que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$, et puisque u et v sont également nilpotents, $\operatorname{Ker}(v) = \operatorname{Im}(v)$ et $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(u)$.
On en déduit donc que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(v) = \operatorname{Im}(v)$.

6.d. Pour $x \in E$, on a $v(x) \in \operatorname{Im}(v) = \operatorname{Ker}(u)$ et donc $f(x) = u(v(x)) = 0_E$.
Donc f est l'endomorphisme nul, ce qui contredit les hypothèses.
Ainsi, $\boxed{\text{il n'existe pas de couple d'endomorphismes nilpotentes } u \text{ et } v \text{ tels que } f = u \circ v.}$

EXERCICE 3

1.a. Puisque toutes les colonnes de J_n sont égales, et que J_n n'est pas la matrice nulle, $\boxed{\operatorname{rg}(J_n) = 1.}$

> **Attention !**
> On ne peut pas se contenter de mentionner que les colonnes sont proportionnelles pour justifier qu'une matrice est de rang 1.
> La matrice nulle a aussi ses colonnes proportionnelles, pourtant son rang est nul !

En particulier, elle n'est pas inversible, donc 0 est valeur propre de J_n et

$$\dim E_0(J_n) = n - \operatorname{rg}(J_n) = \boxed{n-1.}$$

1.b. On a

$$J_nV_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \boxed{nV_n.}$$

Puisque $V_n \neq 0$, c'est donc un $\boxed{\text{vecteur propre de } J_n\text{, associé à la valeur propre } n.}$

> **Égalité**
> Notons qu'en général on a juste une inégalité
> $$\sum_{\lambda \in \operatorname{Spec}(J_n)} \dim E_\lambda(J_n) \leqslant n,$$
> mais J_n est symétrique, donc diagonalisable, et nous pouvons donc affirmer qu'il s'agit d'une égalité.

1.c. On a $\dim E_n(J_n) \geqslant 1$ et $\dim E_0(J_n) = n-1$.
Puisque d'autre part $n = \displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Spec}(J_n)} \dim E_\lambda(J_n)$
Donc il n'y a pas de «place» pour d'autres valeurs propres : $\dim E_n(J_n) = 1$, et J_n ne possède pas d'autres valeurs propres, donc $\boxed{\operatorname{Spec}(J_n) = \{0, n\}.}$

2. La fonction $(x_1, \dots, x_n) \mapsto -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ est polynomiale sur $\mathbf{R}^n$, donc elle y est de classe $\mathscr{C}^2$.

Par composition avec la fonction exponentielle, qui est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \exp\left(-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^n$.
De plus, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ est polynomiale sur $\mathbf{R}^n$, donc $\mathscr{C}^2$.
Et donc, par produit de fonctions $\mathscr{C}^2$, $\boxed{f_n \text{ est une fonction de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbf{R}^n.}$

3.a. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors par dérivation d'un produit,

$$\partial_i f_n(x) = -2x_i\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) + \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) = \left(1 - 2x_i\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).$$

3.b. Un point $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ est un point critique de f_n si et seulement si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \left(1 - 2x_i\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) = 0 \Leftrightarrow 2x_i\sum_{k=1}^{n} x_k = 1.$$

Notons qu'alors, automatiquement, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \neq 0$, et donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \dfrac{1}{2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k}$.

En particulier, on doit avoir $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, de sorte que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = nx_1$.

Et alors $x_1 = \dfrac{1}{2nx_1} \Leftrightarrow x_1^2 = \dfrac{1}{2n} \Leftrightarrow x_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.
Ainsi, f_n possède deux points critiques qui sont

$$a = \frac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \dots, 1) \text{ et } b = -\frac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \dots, 1) = -a.$$

4.a. Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, avec $i \neq j$. Alors en dérivant $\partial_i f_n$ par rapport à x_j, on a

$$\partial^2_{i,j} f_n(x) = -2x_j\left(1-2x_i\sum_{k=1}^n x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) - 2x_i\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) = -2\left(x_i+x_j-2x_ix_j\sum_{k=1}^n x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right).$$

Et pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}\partial^2_{i,i} f_n(x) &= \left(-2\sum_{k=1}^n x_k - 2x_i\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) - 2x_i\left(1-2x_i\sum_{k=1}^n x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\\ &= -2\left(2x_i + \sum_{k=1}^n x_k - 2x_i^2\sum_{k=1}^n x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right).\end{aligned}$$

4.b. En a, $-\sum_{k=1}^n x_k^2 = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{2n} = -\frac{1}{2}$. Il vient alors, pour $i \neq j$,

$$\partial^2_{i,j} f_n(a) = -2\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{2}{2n}\frac{n}{\sqrt{2n}}\right)e^{-1/2} = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}.$$

Et pour $i = j$,

$$\partial^2_{i,i} f_n(a) = -2\left(\frac{2}{\sqrt{2n}} + \frac{n}{\sqrt{2n}} - \frac{2}{2n}\frac{n}{\sqrt{2n}}\right)e^{-1/2} = -2\frac{n+1}{\sqrt{2ne}}.$$

Ainsi, les coefficients de $H_n(a)$ valent tous $-\frac{2}{\sqrt{2ne}}$, sauf les coefficients diagonaux, qui valent $-\frac{2(n+1)}{\sqrt{2ne}} = -\frac{2}{\sqrt{2ne}}(n+1)$.

On reconnaît là les coefficients de $-\frac{2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)$, et donc

$$\boxed{H_n(a) = -\frac{2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n).}$$

4.c. Un réel λ est valeur propre de $nI_n + J_n$ si et seulement $nI_n + J_n - \lambda I_n$ n'est pas inversible, soit si et seulement si $J_n - (\lambda - n)I_n$ n'est pas inversible, si et seulement si $\lambda - n$ est valeur propre de J_n.
Puisque les valeurs propres de J_n sont 0 et n, c'est le cas si et seulement si $\lambda - n = 0 \Leftrightarrow \lambda = n$ ou $\lambda - n = n \Leftrightarrow \lambda = 2n$.
Donc les valeurs propres de $nI_n + J_n$ sont n et $2n$.

Par conséquent, $\boxed{\text{les valeurs propres de } H(a) = \frac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n) \text{ sont } \frac{-2n}{\sqrt{2ne}} \text{ et } \frac{-4n}{\sqrt{2ne}}.}$

Une autre méthode, «à la main» : puisque J_n est diagonalisable, et que nous connaissons ses valeurs propres, il existe une matrice P inversible telle que $J_n = P^{-1}\mathrm{Diag}(0,\dots,0,n)P$.
Mais $I_n = P^{-1}I_nP$, et donc

> **Astuce**
> Pour toute matrice inversible P, $I_n = P^{-1}I_nP$.
> Cela revient à dire que dans toute base, la matrice de l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^n$ est la matrice identité.

$$nI_n + J_n = P^{-1}nI_nP + P^{-1}\mathrm{Diag}(0,\dots,0,n)P = P^{-1}\left(nI_n + \mathrm{Diag}(0,\dots,0,n)\right)P = P^{-1}\mathrm{Diag}(n,\dots,n,2n)P.$$

Et donc $nI_n + J_n$ est semblable à une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont n et $2n$: $\mathrm{Spec}(nI_n + J_n) = \{n, 2n\}$.
On conclut comme précédemment pour les valeurs propres de $H_n(a) = -\frac{2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)$.

4.d. Les valeurs propres de $H_n(a)$ sont toutes deux strictement négatives, donc f_n possède un maximum local en a.

4.e. Il est facile de vérifier que si l'on change les x_i en leurs opposés, alors on change le signe des dérivées secondes de f_n :

$$\partial^2_{i,j} f_n(-x_1,\dots,-x_n) = -\partial^2_{i,j} f_n(x_1,\dots,x_n).$$

Et donc $H_n(b) = -H_n(a)$. Par conséquent, les valeurs propres de $H_n(b)$ sont toutes deux strictement positives, et donc $\boxed{f_n \text{ possède un minimum local en } b.}$

5.a. La fonction h est dérivable sur $\mathbf{R}_+$, et on a $h'(t) = -2t^2e^{-t^2} + e^{-t^2} = e^{-t^2}(1-2t^2)$.
Par conséquent, on a $h'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1-2t^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow t \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Et donc le tableau de variation de h est :

t	0		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

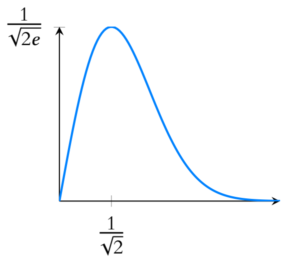


FIGURE 2– La fonction h.

On en déduit que h possède un maximum en $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et ce maximum vaut $h\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$.

5.b. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $(x_1,\dots,x_n)$ et $(1,\dots,1)$. Alors

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \times 1\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n 1^2\right)\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \Leftrightarrow \boxed{\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right).}$$

Méthode
Comment choisir les bons vecteurs ?
On sait que l'inégalité de Cauchy-Schwarz affirme que

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$$

Au vu du résultat demandé, on veut donc $a_k b_k = x_k$ et $b_k^2 = x_k^2$.

5.c. Soit $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n$. Alors en utilisant les deux questions précédentes,

$$|f_n(x)| = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2} \exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n x_k^2\right) = \sqrt{n}h\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \leqslant \sqrt{n}\frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

Ainsi, on a $-\sqrt{\dfrac{n}{2e}} \leqslant f_n(x) \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2e}}$. Mais $\sqrt{\dfrac{n}{2e}} = f_n(a)$ et $-\sqrt{\dfrac{n}{2e}} = f_n(b)$.
Donc pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $f_n(b) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(a)$: f_n possède un maximum global en a et un minimum global en b.

6. Question d'informatique.

6.a. Le script suivant fonctionne :

```
function H(n)
        M = -2/sqrt(2*n*%e) * (n*eye(n,n) + ones(n,n))
        disp(M)
endfunction
```

6.b. La nappe tracée correspond à une fonction qui possède un maximum local (et probablement[5] un maximum global) et un minimum local.
De plus, le maximum local est atteint en un point dont les deux coordonnées sont positives, qui pourrait donc être $a = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, et de même le minimum local semble atteint en un point qui pourrait être b.
Donc avec les informations dont on dispose, il est plausible que la nappe soit une représentation de la fonction f_2.

[5] Vu que nous ne voyons qu'une partie de la fonction, il est impossible d'être certain qu'elle ne prend pas ailleurs des valeurs plus grandes.

PROBLÈME

Partie 1 : simulations de S_k et T_k.

1. Puisque S_k est le rang d'apparition du $k^{\text{ème}}$ «Pile», il s'agit d'utiliser la variable `c` pour compter le nombre de «Pile».
Et pour simuler chacun des lancers, on peut simuler une loi uniforme sur $[0,1]$ à l'aide de `rand()`, qui prendra une valeur inférieure à p avec probabilité p.
Nous proposons donc le programme suivant :

Autrement dit
Chaque fois que `rand()` retourne un nombre inférieur à p, cela correspond à un «pile», et sinon à un «face».

```
k = input('donnez une valeur pour k  :')
p = input('donnez une valeur pour p  :')
n = 0
c = 0
while c<k
        n=n+1
        if rand()<p then c = c+1
        end
end
disp(n)
```

2. Le programme proposé à la question précédente s'arrête dès que le $k^{\text{ème}}$ «pile» est obtenu, mais ces «piles» ne sont pas forcément consécutifs.
Pour que le programme s'arrête dès qu'on obtient k «piles» consécutifs, nous pouvons utiliser la variable c pour qu'elle compte le nombre de «piles» consécutifs, et donc la remettre à zéro à chaque «face».

```
if rand()<p then c = c+1, else c = 0 ;
```

Le programme s'arrêtera donc lorsqu'on aura obtenu k «piles» consécutifs.

Partie 2 : calcul de l'espérance de S_k.

3. Puisque S_1 est le rang d'apparition du premier «pile», par indépendance des lancers, nous reconnaissons une $\boxed{\text{loi géométrique de paramètre } p}$. Et donc $\boxed{E(S_1) = \frac{1}{p}}$.

4.a. Les lancers étant indépendants, $\boxed{X_{n-1} \text{ suit une loi binomiale } \mathscr{B}(n-1, p).}$

4.b. Il faut au moins k lancers pour obtenir k «piles», et pour tout $n \geqslant k$, il est possible d'obtenir $n-k$ «faces» suivis de k «piles», de sorte que l'événement $[S_k = n]$ est possible.
Ainsi, $\boxed{S_k(\Omega) = [\![k, +\infty[\![= \{n \in \mathbf{N} : n \geqslant k\}.}$
L'événement $[S_k = n]$ est réalisé si et seulement si le $n^{\text{ème}}$ lancer est un «pile» et qu'il y a eu exactement $k-1$ «piles» lors des $n-1$ premiers lancers.
Donc $\boxed{[S_k = n] = [X_{n-1} = k-1] \cap P_n.}$

4.c. Puisque X_{n-1} ne dépend que des $n-1$ premiers lancers, les événements $[S_{n-1} = k-1]$ et P_n sont indépendants, de sorte que

$$\forall n \geqslant k,\ P(S_k = n) = P(X_{n-1} = k-1)P(P_n) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} p = \boxed{\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.}$$

5.a. La variable Z_i représente le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du $i^{\text{ème}}$ pile après l'obtention du $(i-1)^{\text{ème}}$.
Autrement dit, il s'agit du nombre de lancers nécessaires à l'obtention d'un pile. Et par indépendance des lancers, $\boxed{Z_i \text{ suit donc une loi géométrique de paramètre } p.}$

En détails : l'explication précédente est largement suffisante au concours, mais peut donner l'impression qu'on s'en sort par une pirouette, sans vraiment justifier.
Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[S_{i-1} = n], n \geqslant i-1\}$. Alors pour tout $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
P(Z_i = k) &= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P([Z_i = k] \cap [S_{i-1} = n]) \\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P([S_i = n+k] \cap [S_{i-1} = n]) \\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P([S_{i-1} = n] \cap F_{n+1} \cap F_{n+2} \cap \ldots \cap F_{n+k-1} \cap P_{n+k}) \\
&= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1} = n) P(F_{n+1}) P(F_{n+2}) \cdots P(F_{n+k-1}) P(P_{n+k})
\end{aligned}$$

Les résultats des n premiers lancers sont indépendants de ceux des lancers suivants.

$$= \sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1}=n)q^{n+k-1-(n+1)+1}p$$
$$= pq^{k-1}\sum_{n=i-1}^{+\infty} P(S_{i-1}=n)$$
$$= pq^{k-1}.$$

La somme des probabilités d'un système complet d'événements vaut 1.

Et donc on reconnaît bien une loi géométrique de paramètre p.

5.b. En faisant apparaître une somme télescopique, on a

$$S_k = (S_k - \cancel{S_{k-1}}) + (\cancel{S_{k-1}} - \cancel{S_{k-2}}) + \cdots + (\cancel{S_2} - \cancel{S_1}) + \cancel{S_1} = \boxed{\sum_{i=1}^{k} Z_i.}$$

5.c. Puisque les Z_i ont une espérance, S_k possède aussi une espérance, et par linéarité de l'espérance,

$$E(S_k) = E\left(\sum_{i=1}^{k} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{k} E(Z_i) = \boxed{\frac{k}{p}.}$$

Remarque

En utilisant la loi de S_k et la définition de l'espérance, il aurait été bien difficile de calculer $E(S_k)$, sauf pour $k=1$ et $k=2$ où on aurait alors reconnu des séries géométriques dérivées.

Estimation

6.a. Les Z_i sont mutuellement indépendantes, suivent la même loi, et possèdent une espérance et une variance. Donc par la loi faible des grands nombres,

$$\overline{Z_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{P} E(Z_1) = \frac{1}{p}.$$

6.b. Par continuité de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$,

$$\frac{k}{S_k} = \frac{1}{\overline{Z_k}} \xrightarrow{P} \frac{1}{\frac{1}{p}} = p.$$

Continuité

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, et $\overline{Z_k}$ prend ses valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ (*i.e.* $P(\overline{Z_k} \in \mathbf{R}_+^*) = 1$), donc on peut appliquer le résultat rappelé dans l'énoncé.

6.c. Puisque S_{k-1} est à valeurs dans $[\![k-1, +\infty[\![$, $\boxed{\sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1}=j) = 1.}$

D'après le théorème de transfert, sous réserve de convergence, on a

$$E\left(\frac{k-1}{S_k-1}\right) = \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{k-1}{i-1} P(S_k = i)$$
$$= \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{k-1}{i-1}\binom{i-1}{k-1} p^k q^{i-k}$$
$$= \sum_{i=k}^{+\infty} \binom{i-2}{k-2} p^k q^{i-k}$$
$$= p \sum_{j=k-1}^{+\infty} \binom{j-1}{k-2} p^{k-1} q^{j-k}$$
$$= p \sum_{j=k-1}^{+\infty} P(S_{k-1}=j) = \boxed{p.}$$

Coeff. binomiaux

On a pour

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Cette formule se retrouve sans grandes difficultés en revenant aux factorielles... à condition de savoir qu'une telle formule existe.

Convergence

Notons qu'on reconnaît ici une série convergente, ce qui garantit donc l'existence de $E\left(\frac{k-1}{S_k-1}\right)$.

6.d. Puisque $S_{k+1} \geqslant S_k + 1$, il vient donc $\dfrac{k}{S_{k+1}-1} \leqslant \dfrac{k}{S_k}$.

Mais d'après la question précédente, $E\left(\dfrac{k}{S_k-1}\right) = p$ et donc par croissance de l'espérance,

$$E\left(\frac{k}{S_k}\right) \geqslant E\left(\frac{k}{S_k-1}\right) = p.$$

Il reste toutefois à constater que cette inégalité est stricte.

Mais S_{k+1} et S_k+1 ne sont pas presque sûrement égales puisque $S_{k+1}-S_k = Z_{k+1}$ suit une loi géométrique, et donc n'est pas la variable certaine égale à 1.
Donc $\dfrac{k}{S_k}-\dfrac{k}{S_{k+1}-1}$ est une variable positive, mais qui n'est pas presque sûrement nulle : son espérance est donc strictement positive[6]. Donc

$$E\left(\frac{k}{S_k}-\frac{k}{S_{k+1}-1}\right)>0 \Leftrightarrow E\left(\frac{k}{S_k}\right)>E\left(\frac{k}{S_{k+1}-1}\right)=p.$$

Ceci prouve bien que $\boxed{\dfrac{k}{S_k} \text{ est un estimateur biaisé de } p,}$ et même que son biais est positif.

Intuition

Si S_k+1 et S_{k+1} étaient égales, cela signifierait qu'une fois que k «piles» sont obtenus, il suffit d'un lancer supplémentaire pour obtenir le «pile» suivant. Or ce lancer peut très bien donner un «face».

[6] Dans la somme qui définit l'espérance, au moins l'un des termes est strictement positif.

Partie 3 : calcul de l'espérance de T_k.

7. La variable T_1 désigne le rang d'apparition du dernier «pile» de la première série de **un** «pile». Autrement dit, c'est le rang du premier «pile», et donc $\boxed{T_1=S_1.}$

8.a. Comme indiqué, considérons la variable W égale au rang d'apparition du premier «face».
Alors $[W=1],[W=2],\dots,[W=k],[W>k]$ est un système complet d'événements.
Or, $[W=1]=F_1$, $[W=2]=P_1\cap F_2,\dots,[W=k]=P_1\cap\dots\cap P_{k-1}\cap F_k$ et enfin[7] $[W>k]=P_1\cap P_2\cap\dots\cap P_k$.
Donc $\boxed{F_1, P_1\cap F_2,\dots,P_1\cap\dots\cap P_{k-1}\cap F_k, P_1\cap\dots\cap P_k \text{ est un système complet d'événements.}}$

[7] W est supérieur strictement à k si et seulement si les k premiers lancers donnent tous «pile».

8.b. Sachant que le premier lancer a donné «face», la première série de k «piles» consécutifs ne peut intervenir qu'à partir du second lancer.
Et donc la probabilité que T_k soit égal à n est la probabilité qu'il y ait besoin de $n-1$ lancers[8] pour obtenir la première série de k «piles» consécutifs. C'est donc $P(T_k=n-1)$.
Autrement dit, $P_{F_1}(T_k=n)=P(T_k=n-1)$.
Notons que ceci est également vrai pour $n=k$: si le premier lancer donne «face», alors il n'est pas possible d'obtenir k «piles» en k lancers, et donc $P_{F_1}(T_k=k)=0=P(T_k=k-1)$.

[8] Entre le second et le $n^{\text{ème}}$, il y a $n-1$ lancers.

Rédaction

Il serait en fait très désagréable de prouver ceci par le calcul.
C'est toute la difficulté des probabilités : trouver le bon équilibre entre une intuition qu'on expliquera avec une phrase et une formalisation correcte à l'aide d'événements.

Et alors, par définition de l'espérance conditionnelle,

$$\begin{aligned}
E(T_k|F_1) &= \sum_{n=k}^{+\infty} nP_{F_1}(T_k=n)\\
&= \sum_{n=k+1}^{+\infty} nP_{F_1}(T_k=n)\\
&= \sum_{n=k+1}^{+\infty} nP(T_k=n-1)\\
&= \sum_{i=k}^{+\infty}(i+1)P(T_k=i)\\
&= \sum_{i=k}^{+\infty} iP(T_k=i)+\sum_{i=k}^{+\infty}P(T_k=i) = \boxed{E(T_k)+1.}
\end{aligned}$$

Si $n=k$, alors $P_{F_1}(T=n)=0$.

8.c. Sur le même principe, si $P_1\cap\dots\cap P_{i-1}\cap F_i$ est réalisé, alors la première série de k «piles» consécutifs ne peut avoir lieu qu'à partir du $(i+1)^{\text{ème}}$ lancer.
Et donc pour tout $n\geqslant k$, $P_{P_1\cap\dots\cap P_{i-1}\cap F_i}(T_k=n)=P(T_k=n-i)$.
Il vient alors

$$\begin{aligned}
E(T_k|P_1\cap\dots\cap P_{i-1}\cap F_i) &= \sum_{n=k+i}^{+\infty} nP_{P_1\cap\dots\cap P_{i-1}\cap F_i}(T_k=n)\\
&= \sum_{n=k+i}^{+\infty} nP(T_k=n-i)\\
&= \sum_{j=k}^{+\infty}(j+i)P(T_k=j) = \boxed{i+E(T_k).}
\end{aligned}$$

Chgt d'indice

On a posé $j=n-i$ donc $n=i+j$.

8.d. Sachant que les k premiers lancers ont tous donné «pile», T_k est nécessairement égal à k. Autrement dit, la loi conditionnelle de T_k sachant $P_1 \cap \ldots \cap P_k$ est la loi certaine égale à k. Et donc

$$\boxed{E(T_k | P_1 \cap \ldots \cap P_k) = k.}$$

9.a. D'après la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'événements de la question 8.a, on a

$$\begin{aligned} E(T_k) &= P(F_1)E(T_k|F_1) + P(P_1 \cap F_2)E(T_k|P_1 \cap F_2) + \ldots + P(P_1 \cap \ldots \cap P_k)E(T_k|P_1 \cap \ldots \cap P_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(P_1 \cap \ldots \cap P_{i-1} \cap F_i)(i + E(T_k)) + kP(P_1 \cap \ldots \cap P_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} p^{i-1}q(i + E(T_k)) + kp^k \\ &= \boxed{\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j q + E(T_k)\sum_{j=0}^{k-1} p^j q + kp^k.} \end{aligned}$$

Chgt d'indice
$j = i - 1$.

9.b. On a donc

$$E(T_k)\left(1 - \sum_{j=0}^{k-1} p^j q\right) = \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j q + kp^k.$$

Mais d'une part, nous savons que $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} p^j q = q\frac{1-p^k}{1-p} = 1 - p^k$.

D'autre part, pour tout $x \in]0,1[$, on a $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$.
En dérivant cette relation par rapport à x, il vient, pour tout $x \in]0,1[$,

$$\sum_{i=1}^{k} ix^{i-1} = \frac{-(k+1)x^k(1-x) + 1 - x^{k+1}}{(1-x)^2} = \frac{1-(k+1)x^k + kx^{k+1}}{(1-x)^2}.$$

Et donc en particulier, pour $x = p$,

$$\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)p^j q = q\sum_{i=1}^{k} ip^{i-1} = \frac{1-(k+1)p^k + kp^{k+1}}{q}.$$

On en déduit donc que

$$E(T_k)p^k = \frac{1-(k+1)p^k + kp^{k+1}}{q} + kp^k = \frac{1-(k+1)p^k + kp^{k+1} + (1-p)kp^k}{q} = \frac{1-p^k}{q}$$

et donc $\boxed{E(T_k) = \dfrac{1-p^k}{qp^k}.}$

Astuce
Nous connaissons une formule pour les sommes partielles de séries géométriques. En dérivant une ou deux fois cette formule (ce qui est licite puisqu'on dérive alors une somme finie), on obtient des formules pour les sommes partielles de séries géométriques dérivées.
C'est d'ailleurs ainsi qu'a été prouvée en cours la convergence des séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2.

10. Il est évident que lorsque la première série de k «piles» consécutifs s'achève, alors on a déjà obtenu au minimum k «piles».
Et donc $S_k \leqslant T_k$. Par croissance de l'espérance, on a donc $E(S_k) \leqslant E(T_k)$.
Soit encore, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et tout $p \in]0,1[$,

$$\frac{k}{p} \leqslant \frac{1-p^k}{qp^k} \Leftrightarrow \underbrace{(1-p)}_{=q} kp^{k-1} \leqslant 1 - p^k \Leftrightarrow kp^{k-1} - kp^k \leqslant 1 - p^k \Leftrightarrow \boxed{kp^{k-1} - 1 \leqslant (k-1)p^k.}$$

EDHEC 2017

Exercice 1

Sujet : Étude d'une suite définie par une équation implicite — **Facile**

Abordable en première année : ✓ — **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : suites, fonctions d'une variables, `Scilab`

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k.$$

1. a. Compléter la fonction `Scilab` suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de `f(x,n)` où x et n sont donnés par l'utilisateur.

```
function y = f(x,n)
        y = sum(------)
endfunction
```

   b. Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ puis en déduire une deuxième façon de déclarer `f`, en complétant la déclaration suivant où la fonction est toujours nommée `f` :

```
function y = f(x,n)
        if x==1 then y = ------
                        else y=------
        end
endfunction
```

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue x élément de $[0,1]$, possède une unique solution α_n dans $[0,1]$.
3. a. Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante.
   b. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.
4. a. Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$.
   b. Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ pour établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.
   c. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$.
5. On suppose que f_n a été déclarée (voir question 1) et on considère les commandes supplémentaires suivantes :

```
n = input('entrer la valeur de n :')
x = 0
while f(x,n) <1
        x = x+0.001
end
disp(x)
```

   Quel est le lien entre le résultat affiché et α_n ?

Exercice 2

Sujet : Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires — **Facile**

Abordable en première année : ✗ — **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : variables aléatoires à densité, convergence des variables aléatoires, `Scilab`

Commentaires : mignon, sans difficultés, thème très classique.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et on considère n variables aléatoires, notées $X_1, X_2, \ldots, X_n$, définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. On note M_n la variable aléatoire définie par $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est-à-dire que pour tout ω de Ω, on a $M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$. On admet que M_n est une variable aléatoire et on note F_{M_n} sa fonction de répartition.
   a. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F_{M_n}(x)$ puis montrer que M_n est une variable à densité.
   b. En déduire une densité f_{M_n} de M_n.
   c. Établir l'existence et donner la valeur de $E(M_n)$ et $E(M_n^2)$.
   d. Donner, pour tout $\varepsilon > 0$, un majorant, ne dépendant que de n et ε, de $P\left((M_n - 1)^2 \geqslant \varepsilon^2\right)$.
   e. Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|M_n - 1| \geqslant \varepsilon) = 0$. Que signifie ce résultat ?
2. On pose $Y_n = n(1 - M_n)$.
   a. On rappelle que `grand(1,n,'unf',0,1)` simule n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.
   Compléter la déclaration de fonction `Scilab` suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Y_n.

```
function Y = f(n)
        X = grand(1,n,'unf',0,1)
        Y = ------
endfunction
```

   b. Voici deux scripts (celui de droite utilise la fonction f définie ci-dessus) :

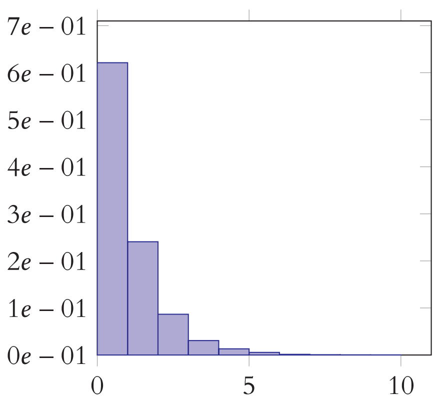
```
e = grand(1,10000,'exp',1)
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,e)
```

Script (1)

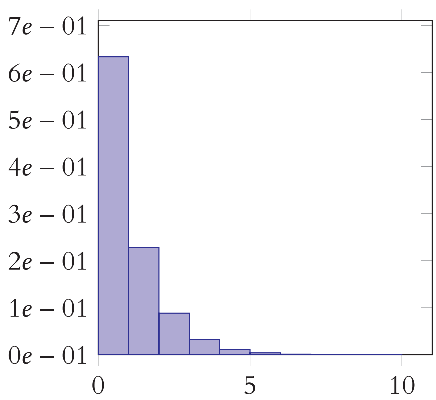
```
n = input('entrez la valeur de n  : ')
Y = []
for k=1 :10000
        Y = [Y,f(n)]
end
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,Y)
```

Script (2)

Chacun de ces scripts simule 10000 variables aléatoires indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0, 1]$, $]1, 2]$, $]2, 3]$, $\dots$, $]9, 10]$, et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).
Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi exponentielle de paramètre 1, renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que Y_n, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.



Histogramme (1)



Histogramme (2) pour $n = 1000$

Quelle conjecture peut-on émettre quand au comportement de la suite des variables aléatoires (Y_n) ?
3. a. Déterminer la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable Y_n définie à la question 2.
   b. Pour tout réel x positif ou nul, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x)$.
   c. Démontrer le résultat conjecturé à la question 2.b.

Exercice 3

Sujet : Étude d'une famille de vecteurs d'un espace euclidien **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : espaces euclidiens, valeurs propres

Commentaires : le résultat prouvé n'est pas particulièrement intéressant, mais l'exercice constitue tout de même un bon entraînement aux calculs de normes et de produits scalaires.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les éléments diagonaux sont égaux à $-n$, les autres étant tous égaux à 1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1 et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   a. Exprimer A comme combinaison linéaire de I et J, puis écrire A^2 comme combinaison linéaire de I et J.
   b. En déduire un polynôme annulateur de A puis donner les valeurs propres possibles de A.
   c. Montrer que A est inversible.

Dans la suite, on considère un espace euclidien E, de dimension $n+1$, dont le produit scalaire est noté $\langle\,,\,\rangle$ et la norme associée $\|\,\|$.

On note $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E et on pose :

$$u = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k.$$

On pose aussi :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ e_i = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u\right).$$

2. Calculer la norme du vecteur u.
3. a. Montrer que, pour tout i de $[\![0, n]\!]$, on a : $\|e_i\| = 1$.
   b. Montrer également que, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $[\![0, n]\!]$, on a : $\langle e_i, e_j\rangle = -\dfrac{1}{n}$.
   c. Montrer que les vecteurs $e_0, e_1, \ldots, e_n$ appartiennent tous au sous-espace $F = (\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$ de E.
   d. Montrer, en utilisant le résultat de la question 1.c que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de F.
4. On considère l'application f de $F \times F$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in F \times F,\ f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle.$$

   a. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.
   b. Pour tout couple (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, déterminer $f(e_i, e_j)$ en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$.
   c. En déduire que :

$$\forall (x, y) \in F \times F,\ \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle = \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle.$$

   d. En déduire également que, pour tout x de F, on a :

$$\|x\|^2 = \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle^2.$$

Problème

Sujet : Étude de deux endomorphismes de $\mathbf{R}_n[X]$ **Moyen**

Abordable en première année : ✓ (sauf 2.c, 2.d et 8) **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : Valeurs propres et vecteurs propres, polynômes, intégrales impropres, `Scilab`

Commentaires : les maths sont relativement faciles, et en tous cas très classiques. En revanche, les questions de `Scilab` sont assez ardues, notamment si on essaie de faire tenir les programmes dans le nombre de lignes proposé par le concepteur.

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbf{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel formé du polynôme nul et des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égal à n.

On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$. On rappelle que $e_0 = 1$ et que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ e_k = X^k.$$

Partie I : Étude d'une application définie sur $\mathbf{R}_n[X]$.

On considère l'application φ, qui à tout polynôme P de $\mathbf{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de P avec la convention $P^{(0)} = P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. a. Calculer $\varphi(e_0)$ et en déduire une valeur propre de φ.
   b. Montrer que : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_j) - e_j \in \mathbf{R}_{j-1}[X]$.
   c. En déduire que la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire et que la seule valeur propre de φ est celle trouvée à la question précédente.
   d. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
3. a. Pour tout polynôme P de $\mathbf{R}_n[X]$, calculer $\varphi(P - P')$.
   b. Déterminer φ^{-1} puis écrire la matrice de φ^{-1} dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.
   c. On donne le script `Scilab` suivant :

```
1 n = input('entrez la valeur de n : ')
2 M = eye(n+1,n+1)
3 for k = 1 :n
4         M(k,k+1) = -k
5 end
6 A = ------
7 disp(A)
```

Compléter la sixième ligne de ce script pour qu'il affiche la matrice A de φ dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ lorsque la valeur de n est entrée par l'utilisateur.

Partie II : Étude d'une autre application définie sur $\mathbf{R}_n[X]$.
On désigne par x un réel quelconque.

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$ est convergente.
   b. En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt$ est convergente.
5. a. Donner la valeur de $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt$.
   b. Établir que, pour tout entier naturel k, on a : $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$.
6. **Informatique**
   a. On admet que, si u est un vecteur, la commande `prod(u)` renvoie le produit des éléments de u et la commande `cumprod(u)` renvoie un vecteur de même format que u dont le $k^{\text{ème}}$ élément est le produit des k premiers éléments de u. Utiliser l'égalité obtenue à la question 5.b pour compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il calcule et affiche la variable s contenant la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$, les valeurs de x et de k étant entrées par l'utilisateur.

```
k = input('entrez la valeur de k : ')
x = input('entrez la valeur de x : ')
p = prod(1 :k)
u = ------./------
s = p*------*exp(-x)
disp(s)
```

   b. Montrer, grâce à un changement de variable simple, que : $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt = e^{-x} \int_0^{+\infty} (u+x)^k e^{-u}\,du$.
   En déduire la commande manquante du script `Scilab` suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher une valeur approchée de $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$ grâce à la méthode de Monte-Carlo.

```
x=input('entrez la valeur de x  : ')
k=input('entrez la valeur de k  : ')
Z=grand(1,100 000,'exp',1)
s=exp(-x)*mean(------)
disp(s)
```

On considère maintenant l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbf{R}_n[X]$, associe la fonction $F = \psi(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\, dt.$$

7. **a.** Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

b. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et donner une relation entre F, F' et P.

c. Montrer que ψ est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

8. On considère un polynôme P non nul, vecteur propre de ψ pour une valeur propre λ non nulle.

a. Utiliser la relation obtenue à la question 7.b pour établir que : $P' = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} P$.

b. En déduire, en considérant les degrés, que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre possible de ψ.

c. Montrer enfin que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre de ψ (on ne demande pas le sous-espace propre associé).

9. **a.** Montrer que les endomorphismes φ et ψ sont égaux.

b. En déduire que, si P est un polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ et s'il existe un réel a tel que, pour tout réel x supérieur ou égal à a, on a $P(x) \geqslant 0$, alors :

$$\forall x \geqslant a,\ \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geqslant 0.$$

EDHEC 2017 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1.a. Tel que présenté dans l'énoncé, le programme ne doit faire que trois lignes, et afin d'utiliser la fonction sum, il faut pouvoir créer en une ligne un vecteur contenant $x, x^2, \ldots, x^n$.

```
function y = f(x,n)
        y = sum(x.^[1 :n])
endfunction
```

Explications

Rappelons que `[1 :n]` crée un vecteur contenant les nombres de 1 à n et que `.^` permet d'élever le nombre x aux différentes puissances de 1 à n et de stocker ces résultats dans une matrice de même taille que `[1 :n]`.

Toutefois, lorsqu'on est peu familier avec l'instruction `.^`, il est tout à fait possible de s'en tirer en quelques lignes supplémentaires :

```
function y = f(x,n)
        X = zeros(1,n)
        for i=1 :n
                X(i) = x^i
        end
        y = sum(X)
endfunction
```

1.b. On a reconnu que $f_n(x)$ est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x et donc pour $x \neq 1$,

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = x \sum_{i=0}^{n-1} x^i = \boxed{x\frac{1-x^n}{1-x}.}$$

Par conséquent, le programme suivant convient :

```
function y = f(x,n)
        if x==1 then y = n
        else y = x*(1-x^n)/(1-x)
        end
endfunction
```

2. La fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ est positive strictement sur $[0,1]$.

Donc f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.
D'autre part, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = n$.
Donc par le théorème de la bijection[1], $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha_n \in [0,1] \text{ tel que } f_n(\alpha_n) = 1.}$

[1] f_n est bien continue car dérivable.

3.a. On a

$$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_n^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_n^k}_{=f_n(\alpha_n)=1} + \alpha_n^{n+1} \geqslant 1.$$

Et donc $f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 1$. Mais f_{n+1} est croissante, et donc $\alpha_n \geqslant \alpha_{n+1}$.
On en déduit que $\boxed{(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ est une suite décroissante.}}$

3.b. Par définition de α_n, $\alpha_n \geqslant 0$. Ainsi, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et minorée : par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle est donc convergente.}}$

4.a. Par définition, α_2 est l'unique réel de $[0,1]$ tel que $\alpha_2 + \alpha_2^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha_2^2 + \alpha_2 - 1 = 0$.
Or, le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 5$, de sorte que les deux solutions réelles de $x^2 + x - 1 = 0$ sont

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Mais $x_2 < 0$, et donc nécessairement, $\boxed{\alpha_2 = x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.}$

Puisque l'énoncé le demande, vérifions qu'on a bien $0 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1$. Nous savons que $\sqrt{5} \geqslant 1$ et donc $-1+\sqrt{5} \geqslant 0$, de sorte que $\alpha_2 \geqslant 0$.

D'autre part, nous savons que $\sqrt{5} < 3$ car $5 < 9$, et donc $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < \frac{-1+3}{2} = 1$.

Remarque

Il n'y aurait même pas besoin de justifier que $x_1 \in [0,1]$. En effet, nous avons déjà prouvé à la question 2 qu'une solution de $[0,1]$ existait, et ce n'est pas x_2 : c'est nécessairement x_1.

4.b. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_2$ et donc $0 \leqslant \alpha_n^{n+1} \leqslant \alpha_2^{n+1}$.
Or, $\alpha_2 < 1$, et donc $\alpha_2^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0.}$

4.c. Reprenons l'expression de f_n obtenue à la question 1.b : pour $n \geqslant 2$,

$$f_n(\alpha_n) = \alpha_n \frac{1-\alpha_n^n}{1-\alpha_n}.$$

Et donc

$$f_n(\alpha_n) = 1 \Leftrightarrow \alpha_n - \alpha_n^{n+1} = 1 - \alpha_n \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{1}{2}\left(1-\alpha_n^{n+1}\right).$$

On en déduit donc, par passage à la limite que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}.}$

5. Le programme proposé calcule successivement $f_n(0), f_n(0.001), f_n(0.002), \dots$ jusqu'à obtenir une valeur supérieure ou égale à 1. Puisque, f_n est croissante, tant que $f_n(x) < 1$, alors $x < \alpha_n$.
Et au contraire, si $f_n(x) \geqslant 1$, alors $x \geqslant \alpha_n$.
Le résultat retourné est donc le plus petit multiple entier de 0.001 supérieur ou égal à α_n.
C'est en particulier une approximation (par excès) de α_n à 0.001 près.

Exercice 2

1.a. Pour tout x réel, on a $[M_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i \leqslant x]$, et par indépendance des X_i,

$$P(M_n \leqslant x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $]-\infty, 0[$, sur $[0,1]$ et sur $]1,+\infty[$.
De plus, on a alors $\lim_{x\to 0^-} F_{M_n}(x) = 0 = F_{M_n}(0)$ et $\lim_{n\to 1^+} F_{M_n}(x) = 1 = F_{M_n}(1)$.
Donc F_{M_n} est continue en 0 et en 1, et donc sur $\mathbf{R}$.
De plus, F_{M_n} est clairement $\mathscr{C}^1$ sauf en 0 et en 1, et donc $\boxed{M_n \text{ est une variable à densité.}}$

En particulier

F_{M_n} est continue à droite en 0 et à gauche en 1.

1.b. Une densité de F_{M_n} est toute fonction qui coïncide avec F'_{M_n} sauf en 0 et en 1 (car F_{M_n} n'est pas dérivable en ces points). On peut par exemple prendre

$$\boxed{f_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Alternative

Puisque $F_{M_n} = F_{X_1}^n$, et que X_1 est une variable à densité, F_{M_n} est continue et $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points.

1.c. Puisque $0 \leqslant M_n \leqslant 1$ et $0 \leqslant M_n^2 \leqslant 1$, $E(M_n)$ et $E(M_n^2)$ existent.
On a alors

$$E(M_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{M_n}(x)\,dx = \int_0^1 nx^n\,dx = \boxed{\frac{n}{n+1}.}$$

Et de même, par le théorème de transfert,

$$E(M_n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{M_n}(x)\,dx = \int_0^1 nx^{n+1}\,dx = \boxed{\frac{n}{n+2}.}$$

1.d. La variable aléatoire $(M_n - 1)^2$ est positive, et admet une espérance égale à

$$E\left((M_n - 1^2)\right) = E(M_n^2 - 2M_n + 1) = E(M_n^2) - 2E(M_n) + 1 = \frac{n}{n+2} - 2\frac{n}{n+1} + 1$$
$$= \frac{n(n+1) - 2n(n+2) + (n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Ainsi, par l'inégalité de Markov, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\boxed{P\left((M_n - 1)^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \frac{2}{(n+1)(n+2)\varepsilon^2}.}$$

1.e. Il suffit de remarquer que $[|M_n - 1| \geqslant \varepsilon] = \left[(M_n - 1)^2 \geqslant \varepsilon^2\right]$, et donc

$$0 \leqslant P(|M_n - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{2}{(n+1)(n+2)\varepsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après le théorème des gendarmes, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|M_n - 1| \geqslant \varepsilon) = 0$.

Ceci signifie que $\boxed{M_n \xrightarrow{P} 1.}$

2.a. La ligne 2 permet de simuler $X_1, \dots, X_n$, et donc il suffit d'utiliser la définition de $Y_n = n(1 - \max(X_1, \dots, X_n))$.

```
1 function Y = f(n)
2         X = grand(1,n,'unf',0,1)
3         Y = n*(1-max(X))
4 endfunction
```

2.b. Le premier script simule 10 000 réalisations de variables aléatoires suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$.
Le second simule 10 000 réalisations de Y_n.
Les deux graphiques étant très semblables, les distributions de ces deux séries de nombres semblent les mêmes, donc il est légitime de penser que la loi de Y_n est «proche» d'une loi exponentielle de paramètre 1.
Ceci laisse à penser que $Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, où X suit la loi exponentielle de paramètre 1.

3.a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$P(Y_n \leqslant x) = P(n(1 - M_n) \leqslant x) = P\left(1 - M_n \leqslant \frac{x}{n}\right)$$
$$= P\left(M_n \geqslant 1 - \frac{x}{n}\right) = P\left(M_n > 1 - \frac{x}{n}\right)$$
$$= 1 - F_{M_n}\left(1 - \frac{x}{n}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 - \frac{x}{n} < 0 \Leftrightarrow x > n \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant 1 - \frac{x}{n} \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{si } 1 - \frac{x}{n} > 1 \Leftrightarrow x < 0 \end{cases}$$

Puisque M_n est une variable à densité, on peut changer les inégalités larges en inégalités strictes.

3.b. Si $x < 0$, alors pour tout n, $F_{Y_n}(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $x \geqslant 0$, alors pour $n \geqslant x$, $F_{Y_n}(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$.

Mais
$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}.$$

Lorsque $n \to +\infty$, $\frac{x}{n} \to 0$ et donc

$$\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{n} \text{ et donc } n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\frac{x}{n} = -x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -x.$$

Dessin ? En composant par l'exponentielle, qui est continue, il vient donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$$

et enfin $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = 1 - e^{-x}.}$

$n \geqslant x$

Lorsque $n \to +\infty$, à partir d'un certain rang, $n \geqslant x$. Il suffit donc d'étudier ce cas pour étudier la limite (le cas $n < x$ ne se produisant que pour un nombre fini de valeurs de n, il n'influe pas sur la limite).

☠ Danger !

Rappelons qu'il n'est pas possible de composer des équivalents par l'exponentielle : $u_n \sim v_n$ n'implique pas $e^{u_n} \sim e^{v_n}$. En revanche, il est possible de composer des limites, et c'est bien ce que nous faisons ici.

3.c. Nous venons de prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Or, nous reconnaissons là la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{E}(1)$.
Ainsi, $Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, où $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.

Exercice 3

1.a. On a

$$A = \begin{pmatrix} -n & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & -n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & -n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & n+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix} = \boxed{J - (n+1)I.}$$

Puisque J et $(n+1)I$ commutent[2], on a alors

$$A^2 = (J-(n+1)I)^2 = J^2 - 2(n+1)J + (n+1)^2 I.$$

Or, il est aisé de voir que

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & \dots & \dots & n \\ n & n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & \dots & n & n \end{pmatrix} = nJ.$$

Et donc $\boxed{A^2 = (n+1)^2 I - (n+2)J.}$

[2] L'identité et ses mutliples commutent à toute matrice.

> **Binôme**
> L'identité remarquable
> $$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
> n'est autre et que le binôme pour $n = 2$, et pour l'appliquer à deux matrices A et B, il ne faut donc pas oublier de vérifier que ces matrices commutent (sinon l'identité est fausse !).

1.b. En utilisant les deux relations de la question précédente, il vient

$$A^2 = (n+1)^2 I - (n+2)J = (n+1)^2 I - (n+2)\left(A + (n+1)I\right) = -(n+2)A - (n+1)I.$$

Soit encore $A^2 + (n+2)A + (n+1)I = 0$.
Et donc un polynôme annulateur de A est $\boxed{X^2 + (n+2)X + (n+1).}$
Le discriminant de ce polynôme de degré deux est $\Delta = (n+2)^2 - 4(n+1) = n^2$.
Il possède donc comme racines

$$\lambda_1 = \frac{-(n+2)+\sqrt{n^2}}{2} = -1 \text{ et } \lambda_2 = \frac{-(n+2)-\sqrt{n^2}}{2} = -(n+1).$$

Puisque les racines du polynômes annulateur de A sont ses valeurs propres **possibles**, celles-ci sont donc -1 et $-(n+1)$.

> **Remarque**
> Rien ne nous garantit pour l'instant que λ_1 et λ_2 soient bien des valeurs propres de A, mais un calcul un peu plus poussé prouverait qu'elles le sont bien.
> Plus simplement : A est diagonalisable car symétrique, et n'est pas de la forme λI, donc doit posséder au moins deux valeurs propres, donc λ_1 **et** λ_2 sont valeurs propres de A.

1.c. Par la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de A, donc $\boxed{A \text{ est inversible.}}$

2. Puisque $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormée,

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2} = \sqrt{(n+1)\frac{1}{n+1}} = \boxed{1.}$$

3.a. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$\langle u, \varepsilon_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\langle \varepsilon_k, \varepsilon_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ étant orthonormée, on a

$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon_k\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\|e_i\|^2 &= \frac{n+1}{n}\left(\|\varepsilon_i\|^2 + \|\langle\varepsilon_i,u\rangle u\|^2 - 2\left\langle\varepsilon_i, \langle\varepsilon_i,u\rangle u\right\rangle\right)\\ &= \frac{n+1}{n}\left(1+\frac{1}{n+1} - 2\langle\varepsilon_i,u\rangle^2\right)\\ &= \frac{n+1}{n}\left(1+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n}\frac{n}{n+1} = 1.\end{aligned}$$

Rappel Si x et y sont deux vecteurs de E, alors, par bilinéarité du produit scalaire,

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2-2\langle x,y\rangle$.

Et donc on en déduit[3] que $\boxed{\|e_i\| = 1.}$

[3] Une norme est toujours positive.

3.b. Soient i,j deux entiers distincts de $[\![1,n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\langle e_i,e_j\rangle &= \left\langle \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\varepsilon_i - \langle\varepsilon_i,u\rangle u\right), \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\varepsilon_j - \langle\varepsilon_j,u\rangle u\right)\right\rangle\\ &= \frac{n+1}{n}\left\langle \varepsilon_i - \langle\varepsilon_i,u\rangle u, \varepsilon_j - \langle\varepsilon_j,u\rangle u\right\rangle\\ &= \frac{n+1}{n}\left(\underbrace{\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle}_{=0} - \langle\varepsilon_i,u\rangle\langle\varepsilon_j,u\rangle - \langle\varepsilon_j,u\rangle\langle\varepsilon_i,u\rangle + \langle\varepsilon_i,u\rangle\langle\varepsilon_j,u\rangle\underbrace{\langle u,u\rangle}_{=\|u\|=1}\right)\\ &= \frac{n+1}{n}\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{n+1}{n}\frac{-1}{n+1} = \boxed{-\frac{1}{n}.}\end{aligned}$$

Bilinéarité du produit scalaire.

Il a été prouvé à la question précédente que

$$\langle\varepsilon_i,u\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

3.c. Un vecteur est dans $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$ si et seulement si il est orthogonal à u. Or, pour tout $i\in[\![0,n]\!]$,

$$\langle e_i,u\rangle = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\langle\varepsilon_i - \langle\varepsilon_i,u\rangle u, u\rangle = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\langle\varepsilon_i,u\rangle - \langle\varepsilon_i,u\rangle\underbrace{\langle u,u\rangle}_{=\|u\|=1}\right) = 0.$$

Remarque u étant une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(u)$, $\langle\varepsilon_i,u\rangle u$ est le projeté orthogonal de ε_i sur $\mathrm{Vect}(u)$.
Et donc $u - \langle\varepsilon_i,u\rangle u$ est dans $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.

Et donc $\boxed{e_0,e_1,\dots,e_n \text{ sont dans } (\mathrm{Vect}(u))^\perp.}$

3.d. Commençons par remarquer que

$$\dim F = \dim\left(\mathrm{Vect}(u)\right)^\perp = \dim E - \dim \mathrm{Vect}(u) = n+1-1 = n.$$

Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$.
Alors, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, il vient

$$0 = \langle 0_E, e_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_j\right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i\langle e_i,e_j\rangle = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n -\frac{\lambda_i}{n} + \lambda_j.$$

Méthode Nous connaissons la dimension de F, donc comme souvent, pour montrer qu'une famille en est une base, nous préférons montrer qu'elle est libre et de bon cardinal plutôt que de prouver qu'elle est libre et génératrice.

Ainsi, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ est solution du système

$$\begin{cases}\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{n} - \dots - \frac{\lambda_n}{n} = 0\\ -\frac{\lambda_1}{n} + \lambda_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{n} = 0\\ \vdots\\ -\frac{\lambda_1}{n} - \dots - \frac{\lambda_{n-1}}{n} + \lambda_n = 0\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{n}\begin{pmatrix}-n & 1 & \dots & \dots & 1\\ 1 & -n & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \dots & \dots & 1 & -n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_{n-1}\\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0.$$

Mais à la question 1.c, nous avons prouvé que la matrice A est inversible, et donc en multipliant $A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0$ à gauche par A^{-1}, il vient $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0$, de sorte que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
Ainsi, la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est libre. Puisqu'elle est de cardinal $n = \dim F$, c'est donc $\boxed{\text{une base de } F.}$

4.a. Soient $x, y \in F$. Alors

$$\begin{aligned} f(y,x) &= \sum_{k=0}^{n} \langle y, e_k\rangle\langle x, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle y, x\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle = f(x,y). \end{aligned}$$

Donc f est symétrique.
Soient $x, y, z \in F$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y, z) &= \sum_{k=0}^{n} \langle \lambda x + y, e_k\rangle\langle z, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle \lambda x + y, z\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda\langle x, e_k\rangle + \langle y, e_k\rangle\right)\langle z, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\left(\lambda\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle\right) \\ &= \lambda\left(\sum_{k=0}^{n}\langle x, e_k\rangle\langle z, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x, z\rangle\right) + \left(\sum_{k=0}^{n}\langle y, e_k\rangle\langle z, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle y, z\rangle\right) \\ &= \lambda f(x,z) + f(y,z). \end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire à gauche, et étant déjà symétrique, elle est $\boxed{\text{bilinéaire symétrique.}}$

4.b. Si $i = j$, alors

$$f(e_i, e_i) = \sum_{k=0}^{n} \langle e_i, e_k\rangle^2 - \frac{n+1}{n}\|e_i\|^2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{1}{n^2} + \|e_i\|^4 - \frac{n+1}{n} = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{1}{n^2} + 1 - \frac{n+1}{n} = \boxed{0.}$$

Et pour $i \neq j$, alors

$$\begin{aligned} f(e_i, e_j) &= \sum_{k=0}^{n} \langle e_i, e_k\rangle\langle e_j, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i,j}}^{n} \frac{1}{n^2} + \langle e_i, e_j\rangle\langle e_j, e_j\rangle + \langle e_i, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle + \frac{n+1}{n^2} \\ &= \frac{n-1}{n^2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n^2} \\ &= \frac{n-1-2n+n+1}{n^2} = \boxed{0.} \end{aligned}$$

4.c. Il s'agit de montrer que pour tout $(x, y) \in F \times F$, $f(x, y) = 0$.
Soient donc $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ deux éléments de F.
Alors, par bilinéarité de f, il vient

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \underbrace{f(e_i, e_j)}_{=0} = 0.$$

Et donc, pour tous $x, y \in F$,

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle = \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle.}$$

4.d. En prenant $y = x$ dans l'égalité précédemment obtenue, il vient

$$\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle x, e_k\rangle = \frac{n+1}{n}\underbrace{\langle x, x\rangle}_{=\|x\|^2} \Leftrightarrow \boxed{\|x\|^2 = \frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\langle x, e_k\rangle^2.}$$

Problème

Partie I : Étude d'une application définie sur $\mathbf{R}_n[X]$.

1. Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$. Alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\deg(P^{(k)}) \leqslant \deg P$, et donc $\deg(\varphi(P)) \leqslant n$, de sorte que $\varphi(P) \in \mathbf{R}_n[X]$.
Soient $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, par linéarité de la dérivation,

$$\varphi(\lambda P + Q) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda P + Q)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \lambda P^{(k)} + Q^{(k)} = \lambda \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)} = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).$$

Ainsi, φ est linéaire et donc est $\boxed{\text{un endomorphisme de } \mathbf{R}_n[X].}$

2.a. On a $e_0' = 0$ et donc pour $k \geqslant 1$, $e_0^{(k)} = 0$. Ainsi, $\varphi(e_0) = e_0$.
Puisque $e_0 \neq 0$, cela signifie que $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } \varphi.}$

2.b. Pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$ non nul, $\deg P' < \deg P$, puis, de proche en proche, pour tout $k \geqslant 1$, $\deg P^{(k)} < \deg P$.
En particulier, $\sum_{k=1}^{n} P^{(k)}$ est de degré strictement inférieur à $\deg(P)$.
Ceci s'applique en particulier à e_j qui est de degré j :

$$\varphi(e_j) - e_j = \sum_{k=0}^{n} e_j^{(k)} - e_j = e_j + \sum_{k=1}^{n} e_j^{(k)} - e_j = \sum_{k=1}^{n} e_j^{(k)} \in \mathbf{R}_{j-1}[X].$$

2.c. Nous venons de prouver que pour $j \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_j) = e_j + \underbrace{\left(\varphi(e_j) - e_j\right)}_{\in \mathbf{R}_{j-1}[X]}$.

La matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ est donc de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \varphi(e_0) & \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \dots & \varphi(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & 1 & \star & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}.$$

Cette matrice est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux valent 1 : 1 est la seule valeur propre de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ et donc de φ.

Détails
Les $\star$ signifient que l'on ne connaît pas les valeurs de ces coefficients (même si on pourrait les calculer), et ils pourraient éventuellement être nuls, l'important étant que les coefficients sous la diagonale sont nuls. En effet, $\varphi(e_j) - e_j \in \mathbf{R}_{j-1}[X]$, et donc s'écrit comme combinaison linéaire de $e_0, e_1, \dots, e_{j-1}$.

Remarque
Notons au passage que φ ne peut pas être diagonalisable, car sinon sa matrice serait semblable à la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent tous 1, et donc serait égale à I_n. Or φ n'est pas l'identité de $\mathbf{R}_n[X]$.

2.d. La matrice que nous venons d'obtenir est inversible car elle est triangulaire et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Par conséquent, φ est une bijection : c'est $\boxed{\text{un automorphisme de } \mathbf{R}_n[X].}$

3.a. Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$. Alors

$$\varphi(P - P') = \varphi(P) - \varphi(P') = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - \sum_{k=0}^{n} P^{(k+1)} = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - \sum_{i=1}^{n+1} P^{(i)} = P - P^{(n+1)}.$$

Mais P étant de degré inférieur ou égal à n, $P^{(n+1)} = 0$.
Et donc $\boxed{\varphi(P - P') = P.}$

Détails
Puisque la dérivation d'un polynôme diminue son degré d'une unité, si on dérive un polynôme strictement plus de fois que son degré, on obtient le polynôme nul.

3.b. Nous venons de prouver que pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$, $\varphi(P - P') = P = \mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]}(P)$, et donc la bijection réciproque φ^{-1} de φ est l'application qui à P associe $P - P'$.
On a alors $\varphi^{-1}(e_0) = e_0 - e_0' = e_0$ et pour $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\varphi^{-1}(e_j) = e_j - e_j' = X^j - jX^{j-1}.$$

La matrice de φ^{-1} dans la base $\mathscr{B}$ est donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \varphi^{-1}(e_0) & \varphi^{-1}(e_1) & \varphi^{-1}(e_2) & \dots & \varphi^{-1}(e_{n-1}) & \varphi^{-1}(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{array}.$$

3.c. La matrice M est au départ la matrice identité de taille $n+1$.
Puis, à l'aide de la boucle `for`, le coefficient $(k, k+1)$, qui est le coefficient au dessus de la diagonale sur la $k^{\text{ème}}$ ligne, est changé en $-k$.
Ainsi, M est la matrice de φ^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.
Pour obtenir la matrice de φ, il suffit d'inverser M.
Et donc il suffit de remplacer la sixième ligne par

```
6 A = inv(M)
```

Partie II : Étude d'une autre application définie sur $\mathbf{R}_n[X]$.

4.a. Nous savons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$ converge, car il s'agit de $\Gamma(k+1)$.

D'autre part, l'intégrale $\displaystyle\int_x^0 t^k e^{-t}\,dt$ converge puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Et donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt + \int_x^0 t^k e^{-t}\,dt$ converge.

> **Bornes**
> Notons que si $x \geqslant 0$, les bornes de cette intégrale sont «dans le mauvais sens», ce qui ne change rien à sa convergence.

4.b. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$.

Alors pour tout $t \in [x; +\infty[$, $P(t)e^{-t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k t^k e^{-t}$. Et donc

$$\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$$

converge en tant que combinaison linéaire d'intégrales convergentes.

5.a. Pour $A \geqslant x$, on a

$$\int_x^A e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_x^A = e^{-x} - e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-x}.$$

Et donc $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = e^{-x}.}$

5.b. Prouvons par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ que $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$.

Pour $k = 0$, le résultat de la question précédente nous donne

$$\int_x^{+\infty} t^0 e^{-t}\,dt = e^{-x} = 0! \sum_{i=0}^{0} \frac{x^i}{i!} e^{-x}.$$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons donc que $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$.

Sur un segment de la forme $[x, A]$, posons $u(t) = t^{k+1}$ et $v(t) = -e^{-t}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x, A]$ avec $u'(t) = (k+1)t^k$ et $v'(t) = e^{-t}$. Alors, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\int_x^A t^{k+1} e^{-t}\,dt &= \left[-t^{k+1}e^{-t}\right]_x^A + \int_x^A (k+1)t^k e^{-t}\,dt \\
&= x^{k+1}e^{-x} - A^{k+1}e^{-A} + (k+1)\int_x^A t^k e^{-t}\,dt \\
&\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} x^{k+1}e^{-x} + (k+1)\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt \\
&= \frac{(k+1)!}{(k+1)!}x^{k+1}e^{-x} + (k+1)k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x} \\
&= (k+1)!\sum_{i=0}^{k+1}\frac{x^i}{i!}e^{-x}.
\end{aligned}$$

Croissance comparée

$$A^{k+1} \underset{A\to+\infty}{=} o\left(e^A\right),$$

et donc

$$\lim_{A\to+\infty} A^{k+1}e^{-1} = 0.$$

Et donc on a bien $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}\,dt = (k+1)!\sum_{i=0}^{k+1}\frac{x^i}{i!}e^{-x}$.

Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbf{N},\ \displaystyle\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt = k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}.}$

6. Informatique

6.a. Puisque p vaut $k!$, il faut que u contienne $\left[\frac{x^0}{0}, \frac{x^1}{1}, \ldots, \frac{x^k}{k!}\right]$.

De plus, comme l'opération `./` nous est imposée par l'énoncé, il faut donc que u soit le quotient de $[x^0, x^1, \ldots, x^k]$ (qui peut être obtenu à l'aide de `x.^[0 :k]`) par $[0!, 1!, \ldots, k!]$. Toutefois ce dernier vecteur ne peut être obtenu par `cumprod([0 :k])`, car le premier coefficient de `[0 :k]` étant nul, tous les produits vont être nuls.
Nous proposons donc d'utiliser `[1,1 :k]` qui crée le vecteur $[1, 1, 2, \ldots, k]$, qui, si on lui applique `cumprod`, retourne $[1, 1\times 1, 1\times 1\times 2, \ldots, 1\times\cdots\times k] = [0!, 1!, \ldots, k!]$.

```
1 k = input('entrez la valeur de k : ')
2 x = input('entrez la valeur de x : ')
3 p = prod(1 :k)
4 u = x.^[0 :k]./cumprod([1,1 :k])
5 s = p*sum(u)*exp(-x)
6 disp(s)
```

Notons qu'une autre option est également de remplacer les lignes 4 et 5 par

```
4 u = x.^[1 :k]./cumprod([1 :k])
5 s = p*(1+sum(u))*exp(-x)
```

6.b. Procédons au changement de variable affine $u = t - x$:

$$\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} (u+x)^k e^{-u-x}\,du = e^{-x}\int_0^{+\infty}(u+x)^k e^{-u}\,du.$$

Soient (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$, et pour tout n, posons $Y_n = (x + X_n)^k$.
Alors, par le théorème de transfert, pour tout n, on a

$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty}(u+x)^k e^{-u}\,du = e^x\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt.$$

D'autre part, les Y_n admettent un moment d'ordre 2 puisque, toujours par le théorème de transfert, $E(Y_n^2) = \displaystyle\int_0^{+\infty}(u+x)^{2k}e^{-u}\,du = e^x\int_x^{+\infty} t^{2k}e^{-t}\,dt$ qui converge par la question 4.a.
Et donc la loi faible des grands nombres s'applique :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k \underset{n\to+\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} E(Y_1) = e^x\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt.$$

Ainsi, pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale, on peut simuler un grand nombre de fois la loi des Y_k et calculer leur moyenne.

```
x=input('entrez la valeur de x  : ')
k=input('entrez la valeur de k  : ')
Z=grand(1,100000,'exp',1) ;
s=exp(-x)*mean((Z+x).^k)
disp(s)
```

Monte-Carlo
L'appellation «méthode de Monte-Carlo» regroupe diverses méthodes de calcul d'intégrales, mais l'idée est toujours la même : c'est une combinaison du théorème de transfert et de loi faible des grands nombres, qui permet de calculer une valeur approchée d'une intégrale à l'aide de simulations de variables aléatoires.

Remarque : notons que nous disposons de deux programmes différents permettant de calculer la valeur de $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}$.
Si on a le choix, on préférera celui de la question 6.a, qui renvoie la valeur exacte de l'intégrale, alors que la méthode de Monte-Carlo, qui repose sur des méthodes probabilistes renvoie une valeur :

- qui n'est pas toujours la même, puisqu'elle dépend de l'échantillon de lois exponentielles ;
- qui peut être très éloignée de la valeur réelle de l'intégrale, si l'échantillon est «mauvais». Bien que ceci soit assez peu probable, il faut le garder à l'esprit lorsqu'on utilise de telles méthodes.

La méthode de Monte-Carlo est surtout intéressante lorsqu'on ne dispose pas d'autres moyens de calculer l'intégrale. Par exemple, ici, elle fonctionne encore si k est un réel strictement positif, non nécessairement entier, alors que le premier programme nécessite k entier.

7.a. A priori, ψ est une application de $\mathbf{R}_n[X]$ vers l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, et pas nécessairement à valeurs dans $\mathbf{R}_n[X]$, ni même dans $\mathbf{R}[X]$.
Commençons par prouver sa linéarité : soient $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}[\psi(\lambda P+Q)](x) &= e^x \int_x^{+\infty} (\lambda P(t)+Q(t))\, e^{-t}\, dt \\ &= \lambda e^x \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\, dt + e^x \int_x^{+\infty} Q(t)e^{-t}\, dt = \lambda[\psi(P)](x) + [\psi(Q)](x).\end{aligned}$$

Et donc $\psi(\lambda P+Q) = \lambda\psi(P)+\psi(Q)$: ψ est linéaire.
D'après le calcul effectué à la question 5.b, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$e^x \int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}.$$

Et donc $\psi(X^k) \in \mathbf{R}_k[X] \subset \mathbf{R}_n[X]$.
Et alors, si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{R}_n[X]$, par linéarité de ψ,

$$\psi(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \psi(X^k) \in \mathbf{R}_n[X].$$

Ainsi, $\boxed{\psi \text{ est un endomorphisme de } \mathbf{R}_n[X].}$

7.b. Puisque la fonction $t \mapsto P(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbf{R}$, par le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x P(t)e^{-t}\, dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto P(x)e^{-x}$.
Ainsi, $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\, dt = \underbrace{\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\, dt}_{=\text{constante}} - \int_0^x P(t)e^{-t}\, dt$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, de dérivée égale à $x \mapsto -P(x)e^{-x}$.
Ainsi, F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ car produit de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$F'(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\, dt - e^x P(x)e^{-x} = \boxed{F(x)-P(x).}$$

7.c. Soit $P \in \operatorname{Ker}\psi$, et soit $F = \psi(P)$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F(x) = 0$, et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = 0$.
Ainsi, la relation obtenue à la question précédente nous donne : $\forall x \in \mathbf{R}, -P(x) = 0$, de sorte que P est le polynôme nul.
On en déduit que $\operatorname{Ker}\psi = \{0\}$, et donc que ψ est injective.
Mais un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est injectif si et seulement si il est bijectif : ψ est bijectif et donc est $\boxed{\text{un automorphisme de } \mathbf{R}_n[X]}$.

8.a. Si $\psi(P) = \lambda P$, alors $\psi(P)' = \lambda P'$.
Et donc, la relation obtenue en 7.b, qui est $\psi(P)' = \psi(P) - P$ devient

$$\lambda P' = \lambda P - P \Leftrightarrow \boxed{P' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} P.}$$

$\lambda \neq 0$
Notons que l'énoncé précise bien que λ est une valeur propre non nulle, mais puisque ψ est bijectif, 0 n'en est pas valeur propre.

8.b. Supposons donc que $\lambda \neq 1$ soit une valeur propre[4] de ψ et que P en soit un vecteur propre associé, de sorte que $P' = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} P$.
Puisque $\dfrac{\lambda - 1}{\lambda} \neq 0$, $\deg P' = \deg P$.
Or, puisque $P \neq 0$, $\deg P' = \deg P - 1 < \deg P$, d'où une contradiction.
Ainsi, $\boxed{\lambda = 1 \text{ est la seule valeur propre possible de } \psi.}$

[4] Nécessairement non nulle comme nous venons de le remarquer.

8.c. Soit $P = 1$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$[\psi(P)](x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}\, dt = e^x e^{-x} = 1.$$

Et donc $\psi(P) = 1 \times P$. Puisque $P \neq 0$, c'est donc que 1 est valeur propre de ψ.

9.a. Pour que deux endomorphismes soient égaux, il suffit qu'il coïncident sur une base.
Soit donc $k \in [\![0, n]\!]$. Alors on a

Explication
En effet, ils ont alors la même matrice dans cette base, et par conséquent sont égaux.

$$e_k' = kX^{k-1},\ e_k'' = k(k-1)X^{k-2},\ e_k^{(3)} = k(k-1)(k-2)X^{k-3}$$

et plus généralement, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$e_k^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > k \\ k(k-1)\cdots(k-i+1)X^{k-i} & \text{si } i \leqslant k \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > k \\ \dfrac{k!}{(k-i)!}X^{k-i} & \text{si } i \leqslant k \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\varphi(e_k) = \sum_{i=0}^{n} e_k^{(i)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} e_{k-i} = k! \sum_{j=0}^{k} \frac{e_j}{j!}.$$

Chgt d'indice
$j = k - i$.

D'autre part, d'après le résultat de la question 5.b,

$$\forall x \in \mathbf{R},\ [\psi(e_k)](x) = e^x \int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt = e^x \times k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x} = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}.$$

Et donc $\psi(e_k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{e_i}{i!} = \varphi(e_i)$.
On en déduit donc que $\boxed{\psi = \varphi.}$

9.b. Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$ et $a \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \geqslant a$, $P(x) \geqslant 0$.
Alors, pour tout $x \geqslant a$, la fonction $t \mapsto P(t)e^{-t}$ est positive sur $[x, +\infty[$, et par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\, dt \geqslant 0$.
Par conséquent, pour tout $x \geqslant a$, $[\psi(P)](x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\, dt \geqslant 0$.
Mais alors, pour $x \geqslant a$,

$$\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) = [\varphi(P)](x) = [\psi(P)](x) \boxed{\geqslant 0.}$$

EDHEC 2016

Exercice 1

Sujet : Étude d'une suite récurrente. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : suites, fonction d'une variable, `Scilab`

Commentaires : nécessite une certaine habitude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ et beaucoup d'initiatives, notamment dans la question 5.

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. a. Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.
   b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.
2. Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et pour celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

```
u = 1
n = 0
while u > 0.00001
  u = exp(-u)/u
  n = n+1
end
disp(n)
```

```
u = 1
n = 0
while u < 100 000
  u = exp(-u)/u
  n = n+1
end
disp(n)
```

3. a. Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $g(x) = e^{-x} - x^2$.
   b. En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbf{R}_+^*$.
   c. Montrer que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$.
4. a. Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.
   b. En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$.
5. On pose $h(x) = \begin{cases} (f\circ f)(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
   a. Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.
   b. Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x élément de $\mathbf{R}_+$.
   c. En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$.
   d. Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.

Exercice 2

Sujet : Une condition suffisante pour que $\mathbf{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ **Difficile**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire, polynômes d'endomorphismes.

Commentaires : Un exercice qui ne nécessite pas d'outils très compliqués, mais demande de l'aisance avec les différentes caractérisations des sommes directes.

1. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ qui vérifie $f\circ(f-\mathrm{Id})^2 = 0$, où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^n$.
   a. Déterminer $(f-\mathrm{Id})^2 + f\circ(2\mathrm{Id}-f)$.
   b. En déduire que : $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $x = (f-\mathrm{Id})^2(x) + \big(f\circ(2\mathrm{Id}-f)\big)(x)$.
   c. Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbf{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ tel que : $f\circ(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id}) = 0$.

a. Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant $\frac{1}{4}(X-1)(X-4)+XP(X)=1$.

b. En déduire que : $\mathbf{R}^n = \operatorname{Ker}(f)\oplus\operatorname{Im}(f)$.

3. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p (avec $p\geqslant 2$), et tel que $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$.

   a. Montrer qu'il existe p réels $a_1,\dots,a_p$ avec $a_1\neq 0$, tels que $P=a_1X+\cdots+a_pX^p$.

   b. En déduire que $\operatorname{Ker}(f)\cap\operatorname{Im}(f)=\{0\}$, puis établir que $\mathbf{R}^n=\operatorname{Ker}(f)\oplus\operatorname{Im}(f)$.

   c. En quoi cette question est-elle une généralisation des deux questions précédentes ?

Exercice 3

Sujet : Estimation des paramètres d'une loi normale par le maximum de vraisemblance. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : Fonctions de plusieurs variables, estimation ponctuelle, convergence en probabilités.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes des suivantes.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ^2, (avec $\sigma>0$). On rappelle qu'une densité de X est la fonction φ_{m,σ^2} définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x\in\mathbf{R}$, $\varphi_{m,\sigma^2}(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.
On suppose que l'on ne connaît pas les paramètres $\theta_1=m$ et $\theta_2=\sigma^2$ et on souhaite les estimer par une méthode appelée méthode du maximum de vraisemblance.
Pour ce faire, on considère un n-échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ de la loi de X, avec $n\geqslant 2$. On rappelle que les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi que X.
On appelle vraisemblance du couple (θ_1,θ_2), la fonction notée L définie par :

$$L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_{\theta_1,\theta_2}(x_i),\ \text{où } x_1,\dots,x_n \text{ sont des réels donnés.}$$

1. Donner l'expression de $L(\theta_1,\theta_2)$, puis celle de $\ln(L(\theta_1,\theta_2))$ en fonction de θ_1,θ_2 et $x_1,\dots,x_n$.
2. a. Justifier que la fonction $f:(\theta_1,\theta_2)\mapsto\ln(L(\theta_1,\theta_2))$, définie sur l'ouvert $U=\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+^*$, est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

   b. Montrer que f admet un seul point critique $A=(\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2})$ sur U tel que :

$$\widehat{\theta_1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \text{ et } \widehat{\theta_2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\widehat{\theta_1}^2.$$

   c. Déterminer les valeurs des dérivées partielles d'ordre 2 de f en A.
   On vérifiera en particulier que : $\partial^2_{2,2}(f)\left(\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2}\right)=\dfrac{-n}{2\widehat{\theta_2}^2}$.

   d. En déduire que la fonction f admet un maximum local en $(\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2})$.

   e. Expliquer pourquoi la fonction L admet aussi un maximum local en $(\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2})$.

On pose dorénavant $\overline{X_n}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ et $Z_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X_n}^2$.

3. Vérifier que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de m.
4. Montrer que Z_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de σ^2.
5. On se propose, dans cette question, de montrer que Z_n est un estimateur convergent de σ^2.

   a. Rappeler pourquoi la suite $(\overline{X_n})$ converge en probabilité vers m. Qu'en déduire pour la suite $\left(\overline{X_n}^2\right)$? Justifier.

   b. Montrer que X possède un moment d'ordre 4. En déduire que la suite $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)$ converge en probabilité vers σ^2+m^2.

   c. Établir que, pour tout ε strictement positif, on a

$$\left(|Z_n-\sigma^2|\geqslant\varepsilon\right)\subset\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\sigma^2+m^2)\right|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)\cup\left(|\overline{X_n}^2-m^2|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

d. Déduire des questions précédentes que Z_n est un estimateur convergent de σ^2.

Problème

Sujet : Étude d'une chaîne de Markov

Facile

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : probabilités discrètes, diagonalisation, `Scilab`

Modifications apportées au sujet d'origine : les questions 4, 5.a et 5.b ont été rectifiées, conformément à l'erratum distribué avec le sujet.

Commentaires : un sujet un peu déroutant, bien que les calculs (peu difficiles et bien guidés) fassent parfois perdre de vue l'objectif qui est l'étude d'une chaîne de Markov comme on a pu en rencontrer en TP de `Scilab` . Un thème qu'on pourrait rencontrer de nouveau dans les années à venir.

Partie I : résultats préliminaires.

1. Pour chaque entier naturel n, on considère une matrice A_n de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté $a_{i,j}(n)$, ainsi qu'une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$, dont l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est $a_{i,j}$.
On suppose que la suite de matrices (A_n) converge vers la matrice A, c'est-à-dire que :
$$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!] \times [\![1,4]\!],\ \lim_{n\to+\infty} a_{i,j}(n) = a_{i,j}.$$
Soient B et C deux autres matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$, indépendantes de n.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} BA_n = BA$. On admet que ceci reste vrai si B appartient à $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbf{R})$.
On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} A_nC = AC$ et que ceci reste vrai si C appartient à $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$.
On admet également que $\lim\limits_{n\to+\infty} BA_nC = BAC$.
2. Montrer que, si une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ est telle que, pour tout i de $[\![1,4]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} a_{i,j}$ est une constante c, alors c est une valeur propre de A.
3. Montrer que si une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ est diagonalisable, alors la somme de ses valeurs propres, (chacune étant comptée un nombre de fois égale à la dimension du sous-espace propre associé) est égale à la trace de A.

Partie 2 : étude de la matrice d'une chaîne de Markov.

On considère deux urnes U et V contenant chacune 3 boules. Au départ, l'urne U contient 3 boules blanches et l'urne V contient 3 boules noires.
On effectue une suite de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et à la mettre dans l'autre urne (un tirage est un échange de 2 boules).
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient U avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage (c'est-à-dire après le $n^{\text{ème}}$ échange) et on a donc $X_0 = 3$.
On considère le vecteur ligne $L_n = (P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3))$.

4. Pour $n \geqslant 3$ et pour tout couple (i,j) d'éléments de $[\![0,3]\!]$, déterminer $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$.
5. a. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ dont l'élément de la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne et de la $(j+1)^{\text{ème}}$ colonne est égal à $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$. Justifier soigneusement que M est la matrice donnée à la question 12).
   b. Montrer que : $\forall n \geqslant 3$, $L_{n+1} = L_nM$. On admet que ce résultat est encore valable pour $n = 0, n = 1$ et $n = 2$.
   c. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $L_n = L_0M^n$.
6. a. Montrer sans calcul que 1 est valeur propre de M.
   b. On considère les vecteurs $E_1 = (9 \quad -1 \quad -1 \quad 9)$ et $E_2 = (3 \quad 1 \quad -1 \quad -3)$.
   Montrer que ${}^tE_1$ et ${}^tE_2$ sont vecteurs propres de M et donner les valeurs propres associées.
   c. Montrer que, si M est diagonalisable, alors M possède une quatrième valeur propre λ que l'on déterminera. Vérifier que λ est effectivement valeur propre de M et conclure que M est diagonalisable.

Partie 3 : recherche d'une loi stationnaire.

7. Justifier qu'il existe une matrice Q inversible, dont la première colonne ne contient que des "1", et une matrice D diagonale telles que $M = QDQ^{-1}$.
8. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = Q\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}Q^{-1}$.

9. Soit $L = (\ell_1 \quad \ell_2 \quad \ell_3 \quad \ell_4)$ la première ligne de Q^{-1}.
   a. En utilisant la relation $Q^{-1}M = DQ^{-1}$, montrer que : $\ell_1 = \ell_4$ et $\ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4$.
   b. Conclure, en considérant le produit $Q^{-1}Q$, que $\ell_4 = \dfrac{1}{20}$.
10. Déduire de ce qui précède les 16 coefficients de la matrice $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n$.
11. On considère une autre expérience aléatoire qui consiste à tirer 3 boules, une par une et sans remise, dans une urne qui en contient 6, dont 3 sont blanches et 3 sont noires.
    On note B_k (resp. N_k) l'événement «obtenir une boule blanche (resp. noire) au $k^{\text{ème}}$ tirage» et X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
   a. Quelle est la loi de X ?
   b. Vérifier que $\begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tM$ associé à la valeur propre 1.
   c. Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers X.
12. On rappelle que la commande `X = grand(n,'markov',M,X0)` renvoie les n premiers états suivant l'état initial X_0 d'une chaîne de Markov de matrice M et on rappelle également que `Scilab` assimile un booléen vrai au nombre 1 et un booléen faux au nombre 0.
    On considère le script suivant :

```
n = input('entrez la valeur de n  : ')
M = [0,1,0,0  ; 1/9,4/9,4/9,0  ; 0,4/9,4/9,1/9  ; 0,0,1,0]
X = grand(n,'markov',M,4)-1
f = sum(X==0)/n
disp(f)
```

    De quelle valeur exacte le contenu de f est-il proche lorsque n est assez grand ?

EDHEC 2016 : Corrigé

Exercice 1

1.a. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car quotient de fonctions dérivables, et

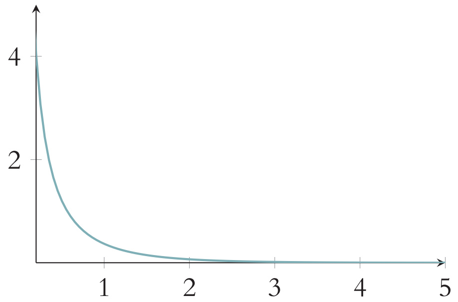
$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{-(x+1)e^{-x}}{x^2} < 0.$$

Donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbf{R}_+^*.}$

De plus, on a $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0.}$

Rédaction Attention aux mauvaises habitudes : il ne s'agit pas d'invoquer ici une formule magique du style «par croissances comparées» : ces deux limites ne sont pas des formes indéterminées !

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$ 0



1.b. Prouvons par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n est défini et strictement positif.
Pour $n = 0$, c'est évident car $u_0 = 1 > 0$.
Supposons donc que u_n est défini et strictement positif.
Alors, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini car f est définie sur $\mathbf{R}_+^*$. Et f ne prenant que des valeurs strictement positives sur son ensemble de définition, $u_{n+1} > 0$.
Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_n \text{ est bien défini et strictement positif.}}$

2. Le programme de gauche calcule les valeurs successives de u_n et retourne la première valeur de n pour laquelle $u_n < 0.00001$.
Donc $u_5 < 0.00001$.
De même pour le programme de droite, qui retourne la première valeur de n pour laquelle $u_n > 100000$. Donc $u_6 > 100000$.
Il semble difficile, à l'aide de ces deux valeurs, d'émettre une conjecture intelligente[1] sur la suite (u_n).

[1] Et pourtant le barème du concours en attendait probablement une...

3.a. g est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ comme différence de deux fonctions dérivables, et

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\ g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0.$$

Donc $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur son ensemble de définition.}}$

3.b. Pour $x > 0$, on a $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{e^{-x}}{x} = x \Leftrightarrow e^{-x} = x^2 \Leftrightarrow g(x) = 0$.
Or, g est continue sur $\mathbf{R}_+$, strictement décroissante avec $g(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
Par le théorème de la bijection, il existe un unique $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Et donc $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in \mathbf{R}_+^* \text{ tel que } f(\alpha) = \alpha.}$

Remarque Notons que $\alpha > 0$ car $g(0) = 1 \neq 0$.

3.c. On a $g\left(\dfrac{1}{e}\right) = e^{-1/e} - e^{-2}$.

Mais $1 < e$, de sorte que $\dfrac{1}{e} < 1 < 2$. Par stricte décroissance de la fonction $t \mapsto e^{-t}$, on en déduit que $e^{-1/e} > e^{-2}$ et donc $g(1/e) > 0$.

La fonction g étant strictement décroissante, on a donc $\boxed{\alpha > \frac{1}{e}.}$

De même, $e^{-1} < 1$ et donc $g(1) = e^{-1} - 1 << 0$.
On en déduit que $\boxed{\alpha < 1.}$

4.a. On a $u_1 = e^{-1} = \frac{1}{e}$, et donc $u_2 = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e^{-1/e}}{\frac{1}{e}} = ee^{-1/e} = e^{1-1/e}$.
Mais $1 - \frac{1}{e} > 0$, de sorte que par croissance de l'exponentielle, $u_2 > e^0 = 1 = u_0$.
La fonction f étant strictement décroissante, on a alors $u_3 = f(u_2) < f(u_0) = u_1$.

4.b. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $u_{2n+2} > u_{2n}$ et $u_{2n+3} < u_{2n+1}$.
Pour $n = 0$, c'est le résultat de la question précédente.
Supposons donc $u_{2n+2} > u_{2n}$ et $u_{2n+3} < u_{2n+1}$.
Alors, en utilisant deux fois la stricte décroissance de f, il vient

$$u_{2n+4} = f(u_{2n+3}) > f(u_{2n+1}) = u_{2n+2} \text{ puis } u_{2n+5} = f(u_{2n+4}) < f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{2n+2} > u_{2n}$ et $u_{2n+3} < u_{2n+1}$: la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante.

5.a. Si $x > 0$, alors

$$h(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) = \frac{\exp\left(-\frac{e^{-x}}{x}\right)}{\frac{e^{-x}}{x}} = x\exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right).$$

Lorsque $x \to 0^+$, on a $x - \frac{e^{-x}}{x} \to -\infty$ et donc $\exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right) \to 0$.
On en déduit que $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0 = h(0)$. Ainsi, $\boxed{h \text{ est continue en } 0.}$

5.b. Si $x = 0$, alors $h(x) = x$, et pour $x > 0$, on a

$$h(x) = x \Leftrightarrow \exp\left(-x - \frac{e^{-x}}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{e^{-x}}{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow \boxed{x = \alpha.}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'équation } h(x) = x \text{ possède deux solutions : } 0 \text{ et } \alpha.}$

Inconnue
Attention au domaine de définition de l'inconnue : ici on précise que $x \in \mathbf{R}_+$, donc $x = 0$ est une solution acceptable de l'équation.

5.c. La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et minorée[2], elle est donc convergente.
Notons ℓ la limite de cette suite. Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{2n+1} > 0$, nécessairement $\ell \geqslant 0$.
De plus, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est définie par

$$u_1 = e^{-1} \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = h(u_{2n+1}).$$

La fonction h étant continue[3] sur $\mathbf{R}_+$, on doit donc avoir

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+3} = \lim_{n\to+\infty} h(u_{2n+1}) = h(\ell).$$

D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+3} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell$.
Ainsi, $h(\ell) = \ell$. D'après la question précédente, c'est donc que $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$.
Mais $u_1 = \frac{1}{e} < \alpha$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante, de sorte que $\ell \leqslant \frac{1}{e} < \alpha$.
On en déduit que $\ell = 0$: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0.}$

[2] Par 0.

[3] Elle est évidemment continue sur $\mathbf{R}_+^*$ et nous avons prouvé à la question 5.a qu'elle est continue en 0.

5.d. Supposons par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\ell' \in \mathbf{R}$. Alors cette suite est définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = h(u_{2n}).$$

Comme précédemment, on doit avoir $\ell' = h(\ell')$.
Mais $u_2 > 1$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, donc $\ell \geqslant 1 > \alpha$.
Ceci contredit le résultat de la question 5.b, donc $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas convergente.
Par le théorème de la limite monotone, une suite croissante qui n'est pas convergente diverge vers $+\infty$: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty.}$

Exercice 2

1.a. On a
$$(f-\mathrm{Id})^2+f\circ(2\mathrm{Id}-f)=f^2-2f+\mathrm{Id}+2f-f^2=\boxed{\mathrm{Id}.}$$

> **Binôme**
> Puisque f et Id commutent, on peut utiliser le binôme de Newton pour développer
> $$(f-\mathrm{Id})^2.$$

1.b. Soit $x\in\mathbf{R}^n$. Alors, par la question précédente, on a
$$x=\mathrm{Id}(x)=\boxed{(f-\mathrm{Id})^2(x)+\left(f\circ(2\mathrm{Id}-f)\right)(x).}$$

1.c. Si $x\in\mathbf{R}^n$, alors $f\left((f-\mathrm{Id})^2(x)\right)=0$, de sorte que $(f-\mathrm{Id})^2(x)\in\mathrm{Ker}(f)$.
D'autre part, $\left(f\circ(2\mathrm{Id}-f)\right)(x)=f(2x-f(x))\in\mathrm{Im}(f)$.
Donc $x=(f-\mathrm{Id})^2(x)+\left(f\circ(2\mathrm{Id}-f)\right)(x)\in\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)$.
Ainsi, $\mathbf{R}^n=\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)$. Il reste donc à prouver que la somme est directe.
Mais, par le théorème du rang, on a
$$\dim\mathrm{Ker}\,f+\dim\mathrm{Im}\,f=\dim\mathbf{R}^n=\dim(\mathrm{Im}\,f+\mathrm{Ker}\,f).$$
Ceci prouve donc que la somme $\mathrm{Im}\,f+\mathrm{Ker}\,f$ est directe, et donc que $\boxed{\mathbf{R}^n=\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f).}$

> **Somme**
> Rappelons que
> $$\mathbf{R}^n=\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)$$
> signifie que tout élément de $\mathbf{R}^n$ peut s'écrire comme somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(f)$ et d'un élément de $\mathrm{Im}(f)$.

Alternative : nous avons, toujours par le théorème du rang, $\dim\mathrm{Im}\,f+\dim\mathrm{Ker}\,f=\dim\mathbf{R}^n$.
Si $x\in\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Ker}\,f$, alors
$$(f\circ(2\mathrm{Id}-f(x)))=2f(x)-f(f(x)).$$
Mais x étant dans $\mathrm{Ker}\,f$, il vient $f(x)=0$ et donc $(f\circ(2\mathrm{Id}-f(x)))=0$.
D'après le résultat de 1.b, on a donc $x=(f-\mathrm{Id})^2(x)$.
Mais puisque $x\in\mathrm{Im}\,f$, il existe $y\in\mathbf{R}^n$ tel que $x=f(y)$ et donc
$$x=(f-\mathrm{Id})^2(f(y))=(f^2-2f+\mathrm{Id})(f(y))=f^3(y)-2f^2(y)+f(y)=f(f^2(y)-2f(y)+\mathrm{Id}(y))=(f\circ(f-\mathrm{Id})^2)(y)=0.$$
Et donc $\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Ker}\,f=\{0\}$.
On en déduit donc[4] que $\mathbf{R}^n=\mathrm{Im}\,f\oplus\mathrm{Ker}\,f$.

[4] On a à la fois
$$\begin{cases}\dim E=\dim\mathrm{Im}\,f+\dim\mathrm{Ker}\,f\\ \mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Ker}\,f=\{0\}\end{cases}$$

2.a. Puisqu'on cherche P sous forme d'un polynôme du premier degré, notons $P=aX+b$.
Alors
$$\frac{1}{4}(X-1)(X-4)+X(aX+b)=\frac{1}{4}X^2-\frac{5}{4}X+1+aX^2+bX=\left(\frac{1}{4}+a\right)X^2+\left(b-\frac{5}{4}\right)X+1.$$
Par identification des coefficients, cette expression vaut 1 si et seulement si
$$\frac{1}{4}(X-1)(X-4)+XP(X)=1\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{4}\\ b=\frac{5}{4}\end{cases}$$
Donc $\boxed{P=-\frac{1}{4}X+\frac{5}{4}}$ convient.

2.b. De la question précédente, il vient
$$\mathrm{Id}=\frac{1}{4}(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})+f\circ P(f).$$
Et donc pour $x\in\mathbf{R}^n$, on a
$$x=\frac{1}{4}\left((f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})\right)(x)+f(P(f)(x)).$$
Mais, d'une part on a : $f(P(f)(x))\in\mathrm{Im}(f)$. Et d'autre part, puisque $f\circ(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})=0$, alors $\mathrm{Im}((f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id}))\subset\mathrm{Ker}(f)$.
Ainsi, $\left((f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})\right)(x)\in\mathrm{Im}((f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id}))\subset\mathrm{Ker}(f)$, et donc $x\in\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Ker}(f)$.
On a donc $\mathbf{R}^n=\mathrm{Ker}(f)+\mathrm{Im}(f)$. Il suffit alors de conclure comme dans la question 1.c : $\boxed{\mathbf{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f).}$

> **Rappel**
> Si f et g sont deux endomorphismes de E, alors
> $$f\circ g=0\Leftrightarrow\mathrm{Im}(g)\subset\mathrm{Ker}(f).$$

3.a. Puisque $\deg(P)=p$, il existe $a_0,\dots,a_p$ tels que $P(X)=a_0+a_1X+\dots+a_pX^p$.
Or, $P(0)=0$, et donc $a_0=0$.
De plus, $P'(X)=a_1+2a_2X+\dots+pa_pX^{p-1}$, de sorte que $P'(0)=a_1$. Et donc $a_1\neq 0$ par hypothèse.
Ainsi, $\boxed{P=a_1X+\dots+a_pX^p,\text{ avec }a_1\neq 0.}$

3.b. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
Puisque $x \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $y \in \mathbf{R}^n$ tel que $x = f(y)$. D'autre part, $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et donc $f(x) = f^2(y) = 0$.
P étant un polynôme annulateur de f, on en déduit que

$$0 = P(f)(y) = a_1 f(y) + a_2 f^2(y) + \cdots + a_p f^p(y) = a_1 f(y) = a_1 x.$$

Détails
Puisque $f^2(y) = 0$, pour $m \geqslant 2$, on a $f^m(y) = 0$.

Mais $a_1 \neq 0$, et donc nécessairement $x = 0$.
On en déduit que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
Par le théorème du rang, on a $\dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathbf{R}^n$, et donc $\boxed{\mathbf{R}^n = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f).}$

3.c. L'endomorphisme de la question 1 était annulé par le polynôme $P = X(X-1)^2$, qui possède 0 comme racine simple, donc $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
De même, l'endomorphisme de la question 2 est annulé par $P = X(X-1)(X-4)$, qui possède également 0 comme racine simple.

EXERCICE 3

1. On a

$$L(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\theta_2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2}} = \boxed{\frac{1}{\theta_2^{n/2}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}.}$$

⚠ Attention !
Il est bien précisé que $\sigma^2 = \theta_2$, et donc $\sigma = \sqrt{\theta_2}$.

Et alors

$$\ln(L(\theta_1, \theta_2)) = \boxed{-\frac{n}{2}\ln(\theta_2) - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2.}$$

2.a. La fonction $(\theta_1, \theta_2) \mapsto \theta_2$ est polynomiale, donc $\mathscr{C}^2$ sur U, et à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$. La fonction $\ln$ étant $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^*$, par composition, $(\theta_1, \theta_2) \mapsto \ln(\theta_2)$ est $\mathscr{C}^2$ sur U.
De même, $(\theta_1, \theta_2) \mapsto \dfrac{1}{2\theta_2}$ est $\mathscr{C}^2$ car inverse d'une fonction $\mathscr{C}^2$ sur U ne s'annulant pas.
Enfin, $(\theta_1, \theta_2) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2$ est $\mathscr{C}^2$ sur U car polynomiale.
Par produit et somme de fonctions $\mathscr{C}^2$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } U.}$

Rédaction ✎
Attention à ne pas se contenter d'un «par opérations sur les fonctions usuelles». Si on demande de prouver que f est $\mathscr{C}^2$, c'est sûrement qu'on attend le détail.

2.b. On a

$$\partial_1 f(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1) \text{ et } \partial_2 f(\theta_1, \theta_2) = -\frac{n}{2\theta_2} + \frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2.$$

Ainsi, (θ_1, θ_2) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\theta_2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1) = 0 \\ -\dfrac{n}{2\theta_2} + \dfrac{1}{2\theta_2^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta_1 = 0 \\ n\theta_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \theta_2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2 \end{cases}$$

Ceci prouve déjà que f possède un unique point critique $(\widehat{\theta_1}, \widehat{\theta_2}) = \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i, \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\theta_1})^2\right)$.

De plus, on a alors

$$\widehat{\theta_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\widehat{\theta_1} + \widehat{\theta_1}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\widehat{\theta_1}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}_{=\widehat{\theta_1}} + \widehat{\theta_1}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\widehat{\theta_1}^2 + \widehat{\theta_1}^2 = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \widehat{\theta_1}^2.}$$

2.c. On a

$$\partial_{1,1}^2 f(\theta_1, \theta_2) = -\frac{n}{\theta_2},\ \partial_{2,2}^2 f(\theta_1, \theta_2) = \frac{n}{2\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2$$

et, par le théorème de Schwarz, $\partial^2_{1,2} f(\theta_1, \theta_2) = \partial^2_{2,1} f(\theta_1, \theta_2) = -\dfrac{1}{\theta_2^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_1)$.

En particulier, pour $(\theta_1, \theta_2) = A$, il vient

$$\partial^2_{1,1} f(A) = -\frac{n}{\widehat{\theta_2}},\ \partial^2_{2,2} f(A) = \frac{n}{\widehat{\theta_2}^2} - \frac{n}{\widehat{\theta_2}^2} = -\frac{n}{2\widehat{\theta}^2},\ \partial^2_{1,2} f(A) = -\frac{1}{\widehat{\theta_2}^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\widehat{\theta_1}\right) = 0.$$

Détails
On a ici utilisé le résultat intermédiaire de la question 2.b :
$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \widehat{\theta_1}\right)^2 = n\widehat{\theta_2}.$$

2.d. D'après les calculs qui précèdent, la matrice hessienne de f au point A est

$$\nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\widehat{\theta_2}} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2\widehat{\theta_2}^2} \end{pmatrix}.$$

Elle est diagonale, et donc ses valeurs propres sont ses coefficient diagonaux : elles sont toutes deux strictement négatives.

On en déduit[5] que $\boxed{f \text{ admet en } A \text{ un maximum local.}}$

[5] Les théorèmes du calcul différentiel s'appliquent car U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

2.e. Puisque f admet un maximum local en A, il existe $r > 0$ tel que pour $(\theta_1, \theta_2) \in B_o(A, r)$, $f(\theta_1, \theta_2) \leqslant f(A)$.
Mais alors par croissance de l'exponentielle, on a, pour $(\theta_1, \theta_2) \in B_o(A, r)$, $L(\theta_1, \theta_2) = e^{f(\theta_1,\theta_2)} \leqslant e^{f(A)} = L(A)$.
Et donc $\boxed{L \text{ admet un maximum local en } A.}$

3. Les X_i admettent une espérance, donc il en est de même de $\overline{X_n}$ et par linéarité de l'espérance,

$$E(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} nm = m.$$

Donc $\boxed{\overline{X_n} \text{ est un estimateur sans biais de } m.}$

4. Par la formule de Huygens, on a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E(X_i^2) = V(X_i) + E(X_i)^2 = \sigma^2 + m^2$.
De plus, par indépendance des X_i, et par stabilité des lois normales, on a

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(nm, n\sigma^2) \text{ et donc } \overline{X_n} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

En particulier, $E(\overline{X_n}^2) = V(\overline{X_n}) + E(\overline{X_n})^2 = \dfrac{\sigma^2}{n} + m^2$.
Alors, Z_n admet une espérance, et

$$E(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - E(\overline{X_n}^2) = m^2 + \sigma^2 - m^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{(n-1)\sigma^2}{n}.$$

Le biais de Z_n en tant qu'estimateur de σ^2 est donc

$$b_{\sigma^2}(Z_n) = E(Z_n) - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\boxed{Z_n \text{ est un estimateur asymptotiquement sans biais de } \sigma^2.}$

5.a. Les X_i admettent une variance et sont i.i.d., donc d'après la loi faible des grands nombres, $\overline{X_n} \xrightarrow{P} E(X) = m$.
La fonction $t \mapsto t^2$ étant continue, on en déduit que $\overline{X_n}^2 \xrightarrow{P} m^2$.

5.b. D'après le théorème de transfert, X possède un moment d'ordre 4 si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt$ converge absolument[6].
L'intégrande est continue sur $\mathbf{R}$, donc les éventuels problèmes de croissance sont au voisinage de $\pm\infty$.

[6] L'intégrande étant positive, l'absolue convergence est ici équivalente à la convergence.

Par croissance comparée, on a $t^2 t^4 e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $t^4 e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \underset{t\to\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^2}$ étant convergentes, il en est donc de même de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\, dt$.

Ainsi, $\boxed{X \text{ admet un moment d'ordre 4.}}$

Les X_i^2 sont i.i.d.[7] et admettent un moment d'ordre 2 car X admet un moment d'ordre 4. Par la loi faible des grands nombres, on a donc

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} E(X^2) = V(X^2) + E(X)^2 = \sigma^2 + m^2.$$

[7] Car les X_i le sont.

5.c. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Supposons qu'on ait à la fois

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sigma^2 + m^2)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \left|\overline{X_n}^2 - m^2\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors

$$|Z_n - \sigma^2| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sigma^2+m^2) - \left(\overline{X_n}^2 - m^2\right)\right| \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sigma^2+m^2)\right| + \left|\overline{X_n}^2 - m^2\right| < \varepsilon.$$

Ainsi, on a

$$\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sigma^2+m^2)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \left(\left|\overline{X_n}^2 - m^2\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \left(|Z_n - \sigma^2| < \varepsilon\right).$$

En passant à l'événement contraire, on a donc

$$\boxed{\left(|Z_n - \sigma^2| \geqslant \varepsilon\right) \subset \left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sigma^2+m^2)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(|\overline{X_n}^2 - m^2| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).}$$

Rappels
Rappelons que si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$ et que
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

5.d. D'après la question précédente, pour $\varepsilon > 0$, on a

$$P\left(|Z_n - \sigma^2| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sigma^2+m^2)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|\overline{X_n}^2 - m^2| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Mais, lorsque $n \to +\infty$, d'après les questions 5.a et 5.b, on a

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sigma^2+m^2)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0 \text{ et } P\left(|\overline{X_n}^2 - m^2| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0.$$

On en déduit que $P(|Z_n - \sigma^2| \geqslant \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $Z_n \xrightarrow{P} \sigma^2$: $\boxed{Z_n \text{ est un estimateur convergent de } \sigma^2.}$

Remarque : la partie «fonction de plusieurs variables» et la partie «estimation ponctuelle» de ce problème peuvent sembler totalement indépendante, mais remarquons que $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, l'estimateur de θ_1, est à mettre en parallèle avec $\widehat{\theta_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, et $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X_n}^2$, l'estimateur de θ_2, est à mettre en parallèle avec $\widehat{\theta_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \widehat{\theta_1}^2$.

L'étude faite dans les questions 1 et 2 suggère que ces estimateurs pourraient être intéressants, la suite de l'exercice permettant de vérifier qu'ils ont de bonnes propriétés.

PROBLÈME

Partie 1 : résultats préliminaires.

1. Notons $b_{i,j}$ le coefficient situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de B.
Soit $(i,j) \in [\![1,4]\!]^2$. Alors

$$(BA_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{4} b_{i,k} a_{k,j}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{4} b_{i,k} a_{k,j}.$$

On reconnaît alors le coefficient situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne du produit BA, donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} BA_n = BA.}$

2. Soit $V = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. Alors $AV = A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^4 a_{1,j}\\ \sum_{j=1}^4 a_{2,j}\\ \sum_{j=1}^4 a_{3,j}\\ \sum_{j=1}^4 a_{4,j}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\c\\c\\c\end{pmatrix} = cV$.

Puisque $V \neq 0$, on en déduit que V est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre c.

3. Supposons que A soit diagonalisable. Alors il existe $P \in GL_4(\mathbf{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ telles que $A = PDP^{-1}$, et on a alors

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(PDP^{-1}) = \mathrm{tr}(P^{-1}PD) = \mathrm{tr}(D) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = \sum_{\lambda\in \mathrm{Spec}(A)} \lambda \times \dim E_\lambda(A).$$

Remarque

Les λ_i sont alors les valeurs propres de A, qui peuvent être distinctes ou non. Chaque valeur propre apparaît alors autant de fois sur la diagonale de D que la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.

Partie 2 : étude de la matrice d'une chaîne de Markov.

4. Si $[X_n = i]$ est réalisé, alors avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, l'urne U contient i boules blanches, et donc l'urne V en contient $3 - i$.

Notons qu'au mieux, on ne peut ajouter ou retirer qu'une boule blanche de U, et donc si $|i - j| > 1$, alors $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = 0$.

Notons U_{n+1} (resp. V_{n+1}) l'événement «la boule tirée dans U (resp. dans V) au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage est blanche».

Pour $i = j$: on a

$$[X_{n+1} = j] \cap [X_n = i] = ([X_n = i] \cap U_{n+1} \cap V_{n+1}) \cup \left([X_n = i] \cap \overline{U_{n+1}} \cap \overline{V_{n+1}}\right)$$

et ces deux événements sont disjoints, de sorte que

$$\begin{aligned}P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) &= P_{(X_n=i)}(U_{n+1} \cap V_{n+1}) + P_{(X_n=i)}(\overline{U_{n+1}} \cap \overline{V_{n+1}})\\ &= P_{(X_n=i)}(U_{n+1})P_{(X_n=i)}(V_{n+1}) + P_{(X_n=i)}(\overline{U_{n+1}})P_{(X_n=i)}(\overline{V_{n+1}})\\ &= \frac{i}{3}\frac{3-i}{3} + \frac{3-i}{3}\frac{i}{3} = \boxed{\frac{2i(3-i)}{9}.}\end{aligned}$$

Remarque

L'hypothèse $n \geqslant 3$ est pour assurer que $[X_n = i]$ est un événement de probabilité non nulle, et donc que la probabilité conditionnelle est bien définie.

En effet, si $n < 3$, on a $P(X_n = 0) = 0$ car on ne peut avoir retiré toutes les boules blanches de l'urne U.

Les tirages dans les deux urnes sont indépendants.

De même, pour $j = i + 1$, $i \leqslant 2$, on a

$$[X_{n+1} = j] \cap [X_n = i] = [X_n = i] \cap \overline{U_{n+1}} \cap V_{n+1}$$

et donc $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = P_{(X_n=i)}(\overline{U_{n+1}})P_{(X_n=i)}(V_{n+1}) = \dfrac{3-i}{3}\dfrac{3-i}{3} = \boxed{\dfrac{(3-i)^2}{9}.}$

Détails

Si lors du $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage on a ajouté une blanche dans U, c'est qu'on a tiré une noire dans U et une blanche dans V.

Enfin, de la même manière, on prouve que

$$P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i - 1) = \frac{i}{3}\frac{i}{3} = \boxed{\frac{i^2}{3}.}$$

Notons qu'on a alors bien

$$P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i-1) + P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i) + P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i+1) = 1.$$

5.a. La matrice donnée dans le code `Scilab` de la question 12 est $M = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0\\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Elle vérifie bien $m_{i,j} = 0$ si $|i - j| > 1$, et on a

$$\begin{aligned}m_{2,1} &= \frac{1}{9} = \frac{1^2}{9} = P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0)\\ m_{3,4} &= \frac{1}{9} = \frac{(3-2)^2}{9} = P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 3)\\ m_{1,2} &= 1 = \frac{(3-0)^2}{9} = P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1)\end{aligned}$$

Remarque

Les coefficients pour lesquels $|i - j| > 1$ sont ceux qui ne sont ni sur la diagonale (pour lesquels $i = j$), ni juste au dessus de la diagonale (pour lesquels $j = i + 1$), ni juste en dessous de la diagonale ($j = i - 1$).

$$\begin{aligned}
m_{4,3} &= 1 = \frac{3^2}{9} = P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=2)\\
m_{2,2} &= \frac{4}{9} = \frac{2\times(3-1)}{9} = P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)\\
m_{2,3} &= \frac{4}{9} = \frac{(3-1)^2}{9} = P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)\\
m_{3,2} &= \frac{4}{9} = \frac{2^2}{9} = P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\\
m_{3,3} &= \frac{4}{9} = \frac{2\times 2\times(3-2)}{9} = P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)
\end{aligned}$$

Donc pour tout $(i,j)\in[\![1,4]\!]^2$, $m_{i,j} = P_{(X_n=i-1)}(X_{n+1}=j-1)$.

5.b. Notons $L_j(n)$ le $j^{\text{ème}}$ coefficient de L_n, de sorte que $L_j(n) = P(X_n = j-1)$.
D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X_n = i],\ i\in[\![0,3]\!]\}$, on a $\forall j\in[\![0,3]\!]$,

> **Indices**
> Attention aux décalages d'indices : le $j^{\text{ème}}$ coefficient de L_n est $P(X_n = j-1)$ car X_n prend des valeurs entre 0 et 3 alors que les colonnes de L_n sont numérotées de 1 à 4, ce qui nécessite de l'attention dans toute la suite.

$$\begin{aligned}
L_j(n+1) = P(X_{n+1}=j-1) &= \sum_{i=0}^{3} P(X_n=i)P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j-1)\\
&= \sum_{i=1}^{4} P(X_n=i-1)P_{(X_n=i-1)}(X_{n+1}=j-1)\\
&= \sum_{i=1}^{4} L_i(n)m_{i,j} = (L_nM)_j.
\end{aligned}$$

Décalage de l'indice.

Donc on a bien $\boxed{L_{n+1} = L_nM.}$

5.c. Pour $n=0$, le résultat est évident.
Supposons que $L_n = L_0M^n$. Alors, par la question précédente, on a

$$L_{n+1} = L_nM = L_0M^nM = L_0M^{n+1}.$$

Donc la propriété est encore vraie à l'ordre $n+1$. D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbf{N},\ L_n = L_0M^n.}$

6.a. La somme de chacune des lignes de M est égale à 1.
Donc d'après la question 2, $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } M.}$

> **Somme des lignes**
> On constate ici «à la main» que la somme de chaque ligne vaut 1, mais il s'agit d'une propriété générale des matrices de transition des chaînes de Markov, et c'est une conséquence immédiate de la formule des probabilités totales.

6.b. Il suffit de faire le calcul : on a

$$M\,{}^tE_1 = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\ \frac19&\frac49&\frac49&0\\ 0&\frac49&\frac49&\frac19\\ 0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\-1\\-1\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ \frac19\\ \frac19\\ -1\end{pmatrix} = -\frac19\,{}^tE_1 \text{ et } M\,{}^tE_2 = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\ \frac19&\frac49&\frac49&0\\ 0&\frac49&\frac49&\frac19\\ 0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \frac13\\ -\frac13\\ -1\end{pmatrix} = \frac13\,{}^tE_2.$$

Puisque ${}^tE_1$ et ${}^tE_2$ sont non nuls, ce sont des vecteurs propres de M, qui possède donc $-\frac19$ et $\frac13$ comme valeurs propres.

6.c. Si M est diagonalisable, alors elle possède une quatrième valeur propre λ, éventuellement égale à l'une des trois valeurs propres déjà trouvées. Et d'après la question 3, on a alors

$$\frac89 = \mathrm{tr}(M) = 1 + \frac13 - \frac19 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac13.$$

Et alors, on a $\mathrm{rg}\left(M + \frac13 I_4\right) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}\frac13&1&0&0\\ \frac19&\frac79&\frac49&0\\ 0&\frac49&\frac79&\frac19\\ 0&0&1&\frac13\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}3&9&0&0\\1&7&4&0\\0&4&7&1\\0&0&9&3\end{pmatrix}$.

> **Rang**
> Multiplier une matrice par un réel **non nul** ne change pas son rang. Ici, on a multiplié par 9 pour se débarrasser des dénominateurs.

La méthode du pivot nous permet alors de calculer ce rang :

$$\begin{pmatrix}3&9&0&0\\1&7&4&0\\0&4&7&1\\0&0&9&3\end{pmatrix} \underset{L_2\leftarrow 3L_2-L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix}3&9&0&0\\0&12&12&0\\0&4&7&1\\0&0&9&3\end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow 3L_3-L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix}3&9&0&0\\0&12&12&0\\0&0&9&3\\0&0&9&3\end{pmatrix} \underset{L_4\leftarrow L_4-L_3}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix}3&9&0&0\\0&12&12&0\\0&0&9&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Ainsi, $\operatorname{rg}\left(M+\frac{1}{3}I_4\right) = 3 < 4$, donc $-\frac{1}{3}$ est valeur propre de M.

M possède donc quatre valeurs propres distinctes, et par conséquent, $\boxed{\text{est diagonalisable.}}$

Partie 3 : recherche d'une loi stationnaire.

7. Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ à une base formée de vecteurs propres de M, alors $P^{-1}MP$ est diagonale.

Or, nous savons que $V = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M pour la valeur propre 1, et forme une base[8] du sous-espace propre $E_1(M)$.

Si on concatène à cette base une base de chacun des autres sous-espaces propres, on obtient une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de M. Alors si Q est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, la première colonne de Q est V (donc ne contient que des 1) et $Q^{-1}MQ$ est une matrice diagonale D.

Notons qu'alors le premier coefficient diagonal de D est 1, et que quitte à changer l'ordre des colonnes suivantes de Q, on peut supposer que $D = \operatorname{Diag}\left(1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}\right)$.

On a alors $M = QDQ^{-1}$.

8. Nous savons que pour $N \in \mathbf{N}$, $M^n = Q^{-1}D^nQ = Q^{-1}\operatorname{Diag}\left(1, \frac{1}{3^n}, \frac{(-1)^n}{3^n}, \frac{(-1)^n}{9^n}\right)Q$.

Or, on a[9] $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Diag}\left(1, \frac{1}{3^n}, \frac{(-1)^n}{3^n}, \frac{(-1)^n}{9^n}\right) = \operatorname{Diag}(1,0,0,0)$ et donc, d'après la question 1,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} M^n = Q^{-1}\operatorname{Diag}(1,0,0,0)Q.}$$

[8] M possède quatre valeurs propres, donc chaque sous-espace propre est de dimension 1.

[9] Il s'agit juste de limites de suites géométriques.

9.a. On a $Q^{-1}M = DQ^{-1}$ soit

$$\begin{pmatrix}\ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4\\ \star & \star & \star & \star\\ \star & \star & \star & \star\\ \star & \star & \star & \star\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0\\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4\\ \star & \star & \star & \star\\ \star & \star & \star & \star\\ \star & \star & \star & \star\end{pmatrix}$$

Notation
On note $\star$ les autres coefficients de Q^{-1}, ce qui ne signifie pas qu'ils sont tous égaux, mais que leur valeur ne nous importe pas ici.

En identifiant les coefficient à la première ligne, il vient

$$\begin{cases}\frac{1}{9}\ell_2 = \ell_1\\ \ell_1 + \frac{4}{9}\ell_2 + \frac{4}{9}\ell_3 = \ell_2\\ \frac{4}{9}\ell_2 + \frac{4}{9}\ell_3 + \ell_4 = \ell_3\\ \frac{1}{9}\ell_3 = \ell_4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ell_2 = 9\ell_1\\ 4\ell_1 = \frac{4}{9}\ell_3\\ \frac{4}{9}\ell_2 = 4\ell_4\\ \ell_3 = 9\ell_4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ell_2 = 9\ell_1\\ \ell_1 = \ell_4\\ \ell_3 = 9\ell_4\end{cases}$$

On a donc bien $\boxed{\ell_1 = \ell_4 \text{ et } \ell_2 = \ell_3 = 9\ell_4.}$

9.b. La relation $Q^{-1}Q = I_4$ nous donne

$$\begin{pmatrix}\ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4\\ \star & \star & \star & \star\\ \star & \star & \star & \star\\ \star & \star & \star & \star\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \star & \star & \star\\ 1 & \star & \star & \star\\ 1 & \star & \star & \star\\ 1 & \star & \star & \star\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

En identifiant les coefficients à la première ligne et première colonne, il vient donc

$$\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = 1 \Leftrightarrow 20\ell_4 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\ell_4 = \frac{1}{20}.}$$

10. En combinant les résultats des questions 8 et 9, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} M^n = \begin{pmatrix}1 & \star & \star & \star\\ 1 & \star & \star & \star\\ 1 & \star & \star & \star\\ 1 & \star & \star & \star\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20}\\ \star & \star & \star & \star\\ \star & \star & \star & \star\\ \star & \star & \star & \star\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \star & \star & \star\\ 1 & \star & \star & \star\\ 1 & \star & \star & \star\\ 1 & \star & \star & \star\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}\frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20}\\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20}\\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20}\\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20}\end{pmatrix}}.$$

11.a. Il est clair que $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$.
Notons que tous les tirages sont équiprobables, et qu'il y a $\binom{6}{3} = \dfrac{6\times5\times4}{6} = 20$ tirages possibles.
Un tirage réalise $[X=i]$ si et seulement si on a choisi i boules blanches parmi les 3 et donc $3-i$ boules noires parmi 3. Le nombre de tels tirages est donc $\binom{3}{i}\binom{3}{3-i} = \binom{3}{i}^2$.
Par équiprobabilité, on a donc

$$\forall i \in [\![0,3]\!],\ P(X=i) = \frac{\binom{3}{i}^2}{20}.$$

Soit encore

$$\boxed{P(X=0) = \frac{1}{20},\ P(X=1) = \frac{9}{20},\ P(X=2) = \frac{9}{20},\ P(X=3) = \frac{1}{20}.}$$

11.b. Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{9}{20} \\ \frac{9}{20} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{9}{20} \\ \frac{9}{20} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix}.$$

Donc $\boxed{\begin{pmatrix} P(X=0) \\ P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix} \text{ est bien un vecteur propre de } {}^tM \text{ associé à la valeur propre 1.}}$

Vocabulaire
En termes markoviens : la loi de X est la loi stationnaire de la chaîne de Markov.

11.c. Nous savons que $L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \lim_{n\to+\infty} L_0M^n = L_0 \times (\lim_{n\to+\infty} M^n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{9}{20} & \frac{9}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que pour tout $i \in [\![0,3]\!]$,

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = i) = P(X=i).$$

Puisque les X_n et X sont des variables aléatoires à valeurs dans $[\![0,3]\!] \subset \mathbf{Z}$, cela prouve que $\boxed{X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X.}$

12. Ce programme simule $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ grâce à la commande `grand`.
Notons qu'à la troisième ligne, on retire 1 à la matrice obtenue pour retrouver des états numérotés de 0 à 3 et non de 1 à 4.
La quatrième ligne a pour effet de compter le nombre de 0 dans le vecteur X, c'est-à-dire le nombre de k pour lesquels $X_k = 0$, puis de diviser ce nombre par n afin d'obtenir la fréquence d'apparition des 0 lors des n premiers tirages.
Or, pour k «suffisamment grand», on doit avoir $P(X_k = 0) \simeq \dfrac{1}{20}$.
Ce n'est peut-être pas vrai pour les premiers tirages, mais si n est suffisamment grand, les termes correspondant à ces premiers tirages, une fois divisés par n, comptent peu dans la somme.
Et donc on devrait avoir $f \simeq \dfrac{1}{20}$.

Remarque *: cette question est en fait plutôt mal formulée, et il n'y a pas d'argument facile pour justifier ceci.*
En effet, nous n'étudions pas directement la convergence en loi des X_p vers X : si c'était le cas, on se fixerait un p assez grand pour pouvoir approcher la loi de X_p par celle de X, ce qui signifierait que pour un grand nombre de simulations de X_p, la proportion de ces simulations qui sont égales à 0 serait une bonne approximation de $P(X=0)$.
Mais ici, p n'est pas fixé, au contraire : nous disposons d'une simulation de X_1, d'une simulation de X_2, etc, une simulation de X_n. L'intuition nous dit que pour p suffisamment grand, tous les X_p suivent environ la même loi, mais il n'y a pas de bon moyen de formaliser ceci.

Simulation
Notons qu'il s'agit d'une simulation, et qu'il est toujours possible de ne «pas avoir de chance», et par exemple d'avoir $X_k = 2,\ \forall k \geqslant 1$. Ceci est toutefois très peu probable.

Extraits commentés du rapport du jury

Il semble que l'investissement en informatique ait été un peu plus intense que les années précédentes, ce qui est très bon signe (le langage `Scilab` semblant plaire aux candidats) puisqu'il y avait, comme d'habitude, pas mal de points à glaner sur ces questions, et ceci sans y passer énormément de temps.

✎ Tout est dit, je vous laisse commenter le «le langage `Scilab` semblant plaire aux candidats» !

Exercice 2

1.b — Beaucoup de candidats ont écrit $(f - \mathrm{Id})^2 \in \mathrm{Ker}(f)$, ce qui n'a aucun sens.

✎ En effet, $f - \mathrm{Id}$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$, alors que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, donc formé de vecteurs de $\mathbf{R}^n$, et non d'endomorphismes.
De manière générale, il est indispensable de s'interroger sur la nature des objets que l'on manipule afin de savoir à quoi on à affaire et ce que l'on a le droit d'écrire : un égalité, une inclusion, une appartenance ?

EDHEC 2015

Exercice 1

Sujet : Étude de deux suites d'intégrales.
Abordable en première année : ✓
Thèmes du programme abordés : suites, intégrales impropres, séries.

Facile

Intérêt : ★★☆

Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}$.

1. Vérifier que I_n est une intégrale convergente.
2. a. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x différent de -1 et 0, on ait :
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}.$$
   b. En déduire la valeur de I_1.
3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.$$
   b. En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. a. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
   b. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante.
   c. En déduire un équivalent de I_n, puis donner la nature de la série de terme général I_n.
5. Pour tout n de $\mathbf{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}$.
   a. Montrer que J_n est une intégrale convergente.
   b. Calculer J_0.
6. a. Pour tout k de $\mathbf{N}^*$, calculer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.
   b. Déterminer alors, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k$ en fonction de J_n.
   c. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2, 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)}$. Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
   d. En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1}I_n$ est convergente et donner sa somme.
7. À l'aide des questions 4.a et 6.a, compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n et J_n pour une valeur de n, supérieur ou égale à 2, entrée par l'utilisateur.

```
n = input('entrez une valeur de n superieure ou egale a 2  :')
I = log(2) ; J = 1/2 ; J = ------
for k = 2 :n
I = ----- ; J = -----  ; end
disp(I,'la valeur de I est  :')
disp(J, 'la valeur de J est :')
```

Exercice 2

Sujet : Étude d'une densité (loi γ de paramètre $1/2$).
Abordable en première année : ✗
Thèmes du programme abordés : variables à densité, loi faible des grands nombres, `Scilab` .

Moyen

Intérêt : ★☆☆

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et de variance égale à 1) et on note Φ la fonction de répartition de X.
On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y la fonction de répartition de Y.

1. a. Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_Y de Y.
   b. Montrer que Y possède une espérance et donner sa valeur.
   c. Montrer que Y possède une variance et donner sa valeur.
2. On considère la fonction g définie par
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$
   a. Vérifier, en justifiant que l'on peut procéder au changement de variable $u = \sqrt{2t}$, que :
$$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du.$$
   b. En déduire que g peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire Z de densité g et on note G sa fonction de répartition.

3. a. On pose $T = \sqrt{2Z}$ et on admet que T est une variable aléatoire à densité. Exprimer la fonction de répartition F_T de T en fonction de G puis en déduire une densité f_T de T et vérifier que T suit la même loi que Y.
   b. En déduire que Z possède une espérance et donner sa valeur.
4. Écrire une commande `Scilab` permettant de simuler la variable aléatoire Z.
5. On considère les commandes `Scilab` suivantes :

```
n = input('entrez la valeur de n  :')
w = grand(1,n,'exp',1)
s = sum(w.*sqrt(w))/n/sqrt(%pi)
```

   a. En remarquant que $x^2 g(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} e^{-x}$, montrer que `s` contient une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 g(x)\,dx$ pour peu que l'on rentre une valeur de n assez grande.
   b. On admet que $E(X^4) = 3$. Quelle est la valeur exacte de l'intégrale dont il est question ci-dessus ?

Exercice 3

Sujet : Étude d'un produit scalaire définie à l'aide d'un endomorphisme symétrique positif. **Moyen**
Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆
Thèmes du programme abordés : produits scalaires, endomorphismes symétriques.

On considère l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
Pour tout couple (x, y) de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire canonique de x et y.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et on rappelle que $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
On considère un endomorphisme f de $\mathbf{R}^n$, symétrique, dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

1. Justifier l'existence d'une base orthonormale de $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_n)$ formée de vecteurs propres de f.
2. a. Montrer que, pour tout x de $\mathbf{R}^n$, on a $\langle x, f(x)\rangle \geqslant 0$.
   b. Vérifier que l'égalité $\langle x, f(x)\rangle = 0$ a lieu si et seulement si $x = 0$.
   c. En déduire que l'application φ, de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, définie par $\varphi(x, y) = \langle x, f(y)\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.
3. a. En utilisant $\mathcal{B}'$, montrer qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbf{R}^n$, symétrique pour le produit scalaire canonique, dont les valeurs propres sont strictement positives et tel que $g^2 = f$.
   b. Établir que g est bijectif.
   c. Montrer que la famille $(g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2), \ldots, g^{-1}(e_n))$ est une base orthonormale de $\mathbf{R}^n$ pour le produit scalaire φ.

Problème

Sujet : Étude d'un jeu de hasard **Facile**
Abordable en première année : ✓ (sauf question 7) **Intérêt** : ★★☆
Thèmes du programme abordés : séries, probabilités discrètes, espérance totale, covariance, `Scilab`
Commentaires : la première partie est plutôt classique et intéressante. Le reste est assez facile et permet de manipuler divers outils des probabilités discrètes. Il est indispensable de bien savoir manipuler les séries géométriques et géométriques dérivées et d'être efficace dans les calculs.

Partie 1.
Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0,1[$.

1. Montrer que lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\binom{n}{r} \sim \dfrac{n^r}{r!}$.

2. a. Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{r+2}\,x^n$.

   b. En déduire que la série de terme général $\binom{n}{r}\,x^n$ est convergente.

3. a. Pour tout entier naturel r, on pose : $S_r = \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r}\,x^n$. Donner la valeur de S_0.

   b. Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que : $(1-x)\,S_{r+1} = x\,S_r$.

   c. En déduire que : $\forall x \in]0,1[\,,\ \forall r \in \mathbf{N}\,,\ \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r}\,x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

   d. Donner enfin la valeur de $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r}\,x^{n-r}$.

Partie 2.
On désigne par α et p deux réels de $]0,1[$. Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.
Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question, (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. À chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1-p$.
Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendantes. On note :

- X le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié.
- Y le nombre de manches gagnées par le joueur.
- G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y et G sont des variables aléatoires définies toutes les trois sur le même espace probabilisé.

4. a. Donner la loi de X. (On pourra noter D_k l'événement «Le joueur ne joue pas la k-ème manche»).

   b. On pose $T = X+1$. Reconnaître la loi de T puis en déduire que l'on a $E(X) = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$.

   c. En déduire également la valeur de $V(X)$.

5. a. Déterminer, pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=n]$.

   b. En déduire à l'aide de la partie 1 la loi de Y.

6. Calculer l'espérance de Y, puis montrer que $V(Y) = \dfrac{p(1-\alpha)\,(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$.

7. a. Exprimer G en fonction de X et Y.

   b. En déduire l'espérance de G.

   c. On admet l'existence de $E(XY)$. Établir que $E(XY) = \dfrac{p\,(1-\alpha)\,(2-\alpha)}{\alpha^2}$.

   d. En déduire la variance de G.

8. a. Compléter, en utilisant la fonction `grand` les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles simulent l'expérience aléatoire étudiée et affichent les valeurs prises par X et Y.

```
alpha=input('entrer la valeur de alpha  : ')
p=input('entrer la valeur de p  : ')
X=-------
Y=-------
disp(X)
disp(Y)
```

   b. Quelles commandes faut-il ajouter aux précédentes pour calculer et afficher la valeur prise par G ?

EDHEC 2015 : Corrigé

Exercice 1

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n(x+1)}$ est continue sur $[1;+\infty[$, donc le seul problème éventuel de convergence se situe en $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, on a $\dfrac{1}{x^n(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^n x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{n+1}}$.

Mais $n \geqslant 1$, de sorte que $n+1 \geqslant 2$, et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}}$ est une intégrale de Riemann convergente.

Par critère de comparaison pour les fonctions à valeurs positives, on en déduit que $\boxed{I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)} \text{ est convergente.}}$

> **Méthode**
> L'étude d'une intégrale impropre doit toujours commencer par une étude du domaine de continuité de l'intégrande. Ici, elle est continue en 1, et donc on ne s'intéressera qu'à son comportement au voisinage de $+\infty$.

2.a. On a $\dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{a(x+1)-bx}{x(x+1)} = \dfrac{(a-b)x+a}{x(x+1)}$.

Il suffit donc d'avoir $(a-b)x+a = 1$, soit encore $\begin{cases} a-b=0 \\ a=1 \end{cases}$.

Ainsi, $a = 1$ et $b = 1$ conviennent, et on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\},\ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}.}$$

> **Détails**
> On souhaite que $(a-b)x+a = 1$ pour tous les $x \notin \{0,1\}$.
> Mais deux polynômes coïncident en une infinité de valeurs si et seulement si ils sont égaux, c'est-à-dire ont les mêmes coefficients.

2.b. Par définition d'une intégrale convergente, on a $I_1 = \displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x(x+1)}$.

Mais pour $A \geqslant 1$ il vient

$$\int_1^A \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^A \frac{dx}{x} - \int_1^A \frac{dx}{x+1} = [\ln(x)]_1^A - [\ln(x+1)]_1^A = \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) + \ln(2) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).$$

On en déduit que $\boxed{I_1 = \ln(2).}$

> **Danger !**
> L'erreur à ne pas faire serait d'écrire
> $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+1}.$$
> Ceci n'a pas de sens car $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$ sont deux intégrales divergente.

3.a. Pour $x \geqslant 1$, on a $x+1 \geqslant 2$, et donc $0 \leqslant \dfrac{1}{x(x+1)} \leqslant \dfrac{1}{2x^n}$.

Par croissance de l'intégrale, il vient alors

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^n}.$$

Mais

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^n} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{2x^n} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2(n-1)}\left(1 - \frac{1}{A^{n-1}}\right) = \frac{1}{2(n-1)}.$$

On en déduit que

$$\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.}$$

3.b. D'après le résultat de la question précédente, par le théorème des gendarmes, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

4.a. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, il vient

$$I_n + I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}(x+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^{n+1}(x+1)}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}}.$$

Mais alors, comme à la question précédente,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^{n+1}} = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{nx^n}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{A^n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Et donc $\boxed{I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}.}$

4.b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors pour tout $x \geqslant 1$, on a $x^{n+1} \geqslant x^n$ et donc $\frac{1}{x^{n+1}(x+1)} \leqslant \frac{1}{x^n(x+1)}$.
Donc par croissance de l'intégrale,

$$I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}(x+1)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)} = I_n.$$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

4.c. Les deux question précédentes prouvent que $2I_n \geqslant I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}$, soit $I_n \geqslant \frac{1}{2n}$.
D'autre part, nous avons déjà prouvé que $I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$.
On a donc, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$1 \leqslant \frac{I_n}{\frac{1}{2n}} \leqslant \frac{2n}{2(n-1)}.$$

D'après le théorème des gendarmes, il vient alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\frac{1}{2n}} = 1$, et donc

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

Puisque la série de terme général $\frac{1}{2n}$ diverge, on en déduit, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, que $\boxed{\text{la série de terme général } I_n \text{ diverge.}}$

5.a. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n(x+1)^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$, et au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{1}{x^n(x+1)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{n+2}}$.
Puisque $n+2 \geqslant 2$ pour $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+2}}$ est une intégrale de Riemann convergente, et donc par critère de comparaison pour les fonctions à valeurs positives,
$\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2} \text{ converge.}}$

5.b. Par définition,

$$J_0 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{dx}{(x+1)^2} = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^A = \boxed{\frac{1}{2}.}$$

6.a. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} J_k + J_{k-1} &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k(x+1)^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{k-1}(x+1)^2} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^k(x+1)^2} dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^k(x+1)} = \boxed{I_k.} \end{aligned}$$

6.b. D'après la question précédente, pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(J_k + J_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i} J_i \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i-1} J_i \end{aligned}$$

Chgt d'indice
On a posé $i = k - 1$.

$$=(-1)^{n-1}J_n + J_0 = \boxed{(-1)^{n-1}J_n + \frac{1}{2}.}$$

6.c. Pour $x \geqslant 1$, on a $x+1 \geqslant 2$ et donc $0 \leqslant \dfrac{1}{(x+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$. Donc

$$0 \leqslant \frac{1}{x^n(x+1)^2} \leqslant \frac{1}{x^n}.$$

Par croissance de l'intégrale, il vient

$$0 \leqslant J_n \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dx}{4x^n} = \frac{1}{4(n-1)}.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit alors que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.}$$

6.d. Les sommes partielles de la série de terme général $(-1)^{n-1}I_n$ ont été calculées à la question 6.b, et on a

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k = J_n + \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

On en déduit que la série de terme général $(-1)^{n-1}I_n$ converge, et même que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}I_k = \frac{1}{2}.}$$

Série convergente

Rappelons que **par définition**, une série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge. La somme de la série est alors la limite de la suite des sommes partielles.

7. On peut compléter le programme de la manière suivante :

```
n = input('entrez une valeur de n superieure ou egale a 2  :')
I = log(2) ; J = 1/2 ; J = I-J ;
for k = 2 :n
I = 1/(k-1)- I ; J = I-J  ; end
disp(I,'la valeur de I est  :')
disp(J, 'la valeur de J est :')
```

Explication

La ligne `I = 1/(k-1)-I` permet le calcul de I_k à partir de I_{k-1} via la relation de la question 4.a qui s'écrit encore

$$I_k = \frac{1}{k-1} - I_{k-1}.$$

Exercice 2

1.a. Soit $x \geqslant 0$. Alors

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leqslant x) = P(|X| \leqslant x) \\ &= P(-x \leqslant X \leqslant x) = P(-x < X \leqslant x) = P(X \leqslant x) - P(X \leqslant -x) \\ &= \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - (1-\Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1. \end{aligned}$$

X est à densité donc on peut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes

De plus, Y prenant des valeurs positives, pour $x < 0$, $F_Y(x) = P(|X| \leqslant x) = 0$.
Donc la fonction de répartition de Y est donnée par

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 2\Phi(x) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Rappel

Φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ tout entier et sa dérivée est la densité usuelle de la loi normale centrée réduite :

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

Il est évident que F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$ (car Φ est $\mathscr{C}^1$), et de plus

$$\lim_{x\to0^-} F_Y(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to0^+} F_Y(x) = 2\Phi(0) - 1 = 0 = F_Y(0).$$

Donc F_Y est continue en 0, et donc sur $\mathbf{R}$, et elle est $\mathscr{C}^1$, sauf éventuellement en 0.
Donc $\boxed{Y \text{ est une variable à densité.}}$
Une densité de Y est alors toute fonction coïncidant avec $F_Y'(x)$ sur $\mathbf{R}^*$.
Par exemple, on peut prendre

$$f_Y(x) = \begin{cases} 2\Phi'(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \boxed{\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Rédaction

Attention à ne pas dire qu'une densité de Y est F_Y', on ne sait pas si F_Y est dérivable en 0.

1.b. Par définition, Y possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x f_Y(x)\,dx$ converge[1]. Or, pour $A > 0$, on a

$$\int_0^A x f_Y(x)\,dx = \int_0^A \sqrt{\frac{2}{\pi}} x e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-e^{-x^2/2}\right]_0^A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 - e^{-A^2/2}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Donc Y possède une espérance, et $\boxed{E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.}$

[1] Absolument mais il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive, donc la convergence équivaut à la convergence absolue.

1.c. Notons que $Y^2 = |X|^2 = X^2$, et puisque X admet un moment d'ordre 2, il en est de même de Y et $E(Y^2) = E(X^2)$.
Or, par la formule de Huygens, $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1 + 0^2 = 1$.
Puis, toujours par la formule de Huygens, $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \boxed{1 - \frac{2}{\pi}.}$

Méthode
Rappelons que la formule de Huygens lie espérance, variance et moment d'ordre 2. Elle sert généralement à obtenir la variance à partir des deux autres, mais pour les lois usuelles, dont on connaît généralement l'espérance et la variance, elle permet de retrouver le moment d'ordre 2.

2.a. La fonction $t \mapsto \sqrt{2t}$ est strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, donc le changement de variable est légitime. De plus, lorsque $t \to 0$, $u \to 0$ et lorsque $t \to +\infty$, $u \to +\infty$.
Si $u = \sqrt{2t}$, alors $t = u^2/2$ et $dt = u\,du$.
Ainsi, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-u^2/2}}{u} u\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du$ sont de même nature, et en cas de convergence, sont égales.
La deuxième intégrale est convergente car on reconnaît, à une constante près, la densité d'une loi normale centrée réduite, qui est d'intégrale convergente. Ainsi,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du.}$$

Détails
L'intégrale d'une densité est convergente sur $]-\infty, +\infty[$, donc l'est automatiquement sur $[0; +\infty[$.

2.b. Nous savons que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = 1$, et par parité de l'intégrande, il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du = \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\,du}_{=1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}du = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

On en déduit, grâce à la question 2.a. que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

g étant positive et continue sauf éventuellement en 0, on en déduit que $\boxed{g \text{ est une densité.}}$

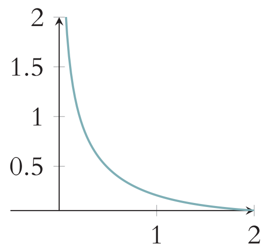


FIGURE 1– La densité g

3.a. Il est évident que T est à valeurs positives, et donc $F_T(x) = 0$ si $x < 0$.
Pour $x \geqslant 0$, on a

$$F_T(x) = P(T \leqslant x) = P(\sqrt{2Z} \leqslant x) = P(2Z \leqslant x^2) = P\left(Z \leqslant \frac{x^2}{2}\right) = G\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

G étant $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 0 (G est dérivable là où g est continue), on a, pour $x \neq 0$,

$$F_T'(x) = xG'(x^2/2) = xg(x^2/2) = \begin{cases} x\sqrt{\frac{2}{\pi x^2}} e^{-x^2/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, une densité de T coïncide avec f_Y, sauf peut-être en 0, donc $\boxed{T \text{ et } Y \text{ ont même loi.}}$

Loi $\gamma(1/2)$
En fait, g est la densité d'une loi $\gamma(1/2)$ car on aura reconnu qu'il s'agit d'une constante fois $e^{-t}t^{1/2-1}$.
Et comme il n'existe qu'une seule constante qui en fasse une densité, cette constante est donc $\frac{1}{\Gamma(1/2)}$, ce qui prouve au passage que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Densité
Il n'y a pas unicité de la densité d'une variable aléatoire : deux densités qui coïncident sauf en un nombre fini de points correspondent à la même loi.

3.b. On a $Z = \frac{T^2}{2}$. Puisque T et Y ont même loi, et que Y possède un moment d'ordre 2, il en est de même de T et $E(T^2) = E(Y^2) = 1$. Donc $Z = \frac{T^2}{2}$ possède une espérance, et

$$E(Z) = E\left(\frac{T^2}{2}\right) = \frac{E(T^2)}{2} = \boxed{\frac{1}{2}.}$$

4. Puisque Z a même loi que $\frac{Y^2}{2}=\frac{X^2}{2}$, on peut simuler Z via la commande

```
grand(1,1,'nor',0,1)^2/2
```

5.a. Notons que le programme proposé par l'énoncé crée un vecteur w, qui contient n simulations $(W_1,\dots,W_n)$ d'une loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$.

Puis, il retourne $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{W_1\sqrt{W_1}+W_2\sqrt{W_2}+\cdots+W_n\sqrt{W_n}}{n}$.

Si V est une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$, alors une densité de V est $\begin{cases} e^{-x} & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Donc par le théorème de transfert, $\frac{V\sqrt{V}}{\sqrt{\pi}}$ est une variable aléatoire dont l'espérance est donnée, sous réserve de convergence, par

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}e^{-x}\,dx=\int_0^{+\infty}x^2g(x)\,dx.$$

Cette intégrale converge car $\int_0^{+\infty}x\sqrt{x}e^{-x}\,dx=\int_0^{+\infty}x^{5/2-1}e^{-x}\,dx=\Gamma(5/2)$.

De même, $V\sqrt{V}$ admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $(V\sqrt{V})^2=V^3$ admet une espérance. Par le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si $\int_0^{+\infty}x^3e^{-x}\,dx$ converge, ce qui est bien le cas[2]. Donc $V\sqrt{V}$ admet un moment d'ordre 2 et donc une variance.

[2] En effet, cette intégrale est $\Gamma(4)$.

Ainsi la loi faible des grands nombres s'applique : si $(X_1,\dots,X_n,\dots)$ est un échantillon de variables i.i.d. de même loi que $\frac{V\sqrt{V}}{\sqrt{\pi}}$, alors $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ converge en probabilités vers $E\left(\frac{V\sqrt{V}}{\sqrt{\pi}}\right)=\int_0^{+\infty}x^2g(x)\,dx$.

Le programme donne au vecteur w les valeurs d'un n échantillon de même loi que V, puis `w.*sqrt(w)/sqrt(%pi)` est alors un n-échantillon de même loi que $\frac{V\sqrt{V}}{\sqrt{\pi}}$.

En sommant ces valeurs et en divisant par n, on obtient $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$, qui doit alors être suffisamment proche de $E\left(\frac{V\sqrt{V}}{\sqrt{\pi}}\right)$ pour n assez grand.

Remarque

Gardons à l'esprit qu'il s'agit d'une convergence en probabilités, et qu'il est envisageable (mais très peu probable) d'avoir affaire à un «mauvais échantillon» pour lequel la convergence souhaitée n'aura pas lieu.

5.b. L'intégrale cherchée est

$$E(Z^2)=E\left(\frac{T^2}{4}\right)=E\left(\frac{Y^4}{4}\right)=\frac{E(X^4)}{4}=\boxed{\frac{3}{4}}.$$

Exercice 3

1. f est symétrique, donc diagonalisable en base orthonormée. Par conséquent, il existe une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.

2.a. Soit $x\in\mathbf{R}^n$. Alors il existe des réels $\mu_1,\dots,\mu_n$ tels que, de manière unique, $x=\sum_{i=1}^n\mu_iu_i$.

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, notons λ_i la valeur propre associée à u_i. Alors

$$\langle x,f(x)\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n\mu_iu_i,\sum_{j=1}^n\mu_jf(u_j)\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n\mu_iu_i,\sum_{j=1}^n\mu_i\lambda_ju_i\right\rangle.$$

Mais par bilinéarité du produit scalaire, il vient alors

$$\langle x,f(x)\rangle=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\mu_i\mu_j\lambda_j\underbrace{\langle u_i,u_j\rangle}_{=0\text{ si }i\neq j}=\sum_{i=1}^n\lambda_i\mu_i^2.$$

Forme quadratique

Nous avons vu dans une preuve du cours que $\langle f(x),x\rangle$ correspond en fait à une forme quadratique. Toutefois vous n'êtes pas tenus de le savoir, et il n'y a pas besoin de connaissances au sujet des formes quadratiques pour répondre à cette question.
Si on souhaite tout de même utiliser une forme quadratique et le théorème liant le signe d'une forme quadratique au signe de ses valeurs propres, il était indispensable d'introduire une matrice : une forme quadratique est définie par une matrice symétrique. On ne pouvait dire directement «c'est du cours car toutes les valeurs propres de f sont positives» (un tel théorème n'apparaît d'ailleurs pas dans le cours !).

Puisque toutes les valeurs propres de f sont positives strictement, alors les λ_i le sont et donc $\boxed{\langle x, f(x)\rangle \geqslant 0.}$

2.b. Avec les notations de la question précédente, on a $\langle x, f(x)\rangle = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i^2 = 0$.
Comme les $\lambda_i \mu_i^2$ sont des nombres positifs, c'est le cas si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!], \mu_i^2 \lambda_i = 0$.
Les λ_i étant strictement positifs, ceci n'est possible que pour $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$, soit $x = 0$.
On a donc bien

$$\boxed{\langle x, f(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.}$$

2.c. φ est une application de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, qui est linéaire par rapport à la première variable car $\langle \cdot, \cdot\rangle$ l'est.
Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, on a

$$\varphi(x, y) = \langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle y, f(x)\rangle = \varphi(y, x)$$

donc φ est symétrique, et donc bilinéaire symétrique.
Enfin, les questions 2.a et 2.b ont prouvé que φ est bien définie positive, donc $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n.}$

3.a. La matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ est $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Soit g l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}'$ est $B = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$.
Alors $B^2 = A$, et donc $g^2 = f$.
De plus, la matrice de g dans une base orthonormée (ici $\mathscr{B}'$) est symétrique, donc g est symétrique (pour le produit scalaire canonique).
Enfin, les valeurs propres de g étant les $\sqrt{\lambda_i}$, il est évident que celles-ci sont toutes strictement positives.

3.b. La matrice de g dans la base $\mathscr{B}'$ est diagonale, et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls (car strictement positifs), donc elle est inversible. On en déduit que $\boxed{g \text{ est bijectif.}}$

3.c. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$\varphi(g^{-1}(e_i), g^{-1}(e_j)) = \langle g^{-1}(e_i), f(g^{-1}(e_j))\rangle = \langle g^{-1}(e_i), g^2(g^{-1}(e_j))\rangle = \langle g^{-1}(e_i), g(e_j)\rangle$$

Mais g étant symétrique pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle$, on a

$$\varphi(g^{-1}(e_i), g^{-1}(e_j)) = \langle g(g^{-1}(e_i)), e_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, la famille $(g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2), \dots, g^{-1}(e_n))$ est orthonormée, et donc est libre.
Puisqu'elle est de cardinal n, c'est alors une base de $\mathbf{R}^n$. Ainsi,

$$\boxed{(g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2), \dots, g^{-1}(e_n)) \text{ est une base orthonormée de } \mathbf{R}^n \text{ pour le produit scalaire } \varphi.}$$

PROBLÈME

Partie 1

1. Par définition, on a $\displaystyle\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$.
Lorsque r est fixé et que n tend vers $+\infty$, le nombre de termes du produit du numérateur est constant[3], et chacun des r termes est équivalent à n lorsque $n \to +\infty$, de sorte que

$$n(n-1)\cdots(n-r+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^r.$$

Et donc $\boxed{\displaystyle\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}.}$

[3] Égal à r.

2.a. Puisque $x \in]0, 1[$, $\dfrac{1}{x} > 1$. Or, nous savons que $n^{r+2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} n^{r+2} x^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{r+2}}{\frac{1}{x^n}} = \boxed{0.}$$

Croissance comparée
Toute suite de la forme n^a est négligeable devant toute suite géométrique de raison q avec $|q| > 1$.

2.b. On a $n^2\binom{n}{r}x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{r+2}x^n}{r!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $\binom{n}{r}x^n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge, il en est de même de $\sum_n \binom{n}{r}x^n$.

3.a. On a donc $S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{0}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Nous reconnaissons alors la somme d'une série géométrique convergente[4] et donc

$$\boxed{S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.}$$

[4] Car $|x| < 1$.

3.b. On a

$$\begin{aligned}
(1-x)S_{r+1} &= (1-x)\sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^n \\
&= \sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^n - \sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^{n+1} \\
&= \sum_{i=r}^{+\infty}\binom{i+1}{r+1}x^{i+1} - \sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^{n+1} \\
&= \binom{r+1}{r+1}x^{r+1} + \sum_{n=r+1}^{+\infty}\left(\binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1}\right)x^{n+1} \\
&= x^{r+1} + \sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r}x^{n+1} \\
&= x\left(x^r + \sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r}x^n\right) = \boxed{xS_r.}
\end{aligned}$$

Chgt d'indice
$n = i+1 \Leftrightarrow i = n-1$.

Triangle de Pascal
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

3.c. Nous venons de prouver que pour tout $r \geqslant 0$, $S_{r+1} = \dfrac{x}{1-x}S_r$.

Donc la suite $(S_r)_{r\geqslant 0}$ est géométrique, de premier terme $\dfrac{1}{1-x}$ et de raison $\dfrac{x}{1-x}$.

On en déduit que pour tout $r \in \mathbf{N}$,

$$S_r = S_0\left(\frac{x}{1-x}\right)^r = \boxed{\frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.}$$

3.d. On a

$$\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^{n-r} = \frac{1}{x^r}\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^n = \frac{1}{x^r}\frac{x^r}{(1-x)^{r+1}} = \boxed{\frac{1}{(1-x)^{r+1}}.}$$

Remarque
Pour $r = 0$, $r = 1$ et $r = 2$, on retrouve (à une constante près) les sommes des séries géométriques et géométriques dérivées apprises en cours.

Partie 2

4.a. Notons que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, car le joueur peut très bien de pas être autorisé à jouer la première manche.

On a $P(X = 0) = \alpha$, et pour $k \geqslant 1$, on a

$$[X = k] = \overline{D_0} \cap \overline{D_1} \cap \cdots \cap \overline{D_k} \cap D_{k+1}.$$

Par la formule des probabilités composées, il vient donc

$$P(X = k) = P(\overline{D_0})P_{\overline{D_0}}(\overline{D_1})\cdots P_{\overline{D_0}\cap\cdots\cap\overline{D_{k-1}}}(\overline{D_k})P_{\overline{D_0}\cap\cdots\cap\overline{D_k}}(D_{k+1}).$$

Or, si un joueur a joué toutes les manches jusqu'à la i-ème, la probabilité qu'il soit autorisé à jouer la $(i+1)$-ème est $(1-\alpha)$. Ainsi, on a

$$P_{\overline{D_0}\cap\cdots\cap\overline{D_{i-1}}}(\overline{D_i}) = (1-\alpha).$$

De même, on a

$$P_{\overline{D_0}\cap\cdots\cap\overline{D_k}}(D_{k+1}) = \alpha.$$

Et donc

$$\boxed{P(X = k) = (1-\alpha)^k\alpha.}$$

4.b. T est à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, et pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$P(T = k) = P(X + 1 = k) = P(X = k-1) = (1-\alpha)^{k-1}\alpha.$$

Nous reconnaissons alors une $\boxed{\text{loi géométrique de paramètre } \alpha.}$

Et donc $E(T) = \dfrac{1}{\alpha}$ de sorte que

$$E(X) = E(T-1) = E(T) - 1 = \frac{1}{\alpha} - 1 = \boxed{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Rappel Contrairement à l'espérance, la variance n'est pas linéaire, on a au contraire

$$V(aX + b) = a^2V(X).$$

4.c. On a $V(X) = V(T-1) = V(T) = \boxed{\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}}.$

5.a. Pour chaque manche jouée, le joueur possède une probabilité p de gagner.
Par indépendance des issues des différentes manches, si le joueur a joué n parties, le nombre de parties gagné suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.
Et donc $\boxed{\text{la loi de } Y \text{ sachant } [X = n] \text{ est la loi } \mathscr{B}(n, p).}$
Notons qu'alors, on a

$$P_{[X=n]}(Y = k) = \begin{cases} \dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5.b. Y est à valeurs dans $\mathbf{N}$. Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X = n], n \in \mathbf{N}\}$, on a donc, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P_{[X=n]}(Y = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} (1-\alpha)^n\alpha\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \alpha(1-\alpha)^kp^k\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left[(1-\alpha)(1-p)\right]^{n-k} \\ &= \alpha(1-\alpha)^kp^k\frac{1}{(1-(1-\alpha)(1-p))^{k+1}} \\ &= \boxed{\frac{\alpha(1-\alpha)^kp^k}{(\alpha+p-\alpha p)^{k+1}}}. \end{aligned}$$

Pour $n < k$, on a

$$P_{[X=n]}(Y = k) = 0.$$

C'est le résultat de 3.d.

6. **Première méthode : avec la formule de l'espérance totale**
Puisque $\{[X = n], n \in \mathbf{N}\}$ est un système complet d'événements, et que $E(Y|X = n) = np$, d'après la formule de l'espérance totale, on a, sous réserve de convergence,

Détails L'espérance conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est l'espérance d'une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)E(Y|X = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha(1-\alpha)^n np \\ &= \alpha(1-\alpha)p\sum_{n=0}^{+\infty} n(1-\alpha)^{n-1} \\ &= \alpha(1-\alpha)p\frac{1}{(1(1-\alpha))^2} \end{aligned}$$

On a reconnu une série géométrique dérivée convergente, donc $E(Y)$ existe.

$$= p\frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

Il est alors possible de tenir le même raisonnement pour calculer le moment d'ordre deux de Y.
En effet, notons que si Z est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors par la formule de Huygens,

$$E\left(Z^2\right) = V(Z) + E(Z)^2 = np(1-p) + n^2p^2 = np\left(1+(n-1)p\right).$$

Et donc ici, cela signifie que $E(Y^2|X=n) = np\left(1+(n-1)p\right)$.
Toujours par la formule de l'espérance totale, appliquée cette fois à Y^2, il vient donc, sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}
E\left(Y^2\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)E\left(Y^2|X=n\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha(1-\alpha)^n np\left(1+(n-1)p\right)\\
&= \alpha p(1-\alpha)\sum_{n=0}^{+\infty} n(1-\alpha)^{n-1} + \alpha p^2(1-\alpha)^2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(1-\alpha)^{n-2}\\
&= \alpha p(1-\alpha)\frac{1}{\alpha^2} + p^2\alpha(1-\alpha)^2\frac{2}{\alpha^3}\\
&= \frac{p(1-\alpha)}{\alpha^2}\left(\alpha+2p(1-\alpha)\right).
\end{aligned}$$

On a reconnu des séries géométriques dérivées convergentes, donc $E\left(Y^2\right)$ existe.

Et donc par la formule de Huygens,

$$\begin{aligned}
V(Y) = E\left(Y^2\right) - E(Y)^2 &= \frac{p(1-\alpha)}{\alpha^2}\left(\alpha+2p(1-\alpha)\right) - \frac{p^2(1-\alpha)^2}{\alpha^2}\\
&= \frac{(1-\alpha)p(2p-2\alpha p+\alpha-p+\alpha p)}{\alpha^2} = \boxed{\frac{(1-\alpha)p(p+\alpha-\alpha p)}{\alpha^2}}.
\end{aligned}$$

<u>Seconde méthode</u> : en utilisant la loi de Y (et une bonne dose de courage !)
Notons que $0 \leqslant Y \leqslant X$, et que X admet une espérance, donc Y admet également une espérance. On a alors

$$\begin{aligned}
E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(Y=k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{\alpha(1-\alpha)^kp^k}{(\alpha+p-\alpha p)^{k+1}}\\
&= \frac{\alpha(1-\alpha)p}{(\alpha+p-\alpha p)^2}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{(1-\alpha)p}{\alpha+p-\alpha p}\right)^{k-1}\\
&= \frac{\alpha p(1-\alpha)}{(\alpha+p-\alpha p)^2}\frac{1}{\left(1-\frac{(1-\alpha)p}{\alpha+p-\alpha p}\right)^2}\\
&= \frac{\alpha p(1-\alpha)}{(\alpha+p-\alpha p)^2}\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}\right)^2}\\
&= \frac{\alpha p(1-\alpha)}{(\alpha+p-\alpha p)^2}\frac{(\alpha+p-\alpha p)^2}{\alpha^2} = \boxed{\frac{p(1-\alpha)}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Série géométrique dérivée convergente.

De même, $0 \leqslant Y^2 \leqslant X^2$, donc Y admet un moment d'ordre 2, et d'après le théorème de transfert, celui-ci est donné par

$$E\left(Y^2\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2P(Y=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\frac{\alpha(1-\alpha)^kp^k}{(\alpha+p-\alpha p)^{k+1}}.$$

Posons alors $q = \dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha+p-\alpha p} \in]0,1[$, de sorte que $P(Y=k) = \dfrac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}q^k$.
Il vient alors,

$$E\left(Y^2\right) = \frac{\alpha}{(\alpha+p-\alpha p)}\sum_{k=0}^{+\infty} k^2q^k$$

$$= \frac{\alpha}{(\alpha+p-\alpha p)}q^2\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)q^{k-2} + \frac{\alpha}{(\alpha+p-\alpha p)}q\sum_{k=0}^{+\infty}kq^{k-1}$$
$$= \frac{\alpha}{(\alpha+p-\alpha p)}q^2\frac{2}{(1-q)^3} + \frac{\alpha}{(\alpha+p-\alpha p)}q\frac{1}{(1-q)^2}$$
$$= \frac{\alpha}{(\alpha+p-\alpha p)}\frac{q}{(1-q)^2}\left(\frac{2q}{1-q}+1\right).$$

$$E\left(Y^2\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}k^2P(Y=k)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}k^2\frac{\alpha(1-\alpha)^kp^k}{(\alpha+p-\alpha p)^{k+1}}$$
$$= \frac{\alpha(1-\alpha)p}{(\alpha+p-\alpha p)^2}\left(\frac{(1-\alpha)p}{\alpha+p-\alpha p}\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)\left(\frac{(1-\alpha)p}{\alpha+p-\alpha p}\right)^{k-2}+\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{(1-\alpha)p}{\alpha+p-\alpha p}\right)^{k-1}\right)$$
$$= \frac{\alpha(1-\alpha)p}{(\alpha+p-\alpha p)^2}\left(\frac{(1-\alpha)p}{\alpha+p-\alpha p}\frac{2}{\left(1-\frac{(1-\alpha)p}{\alpha+p-\alpha p}\right)^3}+\frac{1}{\left(1-\frac{(1-\alpha)p}{\alpha+p-\alpha p}\right)^2}\right)$$
$$= \frac{\alpha(1-\alpha)p}{(\alpha+p-\alpha p)^2}\left(\frac{2(1-\alpha)p(\alpha+p-\alpha p)^3}{\alpha^3(\alpha+p-\alpha p)}+\frac{(\alpha+p-\alpha p)^2}{\alpha^2}\right)$$
$$= \frac{\alpha(1-\alpha)p}{\alpha^3}(2(1-\alpha)p+\alpha).$$

Le terme correspondant à $k=0$ est nul.

Et donc par la formule de Huygens,

$$V(Y) = E\left(Y^2\right)-E(Y)^2 = \frac{p(1-\alpha)}{\alpha^2}(\alpha+2p(1-\alpha)) - \frac{p^2(1-\alpha)^2}{\alpha^2}$$
$$= \frac{(1-\alpha)p(2p-2\alpha p+\alpha-p+\alpha p)}{\alpha^2} = \boxed{\frac{(1-\alpha)p(p+\alpha-\alpha p)}{\alpha^2}}.$$

Troisième méthode : en étant astucieux et en introduisant une loi géométrique.

Remarquons qu'en posant $q=\dfrac{(1-\alpha)p}{\alpha+p-\alpha p}$, alors $P(Y=k)=(1-q)q^k$.
Et donc, comme à la question 4, on montre que $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre $1-q$, ce qui permet de calculer $E(Y)$ et $V(Y)$ à peu de frais...

7.a. Lorsque le jeu s'arrête[5], le joueur a gagné Y manches, et en a donc perdu $X-Y$.
Et donc $\boxed{G=Y-(X-Y)=2Y-X.}$

[5] On pourrait en fait prouver que le jeu s'arrête presque sûrement, c'est-à-dire que la probabilité que le joueur dispute une infinité de parties est nulle.

7.b. Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(G) = 2E(Y)-E(X) = \frac{2p(1-\alpha)}{\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha} = \boxed{\frac{(2p-1)(1-\alpha)}{\alpha}}.$$

Remarque
L'énoncé nous dit d'admettre l'existence de $E(XY)$, mais c'est du cours car X et Y admettent une variance.

7.c. On a $E(XY|X=n)=E(nY|X=n)=nE(Y|X=n)$.
Mais la loi de Y conditionnellement à l'événement $[X=n]$ est une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, donc $E(Y|X=n)=np$.
Ainsi, par la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'événements $\{[X=n], n\in\mathbf{N}\}$, on a

Convergence
Puisque XY admet une espérance, la formule de l'espérance totale nous garantit la convergence de la série qui suit, même si elle n'est en fait pas difficile à prouver.

$$E(XY) = \sum_{n=0}^{+\infty}E(XY|X=n)P(X=n)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}n^2p(1-\alpha)^n\alpha$$
$$= \alpha p\left((1-\alpha)^2\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)(1-\alpha)^{n-2}+(1-\alpha)\sum_{n=0}^{+\infty}n(1-\alpha)^{n-1}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha p \left((1-\alpha)^2 \frac{2}{\alpha^3} + (1-\alpha)\frac{1}{\alpha^2} \right) \\
&= p(1-\alpha)\left(\frac{2(1-\alpha)}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \right) \\
&= \boxed{p(1-\alpha)\frac{2-\alpha}{\alpha^2}.}
\end{aligned}$$

On a reconnu des séries géométriques dérivées de raison $1-\alpha$.

7.d. Par la formule de Huygens, on a

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2} - \frac{1-\alpha}{\alpha} p \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{p(1-\alpha)}{\alpha^2}.$$

Et alors

$$\begin{aligned}
V(G) &= V(2Y-X) = V(2Y) + V(X) - 2\mathrm{Cov}(2Y,X) = 4V(Y) + V(X) - 4\mathrm{Cov}(X,Y) \\
&= \frac{4(1-\alpha)p(p+\alpha-\alpha p)}{\alpha^2} + \frac{1-\alpha}{\alpha^2} - 4\frac{p(1-\alpha)}{\alpha^2} \\
&= \frac{(1-\alpha)}{\alpha^2}\left(4p(\alpha+p-\alpha p) + 1 - 4p\right) \\
&= \frac{(1-\alpha)}{\alpha^2}\left(4p(\alpha+p-\alpha p-1) + 1\right) \\
&= \boxed{\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\left(1-4p(1-\alpha)(1-p)\right).}
\end{aligned}$$

8.a. En utilisant les résultats des questions 4.b et 5.a, nous pouvons utiliser le programme suivant :

```
alpha=input('entrer la valeur de alpha  : ')
p=input('entrer la valeur de p  : ')
X=grand(1,1,'geom',alpha)-1 ;
Y=grand(1,1,'bin',X,p)
disp(X)
disp(Y)
```

8.b. Puisque $G = 2Y - X$, il suffit d'ajouter les lignes

```
G = 2*Y - X ;
disp(G)
```

Extraits commentés du rapport du jury

Il reste, en assez grand nombre, des candidats qui rendent pratiquement un brouillon et truffent leur copie d'abréviations non officielles : les correcteurs n'apprécient pas du tout en n'ont alors aucune compassion pour le candidat.

✎ Gagner la confiance du correcteur est essentiel : si la copie est propre, que vous avez montré sur les premières questions que vous pouviez rédiger proprement (si possible avec une grammaire et une orthographe correctes) et avec des arguments pertinents, il doutera moins de vos capacités mathématiques, et sera plus à même de laisser passer par la suite une petite erreur ou un argument manquant.
Au contraire, si dès la fin de votre première page, le correcteur est pressé de passer à la copie suivante, n'attendez aucun cadeau de sa part !
Enfin, concernant les abréviations, celles-ci sont à proscrire : si certaines d'entre elles sont relativement courantes (IPP pour intégration par parties, s.c.e pour système complet d'événéments, etc), d'autres vous sont propres, ou du moins le sont à votre enseignant, et ne sont pas forcément compréhensibles au premier coup d'œil. Là encore, une copie truffée d'abréviations (et donc difficilement lisible) risque de ne pas mettre le correcteur dans les meilleurs dispositions à votre égard.
De plus, vous viendrait-il à l'idée d'utiliser une abréviation dans une dissertation de philo ? Non ? Alors pourquoi le faire dans une copie de maths ?

EDHEC 2014

Exercice 1

Sujet : Somme du carré de deux lois normales (loi $\chi^2(2)$), lien avec la loi exponentielle, application à un calcul d'intégrale.

Moyen

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : variables à densité, produit de convolution, intégrales impropres.

Modifications apportées au sujet d'origine : les lois Γ ne figurant plus dans le programme 2015, les questions 1 et 2.a ont été modifiées pour faire apparaître des lois γ

Commentaires : un thème classique que l'on retrouve régulièrement dans les sujets de parisiennes. Le concepteur a fait preuve de bienveillance (de générosité ?) en rappelant la définition de la fonction Γ et la formule du produit de convolution.

On rappelle que la fonction Γ (gamma) est la fonction, qui à tout réel x strictement positif, associe $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

On admet que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

1. On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite.
   On pose $U = X^2$ et $V = Y^2$.
   a. Montrer que la loi commune à $\frac{U}{2}$ et $\frac{V}{2}$ est la loi $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire des densités f_U et f_V de U et V.
   b. En déduire l'espérance et la variance de U et V.
2. On pose $W = U + V$ et on rappelle que W est une variable aléatoire, définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   a. Donner sans calcul une densité de $\frac{W}{2}$, puis de W, ainsi que l'espérance et la variance de W.
   b. On admet que, si f_U et f_V sont respectivement des densités de U et V, alors, une densité de W est la fonction f_W, nulle sur $]-\infty, 0[$, et définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)f_V(x-t)\,dt$.
   Justifier, sans calculer l'intégrale précédente, que :
   $$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_W(x) = \int_0^x f_U(t)f_V(x-t)\,dt.$$
   c. Pour tout réel x strictement positif, on pose $I(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,dt$.
   Déduire des questions précédentes que l'intégrale $I(x)$ converge et donner sa valeur.

Exercice 2

Sujet : Étude d'un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Facile

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : diagonalisation

Commentaires : très classique, bien guidé.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Soit A une matrice non nulle fixée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On considère l'application f qui à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ associe

$$f(M) = \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que f n'est pas l'endomorphisme nul (on pourra distinguer les cas $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.)
3. a. Établir que, pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on a $(f \circ f)(M) = \mathrm{tr}(A)f(M)$.
   b. Donner les valeurs propres possibles de f.
4. Montrer que 0 est valeur propre de f.

5. Montrer que si $\mathrm{tr}(A) = 0$, alors f n'est pas diagonalisable.
6. On suppose dans cette question que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.
    a. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$?
    b. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 3

Sujet : Existence et calcul d'un minimum à l'aide d'une fonction de plusieurs variables et d'un produit scalaire. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : produits scalaires, projecteurs orthogonaux, fonctions de plusieurs variables, calcul différentiel d'ordre 2.

Commentaires : très bel exercice qui relie deux notions différentes du programme. Les calculs, bien qu'élémentaires demandent de l'attention. La dernière question nécessite de l'astuce.

Le but de cet exercice est de prouver l'existence et de donner la valeur (par deux méthodes différentes) de

$$\Delta = \inf_{(x,y)\in\mathbf{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t}\, dt.$$

Partie I : méthode utilisant un produit scalaire

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3 et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les deux polynômes 1 et X.

1. a. Rappeler pourquoi, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$ converge.
    b. Montrer que l'application de $E\times E$ dans $\mathbf{R}$ qui, à tout couple (P,Q) d'éléments de E, associe $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt$ est un produit scalaire sur E, dont la norme associée sera notée $\|\cdot\|$.
2. Soit Q un polynôme de F défini par $Q = xX + y$, où x et y sont deux réels. Donner, sous forme d'intégrale, l'expression de $\|X^3 - Q\|^2$.
3. a. Énoncer le théorème qui assure l'existence et l'unicité du polynôme Q_0 de F qui rend $\|X^3 - Q\|^2$ minimale.
    b. En déduire sans calcul les valeurs de $\langle X^3 - Q_0, 1\rangle$ et $\langle X^3 - Q_0, X\rangle$.
    c. En notant $Q_0 = x_0X + y_0$, écrire le système que doit vérifier le couple (x_0, y_0) pour que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t}\, dt$ soit minimale.
    d. Déterminer la valeur de Δ.

Partie 2 : méthode utilisant une fonction de deux variables

On note f la fonction définie sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R},\ f(x,y) = \int_0^{+\infty} (t^3 - tx - y)^2 e^{-t}\, dt.$$

4. Écrire $f(x,y)$ comme une fonction polynomiale des deux variables x et y.
5. Déterminer le seul point critique (x_0, y_0) de f sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.
6. Montrer que f admet en (x_0, y_0) un minimum local m que l'on calculera.
7. Établir que ce minimum est global.

Problème

Sujet : Étude d'une variable aléatoire fonction d'une autre variable aléatoire. **Facile**

Abordable en première année : ✓ (sauf question 7) **Intérêt** : ★☆☆

Thèmes du programme abordés : variables aléatoires discrètes et à densité, théorème central limite.

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Commentaires : un exercice a priori déroutant, mais qui ne présente pas de vrais difficultés. L'ensemble est plutôt technique et ne prouve de résultat particulièrement intéressant.

Question préliminaire

1. Soit x un réel quelconque.
   a. Justifier que la fonction $t \mapsto \max(x,t)$ est continue sur $\mathbf{R}$.

   On considère maintenant l'intégrale $y = \displaystyle\int_0^1 \max(x,t)\,dt$.

   b. Montrer que $y = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Dans la suite de ce problème, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer. On admet que l'on définit une variable aléatoire Y, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, en posant, pour tout ω de Ω :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)\,dt.$$

On se propose dans les deux parties suivantes de déterminer la loi de Y connaissant celle de X.

Partie I : étude de plusieurs cas où X est discrète

2. Vérifier que si X suit une loi géométrique alors on a $Y = X$.
3. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

   a. Déterminer la valeur de $P(X = 0)$.
   b. Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$, puis donner la loi de Y, ainsi que son espérance et sa variance.
   c. Compléter la fonction `Scilab` suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
function y = question3()
  u = 4*rand() ;
  if ... then
   y = ...
  else
   y = ...
  end
endfunction
```

4. On suppose, dans cette question, que X suit la loi de Poisson de paramètre λ (où λ est un réel strictement positif).
   a. Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \mathbf{N}^*$, puis donner la loi de Y.
   b. En déduire l'espérance et la variance de Y.

Partie 2 : étude de plusieurs cas où X est à densité

On note, sauf indication contraire, respectivement F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et de Y.

5. On suppose, dans cette question, que X suit la loi uniforme sur $[0,1[$, avec $X(\Omega) = [0,1[$.
   a. Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a : $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.
   b. En déduire $Y(\Omega)$.
   c. Montrer alors que, pour tout x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a : $F_Y(x) = \sqrt{2x-1}$.
   d. Expliquer pourquoi Y est une variable à densité.
   e. Donner la valeur de $E(Y)$.
   f. Compléter la fonction `Scilab` suivant pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```
function y = question5()
  y = ...
endfunction
```

6. On suppose, dans cette question, que $X - 1$ suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un réel strictement positif).

a. Toujours en utilisant la première question, exprimer Y en fonction de X.

b. Donner sans calcul l'espérance et la variance de Y.

c. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Vérifier que la variable aléatoire $W = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ, puis compléter la fonction `Scilab` suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y

```
function y = question6(lambda)
  y = ...
endfunction
```

7. On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que $X(\Omega) = \mathbf{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X.

a. Vérifier que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

b. Donner la valeur de $P\left(Y = \frac{1}{2}\right)$.

c. Utiliser la formule des probabilités totale associée au système complet d'événements $\{[X \leqslant 0], [0 < X < 1], [X \geqslant 1]\}$ pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \Phi(\sqrt{2x-1}) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

d. La variable aléatoire Y est-elle à densité ? Est-elle discrète ?

e. Soient $U_1, \dots, U_{48}$ des variables indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. Expliquer pourquoi on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{48} U_k - 24\right)$ par la loi normale centrée réduite, puis compléter la fonction `Scilab` suivante pour qu'elle simule Y.

```
function y = question7()
  aux = 0 ;
  for k = 1 :48
    aux = aux + rand()
  end
  x = (aux-24)/2 ;
  if .... then
    y = ...
  else
    ...
  end
endfunction
```

EDHEC 2014 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1.a. Il est évident que $\frac{U}{2}$ et $\frac{V}{2}$ ont la même loi, donc intéressons nous à la loi de $\frac{U}{2}$.

Notons F sa fonction de répartition. Puisque $\frac{U}{2} = \frac{X^2}{2}$ est à valeurs positives, $F(x) = 0$ si $x < 0$.

Soit donc $x \geqslant 0$. Alors

$$F(x) = P\left(\frac{X^2}{2} \leqslant x\right) = P(X^2 \leqslant 2x) = P(-\sqrt{2x} \leqslant X \leqslant \sqrt{2x}) = \Phi(\sqrt{2x})-\Phi(-\sqrt{2x}) = 2\Phi(\sqrt{2x})-1.$$

Rappel Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Ainsi, la fonction de répartition de $\frac{X^2}{2}$ est

$$F : x \mapsto \begin{cases} 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque les fonctions racine carrée et Φ sont continues sur $\mathbf{R}_+$, F est continue sur $\mathbf{R}_+$ par composition de fonctions continues.

Elle est évidemment continue sur $\mathbf{R}_-^*$ car constante, et on a

$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = 0 = F(0)$$

donc F est également continue à gauche en 0, donc[1] continue sur $\mathbf{R}$.

Les fonctions Φ et racine carrée sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, donc par composition, F est également $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$. Et donc $\frac{X^2}{2}$ est une variable à densité.

Une densité en est alors obtenue en dérivant F là où elle est dérivable[2] et en choisissant des valeurs arbitraires ailleurs. Par exemple, on peut prendre

[1] F étant continue sur $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$, elle est continue à droite en 0.

[2] C'est-à-dire sauf en 0.

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2x}}\Phi'(\sqrt{2x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-1/2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dérivée de Φ Rappelons que la dérivée de Φ est la densité usuelle de la loi normale centrée réduite :

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Mais alors, en utilisant la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ rappelée dans l'énoncé, il vient

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1/2)}x^{1/2-1}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît alors la densité usuelle de la loi $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, de sorte que $\boxed{\text{les variables } \frac{U}{2} \text{ et } \frac{V}{2} \text{ suivent la loi } \gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$.

Et alors, $U = 2\frac{U}{2}$, de sorte que par transformation affine, une densité de U est

$$f_U : x \mapsto \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = \boxed{\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

1.b. On a $E\left(\frac{U}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $V\left(\frac{U}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Donc

$$E(U) = 2E\left(\frac{U}{2}\right) = \boxed{1} \text{ et } V(U) = V\left(2\frac{U}{2}\right) = 4V\left(\frac{U}{2}\right) = \boxed{2.}$$

☠ Danger ! La variance n'est pas linéaire :

$$V(aX) = a^2V(X).$$

2.a. On a $\frac{W}{2} = \frac{U}{2} + \frac{V}{2}$, et ces deux variables sont indépendantes[3]. Par stabilité des lois gamma, on a alors $\boxed{\frac{W}{2} \hookrightarrow \gamma(1).}$

Mais la loi $\gamma(1)$ est également la loi exponentielle de paramètre 1, et donc par transformation affine de lois exponentielles, $\boxed{W = 2\frac{W}{2} \text{ suit la loi } \mathscr{E}\left(\frac{1}{2}\right).}$

On en déduit que $E(W) = 2$ et $V(W) = 4$.

[3] Car X et Y sont indépendantes.

Rappel

$X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$ si et seulement si $\frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.
Ici, $\lambda = \frac{1}{2}$.

2.b. Soit $x \geqslant 0$. Alors, pour $t \leqslant 0$, on a $f_U(t) = 0$. Et pour $t \geqslant x$, on a $x - t \leqslant 0$ et donc $f_V(x-t) = 0$. Ainsi,

$$f_W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t)f_V(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{f_U(t)}_{=0} f_V(x-t)\,dt + \int_0^x f_U(t)f_V(x-t)\,dt + \int_x^{+\infty} f_U(t)\underbrace{f_V(x-t)}_{=0}\,dt$$

$$= \boxed{\int_0^x f_U(t)f_W(x-t)\,dt.}$$

2.c. D'après la question précédente, on a, pour $x \geqslant 0$,

$$f_W(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{t}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{x-t}}e^{-\frac{x-t}{2}}\,dt = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\,dt = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2\pi}I(x).$$

Donc l'intégrale converge[4], et ainsi

$$I(x) = 2\pi e^{\frac{x}{2}} f_W(x) = 2\pi e^{\frac{x}{2}}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} = \boxed{\pi.}$$

Notons qu'il est assez surprenant que la valeur de cette intégrale ne dépende pas de x.

[4] Puisque f_W existe, l'intégrale du produit de convolution converge.

Remarque

En réalité, il est directement possible de calculer $I(x)$ via le changement de variable $t = x\cos^2 u$.
Cela constitue d'ailleurs un bon entraînement aux changements de variable.

Exercice 2

1. Puisque $\operatorname{tr}(A)$ et $\operatorname{tr}(M)$ sont des réels, $f(M) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
Soient $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, par linéarité de la trace,

$$f(\lambda M+N) = \operatorname{tr}(A)(\lambda M+N) - \operatorname{tr}(\lambda M+N)A = \lambda\operatorname{tr}(A)M + \operatorname{tr}(A)N - \lambda\operatorname{tr}(M)A - \operatorname{tr}(N)A = \lambda f(M) + f(N).$$

Donc f est linéaire : c'est $\boxed{\text{un endomorphisme de } \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).}$

2. Si $\operatorname{tr}(A) = 0$, alors $f(I_n) = -nA \neq 0$.
Si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$, alors soit M une matrice non colinéaire à A, de sorte que la famille (A, M) soit libre.
Alors $f(A) = \operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A$. Si $f(A)$ était nul, on aurait alors

$$\operatorname{tr}(A)M = \operatorname{tr}(M)A \Leftrightarrow M = \frac{\operatorname{tr}(M)}{\operatorname{tr}(A)}.$$

ce qui n'est pas le cas car A et M ne sont pas colinéaires.
Dans tous les cas, $\boxed{f \text{ n'est pas l'endomorphisme nul car prend des valeurs non nulles.}}$

Détails

Une telle matrice M existe, car $n \geqslant 2$ et donc $\dim \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = n^2 \geqslant 4$.
La famille formée de la seule matrice A peut donc être complétée en une base $(A, M_2, \ldots, M_{n^2})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, et alors $M = M_2$ fait l'affaire : (A, M) est libre.

3.a. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Alors

$$(f \circ f)(M) = f(\operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A) = \operatorname{tr}(A)f(M) - \operatorname{tr}(M)f(A) = \boxed{\operatorname{tr}(A)f(M)}$$

car $f(A) = \operatorname{tr}(A)A - \operatorname{tr}(A)A = 0$.

3.b. La question précédente prouve qu'un polynôme annulateur de f est $X^2 - \operatorname{tr}(A)X$.
Ses racines sont 0 et $\operatorname{tr}(A)$, donc $\boxed{\text{les seules valeurs propres possibles de } f \text{ sont } 0 \text{ et } \operatorname{tr}(A).}$

4. Nous avons déjà dit que $f(A) = 0$ et donc $A \in \operatorname{Ker}(f)$.
Puisque A est non nulle par hypothèse, alors $\operatorname{Vect}(A) \subset \operatorname{Ker} f$ et donc $\dim \operatorname{Ker}(f) \geqslant 1$.
Ainsi f n'est pas injective : $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f.}$

Rappel

λ est valeur propre de f si et seulement $f - \lambda\mathrm{id}$ n'est pas injective.
En particulier, 0 est valeur propre de f si et seulement si f n'est pas injective.

5. Si $\mathrm{tr}(A) = 0$, alors par la question 3.b, la seule valeur propre possible de f est 0.
Mais $\dim E_0(f) = n - \mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Ker} f$.
Puisque nous avons prouvé à la question 2 que $f \neq 0$, alors $\dim \mathrm{Ker} f < \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Donc la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à $\dim \mathrm{Ker} f$ et est strictement inférieure à $\dim \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Par conséquent, $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

6.a. L'application trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Donc son noyau est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et donc de dimension

$$\dim \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) - 1 = \boxed{n^2 - 1.}$$

6.b. Si $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$, alors $f(M) = \mathrm{tr}(A)M$. Autrement dit,

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \subset E_{\mathrm{tr}(A)}(f).$$

Et donc $\dim E_{\mathrm{tr}(A)}(f) \geqslant \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \geqslant n^2 - 1$.
Puisque de plus, $\dim E_0(f) \geqslant 1$ comme prouvé à la question 4, alors

$$\dim E_{\mathrm{tr}(A)}(f) + \dim E_0(f) \geqslant n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

Puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est nécessairement inférieure ou égale à $\dim \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a une égalité :

$$\dim E_0(f) + \dim E_{\mathrm{tr}(A)}(f) = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$$

et donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

EXERCICE 3

Partie I : méthode utilisant un produit scalaire

1.a. La fonction $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, et on a $t^2 t^k e^{-t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que $t^k e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
Puisque $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$.

Remarque
L'énoncé n'est pas très clair à ce sujet, mais on peut aussi remarquer qu'il s'agit de l'intégrale définissant $\Gamma(k+1)$, dont on sait qu'elle converge (et dont nous connaissons la valeur !).

1.b. Pour tout $(P,Q) \in E^2$, $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
De plus, si $a_i X^i$ est le terme de plus haut degré de P et $b_j X^j$ est le terme de plus haut degré de Q, alors

$$|P(t)Q(t)e^{-t}| \underset{t\to+\infty}{\sim} |a_i b_j| t^{i+j} e^{-t}$$

et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |a_i b_j| t^{i+j} e^{-t}\,dt$ converge d'après la question précédente.
Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$ converge absolument, et donc converge.

Convergence
L'énoncé ne demande pas clairement de montrer que cette intégrale converge, mais il faut bien le prouver pour être sûr que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est correctement définie.

Si $(P,Q,R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors

$$\begin{aligned}\langle \lambda P + Q, R\rangle &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t) + Q(t))R(t)e^{-t}\,dt = \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t}\,dt + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t}\,dt \\ &= \lambda\langle P, R\rangle + \langle Q, R\rangle.\end{aligned}$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.
Pour tous $(P,Q) \in E \times E$, on a

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t}\,dt = \langle Q, P\rangle.$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, et donc[5] est bilinéaire symétrique.

[5] Linéaire à gauche + symétrique implique automatiquement linéaire à droite.

Si $P \in E$, alors la fonction $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est positive sur $[0, +\infty[$, donc par positivité de l'intégrale,

$$\langle P, P\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t}\,dt \geqslant 0.$$

Enfin, si $\langle P, P\rangle = 0$, la fonction $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ étant continue, positive sur $[0, +\infty[$ et d'intégrale nulle, elle est nécessairement nulle.
Et donc $\forall t \in [0, +\infty[, P(t)^2 e^{-t} = 0 \Rightarrow P(t) = 0$.
Ainsi, P possède une infinité de racines, et donc est le polynôme nul.

$\boxed{\text{Ainsi, } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

2. On a, par définition de la norme

$$\|X^3 - Q\|^2 = \langle X^3 - xX - y, X^3 - xX - y\rangle = \boxed{\int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t}\, dt.}$$

3.a. L'énoncé exact du théorème en question (qui ne possède pas de nom officiel dans le programme d'ECS2, certains l'appellent parfois «théorème de la projection orthogonale») est le suivant : soit E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. Alors il existe un unique $y \in F$ tel que $\|x - y\| = \min\{\|x - z\|, z \in F\}$ et ce y est le projeté orthogonal de x sur F.
Ici, F est un sous-espace vectoriel de E, et $X^3 \in E$, donc il existe un unique $Q_0 \in F$ tel que

$$\|X^3 - Q_0\| = \min\{\|X^3 - P\|, P \in F\},$$

et $\boxed{Q_0 \text{ est alors le projeté orthogonal de } X^3 \text{ sur } F.}$

3.b. Si $Q_0 = p_F(X^3) \in F$, alors nécessairement $X^3 - Q_0 \in F^\perp$.
Et puisque $1 \in F$ et $X \in F$, alors

$$\boxed{\langle X^3 - Q_0, 1\rangle = \langle X^3 - Q_0, X\rangle = 0.}$$

3.c. Le couple (x_0, y_0) doit vérifier les deux équations obtenues à la question précédente, à savoir

$$\begin{cases} \langle X^3 - Q_0, 1\rangle = 0 \\ \langle X^3 - Q_0, X\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^{+\infty} (t^3 - x_0 t - y) e^{-t}\, dt = 0 \\ \int_0^{+\infty} (t^3 - x_0 t - y_0) t e^{-t}\, dt = 0 \end{cases}$$

Pour calculer les intégrales, remarquons tout de suite que

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt = \Gamma(k+1) = k!$$

Ainsi, le système se réécrit

$$\begin{cases} 6 - x_0 - y_0 = 0 \\ 24 - 2x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = x_0 + y_0 \\ 24 = 2x_0 + y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 18 \\ y_0 = -12 \end{cases}$$

3.d. Notons que

$$X^3 = \underbrace{X^3 - Q_0}_{\in F^\perp} + \underbrace{Q_0}_{\in F}$$

et donc par le théorème de Pythagore,

$$\|X^3\|^2 = \|X^3 - Q_0\|^2 + \|Q_0\|^2.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\Delta &= \|X^3 - Q_0\|^2 \\
&= \|X^3\|^2 - \|Q_0\|^2 \\
&= \int_0^{+\infty} t^6 e^{-t}\, dt - \int_0^{+\infty} (-18t + 12)^2 e^{-t}\, dt \\
&= 6! - 36 \int_0^{+\infty} (3t - 2)^2 e^{-t}\, dt \\
&= 720 - 36\left(9 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\, dt - 12 \int_0^{+\infty} t e^{-t}\, dt + 4 \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt\right) \\
&= 720 - 36(18 - 12 + 4) = \boxed{360.}
\end{aligned}$$

Racines

Ne pas oublier l'argument de racines. Il semble évident que P étant nul sur $[0, +\infty[$, il doit être nul, mais ceci tient au fait que ce soit un polynôme.
En effet, pour une fonction non polynomiale, ce résultat n'est plus valable.
Par exemple la fonction $t \mapsto \min(t, 0)$ est nulle sur $[0, +\infty[$, mais n'est pas la fonction nulle pour autant.

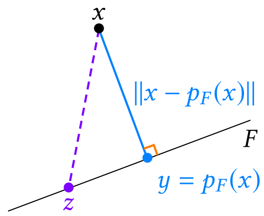


Figure 1– Illustration du théorème.

Partie II : méthode utilisant une fonction de deux variables

4. En développant le carré, on a, pour tout $t \geqslant 0$,

$$(t^3 - tx - y)^2 = t^6 + t^2x^2 + y^2 - 2t^4x - 2t^3y + 2txy$$

et donc

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^{+\infty} t^6e^{-t}\,dt + x^2\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt + y^2\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt - 2x\int_0^{+\infty} t^4e^{-t}\,dt - 2y\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}\,dt + 2xy\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt \\ &= 6! + x^2 2! + y^2 1! - 2x4! - 2y3! + 2xy1! \\ &= \boxed{720 + 2x^2 + y^2 - 48x - 12y + 2xy} \end{aligned}$$

5. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ car polynomiale, et on a

$$\partial_1 f(x,y) = 4x - 48 + 2y,\ \partial_2 f(x,y) = 2y - 12 + 2x.$$

Donc (x,y) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} 4x - 48 + 2y = 0 \\ 2y - 12 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 48 \\ -24 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = -12 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ admet pour unique point critique } (18,-12).}$

6. Les dérivées partielles secondes de f sont

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) = 4,\ \partial^2_{2,2} f(x,y) = 2,\ \partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = 2.$$

En particulier, la matrice hessienne de f au point (x_0,y_0) est

$$\nabla^2 f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mais si on note $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, alors $\lambda \in \mathbf{R}$ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, c'est-à-dire si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$, soit

$$(4-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$$

Les racines de ce polynôme sont $3+\sqrt{5}$ et $3-\sqrt{5}$, qui sont toutes deux strictement positives. Donc les valeurs propres de $\nabla^2 f(x_0,y_0)$ sont toutes strictement positives, et ainsi

$\boxed{f \text{ possède un minimum local en } (x_0,y_0).}$

> **Remarque**
> Le calcul des dérivées secondes de f prouve que celles-ci ne dépendent pas de x et de y, donc la matrice hessienne de f est la même en tout point de $\mathbf{R}^2$.

> **Rappel**
> Il est important de préciser que les valeurs propres sont **strictement** positives, et pas seulement positives. En effet, si l'une d'entre elles venait à être nulle, alors il ne nous serait pas possible de conclure à l'aide des valeurs propres de la hessienne.

7. Notons que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= 2x^2 - 48x + 2xy + y^2 - 12y + 720 - 360 \\ &= 2(x^2 - 24x + xy) + y^2 - 12y + 360 \\ &= 2\left(x + \left(\frac{y}{2} - 12\right)\right)^2 - 2\left(\frac{y}{2} - 12\right)^2 + y^2 - 12y + 360 \\ &= 2\left(x + \left(\frac{y}{2} - 12\right)\right)^2 - \frac{y^2}{2} + 24y - 288 + y^2 - 12y + 360 \\ &= 2\left(x + \left(\frac{y}{2} - 12\right)\right)^2 + \frac{y^2}{2} + 12y + 72 \\ &= 2\left(x + \left(\frac{y}{2} - 12\right)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(y^2 + 24y + 144\right) \\ &= 2\left(x + \left(\frac{y}{2} - 12\right)\right)^2 + \frac{1}{2}(y+12)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

> **Remarque**
> Une autre méthode consistait à étudier le signe de la différence $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ en notant $x = x_0 + \alpha$, $y = y_0 = \beta$. Si la méthode est un peu moins astucieuse, les calculs sont alors (au moins) tout aussi lourds.

Et donc pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, on a $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$: $\boxed{f \text{ atteint un minimum global en } (x_0,y_0).}$

Méthode alternative : à x fixé, $y \mapsto f(x,y) - f(x_0,y_0) = y^2 + (2x-12)y + 360 - 48x + 2x^2$ est un polynôme de degré 2, dont le discriminant[6] est

$$\Delta(x) = (2x-12)^2 - 4(360 - 48x + 2x^2) = 4x^2 - 48x + 144 - 1440 + 192x - 8x^2 = -4x^2 - 144x - 144\times 9.$$

[6] Qui dépend de x.

Pour étudier le signe de ce polynôme en x, nous pouvons à son tour calculer son discriminant, qui vaut

$$\Delta = 144^2 - 16 \times 144 \times 9 = 144 \times (144 - 16) = 0.$$

Puisque $\Delta \leqslant 0$, $\Delta(x)$ ne change pas de signe sur $\mathbf{R}$.
Or, $\Delta(0) < 0$, donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\Delta(x) \leqslant 0$.
Et donc la fonction $y \mapsto f(x,y) - f(x_0, y_0)$ est elle aussi de signe constant, de même signe que $f(x,0) - f(x_0,y_0)$.
Or $f(x,0) - f(x_0,y_0) = 360 - 48x + 2x^2$. À son tour, cette expression est polynomiale de degré 2 et possède $48^2 - 8 \times 360 = 196 \times 12 - 240 \times 20 < 0$ comme discriminant, elle ne change donc pas de signe sur $\mathbf{R}$.
Et $f(0,0) - f(x_0,y_0) = 360 \geqslant 0$, donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x,0) - f(x_0,y_0) \geqslant 0$.
Par conséquent, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}$, $f(x,y) - f(x_0,y_0) \geqslant 0$, et donc f possède un minimum global en (x_0,y_0). Se fait très bien en calculant $f(a+h, b+k)$.

Astuce

S'il faut calculer des produits sans calculatrice, autant factoriser au maximum les expressions afin d'éviter des calculs trop fastidieux.

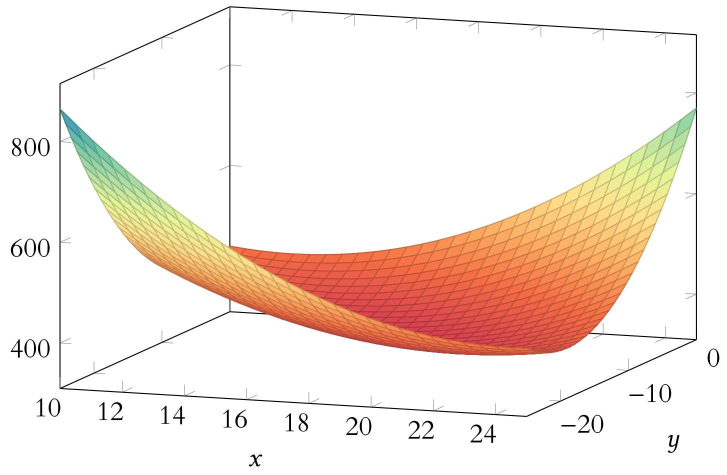


Figure 2 – Le graphe de la fonction f.

Problème

Question préliminaire

1.a. Pour tout t réel, on a $g(t) = \max(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } t \leqslant x \\ t & \text{si } x < t \end{cases}$

La fonction $t \mapsto t$ est continue sur $]x, +\infty[$, et la fonction $t \mapsto x$ est constante, donc continue sur $]-\infty, x]$.
Il suffit donc de vérifier que g est continue à droite en x.
Or on a $\lim\limits_{t \to x^+} g(t) = \lim\limits_{t \to x^+} t = x$, donc g est continue à droite en x, et donc $\boxed{\text{continue sur } \mathbf{R}.}$

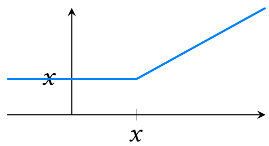


Figure 3– La fonction $t \mapsto \max(x,t)$.

Continuité

Puisque g est continue sur $]-\infty, x]$, elle est en particulier continue à gauche en x et donc il suffit de vérifier qu'elle est continue à droite.

1.b. Si $x \leqslant 0$, alors pour tout $t \in [0,1]$, $g(t) = t$, de sorte que $y = \displaystyle\int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

Si $x \in]0,1[$, alors

$$y = \int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt + \int_x^1 g(t)\,dt = \int_0^x x\,dt + \int_x^1 t\,dt = x^2 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 = x^2 + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2+1}{2}.$$

Enfin, si $x \geqslant 1$, alors pour tout $t \in [0,1]$, $g(t) = x$ et donc

$$y = \int_0^1 x\,dt = x.$$

Ainsi, on a bien $\boxed{y = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$

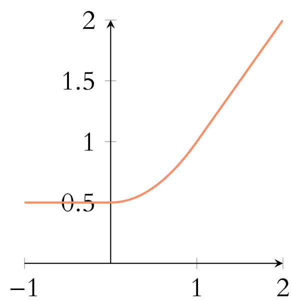


Figure 4– y en fonction de x.

Partie I : étude de plusieurs cas où X est discrète

2. Si X suit une loi géométrique, alors pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant 1$.
Et alors $Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)\,dt = X(\omega)$ d'après la question précédente.
On a donc bien $\boxed{X = Y.}$

3.a. Puisque X est à support dans $\{-1, 0, 1\}$, on doit avoir $P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 1$.
Et donc nécessairement, $\boxed{P(X = 0) = \frac{1}{2}.}$

3.b. Si $\omega \in \Omega$ est tel que $X(\omega) = -1$ ou $X(\omega) = 0$, alors, par la question 1.b, on a $Y(\omega) = \frac{1}{2}$, et si $X(\omega) = 1$, alors $Y(\omega) = 1$. Ainsi, $\boxed{Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}.}$

Par ce qui vient d'être dit, on a alors $[Y = 1] = [X = 1]$ et donc $P(Y = 1) = \frac{1}{4}$, et alors nécessairement,

$$P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = 1 - P(Y = 1) = \frac{3}{4}.$$

On a alors

$$E(Y) = \frac{1}{2}P\left(Y = \frac{1}{2}\right) + 1P(Y = 1) = \frac{1}{2}\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{8}.}$$

De même, on a, par le théorème de transfert,

$$E(Y^2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P\left(Y = \frac{1}{2}\right) + 1^2 P(Y = 1) = \frac{1}{4}\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{16}.$$

Et donc par la formule de Huygens,

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{7}{16} - \frac{25}{64} = \boxed{\frac{3}{64}.}$$

3.c. Notons que `4*rand()` tire un nombre au hasard entre 0 et 4, et que celui-ci est inférieur ou égal à 3 avec probabilité $3/4$.

```
function y = question3()
  u = 4*rand() ;
  if u < 3 then
    y = 1/2 ;
  else
    y = 1 ;
  end
endfunction
```

4.a. Si $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = \frac{1}{2}$, et si $X(\omega) \geqslant 1$, alors $Y(\omega) = X(\omega)$.
Puisque $X(\Omega) = \mathbf{N}$, on en déduit que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \mathbf{N}^*$.
On a alors $P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P(X = 0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$, et pour $n \geqslant 1$,

$$P(Y = n) = P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

4.b. On a[7]

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{2}e^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{2} + E(X) = \boxed{\frac{e^{-\lambda}}{2} + \lambda.} \end{aligned}$$

Explication

La définition de Y est assez déroutante au premier abord, mais ressemble en fait à de nombreux exercices plus classiques où l'on définit une variable aléatoire comme fonction d'une autre (par exemple $Y = X^2$ ou $Y = e^X$). En effet, si on définit une fonction h par

$$h(x) = \int_0^1 \max(x, t)\,dt$$

alors $Y = h(X)$.

Loi

Nous ne reconnaissons pas une loi usuelle, mais rappellons que donner la loi de Y, c'est donner son support et les probabilités associées car Y est discrète (et même finie).

[7] La série qui suit converge, car on reconnaît une série convergente dont on a seulement modifié le premier terme. Or modifier un nombre fini de termes d'une série ne change pas sa nature.

De même, on a

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \frac{e^{-\lambda}}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{4} + E(X^2) = \frac{e^{-\lambda}}{4} + V(X) + E(X)^2 = \frac{e^{-\lambda}}{4} + \lambda + \lambda^2. \end{aligned}$$

Par la formule de Huygens, on a alors

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{e^{-\lambda}}{4} + \lambda + \lambda^2 - \left(\frac{e^{-\lambda}}{2} + \lambda\right)^2 \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{4} + \lambda + \lambda^2 - \frac{e^{-2\lambda}}{4} - \lambda e^{-\lambda} - \lambda^2 \\ &= \boxed{(1-e^{-\lambda})\left(\lambda + \frac{e^{-\lambda}}{4}\right).} \end{aligned}$$

Partie 2 : étude de plusieurs cas où X est à densité

5.a. On a, pour tout $\omega \in \Omega$, $0 \leqslant X(\omega) < 1$, et donc, par la question 1.b, $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2+1}{2}$, de sorte que $\boxed{Y = \dfrac{X^2+1}{2}.}$

5.b. Puisque $0 \leqslant X^2 < 1$, on a $1 \leqslant X^2+1 < 2$ et donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{X^2+1}{2} < 1$. Ainsi, $\boxed{Y(\Omega) = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[.}$

5.c. Soit $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Alors

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P\left(\frac{X^2+1}{2} \leqslant x\right) = P(X^2 \leqslant 2x-1).$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbf{R}_+$ (X est à valeurs positives), on a alors $F_Y(x) = P(X \leqslant \sqrt{2x-1}) = F_X(\sqrt{2x-1})$.
La variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[0,1]$, nous savons que

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Or $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant \sqrt{2x-1} \leqslant 1$, de sorte que

$$F_Y(x) = F_X(\sqrt{2x-1}) = \boxed{\sqrt{2x-1}.}$$

5.d. D'après les questions 5.b et 5.c, on a

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x-1} & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

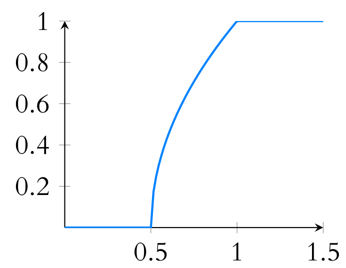


FIGURE 5– La fonction de répartition de Y.

Il est donc aisé de voir que F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$, sur $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$ et sur $]1, +\infty[$, car composée de fonctions usuelles de classe $\mathscr{C}^1$.
De plus, on a

$$\lim_{x\to 1/2^-} F_Y(x) = 0 = \lim_{x\to 1/2^+} F_Y(x) \text{ et } \lim_{x\to 1^-} F_Y(x) = 1 = \lim_{x\to 1^+} F_Y(x).$$

Donc F_Y est continue en $1/2$ et en 1 : elle est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf en $1/2$ et en 1.
Ainsi, $\boxed{Y \text{ est une variable à densité.}}$

5.e. Y admet une espérance car $0 \leqslant Y \leqslant 1$. Par le théorème de transfert, cette espérance est

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1}{2} f_X(t)\,dt = \int_0^1 \frac{t^2+1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}.}$$

5.f. Puisque `rand()` simule la variable X, il est aisé de simuler $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.

```
function y = question5()
  y = (rand()^2 +1)/2 ;
endfunction
```

6.a. $X-1$ suit une loi exponentielle, donc prend ses valeurs dans $\mathbf{R}_+$ de sorte que $X = (X-1)+1$ prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$. Et donc, comme à la question 2, $\boxed{Y = X.}$

6.b. On a donc $E(Y) = E(X) = E(X-1)+1 = \dfrac{1}{\lambda}+1$ et de même $V(Y) = V(X) = V(X-1) = \boxed{\dfrac{1}{\lambda^2}.}$

6.c. Notons que $1-U$ est à valeurs dans $]0,1]$, et donc $\ln(1-U)$ est à valeurs dans $\mathbf{R}_-$. Et alors W est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.
Pour $x \in \mathbf{R}_+$, on a

$$F_W(x) = P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right) = P(\ln(1-U) \geqslant -\lambda x).$$

Par croissance de la fonction exponentielle, il vient alors
$F_W(x) = P(1-U \geqslant -\lambda x) = P(U \leqslant 1-e^{-\lambda x})$.
Or $0 \leqslant 1-e^{-\lambda x} < 1$, de sorte que

$$F_W(x) = F_U(1-e^{-\lambda x}) = 1-e^{-\lambda x}.$$

La fonction de répartition de W est donc

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît là la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ et donc $\boxed{W \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda).}$
Afin de simuler Y, il suffit donc de simuler $X-1$, c'est-à-dire une loi exponentielle, à laquelle on retire 1.

Ultra-classique

Nous avons déjà rencontré cette question de nombreuses fois, il faut absolument savoir la faire sans hésitation.
Il s'agit de la méthode d'inversion appliquée à la simulation d'une loi exponentielle.

```
function y = question6(lambda)
  y = -1/lambda*log(1-rand())-1 ;
endfunction
```

7.a. Si $\omega \in \Omega$ est tel que $X(\omega) \leqslant 0$, alors $Y(\omega) = \dfrac{1}{2}$.

Si ω est tel que $0 < X(\omega) < 1$, alors $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)^2+1}{2} \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

Enfin, si $X(\omega) \geqslant 1$, alors $Y(\omega) \geqslant 1$.

Et donc $\boxed{Y(\Omega) = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[.}$

7.b. Par la question 1.b, on a $\left[Y = \dfrac{1}{2}\right] = [X \leqslant 0]$. Et donc $P\left(Y = \dfrac{1}{2}\right) = P(X \leqslant 0) = \Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

7.c. Nous savons déjà que Y ne prend pas de valeurs inférieures à $1/2$, donc pour $x < 1/2$, $F_Y(x) = 0$. Et pour $x = 1/2$, alors $F_Y(1/2) = P(Y \leqslant 1/2) = P(Y = 1/2) = \Phi(0)$.

Soit donc à présent $x > \dfrac{1}{2}$.

Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements donné dans l'énoncé, on a

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P([Y \leqslant x] \cap [X \leqslant 0]) + P([Y \leqslant x] \cap [0 < X < 1]) + P([Y \leqslant x] \cap [X \geqslant 1]).$$

Si $1/2 < x < 1$, alors $P([Y \leqslant x] \cap [X \leqslant 0]) = P(X \leqslant 0) = 1/2$ et

$$\begin{aligned} P([Y \leqslant x] \cap [0 < X < 1]) &= P\left(\left[\frac{X^2+1}{2} < x\right] \cap [0 < X < 1]\right) = P(0 < X^2 \leqslant 2x-1) \\ &= P(0 < X \leqslant \sqrt{2x-1}) = \Phi(\sqrt{2x-1}) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, $P([Y \leqslant x] \cap [X \geqslant 1]) = 0$, car si $X \geqslant 1$, alors $Y \geqslant 1$.
On en déduit que

$$F_Y(x) = \frac{1}{2} + \Phi(\sqrt{2x-1}) - \frac{1}{2} + 0 = \Phi(\sqrt{2x-1}).$$

Si $x \geqslant 1$, alors $P([Y \leqslant x] \cap [X < 0]) = P(X < 0) = \frac{1}{2}$,
$P([Y \leqslant x] \cap [0 < X < 1]) = P(0 < X < 1) = \Phi(1) - \frac{1}{2}$ et
$P([Y \leqslant x] \cap [X \geqslant 1]) = P([1 \leqslant X \leqslant x]) = \Phi(x) - \Phi(1)$.
On en déduit donc que

$$F_Y(x) = \frac{1}{2} + \Phi(1) - \frac{1}{2} + \Phi(x) - \Phi(1) = \Phi(x).$$

La fonction de répartition de Y est donc

$$\boxed{F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \Phi(\sqrt{2x-1}) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ \Phi(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

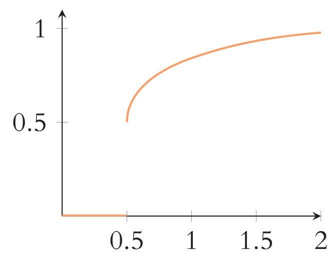


Figure 6– La fonction de répartition de Y.

7.d. Y n'est pas discrète car son support n'est pas dénombrable, et elle n'est pas à densité car $P\left(Y = \frac{1}{2}\right) \neq 0$.

7.e. Par le théorème central limite, si $(U_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, alors

$$\overline{X_n}^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} U_k - nE(U_1)}{\sqrt{nV(U_1)}} \xrightarrow{\mathscr{L}} X \text{ où } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Rappel
$\overline{X_n}^*$ est la variable centrée réduite associée à la somme des U_k.

Or, pour $n = 48$, on a, sachant que $E(U_1) = \frac{1}{2}$ et $V(U_1) = \frac{1}{12}$,

$$\overline{X_{48}}^* = \sqrt{\frac{1}{4}}\left(\sum_{k=1}^{48} U_k - \frac{48}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{48} U_k - 24\right).$$

Sous réserve que $n = 48$ soit assez grand pour approcher[8] la loi de $\overline{X_{48}}^*$ par celle de X.

```
function y = question7()
  aux = 0 ;
  for k = 1 :48
    aux = aux + rand()
  end
  x = (aux-24)/2 ;
  if x <0 then
    y = 0.5 ;
  else
    if x<1 then
      y = (x^2+1)/2 ;
    else
      y = x ;
    end
  end
endfunction
```

[8] Nous avons vu en TP que $n = 12$ fournissait déjà une bonne approximation de la loi normale, mais tout dépend de la précision souhaitée...

Extraits commentés du rapport du jury

Le problème a dérouté les candidats, du moins dans les deux premières questions, mais comme les résultats difficiles à établir étaient donnés, les plus valeureux ont pu (et souvent de belle manière) tirer leur épingle du jeu dans la suite.

✎ D'où l'intérêt de lire intégralement le sujet et de ne pas abandonner un exercice dès qu'on bute sur une question. En l'occurrence, si la partie préliminaire était déroutante, le reste était tout ce qu'il y a de plus classique, et pouvait rapporter de nombreux points.

EDHEC 2013

Exercice 1

Sujet : Étude d'une série définie à partir d'une autre série : une inégalité de Hardy. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : inégalité de Cauchy-Schwarz, séries numériques.

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Modifications apportées au sujet d'origine : correction d'une erreur dans la première question.

Commentaires : exercice assez technique, nécessitant d'avoir les idées claires sur la convergence des séries et le lien avec les sommes partielles.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge.

Le but de cet exercice est de prouver que la série de terme général $u = \dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ converge également et que, de plus, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

1. **Étude d'un exemple** : pour tout entier naturel n non nul, on pose $a_n = n(n+1)$.
   - a. Vérifier que $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.
   - b. Pour tout entier naturel non nul, déterminer u_n en fonction de n.
   - c. Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme, puis en déduire l'inégalité demandée.
2. **Étude d'un deuxième exemple.**
   On suppose, dans cette question, que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $a_n = n!$.
   - a. Écrire une fonction `Scilab` nommée `fact` qui prend en paramètre un entier $n \geqslant 1$ et renvoie la valeur de $n!$.
   - b. Écrire un programme utilisant cette fonction qui permet de calculer la valeur de u_n.
   - c. Montrer la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$.
   - d. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$.
   - e. En déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

On revient au cas général.

3. Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ (1+2+\cdots+n)^2 \leqslant (a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n}\right).$$

4. a. Utiliser le résultat précédent pour établir que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}.$$

   - b. En déduire, par sommation, que : $\forall N \in \mathbf{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}$.
   - c. Montrer enfin que la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ converge puis établir le résultat demandé.

Exercice 2

Sujet : Hyperplans stables et droites stable de l'adjoint. **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire, diagonalisation, espaces euclidiens.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par E un espace vectoriel de dimension n et on rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.
Pour finir, on désigne par Id l'endomorphisme de identité de E.

1. **Étude d'un premier exemple** ($n=3$ et $E=\mathbf{R}^3$)
   On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un hyperplan de $\mathbf{R}^3$ et qu'il est stable par f.
2. **Étude d'un deuxième exemple** ($n=3$ et $E=\mathbf{R}^3$)
   On considère, dans cette question seulement, l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.
   a. Déterminer les valeurs propres de f.
   b. Montrer que $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id})$ est un hyperplan de $\mathbf{R}^3$ et qu'il est stable par f.

On suppose dans la suite que E est un espace euclidien de dimension n et on note $\mathscr{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x,y\rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.
On considère un endomorphisme f de E qui possède au moins une valeur propre λ réelle et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan de E stable par f.

3. On note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la transposée de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
   a. Vérifier que l'on a : $\forall (x,y)\in E\times E,\ \langle f(x),y\rangle=\langle x,f^*(y)\rangle$.
   b. Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant :
   $$\forall (x,y)\in E\times E,\ \langle f(x),y\rangle=\langle x,f^*(y)\rangle.$$
4. a. Montrer que λ est valeur propre de f^*.
   b. On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ.
   Montrer que $(\operatorname{Vect}(u))^\perp$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f.

Exercice 3

Sujet : Étude d'une convergence en loi
Abordable en première année : ✗
Thèmes du programme abordés : variables à densité, convergence en loi.
Commentaires : méthodes très classiques.

Facile
Intérêt : ★★★

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par
   $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x\leqslant -1 \text{ ou } x\geqslant 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
   Montrer que f est une densité de probabilités.

Dans la suite, on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$, mutuellement indépendantes et admettant toutes f comme densité.
De plus, pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n=\operatorname{Max}(X_1,\dots,X_n)$ et $Y_n=\dfrac{S_n}{n}$.
on admet que S_n et Y_n sont des variables aléatoires à densité, définies elles aussi sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$.

2. Déterminer la fonction de répartition, notée F, commune aux variables aléatoires X_k.
3. On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n. Déterminer explicitement $G_n(x)$ en fonction de n et de x.
4. a. Montrer que pour tout réel x négatif ou nul, on a $G_n(x)\leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
   b. Justifier que, pour tout réel x strictement positif, il existe un entier naturel n_0 non nul, tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a $x\geqslant \frac{1}{n}$.
   En déduire que : $\forall x>0, \exists n_0\in\mathbf{N}^*, \forall n\geqslant n_0,\ G_n(x)=\left(1-\dfrac{1}{2nx}\right)^n$.

5. a. Déterminer, pour tout réel x, la limite de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note $G(x)$ cette limite.
   b. Montrer que la fonction G ainsi définie est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
   c. En déduire que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est G.
6. Vérifier que la variable aléatoire $\frac{1}{Y}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Problème

Sujet : Intégrales de Wallis. Application en probabilités. **Difficile**
Abordable en première année : ✓ (partie 1) **Intérêt** : ★★★
Thèmes du programme abordés : intégration, séries, couples de variables aléatoires discrètes
La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.
Modifications apportées au sujet d'origine : ajout de quelques précisions sur les variables considérées (c'est x qui varie), notamment dans la seconde question de la partie 2. Ajout d'une indication pour un changement de variable non affine.
Commentaires : La première partie est un grand classique qu'il faut absolument avoir rencontré au moins une fois. La suite est plus calculatoire, et l'ensemble est long.

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi de Poisson de paramètre λ, où λ désigne un réel strictement positif. On se propose de déterminer un équivalent de la probabilité $P(X = Y)$ lorsque λ est au voisinage de $+\infty$.

Partie 1

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt$.

1. a. Calculer u_0 et u_1.
   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. Établir que : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n > 0$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
2. a. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbf{N},\ (n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.
   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}, u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
   c. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ (n+1)u_{n+1}u_n = \dfrac{\pi}{2}$.
   d. En déduire la valeur de u_{2n+1}.
3. a. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n}$.
   b. En déduire, en utilisant les variations de (u_n), que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
   c. Montrer enfin que l'on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Partie 2

4. Établir, pour tout réel x, la convergence de l'intégrale $I(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \, dt$.

Dans la suite de cette partie, x désigne un réel strictement positif.

5. a. Montrer qu'il existe une constante M telle que : $\forall x > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \, dt \leqslant M$.
   b. Montrer que : $\forall u \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right],\ 1 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-u}} \leqslant 1+u$.
6. a. En se référant à une loi normale, donner les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} \, dt$.
   b. Utiliser le changement de variable $u = \sqrt{tx}$ pour montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} \, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.
   c. Montrer de la même façon que : $\displaystyle\int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t} \, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}$.

7. **a.** Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 + t$ que :

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\,du.$$

b. Utiliser le résultat de la question 5.b pour en déduire que : $I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$.

Partie 3

8. Exprimer comme somme d'une série la probabilité $P(X = Y)$.

9. **a.** On désigne par t un réel de $[-1, 1]$ et par x un réel strictement positif.
Montrer que, pour tout u compris entre 0 et $-tx$, on a : $e^u \leqslant e^x$.
Écrire ensuite l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ pour la fonction $u \mapsto e^u$ entre 0 et $-tx$.

b. Montrer, à l'aide du changement de variable $t = \sin u$ que : $\forall k \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = u_k$.

c. Déduire des deux questions précédentes que : $\displaystyle\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \right| \leqslant \frac{2x^{2n+1}e^x}{\pi(2n+1)!} u_{2n+1}$.

d. Montrer enfin que : $\forall x > 0$, $\displaystyle I(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$.

10. Établir que : $P(X = Y) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}$.

EDHEC 2013 : Corrigé

Exercice 1

1. Étude d'un exemple.

1.a. On a $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n-1-n}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\boxed{\dfrac{1}{a_n}}.$
Alors, pour tout $N\in\mathbf{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{N+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}1.$$

On en déduit que $\sum\dfrac{1}{a_n}$ converge et que $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}=1.}$

Rappel
Une série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge.

1.b. On a, pour tout $n\geqslant 1$,

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+4)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Et donc $\boxed{u_n=\dfrac{3}{(n+1)(n+2)}}.$

1.c. Pour $N\geqslant 1$, on a, en réutilisant l'égalité montrée à la la question 1.a,

$$\sum_{n=1}^{N}u_n=\sum_{n=1}^{N}\frac{3}{n+1}-\sum_{n=1}^{N}\frac{3}{n+2}=3\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}-\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{2}-\frac{3}{N+2}\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{3}{2}.$$

Donc la série $\sum u_n$ converge et $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\frac{3}{2}}.$

2. Étude d'un deuxième exemple

2.a.

```
function y = fact(n)
        y = prod([1 :n]) ;
endfunction
```

Alternative
Si l'on souhaite se passer de la commande `prod`, on peut également utiliser une boucle `for`.

2.b. Utilisons la fonction `fact` pour calculer la somme $a_1+\cdots+a_n$.

```
function y = un(n)
        y = 0
        for i = 1 :n
                y = y + fact(n) ;
        end
        y = n/y
endfunction
```

2.c. C'est du cours : la série de terme général $\dfrac{1}{n!}$ est une série exponentielle, et donc convergente.
De plus, on a alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}-1=e-1.$

2.d. On a $a_1+a_2+\cdots+a_n=1+2!+\cdots+n!\geqslant n!$ et donc $\dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant\dfrac{n}{n!}=\boxed{\dfrac{1}{(n-1)!}}.$

2.e. La série de terme général $\dfrac{1}{(n-1)!}$ converge, et puisque $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$, il en est de même de $\sum u_n$ et

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e.$$

Or, $2(e-1) - e = e - 2 \geqslant 0$, donc $e \leqslant 2(e-1)$ et alors

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.}$$

Rédaction ✎ N'oublions pas que le critère de majoration ne fonctionne que pour des séries à valeurs positives, et donc qu'il est important de mentionner que $u_n \geqslant 0$.

3. Soient $(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}) \in \mathbf{R}^n$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_1}}, \dfrac{2}{\sqrt{a_2}}, \dots, \dfrac{n}{\sqrt{a_n}}\right) \in \mathbf{R}^n$. Alors, l'inégalité de Cauchy-Schwarz[1] dans $\mathbf{R}^n$ nous donne

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \frac{k}{\sqrt{a_k}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\sqrt{a_k}^2}\right) \Leftrightarrow \boxed{(1+2+\cdots+n)^2 \leqslant (a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \cdots + \frac{n^2}{a_n}\right).}$$

[1] C'est-à-dire pour le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$.

4.a. On a $(1+2+\cdots+n)^2 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ et donc l'inégalité de la question précédente devient

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} \leqslant (a_1+a_2+\cdots+a_n) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k} \Longleftrightarrow \frac{2n+1}{a_1+\cdots+a_n} \leqslant \frac{4(2n+1)}{n^2(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.$$

De plus, on a

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

et donc

$$\boxed{\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 4\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.}$$

4.b. En sommant les inégalités précédemment obtenues pour n allant de 1 à N, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+\cdots+a_n} &\leqslant 4 \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&\leqslant 4 \sum_{1 \leqslant k \leqslant n \leqslant N} \frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&\leqslant 4 \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=k}^{N} \frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&\leqslant 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{a_k} \sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&\leqslant 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{a_k}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(N+1)^2}\right) \\
&\leqslant 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{a_k} \frac{1}{k^2} \leqslant \boxed{4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}.}
\end{aligned}$$

Classique Nous reconnaissons que $\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$ est le terme général d'une série téléscopique dont la somme est facile à calculer.

4.c. Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

Inégalité La série de terme général $\dfrac{1}{a_k}$ est à termes positifs. Donc la somme des N premiers termes est inférieure à la somme de la série.
Notons que ceci ne serait plus forcément vrai pour une série dont le terme général n'est pas de signe constant.

Mais la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{2n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ est croissante[2] et nous venons de prouver qu'elle est majorée : elle converge[3] et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

Après division par 2, il vient donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.}$$

[2] Car il s'agit d'une série à termes positifs.

[3] C'est une conséquent du théorème de la limite monotone.

Exercice 2

1. Étude d'un premier exemple.
La matrice M est échelonnée, et possède deux pivots, donc $\operatorname{rg}(M) = 2$.
Or $\dim \operatorname{Im}(f) = \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(M) = 2$, donc $\boxed{\operatorname{Im} f \text{ est un hyperplan de } \mathbf{R}^3.}$

Il est $\boxed{\text{stable par } f}$ car si $x \in \operatorname{Im} f$, alors $f(x) \in \operatorname{Im} f$, par définition de l'image.

> **Image**
> $f(x)$ est dans l'image de f **par définition** : c'est bien l'image par f d'un vecteur (en l'occurrence, du vecteur x).

2. Étude d'un deuxième exemple

2.a. Notons que f est diagonalisable car M est une matrice symétrique.
Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors λ est valeur propre de f si et seulement si $\operatorname{rg}(M - \lambda I_3) < 3$. Or

$$M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - (2-\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & \lambda - 1 & -\lambda^2 + 2\lambda - 3 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & \lambda - 1 & -\lambda^2 + 2\lambda - 3 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 + 3\lambda - 4 \end{pmatrix}$$

On a donc $\operatorname{rg}(M - \lambda I_3) < 3$ si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$. Mais le discriminant de ce polynôme de degré 2 est $\Delta = 9 + 16 = 25$, de sorte qu'il possède deux racines qui sont 1 et 4.
Ainsi, λ est valeur propre de f si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 4$.
Et donc $\boxed{\operatorname{Spec}(f) = \{1, 4\}.}$

> **Astuce**
> Pour calculer le rang, on part de la matrice échelonnée obtenue précédemment : les opérations sur les lignes réalisées étaient légitimes pour tout λ, et en particulier pour $\lambda = 1$.

2.b. On a $\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) = \operatorname{rg}(M - I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$

Donc $\boxed{\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) \text{ est un hyperplan de } \mathbf{R}^3.}$

Il est $\boxed{\text{stable par } f}$ car si $x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$, alors $f(x) = x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$.

> **Remarque**
> C'est une proposition qui figure dans le cours : tout sous-espace propre de f est stable par f.

3.a. Soient $x, y \in E$, et soient X et Y les vecteurs colonnes de leurs coordonnées dans la base canonique $\mathscr{B}$, et soit $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors, $\mathscr{B}$ étant orthonormée, on a

$$\langle f(x), y \rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tAY = {}^tX({}^tAY) = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

3.b. Soit g un endomorphisme de E tel que pour tous $(x, y) \in E \times E$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$.
Alors, pour tous $(x, y) \in E \times E$, on a

$$0 = \langle f(x), y \rangle - \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle - \langle x, g(y) \rangle = \langle x, f^*(y) - g(y) \rangle.$$

En particulier, pour $y \in E$ et $x = f^*(y) - g(y)$, il vient

$$0 = \langle f^*(y) - g(y), f^*(y) - g(y) \rangle = \|f^*(y) - g(y)\|^2.$$

Et donc[4], $f^*(y) - g(y) = 0 \Leftrightarrow f^*(y) = g(y)$.
Ceci étant vrai pour tout $y \in E$, on en déduit que $\boxed{f^* = g.}$

[4] Le seul vecteur de E de norme nulle est le vecteur nul.

4.a. Puisque λ est valeur propre de f, on a $\mathrm{rg}(A-\lambda I_n) < n$.
Mais une matrice et sa transposée ont le même rang donc

$$\mathrm{rg}({}^tA-\lambda I_n) = \mathrm{rg}({}^t(A-\lambda I_n)) = \mathrm{rg}(A-\lambda I_n) < n.$$

Et donc $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } {}^tA, \text{ donc de } f^*.}$

4.b. Puisque u est non nul[5], on a $\dim \mathrm{Vect}(u) = 1$.
Et alors $\dim\left(\mathrm{Vect}(u)^\perp\right) = \dim E - \dim \mathrm{Vect}(u) = \dim E - 1$.
Donc $\boxed{(\mathrm{Vect}(u))^\perp \text{ est un hyperplan de } E.}$
Soit $x \in (\mathrm{Vect}(u))^\perp$. Alors

$$\langle f(x), u\rangle = \langle x, f^*(u)\rangle = \langle x, \lambda u\rangle = \lambda\langle x, u\rangle = 0.$$

Et donc $f(x) \in (\mathrm{Vect}(u))^\perp$, de sorte que $\boxed{(\mathrm{Vect}(u))^\perp \text{ est stable par } f.}$

[5] Par définition d'un vecteur propre.

Rappel
Une base de $\mathrm{Vect}(u)$ est la famille formée du seul veceur u.
Donc un vecteur est dans $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$ si et seulement si il est orthogonal à u.

EXERCICE 3

1. La fonction f est positive sur $\mathbf{R}$. Elle est continue sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$ car il s'agit d'une fonction usuelle, et elle est continue sur $]-1,1[$ car constante. Donc f est continue sauf en -1 et en 1.
De plus, f est paire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
Or on reconnaît alors une intégrale de Riemann qui converge. De plus, pour $A > 0$, on a

$$\int_1^A f(t)\,dt = \int_1^A \frac{1}{2t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{2t}\right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

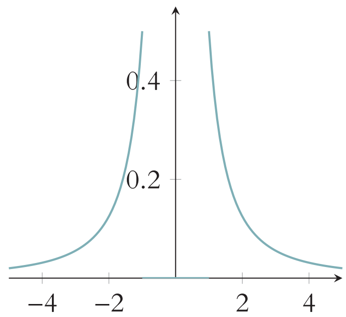


FIGURE 1– La densité f.

On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = 2\frac{1}{2} = 1.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$

2. Soit $x \leqslant 1$. Alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2t^2}\,dt = \lim_{A\to-\infty} \int_A^x \int_A^x \frac{1}{2t^2}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2A} - \frac{1}{2x} = -\frac{1}{2x}.$$

Si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt = F(-1) = \frac{1}{2}.$$

Enfin, pour $x \geqslant 1$, on a

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{-1}^{1} f(t)\,dt}_{=0} + \int_1^x f(t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} = 1 - \frac{1}{2x}.$$

En résumé, on a

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2x} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{2x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

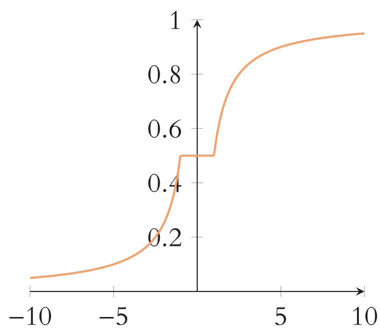


FIGURE 2– La fonction de répartition F.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors on a

$$[Y_n \leqslant x] = [S_n \leqslant nx] = \bigcap_{i=1}^n [X_i \leqslant nx].$$

Par indépendance des X_i, il vient alors

$$G_n(x)=P(Y_n\leqslant x)=\prod_{i=1}^n P(X_i\leqslant nx)=F(nx)^n=\begin{cases}\left(\dfrac{-1}{2nx}\right)^n & \text{si } nx\leqslant -1\\ \dfrac{1}{2^n} & \text{si } -1\leqslant nx\leqslant 1\\ \left(1-\dfrac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } nx\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}\left(\dfrac{-1}{2nx}\right)^n & \text{si } x\leqslant \dfrac{-1}{n}\\ \dfrac{1}{2^n} & \text{si } \dfrac{-1}{n}\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{n}\\ \left(1-\dfrac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } x\geqslant \dfrac{1}{n}\end{cases}$$

4.a. G_n est croissante, comme toute fonction de répartition, et on a $G_n(0)=\dfrac{1}{2^n}$, donc pour tout $x\leqslant 0$, il vient $G_n(x)\leqslant G_n(0)=\dfrac{1}{2^n}$.

4.b. On a $x\geqslant \dfrac{1}{n}\Leftrightarrow n\geqslant \dfrac{1}{x}$, donc si on pose $n_0=\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor+1$, alors pour $n\geqslant n_0$, on a bien $x\geqslant\dfrac{1}{n}$.
Et donc, d'après le résultat de la question 3, pour $n\geqslant n_0$, il vient $G_n(x)=\left(1-\dfrac{1}{2nx}\right)^n$.

5.a. Pour $x\leqslant 0$, on a $0\leqslant G_n(x)\leqslant\dfrac{1}{2^n}$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}G_n(x)=0$.
Pour $x\geqslant 0$, on a, pour n suffisamment grand, $G_n(x)=\left(1-\dfrac{1}{2nx}\right)^n=e^{n\ln\left(1-\frac{1}{2nx}\right)}$.
Or, $\dfrac{1}{2nx}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et donc

$$\ln\left(1-\frac{1}{2nx}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2nx}\Rightarrow n\ln\left(1-\frac{1}{2nx}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2x}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\frac{1}{2x}.$$

Et alors, par composition de limites[6], il vient

$$\left(1-\frac{1}{2nx}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^{-\frac{1}{2x}}.$$

[6] Et surtout pas d'équivalents, on ne compose pas les équivalents à gauche !

5.b. On a prouvé que $G(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ e^{-\frac{1}{2x}} & \text{si } x>0\end{cases}$
On a bien $\lim\limits_{x\to-\infty}G(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=e^0=1$.
De plus, G est croissante, elle est évidemment $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$, et

$$\lim_{x\to 0^-}G(x)=0=\lim_{x\to 0^+}e^{-\frac{1}{2x}}.$$

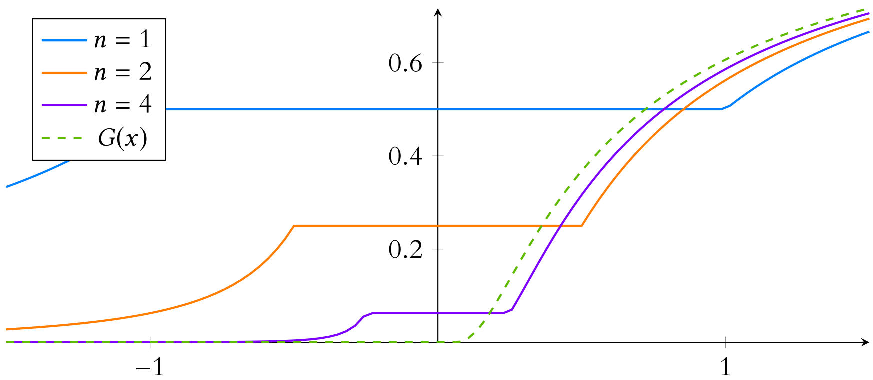
Donc G est continue[7] sur $\mathbf{R}$.
Ainsi, G est bien la fonction de répartition d'une variable à densité.

Fct de répartition

Nous ne savons rien de la fonction G, et il est donc important de vérifier que G est bien une fonction de répartition, et donc de s'intéresser à la croissance et aux limites en $\pm\infty$, il ne suffit pas de se contenter de vérifier qu'elle est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points.

[7] En particulier, elle est continue à droite en tout point, propriété qui doit être vérifiée par toute fonction de répartition.

5.c. Nous avons montré que pour tout $x\in\mathbf{R}$ (et donc en tout point de continuité de G), on a $\lim\limits_{n\to+\infty}G_n(x)=G(x)$. Ainsi, $\boxed{Y_n\xrightarrow{\mathscr{L}}Y}$, où Y admet G comme fonction de répartition.



Remarque

La fonction de répartition G est nulle sur $\mathbf{R}_-$, ce qui signifie que Y est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. Comme de plus elle est à densité, elle ne prend la valeur 0 qu'avec probabilité nulle, et donc on peut $\dfrac{1}{Y}$ a bien un sens.

6. Y est à valeurs positives, et donc il en est de même de $\dfrac{1}{Y}$.
Ainsi, pour $x\leqslant 0$, $P\left(\dfrac{1}{Y}\leqslant x\right)=0$.

Et pour $x > 0$, on a, par croissance de la fonction inverse sur $\mathbf{R}_+^*$,

$$P\left(\frac{1}{Y} \leqslant x\right) = P\left(Y \geqslant \frac{1}{x}\right) = 1 - P\left(Y \leqslant \frac{1}{x}\right) = 1 - e^{-x/2}.$$

Donc la fonction de répartition de $\dfrac{1}{Y}$ est $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-x/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On reconnaît alors la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, donc $\boxed{\dfrac{1}{Y} \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\dfrac{1}{2}\right).}$

PROBLÈME

Partie 1

1.a. Puisque $(\sin t)^0 = 1$, on a $u_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,dt = \boxed{\frac{\pi}{2}.}$

On a également

$$u_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = \boxed{1.}$$

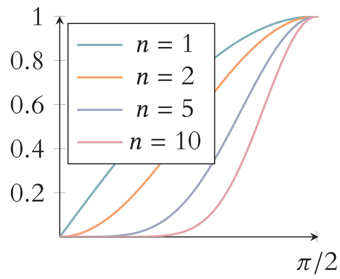


FIGURE 3– $(\sin t)^n$ pour différentes valeurs de n.
La décroissance de (u_n) s'interprète alors en termes d'aire.

1.b. Pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$, de sorte que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(\sin t)^{n+1} \leqslant (\sin t)^n$.
Et donc par croissance de l'intégrale, il vient

$$u_{n+1} = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1}\,dt \leqslant \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,dt = u_n.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

1.c. La fonction $t \mapsto (\sin t)^n$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ positive, et n'est pas la fonction nulle, puisqu'elle vaut 1 en $\dfrac{\pi}{2}$.

On en déduit que $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,dt > 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0), donc $\boxed{\text{elle est convergente.}}$

Rappel
L'intégrale d'une fonction positive continue est positive, et elle est nulle si et seulement si la fonction est nulle.

2.a. Procédons à une intégration par parties en posant $u = (\sin t)^{n+1}$ et $v = -\cos t$, qui sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $u' = (n+1)\cos t(\sin t)^n$ et $v' = \sin t$.
Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+2}\,dt &= \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1} \sin t\,dt \\ &= \left[-\cos t(\sin t)^{n+1}\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^n t\,dt \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)(\sin t)^n\,dt \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,dt - (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+2}\,dt \\ &= (n+1)u_n - (n+1)u_{n+2}. \end{aligned}$$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$

On en déduit que $\boxed{(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n.}$

2.b. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Pour $n = 0$, nous savons déjà que $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$, donc la propriété est vérifiée.

Supposons que $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. Alors

$$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}u_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+1)!}{2(n+1)(2^n \times n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $2n+2$, il vient

$$u_{2n+2} = \frac{2n+2}{2n+2}\frac{(2n+1)!}{2(n+1)(2^n \times n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{2^2(n+1)^2(2^n \times n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2(n+1))!}{(2^{n+1}\times(n+1)!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

Et donc la propriété est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, on a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2}\frac{\pi}{2}.}$$

Méthode

D'où vient l'idée de multiplier numérateur et dénominateur par $(2n+2)$?
Au numérateur, nous savons que nous voulons au final faire apparaître $(2n+2)!$. Or nous avons déjà $(2n+1)!$, donc il ne manque qu'un facteur $2n+2$. Et si on multiplie le numérateur par $2n+2$, il faut automatiquement faire de même au dénominateur en compensation.

2.c. Là encore, prouvons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.
Pour $n = 0$, on a $u_1u_0 = \frac{\pi}{2}$, donc la propriété est vérifiée.
Supposons que $(n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$. Alors

$$(n+2)u_{n+2}u_{n+1} = (n+2)\frac{n+1}{n+2}u_nu_{n+1} = (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$, et par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}.}$$

2.d. En particulier, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$(2n+1)u_{2n+1}u_{2n} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}\frac{1}{u_{2n}}$$

et donc en utilisant le résultat de la question 2.b

$$u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}\frac{(2^n\times n!)^2}{(2n)!}\frac{2}{\pi} = \boxed{\frac{(2^n \times n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

3.a. D'après la question 2.a, on a $\frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2}$, et donc

$$\frac{u_{n+2}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+2}}{u_n} = 1.}$

Monotonie

La positivité de (u_n) est importante : la monotonie d'une suite se «lit» sur le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ uniquement pour les suites positives.

3.b. Puisque (u_n) est décroissante et positive, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.
Et donc on a $\frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
Ainsi,

$$\frac{u_{n+2}}{u_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$

et donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.}$

3.c. D'après la question précédente, on a $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
Et donc par la question 2.c,

$$(n+1)u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \Rightarrow u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}.$$

On en déduit que

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

☠ $u_{n+1} \sim u_n$

Notons que l'équivalent $u_{n+1} \sim u_n$ découle de la limite de la question précédente et n'est pas vrai pour toutes les suites, même si intuitivement on aurait envie qu'il le soit !
Par exemple, si $u_n = e^{n^2}$, il est aisé de vérifier que u_{n+1} et u_n ne sont pas équivalents.

Partie 2

4. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$, donc il y a d'éventuels problèmes de convergence au voisinage de -1 et au voisinage de 1.
Au voisinage de -1, on a

$$\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{(1+t)(1-t)}} \underset{t\to -1^+}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+t}}.$$

Mais l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge.

De même, au voisinage de 1, on a $\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ et donc $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge.

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \text{ converge.}}$

Riemann
Rappelons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

5.a. L'intégrale considérée est évidemment positive car intégrale d'une fonction positive sur le segment $[0,1]$.
De plus, pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0,1]$, on a

$$\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

de sorte que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \leqslant \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}_{=M}.$$

Notons que cette dernière intégrale converge bien car au voisinage de 1,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$

Majoration
Notons que la question demandait d'obtenir une constante M, indépendante de x.
C'est bien le cas de $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.
Il n'est pas nécessaire de chercher à calculer la valeur de cette intégrale, savoir que c'est une constante indépendante de x suffit. Il faut toutefois s'assurer qu'il s'agit bien d'une intégrale convergente.

5.b. Pour $u \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, on a $\sqrt{1-u} \leqslant 1$ et donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-u}} \geqslant 1$.
D'autre part, pour $u < 1$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{1-u}} \leqslant 1+u \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-u} \leqslant (1+u)^2 \Leftrightarrow 1 \leqslant (1+u)^2(1-u)$.
Mais $(1+u)^2(1-u) = (1+u)(1-u^2) = 1+u-u^2-u^3$, de sorte que

$$1 \leqslant (1+u)^2(1-u) \Leftrightarrow 0 \leqslant u-u^2-u^3 \Leftrightarrow 0 \leqslant 1-u-u^2.$$

Mais le polynôme du second degré $1-u-u^2$ possède pour discriminant $\Delta = 5$, et donc pour racines : $u_1 = \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} < 0$ et $u_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} > \dfrac{1}{2}$.
Il est donc positif dans l'intervalle $[u_1,u_2]$, qui contient $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.
Ainsi, pour tout $u \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$,

$$1-u-u^2 \geqslant 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-u}} \leqslant 1+u.}$$

Carré
Il est légitime d'élever l'inégalité au carré car les deux membres de l'inégalité sont positifs, et que la fonction carré est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

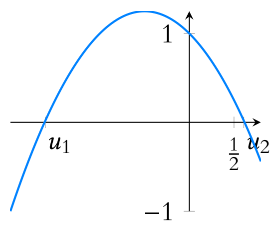


FIGURE 4– La fonction $u \mapsto 1-u-u^2$.

6.a. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0,\frac{1}{2}\right)$.
Alors une densité de X est $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$, de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}\,dt = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

Méthode
Pourquoi choisir précisément cette loi normale et pas une autre ? Afin d'obtenir les intégrales étudiées, il nous faut une densité contenant e^{-t^2}. Or, la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ contient $e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$.
Un petit calcul nous montre que $\mu = 0$ et $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ conviennent.

Mais la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est paire, et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

On en déduit que $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

De même, le moment d'ordre 2 de X est $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \frac{1}{2}$.

Mais par le théorème de transfert, ce moment d'ordre 2 vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\,dt$.

On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et par parité de l'intégrande, il vient

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.}$$

Huygens

Rappelons que la formule de Huygens permet d'obtenir le moment d'ordre 2 si on connaît l'espérance et la variance.

6.b. Notons que l'intégrale converge car $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$ et qu'au voisinage de 0, on a $\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$.

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ étant une intégrale de Riemann convergente, par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, il en est de même de $\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,dt$.

La fonction $t \mapsto \sqrt{tx}$ est $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $]0,1]$, donc le changement de variable est légitime.

On a alors $u = \sqrt{tx} \Leftrightarrow t = \frac{u^2}{x}$, de sorte que $dt = 2\frac{u}{x}du$.

Et donc,

$$\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-t^2}}{\frac{u}{\sqrt{x}}} 2\frac{u}{x}\,du = \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,dt.$$

Or, lorsque $x \to +\infty$, $\sqrt{x} \to +\infty$ et donc $\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\,du \to \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{x}}.}$$

Convergence

Nous avons prouvé la convergence de l'intégrale avant changement de variable.
Le théorème de changement de variable nous garantit alors la convergence de l'intégrale obtenue après changement de variable.

6.c. À l'aide du même changement de variable, on obtient

$$\int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t}\,dt = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}\frac{u}{\sqrt{x}}2\frac{u}{x}\,du = \frac{2}{x\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} u^2 e^{-u^2}\,du.$$

On en déduit que

$$\int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2}\,du = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.}$$

Convergence

Notons que l'intégrale obtenue après changement de variable est en fait une intégrale sur un segment, donc convergente. La première l'est donc aussi automatiquement.

7.a. Remarquons que la convergence de la première intégrale a déjà été établie à la question 4, donc nous ne nous préoccuperons pas des questions de convergence.
Le changement de variable est bien légitime car affine et on a

$$\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{(1+t)(1-t)}}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{-x(u-1)}}{\sqrt{u(2-u)}}\,du = \boxed{\frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\,du.}$$

7.b. D'après 5.b, pour tout $u \in [0,1]$, $1 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{u}{2}}} \leqslant 1 + \dfrac{u}{2}$ et donc

$$\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} \leqslant \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u\left(1-\frac{u}{2}\right)}} \leqslant \left(1+\frac{u}{2}\right)\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}.$$

On en déduit, par croissance de l'intégrale, et après multiplication par $\dfrac{e^x}{\sqrt{2}}$ que

$$\frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du \leqslant \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u\left(1-\frac{u}{2}\right)}}\,du \leqslant \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du + \frac{e^x}{2\sqrt{2}}\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,du.$$

Par la question 7.a, le terme du milieu de cette inégalité est $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

On en déduit que

$$\frac{\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}} \leqslant \frac{\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}{\frac{e^x}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{x}}} \leqslant \frac{\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}} + \frac{\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}}$$

> **Danger**
> Attention à ne pas utiliser d'équivalents dans des inégalités, ni à ajouter des équivalent.
> Si on souhaite prouver un équivalent à partir d'une inégalité, il faut systématiquement revenir au quotient.

Or, par 6.b, nous savons que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\,du \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$ et par la question 6.c que

$$\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\sqrt{\frac{\pi}{x}}\right).$$

On a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}} = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^1 e^{-ux}\sqrt{u}\,du}{\sqrt{\frac{\pi}{x}}} = 0.$$

On en déduit, par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt}{\frac{e^x}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{x}}} = 1 \text{ et donc } \int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

Et donc

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\right).$$

> **Rappel**
> On a $f \sim g$ si et seulement si $f = g + o(g)$.

Enfin, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \leqslant M$$

et puisque $\dfrac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\right).$$

Par la relation de Chasles, on a donc

$$I(x) = \int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\right) + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\right) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\right)$$

de sorte que

$$\boxed{I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.}$$

Partie 3

8. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X = k], k \in \mathbf{N}\}$, on a

$$P(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X = Y] \cap [X = k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = k]).$$

Les variables X et Y étant indépendantes, on a, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$P([X = k] \cap [Y = k]) = P(X = k)P(Y = k) = \frac{e^{-2\lambda}\lambda^{2k}}{(k!)^2}.$$

Et donc

$$\boxed{P(X = Y) = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.}$$

9.a. Soit u compris entre 0 et $-tx$. Alors $|u| \leqslant |t|x \leqslant x$.
Mais $u \leqslant |u|$, et donc, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbf{R}$, il vient

$$e^u \leqslant e^{|u|} \leqslant \boxed{e^x.}$$

La fonction $f : u \mapsto e^u$ est de classe $\mathscr{C}^{2n+1}$ entre 0 et $-tx$, et sa dérivée $(2n+1)$-ème, qui est $u \mapsto e^u$ est bornée entre 0 et $-tx$ par e^x.
Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a donc :

$$\left| f(-tx) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0)\frac{(-tx)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{e^x}{(2n+1)!}|-tx|^{2n+1}.$$

Soit encore

$$\boxed{\left| e^{-tx} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-tx)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{e^x}{(2n+1)!}|t|^{2n+1}x^{2n+1}.}$$

Signe

Il y a ici une petite difficulté de rédaction : t peut être positif ou négatif. Et donc $-tx$ peut être positif ou négatif, donc si on souhaite écrire des inégalités, il faut distinguer les deux cas $t \geqslant 0$ et $t \leqslant 0$. Ou passer à la valeur absolue...

9.b. La fonction sin est $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, avec $\sin(0) = 0$ et $\lim_{u\to\frac{\pi}{2}} \sin(u) = 1$.

Si on pose $t = \sin u$, alors $dt = \cos u\, du$.
Un changement de variable nous donne alors

$$\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin u)^k}{\sqrt{(1-\sin^2 u)}} \cos u\, du.$$

Mais si $u \in [0, \frac{\pi}{2}[$, alors $\cos u \geqslant 0$, de sorte que $\sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$.
On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\pi/2} (\sin u)^k\,du = \boxed{u_k.}$$

Chgt de variable

Le changement de variable à lieu sur l'intervalle ouvert $[0, 1[$, et non sur le segment $[0, 1]$ car $\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ n'est pas définie en 0.
Il est donc important de mentionner la stricte monotonie du changement de variable pour appliquer le théorème de changement de variable.

Convergence

Puisque l'intégrale après changement de variable est une intégrale convergente (elle vaut u_k), celle avant changement de variable est automatiquement convergente.

9.c. D'après l'inégalité obtenue en 9.a, en multipliant par $\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}$, il vient, pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$\left| \frac{e^{-tx}}{\pi\sqrt{1-t^2}} - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{t^k x^k}{\pi k! \sqrt{1-t^2}} \right| \leqslant \frac{e^x}{\pi\sqrt{1-t^2}} \frac{|t|^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{e^{-tx}}{\pi\sqrt{1-t^2}} - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{t^k x^k}{\pi k! \sqrt{1-t^2}} \right| dt \leqslant \frac{e^x}{\pi(2n+1)!} x^{2n+1} \int_{-1}^1 \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

La fonction $t \mapsto \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}$ étant paire et d'intégrale convergente sur $[0,1[$, son intégrale sur $]-1,1[$ converge et on a

$$\int_{-1}^{1} \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 2\int_0^1 \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 2\int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 2u_{2n+1}.$$

Enfin, il vient

$$\begin{aligned}\left| I(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{\pi k!} x^k \int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \right| &\leqslant \int_{-1}^{1} \left| \frac{e^{-tx}}{\pi\sqrt{1-t^2}} - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{e^{-tx} t^k x^k}{\pi k!} \right| dt \\ &\leqslant \frac{e^x}{\pi(2n+1)!} x^{2n+1} \int_{-1}^{1} \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ &\leqslant \frac{e^x}{\pi(2n+1)!} x^{2n+1} 2u_{2n+1}.\end{aligned}$$

Inégalité triangulaire

$\left|\int f\right| \leqslant \int |f|.$

La fonction $t \mapsto \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est de même parité que k, donc pour k impair, on a $\int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0$ et pour k pair,

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 2\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 2u_k.$$

Convergence

La convergence de l'intégrale sur $[0,1[$ a été établie à la question 9.b, donc l'intégrale sur $]-1,1[$ converge.

Ainsi, en utilisant le résultat de 2.b, on a

$$\begin{aligned}\left| I(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{\pi k!} x^k \int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \right| &= \left| I(x) - \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{\pi k!} x^k \int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \right| \\ &= \left| I(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\pi(2i)!} 2u_{2i} x^{2i} \right| \\ &= \left| I(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{\pi(2i)!} 2\frac{(2i)!}{(2^i \times i!)^2} \frac{\pi}{2} \right| \\ &= \left| I(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i}}{2^{2i} \times (i!)^2} \right|.\end{aligned}$$

Pour k impair, l'intégrale est nulle.

Les nombres pairs entre 0 et $2n$ sont les $2i$, $0 \leqslant i \leqslant n$.

On a donc bien

$$\boxed{\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2^{2k} \times (k!)^2} \right| \leqslant \frac{2e^x}{\pi(2n+1)!} x^{2n+1} u_{2n+1}.}$$

9.d. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a

$$u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Et donc

$$\frac{2e^x}{\pi(2n+1)!} x^{2n+1} u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{\pi}(2n+1)!\sqrt{n}} x^{2n+1}.$$

Puisque $x^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{=} o((2n+1)!)$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2e^x}{\pi(2n+1)!} x^{2n+1} u_{2n+1} = 0$$

de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \right) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} = I(x).$$

On en déduit que la série de terme général $\dfrac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$ converge et que sa somme vaut $I(x)$:

$$\boxed{I(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.}$$

Rappel

Par définition, une série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge.
Dans ce cas, la limite de la suite des sommes partielles est la somme de la série.

10. Nous avons déjà prouvé que

$$P(X=Y) = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2} = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2\lambda)^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} = e^{-2\lambda} I(2\lambda).$$

Et donc en utilisant le résultat de la question 7.b, il vient

$$P(X=Y) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} e^{-2\lambda} \frac{e^{2\lambda}}{\sqrt{4\pi\lambda}} \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}.}$$

EDHEC 2012

Exercice 1

Sujet : Endomorphismes de $\mathbf{R}^n$ pour lesquels il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $h^n = \alpha h^{n-1}$. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : formule de changement de base, diagonalisation, sommes directes.

Commentaires : demande beaucoup de recul en algèbre, en particulier sur la notion de sous-espace stable et son interprétation matricielle ainsi que sur les sommes directes. Probablement le sujet d'EDHEC le plus difficile en algèbre.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^3$.

1. a. Calculer A^2 et A^3, puis déterminer un polynôme annulateur de f.
   b. En déduire les valeurs propres de f.
   c. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. a. Montrer que $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker}(f^2) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
   b. On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbf{R}^3$ vérifiant : $g^2 = f$.
   On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe.
   Établir que $\operatorname{Ker}(f^2)$ est stable par g, puis montrer que la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme :
   $$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.$$
   En utilisant la matrice de f dans cette même base, trouver une contradiction et conclure.
4. **Étude d'un cas plus général**
   On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^n$ (où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1) et on désigne par α un réel non nul.
   a. On considère un endomorphisme h de $\mathbf{R}^n$ et on suppose que $h^n = \alpha h^{n-1}$.
   Montrer que : $\mathbf{R}^n = \operatorname{Ker}(h^{n-1}) \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha\mathrm{Id})$.
   b. Montrer réciproquement que, si un endomorphisme h de $\mathbf{R}^n$ est tel que $\mathbf{R}^n = \operatorname{Ker}(h^{n-1}) \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha\mathrm{Id})$, alors on a : $h^n = \alpha h^{n-1}$.

Exercice 2

Sujet : Deux simulations d'une même loi discrète à partir de lois exponentielles. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : variables à densité, produit de convolution, vecteurs aléatoires, `Scilab` .

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Commentaires : très belle utilisation du produit de convolution, mais nécessite des bases solides en probabilités.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. a. Donner, pour tout réel x strictement positif, une densité de $-xX_0$.
   b. Montrer que l'on peut choisir comme densité de $X_1 - xX_0$, la fonction f définie par
   $$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x+1} e^{\frac{\lambda z}{x}} & \text{si } z < 0 \\[2ex] \dfrac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z} & \text{si } z \geqslant 0 \end{cases}$$

c. On pose $T = \dfrac{X_1}{X_0}$, et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire T.

2. On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T. On admet également que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, P(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
   a. Donner sans calcul une densité de $-X_0$.
   b. Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n, et en déduire une densité g_n de Y_n.
   c. En déduire qu'il existe une densité h_n de $Y_n - X_0$ telle que

$$\forall x < 0,\ h_n(x) = \frac{1}{n+1}\lambda e^{\lambda x}.$$

4. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \inf\{k \in \mathbf{N}^* : X_k > X_0\}$ si cet ensemble n'est pas vide et $Z = 0$ si cet ensemble est vide.
   a. Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$[Z > n] \cup [Z = 0] = [Y_n \leqslant X_0].$$

   b. Montrer que $[Z = 0] = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} [Y_k \leqslant X_0]$, puis établir que $P(Z = 0) = 0$.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, les événements $[X = n]$ et $[Z = n]$ ont même probabilité.

5. Simulation en `Scilab`
   a. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
   On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - U)$, et on admet que V est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U, puis en déduire la loi suivie par la variable V.
   b. Écrire une fonction `Scilab` qui simule la loi de Z. *On utilisera à cet effet uniquement la commande* `rand`.

Exercice 3

Sujet : Étude d'un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$. **Facile**
Abordable en première année : ✓ (questions 1 et 2) **Intérêt** : ★★☆
Thèmes du programme abordés : polynômes, diagonalisation, espaces euclidiens, endomorphismes symétriques.
Commentaires : un problème plutôt facile... à condition d'être à l'aise avec la division euclidienne des polynômes.

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On note e_0, e_1 et e_2 les polynômes de E définis par : $e_0 = 1, e_1 = X$ et $e_2 = X^2$.
On rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le reste dans la division par $1 + X^3$ du polynôme $(1 - X + X^2)P$.
Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que

$$(1 - X + X^2)P = (1 + X^3)Q + f(P), \text{ avec } \deg(f(P)) \leqslant 2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. a. Déterminer $f(e_0), f(e_1)$ et $f(e_2)$ puis vérifier que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.
   b. En déduire une base de $\operatorname{Im} f$.
   c. Donner la dimension de $\operatorname{Ker} f$ ainsi qu'une base de $\operatorname{Ker} f$.
3. a. Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\operatorname{Im} f$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f - 3\mathrm{Id}).$$

   b. Montrer que f est diagonalisable.
4. On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$ qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P, Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} a_k b_k$, où l'on a noté $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$.

a. Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E.

b. Vérifier que $\operatorname{Ker} f$ est le supplémentaire orthogonal de $\operatorname{Im} f$ dans E pour ce produit scalaire.

5. a. Vérifier que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale pour le produit scalaire φ.

b. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ puis retrouver le résultat de la question 4.b.

Problème

Sujet : Inégalité de Carleman : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **Difficile**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : suites, séries, intégrale sur un segment.

Commentaires : couvre une bonne partie du programme d'analyse de première année. Très technique, plein de subtilités, mais constitue un excellent entraînement au calcul.

On admet que, si une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ, alors on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$.

Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k,\ T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k \text{ et } y_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i x_i.$$

1. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)x_i$.

En déduire que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = T_n$.

b. En utilisant le résultat admis au début de ce problème, établir que la série de terme général y_n converge et que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

2. Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul : $z_n = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$.

On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

a. On rappelle que si une fonction f est concave sur un intervalle I, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in I^n$, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k) \leqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$, $\displaystyle\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

b. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $z_n = \displaystyle\frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} k x_k\right)^{1/n}$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $z_n \leqslant \displaystyle\frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n$.

c. Montrer que, pour tout réel x positif, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.

d. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.

e. Établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\displaystyle\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$.

Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout k élément de $[\![1, n-1]\!]$, on a :
$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

b. Calculer l'intégrale $\int_{1/n}^{1} \ln(x)\,dx$ et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 2,\ -1+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}.$$

c. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$, puis établir que : $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$.

4. On admet que si deux séries à termes positifs, de termes généraux équivalents, divergent, alors leurs sommes partielles d'ordre m sont équivalentes lorsque m est au voisinage de $+\infty$.
Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ particulière que l'on note $(x_n(N))_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par : $x_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \in [\![1, N]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On pose, comme à la deuxième question : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{1/n}$.

a. Écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ sous forme de sommes finies.

b. En déduire que $\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e$.

5. Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

EDHEC 2012 : Corrigé

Exercice 1

1.a. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
En particulier, $A^3 = 2A^2 \Leftrightarrow A^3 - 2A^2 = 0$, de sorte que $X^3 - 2X^2$ est un polynôme annulateur de A, et donc de f.

1.b. Les valeurs propres de A sont parmi les racines de $X^3 - 2X^2 = X^2(X-2)$. Et donc les seules valeurs propres possibles sont 0 et 2.
Les deux dernières colonnes de A sont proportionnelles, donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$, et donc 0 est valeur propre de A.
De même, on a $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ dont les deux premières colonnes sont colinéaires, donc $\mathrm{rg}(A - 2I_3) \leqslant 2$, et donc 2 est valeur propre de A.
Ainsi, $\mathrm{Spec}(f) = \mathrm{Spec}(A) = \{0, 2\}$.

> **Valeurs propres**
> Attention, les valeurs propres sont **parmi** les racines de $X^3 - 2X^2$.
> Donc une fois ces racines déterminées, il faut encore, pour chacune d'entre elle, vérifier si oui ou non elle est valeur propre.

1.c. Précisons un peu ce qui a été dit précédemment : les trois colonnes de A ne sont pas deux à deux proportionnelles, donc $\mathrm{rg}(A) > 1$. Et alors $\mathrm{rg}(A) = 2$, de sorte que $\dim E_0(A) = 3 - 2 = 1$.
De même, les trois colonnes de $A - 2I_3$ ne sont pas deux à deux proportionnelles, donc $\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 2$ et alors $\dim E_2(A) = 3 - 2 = 1$.
En particulier, on a

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} \dim E_\lambda(A) = \dim E_0(A) + \dim E_2(A) = 2 < 3.$$

Et alors A n'est pas diagonalisable, et donc f n'est pas non plus diagonalisable.

2. Si la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est T, alors $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = u_1$ et $f(u_3) = 2u_3$.
Cherchons donc (u_1, u_2, u_3) tels que $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = u_1$ et $f(u_3) = 2u_3$.
Cherchons u_1 sous la forme $u_1 = xe_1 + xe_2 + xe_3$. Alors $f(u_1) = 0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$. Soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 3y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = x + y \\ -x + 3y - 3z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = x + y \\ -4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = y \end{cases}$$

Par exemple, en prenant $y = 1$, on peut choisir $u_1 = e_2 + e_3$.
Cherchons alors $u_2 = xe_1 + ye_2 + ze_3$ tel que $f(u_2) = e_2 + e_3$. Soit encore

> **Remarque**
> On peut choisir y comme on veut, sauf $y = 0$, car alors $u_1 = 0$ ne peut être un élément d'une base de $\mathbf{R}^3$.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 3y - 3z = 1 \\ -2x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + y \\ -4x = 1 \\ -4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ z = -\frac{1}{4} + y \end{cases}$$

En prenant $y = 0$, on peut choisir $u_2 = -\dfrac{1}{4}(e_1 + e_3)$.
Enfin, cherchons $u_3 = xe_1 + ye_2 + ze_3$ tel que $f(u_3) = 2eu_3$. Soit encore

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 2x \\ -x + 3y - 3z = 2y \\ -2x + 2y - 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z \\ x = y - 3z \\ 2z = -x + y \end{cases} \underset{L_1 \to L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

En choisissant $x = 1$, on peut donc prendre $u_3 = e_1 + e_2$.
Il reste à vérifier que la famille (u_1, u_2, u_3) ainsi obtenue est une base de $\mathbf{R}^3$.

La matrice de cette famille dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$B = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u_1,u_2,u_3) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

On a alors

$$B \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \to L_2 - L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \to L_3 + L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

de sorte que B est de rang 3 et donc inversible.
Par conséquent, (u_1, u_2, u_3) est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$, et par construction,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array} = T.$$

3.a. On a $T - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{rg}(T - 2I_3) = 2$.
On en déduit[1] donc que $\mathrm{rg}(f - 2\mathrm{Id}) = 2$.
De même, on a $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(T^2) = 1$.
D'après le théorème du rang, il vient donc $\dim \mathrm{Ker}(f^2) = 2$ et $\dim \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = 1$.

[1] La matrice de $f - 2\mathrm{Id}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $T - 2I_3$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2) \cap \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.
Alors $(f - 2\mathrm{Id})(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2x$.
Et donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(2x) = 2f(x) = 4x$.
Mais $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$, donc $f^2(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(f^2) \cap \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \{0\}$.
Puisque de plus $\dim \mathrm{Ker}(f^2) + \dim \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \dim \mathbf{R}^3$, on en déduit que $\boxed{\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}).}$

3.b. Puisque $f = g^2$, alors $f^2 = g^4$. Ainsi, $f^2 \circ g = g^4 \circ g = g^5 = g \circ g^4 = g \circ f^2$.
Et donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f^2) \text{ est stable par } g.}$

Rappel
Si f et g sont deux endomorphismes qui commutent, alors le noyau de l'un est stable par l'autre.

Notons que $f(u_1) = 0$ et donc $f^2(u_1) = 0$. De même, $f(u_2) = u_1$ donc $f^2(u_2) = 0$.
Et donc u_1 et u_2 sont dans $\mathrm{Ker}(f^2)$ et forment une famille libre car sous-famille de la base (u_1, u_2, u_3).
Puisque cette famille est de cardinal $2 = \dim \mathrm{Ker}(f^2)$, c'est une base de $\mathrm{Ker}(f^2)$.
Et comme $\mathrm{Ker}(f^2)$ est stable par g, $g(u_1) \in \mathrm{Ker}(f^2)$, donc il existe deux réels a et b tels que $g(u_1) = au_1 + bu_2$.
De même, $g(u_2) \in \mathrm{Ker}(f^2)$ et donc il existe deux réels a' et b' tels que $g(u_2) = a'u_1 + b'u_2$.
Enfin, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et $g(u_3) \in \mathbf{R}^3$ donc il existe trois réels a'', b'' et c'' tels que $g(u_3) = a''u_1 + b''u_2 + c''u_3$.
Ainsi, la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est

$$G = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(u_1) & g(u_2) & g(u_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array}$$

Et alors $g^2 = f \Leftrightarrow G^2 = T$, de sorte que

$$\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + a'b & aa' + a'b' & aa'' + a'b'' + a''c'' \\ ab + bb' & a'b + b'^2 & a''b + bb'' + b'c'' \\ 0 & 0 & c''^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En particulier, en identifiant les 4 quatre coefficients du bloc en haut à gauche, il vient

$$\begin{cases} a^2 + a'b = 0 \\ a'(a+b') = 1 \\ b(a+b') = 0 \\ a'b + b'^2 = 0 \end{cases}$$

De la seconde équation, on déduit que $a + b' \neq 0$, et donc dans la troisième, nécessairement $b = 0$.
Mais alors la première nous donne $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
La seconde équation devient alors $a'b = 1$ et donc la quatrième est $b'^2 = -1$, ce qui est impossible.

On en déduit $\boxed{\text{qu'il n'existe pas d'endomorphisme } g \text{ tel que } f = g^2.}$

> **Méthode**
> Nous ne disposons d'aucune information sur les dimensions des sous-espaces en question. Le seul outil à notre disposition est donc le raisonnement par analyse-synthèse.

4. Étude d'un cas plus général

4.a. Soit $x \in \mathbf{R}^n$, et supposons que $x = y + z$, avec $x \in \operatorname{Ker}(h^{n-1})$ et $z \in \operatorname{Ker}(h - \alpha \mathrm{Id})$.
Puisque $z \in \operatorname{Ker}(h - \alpha\mathrm{Id})$, alors $h(z) - \alpha z = 0 \Leftrightarrow h(z) = \alpha z$.
On en déduit donc que $h^{n-1}(z) = \alpha^{n-1} \cdot z$.

On a alors $h^{n-1}(x) = h^{n-1}(y) + h^{n-1}(z) = h^{n-1}(z) = \alpha^{n-1} z$, de sorte que $z = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}} h(x)$.

Et donc $y = x - z = x - \dfrac{1}{\alpha^{n-1}} h^{n-1}(x)$.
Nous avons donc prouvé que tout élément de $\mathbf{R}^n$ s'écrit au plus d'une manière comme un élément de $\operatorname{Ker}(h^{n-1})$ plus un élément de $\operatorname{Ker}(h - \alpha\mathrm{Id})$.

> **Synthèse**
> N'oublions pas la synthèse : nous savons que si une décomposition $x = y + z$, est possible, elle est unique et nous venons de trouver les expressions de y et z en fonction de x.
> Montrons à présent que ces expressions définissent bien respectivement un élément de $\operatorname{Ker}(h^{n-1})$ et un élément de $\operatorname{Ker}(h - \alpha\mathrm{Id})$.

Inversement, si $x \in \mathbf{R}^n$, posons $y = x - \dfrac{1}{\alpha^{n-1}} h^{n-1}(x)$ et $z = \dfrac{1}{\alpha^{n-1}} h^{n-1}(x)$.

Alors $h^{n-1}(y) = h^{n-1}(x) - \dfrac{1}{\alpha^{n-1}} h^{2n-2}(x)$.
Mais puisque $h^n = \alpha h^{n-1}$, alors

$$h^{n+1} = h \circ h^{n-1} = \alpha h^n = \alpha^2 h^{n-1}.$$

Puis de proche en proche, $h^{n+2} = \alpha^3 h^{n-1}, \dots, h^{2n-2} = \alpha^{n-1} h^{n-1}$.
Et donc $h^{n-1}(y) = h^{n-1}(x) - \frac{1}{\alpha^{n-1}} \alpha^{n-1} h^{n-1}(x) = 0$.
On en déduit que $y \in \operatorname{Ker}(h^{n-1})$.
De même, on a

$$h(z) = \frac{1}{\alpha^{n-1}} h^n(x) = \frac{\alpha}{\alpha^{n-1}} h^{n-1}(x) = \alpha z.$$

Et donc $z \in \operatorname{Ker}(h - \alpha\mathrm{Id})$.
Enfin, on a bien

$$y + z = x - \frac{1}{\alpha^{n-1}} h^{n-1}(x) + \frac{1}{\alpha^{n-1}} h^{n-1}(x) = x.$$

Ainsi, tout élément de $\mathbf{R}^n$ s'écrit d'au moins une manière comme un élément de $\operatorname{Ker}(h^{n-1})$ plus un élément de $\operatorname{Ker}(h - \alpha\mathrm{Id})$.
On en déduit donc que tout élément de $\mathbf{R}^n$ s'écrit **de manière unique** comme un élément de $\operatorname{Ker}(h^{n-1})$ plus un élément de $\operatorname{Ker}(h - \alpha\mathrm{Id})$ et donc que $\boxed{\mathbf{R}^n = \operatorname{Ker}(h^{n-1}) \oplus \operatorname{Ker}(h - \alpha\mathrm{Id}).}$

4.b. Soit $x \in \mathbf{R}^n$. Alors, $x = y + z$, avec $y \in \operatorname{Ker}(h^{n-1})$ et $z \in \operatorname{Ker}(h - \alpha\mathrm{Id})$.
Et alors $h^n(x) = h^n(y) + h^n(z) = h^n(z)$.
Mais $z \in \operatorname{Ker}(h - \alpha\mathrm{Id})$, de sorte que $h(z) - \alpha z = 0 \Leftrightarrow h(z) = \alpha z$.
Et donc $h^n(z) = \alpha^n z$. Donc $h^n(x) = \alpha^n h^n(z)$.
D'autre part, on a $\alpha h^{n-1}(x) = \alpha h^{n-1}(y) + \alpha h^{n-1}(z) = \alpha h^{n-1}(z) = \alpha\alpha^{n-1} z = \alpha^n z$.
Et donc, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, on a $h^n(x) = \alpha h^{n-1}(x)$, de sorte que $\boxed{h^n = \alpha h^{n-1}.}$

EXERCICE 2

1.a. Il s'agit d'une transformation affine d'une variable à densité. Notons f_0 une densité de X_0.
Alors une densité de $-xX_0$ est $g_0 : t \mapsto \dfrac{1}{x} f_0\left(-\dfrac{t}{x}\right)$, soit

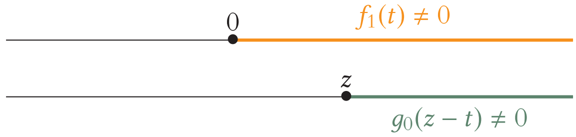
$$g_0(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x} e^{\frac{\lambda}{x} t} & \text{si } t \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1.b. Les variables aléatoires X_1 et $-xX_0$ sont indépendantes car X_0 et X_1 le sont, et la densité de X_1 est bornée, donc une densité de $X_1 - xX_0$ est donnée par le produit de convolution :

$$\forall z \in \mathbf{R},\ f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) g_0(z-t)\, dt$$

où f_1 désigne une densité de X_1 et g_0 est la densité de $-xX_0$ obtenue à la question précédente. On a alors $f_1(t) \neq 0 \Leftrightarrow t \geqslant 0$ et $g_0(z-t) \neq 0 \Leftrightarrow z - t \leqslant 0 \Leftrightarrow t \geqslant z$.

> **Danger**
> Attention aux noms des variables : ici x est une constante fixée, on ne peut donc l'utiliser pour désigner autre chose (et surtout pas la variable d'intégration !).



Pour $z < 0$, on a donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^{\infty} f_1(t) g_0(z-t)\, dt \\ &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{\lambda}{x} e^{\frac{\lambda}{x}(z-t)}\, dt \\ &= \frac{\lambda^2}{x} e^{\frac{\lambda}{x} z} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda(x+1)}{x} t}\, dt \end{aligned}$$

> **Primitive**
> N'oublions pas que x est une constante fixée, et qu'on intègre par rapport à la variable t.

Or, une primitive de $t \mapsto e^{-\frac{\lambda(x+1)}{x} t}$ est $t \mapsto \frac{x}{\lambda(x+1)} e^{-\frac{\lambda(x+1)}{x} t}$, de sorte que pour $A > 0$, on a

$$\int_0^A e^{-\frac{\lambda(x+1)}{x} t} = \frac{x}{\lambda(x+1)} \left(1 - e^{-\frac{\lambda(x+1)}{x} A}\right) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{\lambda(x+1)}.$$

On en déduit que (toujours pour $z \leqslant 0$),

$$f(z) = \frac{\lambda^2}{x} e^{\frac{\lambda z}{x}} \frac{x}{\lambda(x+1)} = \frac{\lambda}{x+1} e^{\frac{\lambda z}{x}}.$$

Pour $z \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_z^{\infty} f_1(t) g_0(z-t)\, dt \\ &= \int_z^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{\lambda}{x} e^{\frac{\lambda}{x}(z-t)}\, dt \\ &= \frac{\lambda^2}{x} e^{\frac{\lambda}{x} z} \int_z^{\infty} e^{-\frac{\lambda(x+1)}{x} t}\, dt \end{aligned}$$

Mais comme précédemment, à l'aide de la même primitive, on a pour $A > z$

$$\int_z^A e^{-\frac{\lambda(x+1)}{x} t} dt = \frac{x}{\lambda(x+1)} \left(e^{-\frac{\lambda(x+1)}{x} z} - e^{-\frac{\lambda(x+1)}{x} A}\right) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{\lambda(x+1)} e^{-\frac{\lambda(x+1)}{x} z}$$

et donc pour $z > 0$, on a

$$f(z) = \frac{\lambda^2}{x} e^{\frac{\lambda}{x} z} \frac{x}{\lambda(x+1)} e^{-\frac{\lambda(x+1)}{x} z} = \frac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z}.$$

En résumé, nous avons bien prouvé qu'une densité de $X_1 - xX_0$ est donnée par

$$\boxed{f(z) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x+1} e^{\frac{\lambda}{x} z} & \text{si } z > 0 \\ \dfrac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z} & \text{si } z > 0 \end{cases}}$$

1.c. Puisque X_1 et X_0 sont à valeurs positives, il est clair que T est également à valeurs positives, et donc pour $x < 0$, $F_T(x) = P(T \leqslant x) = 0$.
De plus, $T = 0$ si et seulement si $X_1 = 0$, et donc[2] $F_T(x) = 0$. Soit donc $x > 0$. Alors

$$F_T(x) = P(T \leqslant x) = P\left(\frac{X_1}{X_0} \leqslant x\right) = P(X_1 \leqslant xX_0) = P(X_1 - xX_0 \leqslant 0).$$

[2] X_1 est à densité donc $P(X_1 = 0) = 0$.

Or, nous avons déterminé une densité de $X_1 - xX_0$, donc

$$P(X_1 - xX_0 \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0} f(z)dz = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{x+1} e^{\frac{\lambda z}{x}}\, dz.$$

Mais pour $A < 0$, on a

$$\int_{A}^{0} e^{\frac{\lambda z}{x}} dz = \frac{x}{\lambda}\left[e^{\frac{\lambda z}{x}}\right]_{A}^{0} = \frac{x}{\lambda}\left(1 - e^{\frac{\lambda A}{x}}\right) \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{\lambda}.$$

On en déduit que

$$F_T(x) = P(T \leqslant x) = \frac{x}{x+1}.$$

Ainsi, on a

$$\boxed{F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

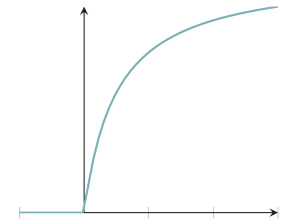


FIGURE 1– La fonction F_T.

Notons qu'il s'agit là de la fonction de répartition d'une variable à densité, car F_T est continue sur $\mathbf{R}$, et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$.

2. Notons que T étant à valeurs positives, $\lfloor T \rfloor$ prend ses valeurs dans $\mathbf{N}$, et donc $X = \lfloor T \rfloor + 1$ prend ses valeurs dans $\mathbf{N}^*$. De plus, pour $n \geqslant 1$, on a

$$P(X = n) = P(\lfloor T \rfloor + 1 = n) = P(\lfloor T \rfloor = n-1) = P(n-1 \leqslant T < n) = P(n-1 < T \leqslant n)$$

Inégalités
On peut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes et vice-versa car T est une variable à densité.

et donc

$$P(X = n) = F_T(n) - F_T(n-1) = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - (n+1)(n-1)}{n(n+1)} = \boxed{\frac{1}{n(n+1)}.}$$

3.a. C'est un cas particulier de la question 1.a : une densité de $-X_0$ est

$$\boxed{m(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

3.b. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$G_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x)$$

car les X_i sont indépendantes. On en déduit que

$$\boxed{G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ (1 - e^{-\lambda x})^n & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Cette fonction est évidemment $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles, et elle est continue en 0 car

$$\lim_{x\to 0^-} G_n(x) = 0 = G_n(0) = \lim_{x\to 0^+} (1 - e^{-x})^n.$$

Ainsi, G_n est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$, Y_n est une variable à densité.
Une densité de Y_n est alors toute fonction qui coïncide avec G_n' sur $\mathbf{R}^*$, par exemple

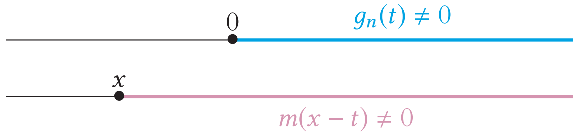
Rédaction ✎
G_n' n'est pas définie sur tout $\mathbf{R}$, car G_n n'est pas dérivable en 0, et donc il serait inexact de dire qu'une densité de Y_n est G_n'.

$$\boxed{g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

3.c. Par le lemme des coalitions, Y_n et $-X_0$ sont indépendantes. De plus, une densité de $-X_0$ est bornée, donc une densité h_n de $Y_n - X_0$ est donnée par le produit de convolution :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ h_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) m(x-t)\, dt.$$

Or on a $g_n(t) \neq 0 \Leftrightarrow t \geqslant 0$ et $m(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow x - t \leqslant 0 \Leftrightarrow t \geqslant x$.



<u>**Pour** $x < 0$</u>, on a

$$h_n(x) = \int_0^{\infty} n\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\lambda e^{\lambda(x-t)}\,dt = e^{\lambda x}\int_0^{\infty} n\lambda^2 e^{-2\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\,dt.$$

Afin de calculer cette dernière intégrale, procédons à une intégration par parties sur $[0,A]$, $A>0$. En posant $u(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ et $v(t) = (1-e^{-\lambda t})^n$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ avec $u'(t) = -\lambda^2 e^{-\lambda t}$ et $v'(t) = n\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$. Il vient alors

$$\begin{aligned}\int_0^{A} n\lambda^2 e^{-2\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\,dt &= \left[\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^n\right]_0^A + \int_0^A \lambda^2 e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^n\,dt\\ &= \lambda e^{-\lambda A}(1-e^{-\lambda A})^n + \left[\frac{\lambda}{n+1}(1-e^{-\lambda t})^{n+1}\right]_0^A\\ &= \lambda e^{-\lambda A}(1-e^{-\lambda A})^n + \frac{\lambda}{n+1}(1-e^{-\lambda A})^{n+1}\\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda}{n+1}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{pour } x \leqslant 0,\ h_n(x) = \frac{1}{n+1}\lambda e^{\lambda x}.}$

Remarque
L'énoncé ne demandait que la valeur de $h_n(x)$ pour $x < 0$, donc il n'est pas nécessaire de faire le calcul pour $x > 0$, même s'il serait facile à faire.

4.a. Puisque $Y_n = \max(X_1,\dots,X_n)$, on a $Y_n \leqslant X_0$ si et seulement si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \leqslant X_0$. D'autre part, on a $[Z=0]\cup[Z>n]$ si et seulement si tous les X_i, $1\leqslant i\leqslant n$ vérifient $X_i \leqslant X_0$ (et alors, soit l'un des X_i, $i>n$ vérifie $[X_i > X_0]$, soit aucun des X_i ne le vérifie et alors $Z=0$). Donc on a

$$\boxed{[Y_n \leqslant X_0] = \bigcap_{i=1}^{n}[X_i \leqslant X_0] = [Z>n]\cup[Z=0].}$$

4.b. D'après la question précédente, on a

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}[Y_k \leqslant X_0] = \bigcap_{k=1}^{\infty}([Z>k]\cup[Z=0]) = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty}[Z>k]\right)\cup[Z=0].$$

Mais $\bigcap_{k=1}^{\infty}[Z>k] = \emptyset$ et donc $\bigcap_{k=1}^{\infty}[Y_k \leqslant X_0] = [Z=0]$.

Détail
Z prend forcément une valeur finie, donc ne peut être supérieure à tous les entiers naturels.

De plus, nous savons que

$$P(Y_n \leqslant X_0) = P(Y_n - X_0 \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0} h_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{n+1}\lambda e^{\lambda t}\,dt = \frac{1}{n+1}.$$

Mais grâce à l'égalité démontrée précédemment, $\forall n \geqslant 1$, $[Z=0]\subset[Y_n \leqslant X_0]$ et donc

$$0 \leqslant P(Z=0) \leqslant P(Y_n \leqslant X_0) = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que $\boxed{P(Z=0)=0.}$

4.c. De la question 4.a, on obtient[3]

$$P(Y_n \leqslant X_0) = P(Z>n) + P(Z=0) = P(Z>n).$$

Mais $P(Y_n \leqslant X_0)$ a été calculé à la question 3.b et vaut $\frac{1}{n+1}$.
Et donc, pour tout entier n non nul, puisque Z ne prend que des valeurs entières,

$$P(Z=n) = P(Z>n-1) - P(Z>n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ P(X=n) = P(Z=n).}$$

[3] Les événements $[Z>n]$ et $[Z=0]$ sont clairement incompatibles.

5.a. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$P(V \leqslant x) = P(\ln(1-U) \geqslant -\lambda x) = P(1-U \geqslant e^{-\lambda x}) = P(U \leqslant 1 - e^{-\lambda x}).$$

Le sens des inégalités est préservé car la fonction exponentielle est croissante.

Et donc

$$P(V \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 - e^{-\lambda x} < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leqslant 1 - e^{-\lambda x} \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } 1 - e^{-\lambda x} \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

et donc[4] $\boxed{V \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } \lambda.}$

[4] On a reconnu la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

5.b. La question précédente nous permet de simuler une loi exponentielle à l'aide de la commande `rand`.

```
function z = simule(lambda)
  z = 1 ;
  X = -1/lambda*log(1-rand()) ;
  Y = -1/lambda*log(1-rand()) ;
  while Y<=X
    Y = -1/lambda*log(1-rand()) ;
    z = z+1 ;
  end
endfunction
```

La variable `X` sert à simuler X_0, puis `Y` contient les simulations successives de $X_1, X_2, \dots$. Tant qu'aucun des X_i n'est pas strictement supérieur à X_0, on ajoute 1 à `z`, et on simule la variable X_i suivante (dont la valeur est stockée dans `Y`).

while
Notons qu'en théorie la boucle `while` pourrait tourner indéfiniment et ne jamais s'arrêter. Mais ceci correspond au cas où $Z = 0$, et nous avons prouvé que la probabilité que cela arrive est nulle.

EXERCICE 3

1. Il est clair que f est à valeurs dans $\mathbf{R}_2[X] = E$.
Soient $P_1, P_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que :

$$(1 - X + X^2)P_1 = (1+X^3)Q_1 + f(P_1) \text{ et } (1-X+X^2)P_2 = (1+X^3)Q_2 + f(P_2).$$

Et donc $(1-X+X^2)(\lambda P_1 + P_2) = (1+X^3)(\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda f(P_1) + f(P_2))$, avec $\deg(\lambda f(P_1) + f(P_2)) \leqslant 2$.
Par unicité de la division euclidienne, $\lambda f(P_1) + f(P_2)$ est alors le reste de la division euclidienne de $(1-X+X^2)(\lambda P_1 + P_2)$ par $1 + X^3$, donc est égal à $f(\lambda P_1 + P_2)$.
Ainsi, $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$: f est linéaire, et est donc $\boxed{\text{un endomorphisme de } E.}$

Div. euclidienne
Rappelons que si on peut écrire $A = PQ + R$, avec $\deg(R) < \deg(A)$, alors, par unicité de la division euclidienne, Q est le quotient de la division euclidienne de A par B et R est le reste.

2.a. On a $(1-X+X^2) \times 1 = (1+X^3) \times 0 + 1 - X + X^2$, avec $\deg(1-X+X^2) \leqslant 2$, donc $\boxed{f(e_0) = 1 - X + X^2.}$
De même, on a $(1-X+X^2)X = X^3 - X^2 + X = (1+X^3) \times 1 + (\underbrace{-X^2 + X - 1}_{\in E})$, de sorte que

$\boxed{f(e_1) = -X^2 + X - 1.}$
Enfin, la division euclidienne de $(1-X+X^2)X^2 = X^4 - X^3 + X^2$ par $1 + X^3$ est

$$\begin{array}{rrrrr|rr} X^4 & -X^3 & +X^2 & & & X^3 & +1 \\ X^4 & & & +X & & X & -1 \\ \hline & -X^3 & +X^2 & -X & & & \\ & -X^3 & & & -1 & & \\ \hline & & X^2 & -X & +1 & & \end{array}$$

de sorte que $f(e_2) = X^2 - X + 1$.

Notons qu'on a alors bien $\boxed{f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2).}$

2.b. Si $P \in E$, alors il existe trois réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que $P = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$.
Et donc $f(P) = \lambda_0 f(e_0) + \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) = (\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2)(1 - X + X^2) \in \operatorname{Vect}(1 - X + X^2)$.

Par conséquent, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(1 - X + X^2)$.

Plus généralement
Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors l'image d'une famille génératrice de E par f est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
En revanche, rien ne garantit que l'image d'une base soit une base de l'image, il faut alors vérifier la liberté à la main.
Exercice : montrer que l'image d'une base de E est une base de $\operatorname{Im} f$ si et seulement si f est injective.

L'inclusion réciproque est évidente car $1-X+X^2 = f(e_0) \in \operatorname{Im} f$.
Et donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(1-X+X^2)$.
Donc la famille formée du seul vecteur $1-X+X^2$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$, et puisqu'il s'agit d'une famille formée d'un seul vecteur non nul, elle est libre : c'est une $\boxed{\text{base de } \operatorname{Im} f.}$

2.c. D'après le théorème du rang, on a $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = 3-1 = 2$.
De plus, nous savons que $f(e_0+e_1) = f(e_0)+f(e_1) = f(e_0)-f(e_0) = 0$ et de même $f(e_0-e_2) = 0$. Donc $e_0+e_1 = 1+X$ et $e_0-e_2 = 1-X^2$ sont deux éléments de $\operatorname{Ker} f$.
Puisqu'ils sont non nuls et de degré distincts, ils forment une famille libre de $\operatorname{Ker} f$, de cardinal égal à la dimension de $\operatorname{Ker} f$: $\boxed{(1+X, 1-X^2) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} f.}$

3.a. On a $f(1-X+X^2) = f(e_0)-f(e_1)+f(e_2) = 3f(e_0) = 3(1-X+X^2)$.
Si $P \in \operatorname{Im} f$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $P = \lambda(1-X+X^2)$, et alors

$$f(P) = \lambda f(1-X+X^2) = 3\lambda(1-X+X^2) = 3P.$$

Donc tout polynôme non nul[5] de $\operatorname{Im} f$ est vecteur propre de f pour la valeur propre 3 : on a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}(f-3\mathrm{id}_E) = E_3(f)$.
De plus, nous savons d'après la question 2.c que 0 est valeur propre de f, avec un sous-espace propre de dimension 2.
Puisque $\displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Spec}(f)} \dim E_\lambda(f) \leqslant \dim E = 3$, nécessairement $\dim E_3(f) \leqslant 1$.
On en déduit que $\dim E_3(f) = 1$, et donc[6] que $\boxed{E_3(f) = \operatorname{Im} f.}$

[5] Rappelons qu'un vecteur propre est non nul par définition.

[6] L'un est inclus dans l'autre et ils ont même dimension.

3.b. On a $\dim E_0(f) + \dim E_3(f) = 3 = \dim E$.
Donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$, et ses seules valeurs propres sont 0 et 3.

4.a. Soient $P = a_0+a_1X+a_2X^2$, $Q = b_0+b_1X+b_2X^2$ et $R = c_0+c_1X+c_2X^2$ trois éléments de E et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+Q, R) &= \varphi\left((\lambda a_0+b_0)+(\lambda a_1+b_1)X+(\lambda a_2+b_2)X^2, c_0+c_1X+c_2X^2\right)\\ &= \sum_{i=0}^{2}(\lambda a_i+b_i)c_i = \lambda\sum_{i=0}^{2}a_ic_i + \sum_{i=0}^{2}b_ic_i = \lambda\varphi(P,R)+\varphi(Q,R).\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire à gauche.
Avec les mêmes notations, on a

$$\varphi(P,Q) = \sum_{i=0}^{2}a_ib_i = \sum_{i=0}^{2}b_ia_i = \varphi(Q,R).$$

Donc φ est symétrique, et donc bilinéaire symétrique.

Rappel
Si φ est linéaire d'un côté (à gauche ou à droite) et symétrique, alors elle est automatiquement bilinéaire.

Pour $P \in E$, on a $\varphi(P,P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2}a_i^2 \geqslant 0$ et une somme de carrés étant nulle si et seulement si chacun de ses termes est nul, il vient

$$\varphi(P,P) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![0,2]\!],\ a_i = 0 \Leftrightarrow P = 0.$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est bien un produit scalaire sur } E.}$

4.b. Nous savons qu'une base de $\operatorname{Im} f$ est $1-X+X^2$. Or, on a

$$\varphi(1+X, 1-X+X^2) = 1-1+0 = 0 \text{ et } \varphi(1-X^2, 1-X+X^2) = 1+0-1 = 0.$$

Donc $1+X \in (\operatorname{Im} f)^\perp$ et $1-X^2 \in (\operatorname{Im} f)^\perp$. Ainsi, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1+X, 1-X^2) \subset (\operatorname{Im} f)^\perp$.
De plus, $\dim \operatorname{Ker} f = 2 = 3 - \dim \operatorname{Im} f = \dim(\operatorname{Im} f)^\perp$.
Donc $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$: $\boxed{\operatorname{Ker} f \text{ est le supplémentaire orthogonal de } \operatorname{Im} f.}$

Orthogonal
Un élément $x \in E$ est dans $F^\perp$ si et seulement si il est orthogonal à tous les éléments d'une base de F.

5.a. Il est facile de voir que $\varphi(e_0,e_0) = \varphi(e_1,e_1) = \varphi(e_2,e_2) = 1$.
De même, on a $\varphi(e_0,e_1) = \varphi(e_0,e_2) = \varphi(e_1,e_2) = 0$.
Donc, pour $(i,j) \in [\![0,2]\!]^2$, on a $\varphi(e_i,e_j) = \begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i \neq j\end{cases}$: $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E pour le produit scalaire φ.

5.b. D'après les calculs effectués à la question 1, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}.$$

La matrice de f dans la base orthonormée $\mathscr{B}$ est symétrique, donc f est un endomorphisme symétrique.
Pour $P \in E$, on a $P \in (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$ si et seulement si $\forall Q \in E,\ \varphi(P, f(Q)) = 0$.
Mais f étant symétrique, cela est équivalent à $\forall Q \in E,\ \varphi(f(P), Q) = 0$.
En particulier, pour $Q = f(P)$, $\varphi(f(P), f(P)) = 0 \Leftrightarrow \|f(P)\| = 0 \Leftrightarrow P \in \mathrm{Ker}\, f$.
Nous avons donc $(\mathrm{Im}\, f)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\, f$.
Puisque d'autre part, $\dim(\mathrm{Im}\, f)^{\perp} = \dim E - \dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, f$,
il vient $\boxed{\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}.}$

Image
$\mathrm{Im}\, f$ est l'ensemble des $f(Q),\ Q \in E$.

Remarque
Ce résultat reste valable pour tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.

PROBLÈME

1.a. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} y_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} i x_i = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k(k+1)} i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)} i x_i = \sum_{i=1}^{n} i x_i \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i x_i \sum_{k=i}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i x_i \left(\frac{1}{i} - \cancel{\frac{1}{i+1}} + \cancel{\frac{1}{i+1}} - \cancel{\frac{1}{i+2}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} i x_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} i x_i \\
&= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} (n+1) x_i - \sum_{i=1}^{n} i x_i\right) = \boxed{\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) x_i.}
\end{aligned}$$

Classique
Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Somme télescopique.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x_i = \frac{1}{n+1} \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} x_i \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} x_i = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=i}^{n} 1 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) x_i = \boxed{\sum_{k=1}^{n} y_k.}
\end{aligned}$$

1.b. Puisque la série de terme général x_k converge, alors la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$, qui est la suite de ses sommes partielles converge vers $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$.

Et donc en appliquant le résultat admis dans l'énoncé, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k$.

Et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k = \lim_{n \to +\infty} T_n = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\substack{\longrightarrow 1 \\ n \to +\infty}} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k}_{\substack{\longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \\ n \to +\infty}} = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k.$$

Ceci prouve[7] que la série de terme général y_k converge, et que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} y_k = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k.}$

[7] Puisque la suite de ses sommes partielles converge : c'est la définition d'une série convergente.

2.a. La fonction ln est concave sur $\mathbf{R}_+^*$, car dérivable, et de dérivée égale à $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, qui est décroissante.

Par conséquent, pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, on a

$$\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(a_i) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right).$$

Convexité/concavité

Rappelons qu'une fonction dérivable est convexe (resp. concave) si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. décroissante). Il n'est donc pas forcément nécessaire de s'intéresser au signe de la dérivée seconde (lorsque celle-ci existe) pour étudier la convexité.

Et donc par croissance de la fonction exponentielle, il vient

$$\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)\right) = \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} \leqslant \exp\left(\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i.$$

2.b. On a

$$\left(\prod_{k=1}^n kx_k\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^n k\right)^{1/n} \times \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} = (n!)^{1/n}\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} = (n!)^{1/n} z_n.$$

Par la question 2.a, on a

$$\left(\prod_{k=1}^n kx_k\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n kx_k = (n+1)y_n.$$

Et donc

$$z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^n kx_k\right)^{1/k} \leqslant \boxed{\frac{n+1}{(n!)^{1/n}}y_n.}$$

2.c. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave, et donc sa courbe représentative est située en dessous de toutes ses tangentes.

En particulier, sa tangente en $x = 1$ est la droite d'équation $y = x - 1$, de sorte que

$$\forall t > 0,\ \ln(t) \leqslant t - 1.$$

Et donc, pour $t = x + 1$, il vient $\boxed{\ln(1+x) \leqslant x.}$

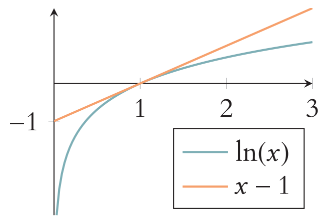


Figure 2– ln et sa tangente en $x = 1$.

2.d. En particulier, pour $x = 1/n$, on a $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$ et donc $n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leqslant 1$.

Par croissance de l'exponentielle, il vient alors

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leqslant e.$$

2.e. On a

$$\prod_{k=1}^n\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^n\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^n (k+1)^k}{\displaystyle\prod_{k=1}^n k^k}$$

Chgt d'indice

$i = k+1$.

$$= \frac{\displaystyle\prod_{i=2}^{n+1} (i)^{i-1}}{\displaystyle\prod_{k=1}^n k^k}$$

On a sorti le terme correspondant à $i = n+1$.

$$= \frac{(n+1)^n \displaystyle\prod_{i=2}^{n} (i)^{i-1}}{\displaystyle\prod_{k=1}^n k^k}$$

$$= (n+1)^n \frac{\prod_{i=2}^{n} i^{i-1}}{\prod_{i=1}^{n} i^{i-1}\times i} = \frac{(n+1)^n}{\prod_{i=1}^{n} i} = \boxed{\frac{(n+1)^n}{n!}.}$$

En particulier, puisque $\forall k \geqslant 1$, $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leqslant e$, il vient $\frac{(n+1)^n}{n!} \leqslant e^n$ et donc[8] $\frac{n+1}{(n!)^{1/n}} \leqslant e$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il vient $0 \leqslant z_n \leqslant e y_n$.
Puisqu'il a été prouvé précédemment que la série de terme général y_n converge, il en est de même de la série de terme général z_n et

[8] Par croissance de la fonction $t \mapsto t^{1/n}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

3.a. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, donc pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et pour $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$,

$$\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) dx \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x)\,dx \leqslant \int_{k}^{(k+1)/n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right) dx = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

3.b. On a

$$\int_{1/n}^{1} \ln(x)\,dx = [x\ln(x)-x]_{1/n}^{1} = -1+\frac{1}{n}-\frac{\ln(1/n)}{n} = -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln(n)}{n}.$$

De plus, en sommant les inégalités de la question 3.a pour k variant de 1 à $n-1$, il vient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\ln(x)\,dx \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Notons que par la relation de Chasles, $\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}\ln(x)\,dx = \int_{1/n}^{1}\ln(x)\,dx$.
Donc en appliquant le résultat de la question précédente, il vient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc d'une part, on a déjà

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

D'autre part,

$$-1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) \iff \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) = -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln n}{n} = -1+\frac{1}{n}.$$

3.c. Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$ par croissance comparée, par le théorème des gendarmes, il vient

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) = -1.$$

Remarque

Ce résultat ressemble beaucoup à une somme de Riemann entre 0 et 1 pour $f(t) = \ln(t)$.

Il s'agit donc à présent de prouver que $\dfrac{e(n!)^{1/n}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Or, on a

$$\frac{e(n!)^{1/n}}{n} = \exp\left(1 + \frac{1}{n}\ln(n!) - \ln(n)\right).$$

Intéressons nous au terme contenu dans l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{n}\ln(n!) - \ln(n) &= 1 + \frac{1}{n}\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) - n\ln(n)\right)\\
&= 1 + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n}\ln(n)\right)\\
&= 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Par continuité de l'exponentielle, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e(n!)^{1/n}}{n} = 1$ de sorte que

$$\boxed{\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}.}$$

Stirling

Si vous connaissez la formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

(qui rappelons-le est hors programme), vous aurez peut-être noté une certaine similarité.
On ne peut toutefois pas passer de l'une à l'autre en élevant à la puissance n : on peut élever des équivalents à une puissance **fixée**, mais pas dépendant de n.

4.a. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} x_n(N) = \boxed{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.}$$

De même, $z_n(N) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n!)^{1/n}} & \text{si } n \in [\![1, N]\!] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ de sorte que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) = \sum_{n=1}^{N} z_n(N) = \boxed{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n!)^{1/n}}.}$$

4.b. Nous avons prouvé que $\dfrac{1}{(n!)^{1/n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}$.
Or, la série de terme général $\dfrac{e}{n}$ diverge, et donc d'après le résultat admis au début de la question 4, les sommes partielles de la série $\sum \dfrac{1}{n}$ sont équivalentes à celles de la série $\sum \dfrac{1}{(n!)^{1/n}}$.
Soit encore

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n!)^{1/n}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{N}\frac{e}{n}.$$

Et donc en particulier, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n(N) \underset{N\to+\infty}{\sim} e\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ de sorte que

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e.}$$

5. Il a été prouvé à la question 2 que $\lambda = e$ convient.
Supposons à présent que λ soit tel que pour tout série $\sum x_n$ convergente et à termes positifs,

$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, et prouvons que $\lambda \geqslant e$.
En particulier, l'inégalité doit être vérifiée pour la suite $(x_n(N))_{n\geqslant 1}$ définie à la question 4, donc

$$\forall N \in \mathbf{N}^*,\ \sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) \Leftrightarrow \forall N \in \mathbf{N}^*,\ \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)} \leqslant \lambda.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, il vient alors

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)} \leqslant \lambda, \text{ soit encore } e \leqslant \lambda.$$

On en déduit que $\boxed{e \text{ est la plus petite des constantes } \lambda \text{ telles que } \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.}$

EDHEC 2011

Exercice 1

Sujet : Polynômes d'endomorphismes et valeurs propres. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : sommes directes,polynômes d'endomorphismes, diagonalisation.

Commentaires : un exercice d'apparence simple, mais qui demande en réalité de l'aisance sur la manipulation des sommes directes et des polynômes d'endomorphismes.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, notée n ($n \in \mathbf{N}^*$) et u un vecteur de E. On note Id l'identité de E.
Si $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$ est un élément de $\mathbf{R}[X]$, on rappelle qu'on désigne par $P(u)$ l'endomorphisme suivant : $P(u) = a_0\mathrm{Id} + a_1u + \cdots + a_pu^p$ où u^k est la composée $\underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$ ($u^0 = \mathrm{Id}$ par convention).

Dans toute la suite, Q est un polynôme qui admet 1 pour racine simple et tel que $Q(u) = 0$. Ainsi, on peut écrire $Q(X) = (X-1)Q_1(X)$ avec $Q_1(1) \neq 0$.

1. Montrer que l'image de $(u - \mathrm{Id})$ est contenue dans $\mathrm{Ker}(Q_1(u))$.
2. On note $E_1 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
   a. Montrer que si $x \in E_1$ alors $Q_1(u)(x) = Q_1(1) \cdot x$.
   b. En déduire que $E_1 \cap \mathrm{Ker}(Q_1(u)) = \{0_E\}$.
   c. En déduire à l'aide du théorème du rang que $E = E_1 \oplus \mathrm{Ker}(Q_1(u))$.
3. Montrer que $Q_1(u) = 0$ si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de u.
4. On suppose dans cette question que $Q(X) = (X-1)(X+2)^2$, que E est de dimension 3 et que 1 est valeur propre de u ; on note E_1 l'espace propre associé à la valeur propre 1.
   Montrer que si la dimension de E_1 est supérieure ou égale à 2, l'endomorphisme u est diagonalisable (on pourra distinguer deux cas, suivant que la dimension de E_1 est égale à 2 ou égale à 3).

Exercice 2

Sujet : Tirages avec remise dans une urne. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : variables aléatoires discrètes, `Scilab`

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue au hasard une suite de tirages simultanés de deux boules de cette urne suivant le protocole suivant :

- À chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les boules tirées dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée.
- Si les deux boules ne portent pas les mêmes numéros, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$ et pour tout entier naturel k non nul, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement ont été nécessaires pour constituer i paires.
On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, T_i est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1. a. Déterminer le nombre d'issues possibles au premier tirage.
   b. Parmi ces issues possibles, combien correspondent à deux boules portant le même numéro ?
2. a. Déterminer la loi de T_1 et reconnaître cette loi.
   b. Donner sans calcul l'espérance de T_1.
3. a. Expliquer pourquoi la fonction `Scilab` suivante, qui prend comme paramètre l'entier n simule le tirage simultané de deux boules dans cette urne.

```
function [a,b] = tirage(n)
  a = grand(1,1,'uin',2,2*n+1) ;
  b = grand(1,1,'uin',2,2*n+1) ;
  while b==a
```

```
    b = grand(1,1,'uin',2,2*n+1) ;
  end
  a = floor(a/2) ;
  b = floor(b/2) ;
endfunction
```

b. Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la variable T_1 :

```
function y = T(n)
  y = 1 ;
  [a,b] = tirage(n) ;
  while *****
    [a,b] = tirage(n) ;
    ******
  end
endfunction
```

4. On pose $X_1 = T_1$ et pour tout i de $[\![2, n]\!]$, $X_i = T_i - T_{i-1}$.
   - **a.** Que représente la variable X_i ?
   - **b.** Déterminer, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la loi de X_i, ainsi que son espérance.
   - **c.** En déduire que T_n admet une espérance et que l'on a $E(T_n) = n^2$.
5. On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent et on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires constituées lors de ces n tirages.
   - **a.** Calculer $P(S_n = 0)$.
   - **b.** Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n = 0)$.
   - **c.** Montrer que $P(S_n = n) = \dfrac{n!2^n}{(2n)!}$.

Exercice 3

Sujet : Étude d'un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$ **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★☆☆

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, polynômes, algèbre bilinéaire.

Commentaires : La question 4 est vraiment très technique et nécessite une très grande autonomie. Le reste est plutôt classique, et on trouvera des exercices similaires et bien plus abordables dans les annales de Lyon.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que, pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbf{R}_n[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\,e^{-t}dt$ est convergente.
2. Montrer que l'application de $\mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}$ définie par
$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$$
est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.
On note alors $\|\cdot\|$ la norme associée.
3. **a.** Soient P et Q deux éléments de $\mathbf{R}_n[X]$, P' et Q' leurs polynômes dérivés respectifs. Établir la relation suivante :
$$\langle P', Q\rangle + \langle P, Q'\rangle = \langle P, Q\rangle - P(0)Q(0).$$
   - **b.** En déduire que si P est un polynôme non constant de $\mathbf{R}_n[X]$, orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur, alors on a $\|P\| = |P(0)|$.
4. On se propose de démontrer dans cette question qu'il existe une unique famille de polynômes $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ vérifiant
$$(\mathscr{R})\begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ \deg L_k = k \\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ L_k(0) = 1 \\ (L_0, L_1, \ldots, L_n) \text{ est une base orthonormée de } \mathbf{R}_n[X] \end{cases}$$

a. On suppose qu'il existe deux familles de polynômes $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ et $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ vérifiant les relations $\mathscr{R}$.
Montrer que, pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$, $L_k = M_k$.

b. On note $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la famille obtenue à partir de la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

i. Justifier, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, la relation $P_k(0) \neq 0$.

ii. En déduire une famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ vérifiant $\mathscr{R}$.

c. Conclure et calculer explicitement L_0 et L_1.

PROBLÈME

Sujet : Deux cas particuliers du théorème de Fisher-Tippett-Gnedenko, avec convergence en loi vers une loi de Gumbel. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : variables à densité, convergence en loi, suites numériques

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : les résultats sont plutôt intéressants. La partie II est assez calculatoire et demande de l'aisance avec les équivalents et les o.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On considère aussi, pour tout entier naturel n non nul la variable aléatoire M_n définie par $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega, \ldots, X_n(\omega))$.
On cherche alors des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est à termes strictement positifs, telles que la suite $\left(\dfrac{M_n - b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire non constante.
La fonction exponentielle sera indifféremment notée $(x \mapsto e^x)$ ou exp.

Partie 1 – La loi exponentielle.

On suppose dans cette partie que la loi commune des X_k est la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(x) = e^{-x}\exp(-e^{-x})$.
   a. Montrer que g est une densité de probabilité. On note G une variable aléatoire admettant g comme densité.
   b. Déterminer la fonction de répartition, notée F_G, de la variable G.
2. **a.** Donner, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable M_n.
   b. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $U_n = \lambda M_n - \ln(n)$. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Partie 2 – La loi normale.

On suppose dans cette partie que la loi commune des X_k est une loi normale centrée réduite. Soit φ la densité de X_1.

3. **a.** Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du$ est convergente et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$P(X_1 > x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du.$$
   b. En déduire que pour tout $x > 0$,
$$\frac{\varphi(x)}{x} - \frac{P(X_1 > x)}{x^2} \leqslant P(X_1 > x) \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}$$
   puis que
$$P(X_1 > x) \leqslant \frac{\varphi(x)}{x} \leqslant P(X_1 > x)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$
4. Soit c un réel strictement positif. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $\dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{c}{n}$ admet sur $]0; +\infty[$ une unique solution que l'on notera x_n.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
6. Montrer que pour tout entier n non nul,
$$x_n^2 + 2\ln x_n = 2\ln n - \ln(2c^2\pi).$$

7. En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation de la question 6, montrer que

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\ln n}.$$

En déduire que l'on peut écrire pour $n \geqslant 2$,

$$x_n = \sqrt{2\ln n} + \varepsilon_1(n) \text{ où } \lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}} = 0.$$

8. a. En utilisant la question 6, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$2\left(\sqrt{2\ln n}\right)\varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}\right) = -\ln(\ln n) - \ln(4\pi c^2).$$

b. En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation du a), montrer que

$$2\varepsilon_1(n)\sqrt{2\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(\ln n).$$

En déduire que

$$\varepsilon_1(n) = -\frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} + \varepsilon_2(n) \text{ où } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_2(n)\left(\frac{2\sqrt{2\ln n}}{\ln(\ln n)}\right) = 0.$$

On admet alors qu'en poursuivant le développement asymptotique, on peut écrire pour tout entier n supérieur à 2 :

$$x_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln n}} - \frac{\ln c}{\sqrt{2\ln n}} + \varepsilon(n)$$

$$\textit{avec} \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n)\sqrt{2\ln(n)} = 0.$$

9. On pose, pour $n \geqslant 2$, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\ln n}}$ et $b_n = \sqrt{2\ln n} - \dfrac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} - \dfrac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2\ln n}}$.
Montrer à l'aide des questions précédentes, que pour tout x réel, et pour tout entier $n \geqslant 2$, en posant $c = e^{-x}$ que :

a.

$$a_n x + b_n = x_n - \varepsilon(n).$$

b.

$$\frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{n}.$$

c. En déduire, en utilisant la question 3.b que $\dfrac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} P(X_1 > a_n x + b_n)$ puis que la suite $\left(\dfrac{M_n - b_n}{a_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable G définie dans la partie 1.

EDHEC 2011 : Corrigé

Exercice 1

1. Soit $y \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = (u - \mathrm{Id})(x)$.
Et alors $[Q_1(u)](y) = [Q_1(u)]\big((u - \mathrm{Id})\big)(x) = Q_1(u) \circ (u - \mathrm{Id})(x) = [Q(u)](x)$.
Mais puisque $Q(u) = 0$, il vient donc $[Q_1(u)](y) = [Q(u)](x) = 0$, de sorte que $y \in \operatorname{Ker}(Q_1(u))$.
Et donc on a bien $\boxed{\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker}(Q_1(u))}$.

Rappel — Si P et Q sont deux polynômes, alors

$$P(u) \circ Q(u) = (P \times Q)(u).$$

En particulier ici

$$Q_1(u) \circ (u - \mathrm{Id}) = (Q_1(X) \times (X - 1))(u).$$

2.a. C'est un résultat de cours : si $x \in E_1$, alors pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$, on a $P(u)(x) = P(1) \cdot x$.
En particulier, $\boxed{Q_1(u)(x) = Q_1(1) \cdot x}$.

2.b. Soit $x \in E_1 \cap \operatorname{Ker}(Q_1(u))$.
Alors, d'après la question précédente, puisque $x \in E_1$, $Q_1(u)(x) = Q_1(1) \cdot x$.
Mais d'autre part, $x \in \operatorname{Ker}(Q_1(u))$, donc $Q_1(u)(x) = 0_E$.
Ainsi, $0 = Q_1(1) \cdot x$, et puisque par hypothèse, $Q_1(1) \neq 0$ c'est donc que $x = 0_E$.
On en déduit que $\boxed{E_1 \cap \operatorname{Ker}(Q_1(u)) = \{0_E\}}$.

2.c. D'après le théorème du rang, on a $\dim E_1 = \dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) = n - \dim \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$.
Or, $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker}(Q_1(u))$, de sorte que $\dim \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(Q_1(u))$.
On en déduit que $\dim E_1 \geqslant n - \dim \operatorname{Ker}(Q_1(u))$, soit encore $\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker}(Q_1(u)) \geqslant n$.
Or, d'après la question 2.b, E_1 et $\operatorname{Ker}(Q_1(u))$ sont en somme directe, et donc

$$\dim(E_1 \oplus \operatorname{Ker}(Q_1(u))) = \dim E_1 + \dim \operatorname{Ker}(Q_1(u)).$$

D'autre part, $E_1 \oplus \operatorname{Ker}(Q_1(u))$ est un sous-espace vectoriel de E, et donc de dimension inférieure ou égale à n, de sorte que $\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker}(Q_1(u)) \leqslant n$.
On en déduit donc que $\dim E_1 + \dim \operatorname{Ker}(Q_1(u)) = n$.
Mais le seul sous-espace vectoriel de E de dimension n est E lui-même : $\boxed{E = E_1 \oplus \operatorname{Ker}(Q_1(u))}$.

Danger ! — Attention à ne pas confondre somme directe et supplémentaires.
Dire que F et G sont en somme directe signifie que $F \cap G = \{0_E\}$, mais pas nécessairement que $F \oplus G = E$, il se peut tout à fait que $F \oplus G$ soit un sous-espace vectoriel de E différent de E.

3. Si 1 n'est pas valeur propre de u, alors $u - \mathrm{Id}$ est inversible. Et donc

$$Q_1(u) = (u - \mathrm{Id})^{-1} \circ (u - \mathrm{Id}) \circ Q_1(u) = (u - \mathrm{Id})^{-1} \circ Q(u) = (u - \mathrm{Id})^{-1} \circ 0 = 0.$$

Inversement, si $Q_1(u) = 0$, alors les valeurs propres de u sont parmi les racines de Q_1. Et puisque $Q_1(1) \neq 0$, 1 n'est pas racine de Q_1 et donc n'est pas valeur propre de u.

4. Si la dimension de E_1 vaut 3, alors $\dim E_1 = \dim E$. Ainsi, $E = E_1 = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et donc $u - \mathrm{Id} = 0$. Donc $u = \mathrm{Id}$, qui est évidemment diagonalisable[1].
Si $\dim E_1 = 2$, on a ici $Q_1(X) = (X + 2)^2$, et donc $\dim\big(\operatorname{Ker}(u + 2\mathrm{Id})^2\big) = 1$.
En particulier, $(u + 2\mathrm{Id})^2$ n'est pas inversible puisque son noyau n'est pas réduit à $\{0_E\}$.
Et donc, $u + 2\mathrm{Id}$ n'est pas inversible non plus
Ainsi, -2 est valeur propre de u, de sorte que $\dim E_{-2} = \dim \operatorname{Ker}(u + 2\mathrm{Id}) \geqslant 1$.
On a alors $\dim E_1 + \dim E_{-2} \geqslant 3 = \dim E$, et donc $\boxed{u \text{ est un endomorphisme diagonalisable.}}$

[1] Puisque sa matrice dans n'importe quelle base de E est la matrice I_3, qui est diagonale.

Détails — Si $u + 2\mathrm{Id}$ était inversible, alors ce serait également le cas de $(u + 2\mathrm{Id})^2$, car une composée d'endomorphismes inversibles est inversible.

Exercice 2

1.a. Notons que tirer deux boules sans remise revient au même que tirer simultanément deux boules de l'urne. Et puisqu'il y a $\dbinom{2n}{2} = \dfrac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ manières de tirer deux boules, le premier tirage possède $\boxed{n(2n-1)}$ issues possibles.

Astuce — Lorsqu'on cherche à dénombrer le nombre d'issues lors de n tirages successifs sans remise, il faut l'assimiler à des tirages simultanés (êtes-vous convaincus qu'il s'agit de la même chose ?), afin de se ramener à des situations dont on a plus l'habitude.

1.b. Il y a un seul tirage comportant les deux boules numérotées 1, un seul comportant les deux boules numérotées $2, \dots$, et donc il y a n tirages correspondant à deux boules portant le même numéro.

2.a. T_1 représente le nombre de tirages nécessaires, dans une urne comportant toujours les $2n$ boules, avant d'obtenir deux boules de la même couleur.
Or, d'après les deux questions précédentes, à chaque tirage, la probabilité d'obtenir deux boules portant le même numéro est $\dfrac{n}{\binom{2n}{2}} = \dfrac{1}{2n-1}$.

Important — Tant qu'on n'a pas de paire, le nombre de boules dans l'urne ne varie pas. C'est de là que vient l'indépendance des tirages.

Par indépendance des différents tirages, on reconnaît une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2n-1}$, et donc

$$\boxed{T_1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{2n-1}\right).}$$

Intuition
La loi géométrique est la loi du temps d'attente du premier succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

2.b. D'après les propriétés générales des lois géométriques, $\boxed{E(T_1) = 2n-1.}$

3.a. Renumérotons les boules de l'urne de sorte que les deux boules numérotées initialement 1 portent à présent les numéros 2 et 3, les deux boules numérotées initialement 2 portent à présent les numéros 4 et 5, etc.
De manière générale, les deux boules portant initialement le numéro i sont à présent porteuses des numéros $2i$ et $2i+1$.
Alors les deux instructions `a=grand...` et `b = grand...` permettent de simuler le tirage (avec remise) de deux boules de l'urne.
La boucle `while` permet si besoin de retirer le numéro de la boule `b` jusqu'à ce qu'il soit différent de celui de la boule `a`. Autrement dit, à l'issue de la boucle `while`, on a simulé le tirage simultané (ou ce qui revient au même, sans remise) de deux boules de cette urne.
Enfin, la commande `a = floor(a/2)` permet de retrouver le numéro initial car $\lfloor 2i \rfloor = \lfloor 2i+1 \rfloor = i$.
La fonction `tirage` retourne donc à la fin un couple `(a,b)` de nombres qui sont les numéros (avant renumérotation) de deux boules tirées sans remise dans l'urne.

Subtilité
À ce stade, `a` et `b` peuvent être égales : on peut avoir tiré deux fois la même boule.

Remarque
Cette question, assez difficile, illustre la difficulté de simuler des tirages sans remise, alors qu'un tirage avec remise est très facile à simuler.

3.b. Il s'agit d'utiliser la fonction `tirage` jusqu'à obtenir deux boules portant des numéros identiques. On n'oubliera pas de compter le nombre de tirages en modifiant au fur et à mesure la valeur de `y`.

```
function y = T(n)
  y=1 ;
  [a,b] = tirage(n) ;
  while a<>b
    [a,b] = tirage(n) ;
    y= y+1 ;
  end
endfunction
```

4.a. X_i représente le nombre de tirages nécessaires après l'obtention de $(i-1)$ paires pour obtenir la i-ème paire.

4.b. Entre l'obtention de la $(i-1)$-ème paire et celle de la i-ème paire, il y a exactement $2(n-i+1)$ boules dans l'urne, et ces boules se répartissent en $n-i+1$ paires de boules portant le même numéro.
Quitte à les renuméroter, on peut suppose que ces boules portent alors des numéros de 1 à $n-i+1$, et on retrouve la situation de la question 1 : X_i suit une loi géométrique $\mathscr{G}\left(\dfrac{1}{2(n-i)+1}\right)$, et donc

$$\boxed{E(X_i) = 2(n-i)+1.}$$

4.c. Notons que

$$T_n = X_n + T_{n-1} = X_n + X_{n-1} + T_{n-2} = \cdots = X_n + \cdots + X_2 + T_1 = X_n + \cdots + X_1.$$

Puisque chacune des X_i possède une espérance, il en est de même de T_n, et

$$E(T_n) = \sum_{i=1}^{n} E(T_i) = \sum_{i=1}^{n} 2(n-i)+1 = 2n^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + n = 2n^2 - n(n+1) + n = \boxed{n^2.}$$

Par cœur !
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$

5.a. Pour $i \in [\![1,n]\!]$ on note A_i l'événement «lors du i-ème tirage, les deux boules tirées portent des numéros distincts». Alors on a

$$[S_n = 0] = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Par la formule des probabilités composées, on a alors

$$P(S_n = 0) = P(A_1)P_{1_A}(A_2)\cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Or, si l'événement $A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1}$ est réalisé, lors du i-ème tirage, la composition de l'urne est encore la même que lors du premier tirage, donc $P_{A_1\cap\cdots\cap A_{i-1}}(A_i) = P(A_1) = 1 - \dfrac{1}{2n-1}$.
On en déduit que

$$P(S_n = 0) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) = \boxed{\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^n}.$$

Danger ! 1^∞ est une forme indéterminée ! Si $u_n \to 1$ et $v_n \to +\infty$, alors pour étudier $\lim u_n^{v_n}$, on repasse par la forme exponentielle : $u_n^{v_n} = e^{v_n \ln(u_n)}$.

5.b. Nous venons de prouver que $P(S_n = 0) = \left(1 - \dfrac{1}{2n-1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)}$.
Un développement limité à l'ordre 1 du logarithme prouve alors que

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) = -\frac{1}{2n-1} + o\left(\frac{1}{2n-1}\right) = -\frac{1}{2n-1} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc

$$n\ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) = -\frac{n}{2n-1} + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

En composant par l'exponentielle (qui est continue), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n = 0) = e^{-1/2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}}.$$

5.c. Notons qu'on ne peut constituer au plus qu'une seule paire à chaque tirage. Donc pour avoir constitué n paires au n-ème tirage (c'est-à-dire pour réaliser l'événement $[S_n = n]$), il faut nécessairement avoir tiré une paire à chacun des n tirages. Ainsi

$$[S_n = 0] = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}.$$

Par la formule des probabilités composées, il vient

$$P(S_n = n) = P\left(\overline{A_1}\right) P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right) \cdots P_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{n-1}}}\left(\overline{A_n}\right).$$

Nous savons déjà que $P\left(\overline{A_1}\right) = \dfrac{1}{2n-1}$.
Pour $i \geqslant 2$, si l'événement $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{i-1}}$ est réalisé, alors il reste $2n - 2(i-1) = 2(n-i+1)$ boules dans l'urne, formant $n-i+1$ paires. Donc lors du i-ème tirage, il y a $\dbinom{2(n-i+1)}{2} = (n-i+1)(2n-2i+1)$ tirages possibles, tous équiprobables, dont $n-i+1$ réalisant l'événement $\overline{A_i}$.
Ainsi,

$$P_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{i-1}}}\left(\overline{A_i}\right) = \frac{n-i+1}{(n-i+1)(2n-2i+1)} = \frac{1}{2n-2i+1}.$$

On en déduit que

$$P(S_n = n) = \frac{1}{2n-1} \times \frac{1}{2n-3} \times \cdots \times \frac{1}{1} = \frac{1}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}.$$

En multipliant haut et bas par $2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n$, on a

$$P(S_n = n) = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2)}{(2n)!} = \frac{2^n \times 1 \times 2 \times \cdots \times n}{(2n)!} = \boxed{\frac{2^n n!}{(2n)!}}.$$

Exercice 3

1. On sait que pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$ converge[2].

Or PQ est un polynôme de $\mathbf{R}_{2n}[X]$, donc de la forme $PQ = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, de sorte que

$$\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt = \sum_{k=0}^{2n} a_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$$

converge comme somme d'intégrales convergentes.

[2] Et cette intégrale vaut $\Gamma(k+1) = k!$

2. Soient $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$. Alors

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t}\,dt = \langle Q, P\rangle.$$

Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.
Soient $P, Q, R \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\langle \lambda P+Q, R\rangle = \int_0^{+\infty} (\lambda P(t)+Q(t))R(t)e^{-t}\,dt = \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t}\,dt + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)\,dt = \lambda\langle P, R\rangle + \langle Q, R\rangle.$$

Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche. Puisqu'elle est symétrique, elle est également linéaire à droite et donc bilinéaire symétrique.
Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$. Alors la fonction $t \mapsto P(t)^2e^{-t}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, donc par croissance de l'intégrale,

$$\langle P, P\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)^2e^{-t}\,dt \geqslant 0.$$

De même, si $\langle P, P\rangle = 0$ alors la fonction $t \mapsto P(t)^2e^{-t}$ est nulle sur $\mathbf{R}_+$. Or, pour tout $t \geqslant 0$, $e^{-t} \neq 0$ et donc alors $P(t)^2 = 0$ et donc $P(t) = 0$.
Alors P possède une infinité de racines : c'est nécessairement le polynôme nul.
Ainsi, $\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbf{R}_n[X].}$

> **Classique !**
> Ce type de produit scalaire à base d'intégrale est ultra-classique, il est indispensable de savoir répondre à une telle question.

> **Rédaction**
> Si l'on veut se passer de prouver qu'elle est linéaire à droite, il faut expliquer que c'est automatique car on a déjà prouvé symétrique, et ne pas se contente de dire qu'elle est linéaire à gauche : la définition de produit scalaire nécessite la bilinéarité, et pas seulement la linéarité à gauche.

3.a. Soit $A > 0$. Alors procédons à une intégration par parties sur le segment $[0, A]$, en posant $u(t) = P(t)$ et $v(t) = Q(t)e^{-t}$, de sorte que u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$. Il vient

$$\begin{aligned}\int_0^A P'(t)Q(t)e^{-t}\,dt &= [P(t)Q(t)e^{-t}]_0^A - \int_0^A P(t)Q'(t)e^{-t}\,dt + \int_0^A P(t)Q(t)e^{-t}\,dt\\ &= P(A)Q(A)e^{-A} - P(0)Q(0) - \int_0^A P(t)Q'(t)e^{-t}\,dt + \int_0^A P(t)Q(t)e^{-t}\,dt\\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} - P(0)Q(0) - \int_0^{+\infty} P(t)Q'(t)e^{-t}\,dt + \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt\end{aligned}$$

> **Rédaction**
> Attention à ne pas écrire
> $$\int_0^{+\infty} = \int_0^A.$$
> Dans un premier temps on travaille donc avec des intégrales entre 0 et A. Les intégrales entre 0 et $+\infty$ n'apparaitront qu'après un passage à la limite $A \to +\infty$.

Donc on en déduit[3] que

$$\langle P', Q\rangle = -P(0)Q(0) + \langle P, Q\rangle - \langle P, Q'\rangle.$$

Soit encore

$$\boxed{\langle P', Q\rangle + \langle P, Q'\rangle = \langle P, Q\rangle - P(0)Q(0).}$$

[3] Car $\langle P, Q\rangle = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$.

3.b. Notons $d = \deg P$. Puisque P est non constant, on a $\deg P \geqslant 1$, et donc $\deg P' = \deg P - 1 < \deg P$.
Et alors, la relation de la question précédente nous donne :

$$\|P\|^2 = \langle P, P\rangle = 2\langle P', P\rangle + P(0)^2.$$

Mais $\deg P' < \deg P$ et donc par hypothèse, P et P' sont orthogonaux, de sorte que $\|P\|^2 = P(0)^2$.
Et alors, $\|P\|$ étant positif, il vient

$$\|P\| = \sqrt{\|P\|^2} = \sqrt{P(0)^2} = \boxed{|P(0)|.}$$

> **Remarque**
> L'hypothèse P non constant est en fait inutile, puisque si P est constant, $P' = 0$ et donc $\langle P, P'\rangle = 0$.

4.a. Supposons donc que deux familles $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ et $(M_0, M_1, \dots, M_n)$ vérifient les hypothèses.
Il est évident que $L_0 = M_0$.
Soit donc $k \in [\![1, n]\!]$. Les familles $(L_0, L_1, \dots, L_{k-1})$ et $(M_0, M_1, \dots, M_{k-1})$ sont libres car sous-familles de bases[4], et puisqu'il s'agit de familles libres de $\mathbf{R}_{k-1}[X]$, de cardinal $k = \dim \mathbf{R}_{k-1}[X]$, ce sont des bases de $\mathbf{R}_{k-1}[X]$.
Et donc, L_k étant orthogonal à $(L_0, L_1, \dots, L_{k-1})$, qui forment une base de $\mathbf{R}_{k-1}[X]$, il est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $k-1$.

> **Précision**
> C'est dans les hypothèses : $L_0 = M_0 = 1$.

[4] qui sont des familles libres

De même, M_k est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $k-1$.
Alors $L_k - M_k$ est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $k-1$ car si $P \in \mathbf{R}_{k-1}[X]$, par linéarité à gauche du produit scalaire, on a

$$\langle L_k - M_k, P\rangle = \langle L_k, P\rangle - \langle M_k, P\rangle = 0 - 0 = 0.$$

Par la question 3.b, si $L_k - M_k$ est non constant, on a

$$\|L_k - M_k\| = |L_k(0) - M_k(0)| = |1-1| = 0.$$

Et donc $L_k - M_k = 0$, ce qui contredit le fait qu'il soit non constant.
Donc $L_k - M_k$ est constant, égal à $\lambda \in \mathbf{R}$. Or en évaluant en 0, il vient

$$\lambda = L_k(0) - M_k(0) = 1 - 1 = 0.$$

Et ainsi, $L_k = M_k$.

4.b.i. La famille obtenue à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt possède la propriété suivante :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^k) = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k).$$

En particulier, $\mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_{k-1}) = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^{k-1}) = \mathbf{R}_{k-1}[X]$.
Mais la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ étant orthonormée, P_k est orthogonal à $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$ et donc orthogonal à tout polynôme de $\mathbf{R}_{k-1}[X]$.
De plus, P_k est de degré k. En effet, on a

$$P_k^* = X^k - \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \langle X^k, P_i\rangle P_i}_{\in \mathbf{R}_{k-1}[X]}.$$

Donc $\deg P_k^* = k$ et donc $\deg P_k = \deg\left(\frac{1}{\|P_k^*\|} P_k^*\right) = \deg P_k = k$.
Ainsi P_k est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur et par conséquent

$$\|P_k\| = |P_k(0)|.$$

Mais par hypothèse[5], $\|P_k\| = 1$, et donc $\boxed{|P_k(0)| \neq 0.}$

4.b.ii. Notons que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de la question précédente vérifie presque toutes les conditions de $\mathscr{R}$, à l'exception peut-être[6] de la troisième.
En effet, on a $\|1\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \Gamma(1) = 0! = 1$, donc $L_0 = \dfrac{1}{\|1\|} = 1$.
Nous avons déjà prouvé dans la question précédente que $\deg L_k = k$ et le dernier point est automatique vérifié puisque le procédé de Gram-Schmidt permet d'obtenir une base orthonormée.

De plus, nous savons déjà que $|P_k(0)| = 1$, donc $P_k(0) = \pm 1$.
Posons alors, pour tout k de $[\![0,n]\!]$, $L_k = \frac{1}{P_k(0)} P_k$.
Alors la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est toujours une base de $\mathbf{R}_n[X]$, et elle est toujours orthogonale car pour $i \neq j$

$$\langle L_i, L_j\rangle = \langle \frac{1}{P_i(0)} P_i, \frac{1}{P_j(0)} P_j\rangle = \frac{1}{P_i(0)P_j(0)} \underbrace{\langle P_i, P_j\rangle}_{=0} = 0.$$

Elle est même orthonormée car

$$\|L_i\| = \left\|\frac{1}{P_i(0)} P_i\right\| = \frac{1}{|P_i(0)|}\|P_i\| = \|P_i\| = 1.$$

On a bien $P_0 = L_0 = 1$ et $\deg L_k = \deg P_k = k$.
Enfin, on a désormais $L_k(0) = \frac{1}{P_k(0)} P_k(0) = 1$.
Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (L_0, L_1, \dots, L_n) \text{ vérifie bien } \mathscr{R}.}$

Rappel
Un vecteur est de norme nulle si et seulement si c'est le vecteur nul, cela fait partie de la définition d'un produit scalaire.

Détails
Ce point fait partie de l'énoncé de Gram-Schmidt, mais est facile à intepréter : à chaque étape, P_i est obtenu comme combinaison linéaire de X^i et des P_k, $k \leqslant i$.

Degré
En général, on a

$$\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$$

mais si $\deg Q < \deg P$, alors

$$\deg(P+Q) = \deg P.$$

Mieux
On peut en fait même aller plus loin et remarquer que $P_k(0) = \pm 1$.

[5] Une famille orthonormée est formée de vecteur de norme 1.

[6] Peut-être qu'elle la vérifie, mais pour l'instant rien ne permet de le garantir.

5. Nous savons qu'il existait au plus une famille vérifiant $\mathscr{R}$, et nous venons d'en construire une, donc l'unique famille de vecteurs vérifiant $\mathscr{R}$ est

$$\left(\frac{1}{P_0(0)}P_0, \frac{1}{P_1(0)}P_1, \dots, \frac{1}{P_n(0)}P_n\right)$$

où $(P_0, \dots, P_n)$ est la famille obtenue à partir de la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
On a $P_0 = 1$, et donc $\boxed{L_0 = 1.}$
De plus, on a

$$P_1^* = X - \langle 1, X\rangle 1 = X - \int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt = X - \Gamma(2) = X - 1.$$

Et donc

$$\|P_1^*\|^2 = \int_0^{+\infty}(t-1)^2e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty}(t^2-2t+1)e^{-t}\,dt = \Gamma(3) - 2\Gamma(2) + \Gamma(1) = 2-2+1 = 1.$$

Donc $P_1 = P_1^* = X - 1$, et alors $P_1(0) = -1$, de sorte que $\boxed{L_1 = 1 - X.}$

PROBLÈME

Partie 1 - La loi exponentielle

1.a. La fonction g est évidemment positive car produit de fonctions positives, et elle est continue sur $\mathbf{R}$. De plus, pour $A < B$, on a

$$\int_A^B g(t)\,dt = \left[e^{-e^{-t}}\right]_A^B = e^{-e^{-B}} - e^{-e^{-A}}.$$

Or, lorsque $A \to -\infty$, $e^{-A} \to +\infty$ et donc $e^{-e^{-A}} \to 0$.
On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{A} g(t)\,dt$ converge et vaut $e^{-e^{-B}}$.
Mais lorsque $B \to +\infty$, alors $e^{-B} \to 0$ et donc $e^{-e^{-B}} \to e^0 = 1$.
Et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ converge et vaut 1. Ainsi, $\boxed{g \text{ est une densité de probabilités.}}$

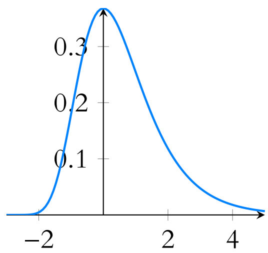


FIGURE 1– La densité g

1.b. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $F_G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t}e^{-e^{-t}}\,dt$.
Or, pour $A < x$, on a

$$\int_A^x e^{-t}e^{-e^{-t}}\,dt = \left[e^{-e^{-t}}\right]_A^x = e^{-e^{-x}} - e^{-e^{-A}} \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} e^{-e^{-x}}.$$

Et donc $\boxed{F_G(x) = e^{-e^{-x}}.}$

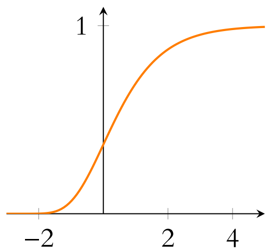


FIGURE 2– La fonction F_G.

2.a. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $[M_n \leqslant x] = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \leqslant x]$, et par indépendance des X_i, il vient donc

$$P(M_n \leqslant x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) = P(X_1 \leqslant x)^n.$$

Et puisque $X_1 \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, on a $P(X_1 \leqslant x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi, il vient

$$\boxed{P(M_n \leqslant x) = \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^n & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2.b. Commençons par déterminer la fonction de répartition de U_n : pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$P(U_n \leqslant x) = P(\lambda M_n - \ln(n) \leqslant x) = P(\lambda M_n \leqslant x + \ln(n)) = P\left(M_n \leqslant \frac{x + \ln n}{\lambda}\right)$$

$$= \begin{cases} \left(1 - e^{-x-\ln n}\right)^n & \text{si } x + \ln n \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{n} e^{-x}\right)^n & \text{si } x \geqslant -\ln n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. Alors pour n suffisamment grand, on aura $x \geqslant -\ln n$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(n) = -\infty$.

Il s'agit donc de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n$. Mais

$$\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)\right).$$

Or, lorsque $n \to +\infty$, $\frac{e^{-x}}{n} \to 0$ et donc $\ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e^{-x}}{n}$.

On en déduit que $n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -e^{-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -e^{-x}$.

Et donc, par continuité de l'exponentielle, $P(M_n \leqslant x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-e^{-x}} = F_G(x)$.

Et donc $\boxed{(M_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge en loi vers une variable aléatoire } X \text{ de densité } g.}$

Forme indet.

On a bien $1 - \frac{e^{-x}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, mais il ne faut pas en déduire que

$$\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \to 1,$$

car 1^∞ est une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on repassera systématiquement par la forme exponentielle.

Partie 2 - La loi normale.

3.a. La fonction $u \mapsto \frac{\varphi(u)}{u^2}$ est continue sur $[x, +\infty[$, donc le seul éventuel problème de convergence est au voisinage de $+\infty$.

Or, pour $u \geqslant 1$, on a $0 \leqslant \frac{\varphi(u)}{u^2} \leqslant \varphi(u)$.

Et puisque $\int_1^{+\infty} \varphi(u)\,du$ converge[7], il en est de même de $\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du$.

On a $P(X_1 > x) = \int_x^{+\infty} \varphi(u)\,du$.

Procédons à une intégration par parties sur un segment de la forme $[x, A]$, $A > x$, en posant $f(u) = \varphi(u)$ et $g(u) = \frac{1}{u}$, qui sont bien deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x, A]$, avec $f'(u) = -u\varphi(u)$ et $g'(u) = -\frac{1}{u^2}$. Alors il vient

$$\begin{aligned}
\int_x^A \varphi(u)\,du &= -\int_x^A f'(u)g(u)\,du \\
&= -[f(u)g(u)]_x^A + \int_x^A f(u)g'(u)\,du \\
&= -\frac{\varphi(A)}{A} + \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^A \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du.
\end{aligned}$$

Lorsque $A \to +\infty$, on a $\frac{\varphi(A)}{A} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-A^2/2}}{A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\int_x^A \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du$.

Et donc

$$P(X_1 > x) = \int_x^{+\infty} \varphi(u)\,du = \lim_{A\to+\infty} \int_x^A \varphi(u)\,du = \boxed{\frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du.}$$

[7] L'intégrale d'une densité converge toujours.

Dérivée

Pour trouver l'expression de φ', il suffit de revenir à la définition :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

puis de dériver.

3.b. Puisque $u \mapsto \frac{\varphi(u)}{u^2}$ est une fonction positive, $\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du \geqslant 0$, et donc $\boxed{P(X_1 > x) \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}.}$

D'autre part, la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ est décroissante, et donc pour $u \in [x, +\infty[$, on a $\frac{1}{u^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$, de sorte que

$$\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{x^2}\,du = \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} \varphi(u)\,du = \frac{P(X_1 > x)}{x^2}.$$

Et donc

$$P(X_1 > x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du \geqslant \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{P(X_1 > x)}{x^2}.$$

On en déduit que $\dfrac{\varphi(x)}{x} \leqslant P(X_1 > x) + \dfrac{P(X_1 > x)}{x^2} = P(X_1 > x)\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$ et donc que

$$\boxed{P(X_1 > x) \leqslant \frac{\varphi(x)}{x} \leqslant P(X_1 > x)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).}$$

4. La fonction $x \mapsto \dfrac{\varphi(x)}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, de dérivée égale à

$$\frac{\varphi'(x)x - \varphi(x)}{x^2} = \frac{-x\varphi(x)x - \varphi(x)}{x^2} = -\frac{\varphi(x)(1 + x^2)}{x^2} < 0.$$

Elle y est donc strictement décroissante.

De plus, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\varphi(x)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = 0$, donc par le théorème de la bijection[8], $x \mapsto \dfrac{\varphi(x)}{x}$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui-même.

Et donc $\boxed{\text{il existe un unique } x_n \in]0; +\infty[\text{ tel que } \dfrac{\varphi(x_n)}{x_n} = \dfrac{c}{n}.}$

[8] Qui s'applique puisqu'il s'agit d'une fonction continue.

5. Notons $g :]0; +\infty[\longrightarrow]0; +\infty[$ la bijection réciproque de $x \mapsto \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.

En particulier, lorsque $n \to +\infty$, $\dfrac{c}{n} \to 0$ et donc $\boxed{x_n = g\left(\dfrac{c}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$

Alternative

Une autre option est de remarquer que (x_n) est croissante (strictement) car $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x}$ est décroissante.
Et alors si (x_n) convergeait vers un réel ℓ, on aurait

$$\frac{c}{n} = \frac{\varphi(x_n)}{x_n} \to \frac{\varphi(\ell)}{\ell} \neq 0.$$

Or, $\frac{c}{n} \to 0$, d'où une contradiction.
Mais une suite croissante non convergente a nécessairement $+\infty$ pour limite.

6. On a $\varphi(x_n) = \dfrac{c}{n} x_n$. Soit encore $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_n^2/2} = \dfrac{c}{n} x_n$.
En prenant le logarithme des deux membres de l'égalité, on a donc

$$-\frac{1}{2}\ln(2\pi) - x_n^2/2 = \ln(c) + \ln(x_n) - \ln(n).$$

Soit encore $\boxed{x_n^2 + 2\ln(x_n) = 2\ln(n) - \ln(2\pi) - 2\ln(c) = 2\ln(n) - \ln(2c^2\pi).}$

7. Puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors, par croissances comparées, $\dfrac{\ln(x_n)}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc $\ln(x_n) = \underset{n\to+\infty}{o}(x_n)$, de sorte que $x_n^2 + 2\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n^2$.
De plus, $\ln(n) \to +\infty$, et donc $2\ln(n) - \ln(2c^2\pi) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n)$.
On en déduit que $x_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n) \Leftrightarrow x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\ln(n)}$.
En posant $\varepsilon_1(n) = x_n - \sqrt{2\ln(n)}$, cela signifie donc que $\varepsilon_1(n) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sqrt{2\ln(n)}\right)$ et donc

$$\boxed{x_n = \sqrt{2\ln n} + \varepsilon_1(n) \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}} = 0.}$$

$\sim$/o

Rappelons que, par définition,

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow v_n = u_n + o(u_n).$$

8.a. En remplaçant x_n par $\sqrt{2\ln n} + \varepsilon_1(n)$ dans l'égalité de la question 6, il vient

$$\left(\sqrt{2\ln(n)} + \varepsilon_1(n)\right)^2 + 2\ln\left(\sqrt{2\ln n} + \varepsilon_1(n)\right) = 2\ln n - \ln(2c^2\pi)$$

$$\Longleftrightarrow \cancel{2\ln n} + 2\left(\sqrt{2\ln n}\right)\varepsilon_1(n) + \varepsilon_1(n)^2 + 2\ln\left(\sqrt{2\ln n}\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}\right)\right) = \cancel{2\ln n} - \ln(2c^2\pi)$$

$$\Longleftrightarrow 2\left(\sqrt{2\ln n}\right)\varepsilon_1(n) + \varepsilon_1(n)^2 + 2\ln(\sqrt{2\ln n}) + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}\right) = -\ln(2c^2\pi)$$

$$\Longleftrightarrow 2\left(\sqrt{2\ln n}\right)\varepsilon_1(n) + \varepsilon_1(n)^2 + \ln(2\ln n) + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}\right) = -\ln(2c^2\pi)$$

$$\Longleftrightarrow 2\left(\sqrt{2\ln n}\right)\varepsilon_1(n) + \varepsilon_1(n)^2 + \ln(2) + \ln(\ln n) + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}\right) = -\ln(2c^2\pi)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{2\left(\sqrt{2\ln n}\right)\varepsilon_1(n) + \varepsilon_1(n)^2 + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}\right) = -\ln(\ln n) - \ln(4c^2\pi).}$$

Détail

$$\ln(\sqrt{2\ln n}) = \frac{1}{2}\ln(2\ln n).$$

Détail

$$\ln(2\ln n) = \ln(2) + \ln(\ln n).$$

8.b. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}} = 0$, alors $\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}$.
En particulier, $\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\left(\sqrt{2\ln n}\right)\varepsilon_1(n)\right)$.
De même, $\dfrac{\varepsilon_1(n)^2}{\sqrt{2\ln n}\,\varepsilon_1(n)} = \dfrac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\varepsilon_1(n)^2 = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sqrt{2\ln n}\,\varepsilon_1(n)\right)$ et donc

$$2\left(\sqrt{2\ln n}\right)\varepsilon_1(n)+(\varepsilon_1(n))^2+2\ln\left(1+\frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln n}}\right) = 2\left(\sqrt{2\ln n}\right)\varepsilon_1(n)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\left(\sqrt{2\ln n}\right)\varepsilon_1(n)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{2\ln n}\,\varepsilon_1(n).$$

De plus, on a $\ln(\ln n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc

$$-\ln(\ln n) - \ln(4\pi c^2) = -\ln(\ln n) + o(\ln\ln n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(\ln n).$$

Ainsi, en prenant un équivalent de chaque membre de l'égalité de 8.a, il vient $\boxed{2\varepsilon_1(n)\sqrt{2\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(\ln n).}$

Et donc $\varepsilon_1(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}}$, de sorte que

$$\varepsilon_2(n) = \varepsilon_1(n) + \frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}}\right).$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\varepsilon_1(n) = -\frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2\ln n}} + \varepsilon_2(n) \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_2(n)\left(\frac{2\sqrt{2\ln n}}{\ln(\ln n)}\right) = 0.}$$

9. *La formulation de cette question peut prêter à confusion. Tout ce qui a été fait dans les questions 4 à 8 est valable quel que soit $c > 0$, mais le x_n en question dépend alors du choix de c.*
Dans cette question, on commence par fixer un réel x, on pose $c = e^{-x}$, et alors x_n est l'unique réel tel que $\dfrac{\varphi(x_n)}{x_n} = \dfrac{c}{n} = \dfrac{e^{-x}}{n}$.

9.a. D'après ce qui précède, on a $x_n = b_n - a_n\ln(c) + \varepsilon(n)$.
Mais $c = e^{-x}$, de sorte que $\ln(c) = -x$, et donc

$$\boxed{a_n x + b_n = x_n - \varepsilon(n).}$$

9.b. Notons que $\varepsilon(n) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\ln(n)}}\right)$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.
Or, on a

$$\begin{aligned}\varphi(a_n x + b_n) = \varphi(x_n - \varepsilon(n)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x_n-\varepsilon(n))^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_n^2} e^{x_n\varepsilon(n)} e^{-\varepsilon(n)^2/2}\\ &= \varphi(x_n)e^{x_n\varepsilon(n)}e^{-\varepsilon(n)^2/2}.\end{aligned}$$

Mais $x_n\varepsilon(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon(n)\sqrt{2\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ de sorte que $e^{x_n\varepsilon(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
De même, $e^{-\varepsilon(n)^2/2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et donc $\varphi(a_n x + b_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi(x_n)$.
D'autre part, d'après la question précédente, $a_n x + b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$ et donc

$$\frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x_n)}{x_n} = \boxed{\frac{e^{-x}}{n}.}$$

> **Équivalent**
> Le plus simple pour prouver un équivalent en cas de doute est de revenir au quotient. Ici, on a
> $\dfrac{\varphi(a_n x + b_n)}{\varphi(x_n)} = e^{x_n\varepsilon(n)-\varepsilon(n)^2/2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

9.c. D'après la question 3.b, on a

$$1 \leqslant \frac{\varphi(x)}{xP(X_1 > x)} \leqslant 1 + \frac{1}{x^2}$$

de sorte que, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{xP(X_1 > x)} = 1$ et donc $P(X_1 > x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{x}$.
Mais puisque $x_n \to +\infty$, $a_n x + b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc

$$\boxed{P(X_1 > a_n x + b_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n}.}$$

Soit à présent $x \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) &= P(M_n \leqslant a_n x + b_n) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant a_n x + b_n)\\
&= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant a_n x + b_n]\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant a_n x + b_n)\\
&= (1 - P(X_1 > a_n x + b_n))^n = \exp\left(n \ln\left(1 - P(X_1 > a_n x + b_n)\right)\right).
\end{aligned}$$

Par indépendance des X_i.

Or, puisque $P(X_1 > a_n x + b_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{n}$, on a $P(X_1 > a_n x + b_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ de sorte que

$$\ln(1 - P(X_1 > a_n x + b_n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} -P(X_1 > a_n x + b_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{e^{-x}}{n}.$$

Détail

$\ln(1+x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x.$

Et donc $n \ln(1 - P(X_1 > a_n x + b_n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} -e^{-x}$ et alors, par composition de limites,

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \ln(1 - P(X_1 > a_n x + b_n))\right) = e^{-e^{-x}}.$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = e^{-e^{-x}} = F_G(x)$.

Et donc $\boxed{\dfrac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathscr{L}} G}$, où G est la variable qui a été définie à la partie 1.

EDHEC 2010

Exercice 1

Sujet : Étude d'une fonction de n variables — **Moyen**

Abordable en première année : ✗ — **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : calcul différentiel d'ordre 1 et 2, diagonalisation

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère la fonction f_n définie, pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ de l'ouvert $U =]0, +\infty[^n$ par :

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) = (x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right).$$

1. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
2. Montrer que f_n possède une infinité de points critiques $(a_1, \ldots, a_n)$ et les déterminer.
3. a. Déterminer les dérivées partielles secondes de f_n.
   b. Vérifier que la hessienne H_n de f_n en un point critique quelconque de f_n est proportionnelle à la matrice $K_n = nI_n - J_n$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les éléments valent 1.
4. a. Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre de J_n.
   b. À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n puis celles de K_n.
   c. Montrer que l'on ne peut pas, de cette façon, conclure à l'existence d'un extremum local de f_n sur U.
5. **Étude du cas $n = 2$.**
   a. Comparer les réels $(x_1 + x_2)^2$ et $4x_1x_2$.
   b. En déduire que f_2 admet sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ un minimum global et donner sa valeur.
6. **Étude du cas général.**
   On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbf{R}^n$, montrer que f_n admet un minimum global sur U, égal à n^2.

Exercice 2

Sujet : Étude d'une famille d'endomorphismes symétriques — **Facile**

Abordable en première année : ✗ — **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire et bilinéaire, endomorphismes symétriques, projecteurs orthogonaux

On se place dans un espace euclidien E de dimension n, où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Le produit scalaire des vecteurs x et y est noté $(x|y)$ et la norme de x est notée $\|x\|$
On désigne par Id l'endomorphisme identique de E.
On considère un vecteur u de E dont la norme est égale à 1, un réel λ non nul et on note f_λ l'application qui, à tout vecteur x de E associe $f_\lambda(x) = \lambda(x|u)u + x$.

1. Donner la dimension de $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$.
2. Montrer que f_λ est un endomorphisme de E.
3. Montrer que le polynôme $X^2 - (\lambda + 2)X + (\lambda + 1)$ est un polynôme annulateur de f_λ.
4. a. Montrer que f_λ est un endomorphisme symétrique de E.
   b. Déterminer $f_\lambda(u)$ et $f_\lambda(v)$, pour tout vecteur v de $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$.
   c. Établir alors que f_λ possède deux valeurs propres distinctes et donner les sous-espaces propres associés à ces deux valeur propres.
5. Dans cette question on suppose que $\lambda = -1$.
   a. Vérifier que f_{-1} est un projecteur.
   b. Montrer plus précisément que f_{-1} est le projecteur orthogonal sur $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$.

Exercice 3

Sujet : Valeur absolue de la différence de deux lois uniformes : la loi de Xenakis **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : variables à densité, produit de convolution.

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$.

On pose $Z = |X - Y|$ et on admet que $-Y, X - Y$ et Z sont des variables aléatoires à densité définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. a. Déterminer une densité de $-Y$.

   b. En déduire que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

2. a. Exprimer la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z en fonction de G.

   b. En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.
4. Écrire une fonction `Scilab` simulant la variable Z.

Problème — Non relu

Sujet : Convergence complète des variables aléatoires **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★☆☆

Thèmes du programme abordés : variables aléatoires discrètes, convergence en probabilité

Commentaires : la dernière question est fausse, et donc l'ensemble de la seconde partie perd son intérêt !

Préliminaire : un résultat utile pour la partie 2.

1. a. Montrer que, pour tout k de $\mathbf{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2. Montrer enfin que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$

Partie 1 : convergence complète.

1. Soit une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et une variable aléatoire X, elle aussi définie sur cet espace probabilisé.
   On suppose que la suite (X_n) converge complètement vers X, c'est à dire que, pour tout réel ε strictement positif, la série de terme général $P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon)$ est convergente.
   Montrer que la suite (X_n) converge en probabilité vers X.
2. On se propose dans cette question d'étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse.
   Pour ce faire, on considère une suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\frac{1}{n}$.

a. Déterminer la probabilité $P(Y_n \geqslant 1)$.

b. Soit ε un réel strictement positif. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leqslant P(Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant 1 - e^{-\frac{1}{n}}$.

c. En déduire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle.

d. Utiliser la valeur de $P(Y_n \geqslant 1)$ pour en déduire que la suite (Y_n) ne converge pas complètement vers la variable certaine nulle.

Partie 2 : étude d'un exemple.

Dans cette partie, on considère une suite $(B_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et telles que, pour tout entier naturel k non nul, B_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{\sqrt{k}}$. On suppose que les variables aléatoires B_k sont mutuellement indépendantes.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} B_k$ et $Z_n = \frac{S_n}{E(S_n)}$ et on admet que les variables aléatoires S_n et Z_n sont, elles aussi, définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. a. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, donner sous forme de sommes les expression de $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

   b. Vérifier que $V(S_n) \leqslant E(S_n)$.

2. a. Montrer que $P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)}$.

   b. Établir que la suite (Z_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à 1.

3. À l'aide de l'inégalité établie à la question 2.a de cette même partie, montrer que la série de terme général $P(|Z_{n^4} - 1| \geqslant \varepsilon)$ est convergente.

4. On désigne par e_n la partie entière de $n^{\frac{1}{4}}$, et on a donc : $e_n^4 \leqslant n < (e_n + 1)^4$.

   a. Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on a :

$$\frac{S_{e_n^4}}{E\left(S_{(e_n+1)^4}\right)} \leqslant Z_n \leqslant \frac{S_{(e_n+1)^4}}{E\left(S_{e_n^4}\right)}.$$

   b. En déduire que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on a :

$$\frac{E\left(S_{e_n^4}\right)}{E\left(S_{(e_n+1)^4}\right)} Z_{e_n^4} \leqslant Z_n \leqslant \frac{E\left(S_{(e_n+1)^4}\right)}{E\left(S_{e_n^4}\right)} Z_{(e_n+1)^4}.$$

5. a. Établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{E\left(S_{(e_n+1)^4}\right)}{E\left(S_{e_n^4}\right)} = 1$.

   b. En déduire que, pour tout réel ε strictement positif et pour n assez grand, on a :

$$\frac{E\left(S_{(e_n+1)^4}\right)}{E\left(S_{e_n^4}\right)} \leqslant 1 + \varepsilon \text{ et } \frac{E\left(S_{e_n^4}\right)}{E\left(S_{(e_n+1)^4}\right)} \geqslant \frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$$

   c. Montrer que, pour tout réel ε strictement positif et pour n assez grand, on a :

$$[Z_n \leqslant 1 - \varepsilon] \subset [Z_{e_n^4} - 1 \leqslant -\varepsilon^2] \text{ et } [Z_n \geqslant 1 + \varepsilon] \subset \left[Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

   d. En déduire alors que, pour tout réel ε strictement positif et pour n assez grand, on a :

$$P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\left(\left|Z_{(e_n+1)^4} - 1\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\left|Z_{e_n^4} - 1\right| \geqslant \varepsilon^2\right).$$

   e. Conclure qu'effectivement, la suite (Z_n) converge complètement vers la variable certaine égale à 1.

EDHEC 2010 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. La fonction $(x_1,\dots,x_n)\mapsto \sum_{i=1}^n x_i$ est de classe $\mathscr{C}^2$ car polynomiale.

Pour tout i, la fonction $(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_i$ est $\mathscr{C}^2$ car polynomiale et ne s'annule pas sur $]0,+\infty[^n$, de sorte que $(x_1,\dots,x_n)\mapsto \dfrac{1}{x_i}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^n$.

Et donc $(x_1,\dots,x_n)\mapsto \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{x_i}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U car somme de fonctions $\mathscr{C}^2$.

Alors $\boxed{f_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } U}$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

2. Les dérivées partielles de f_n sont données par

$$\forall j\in[\![1,n]\!], \forall (x_1,\dots,x_n)\in U,\ \partial_j f_n(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_j^2}\sum_{i=1}^n x_i.$$

En particulier, $(x_1,\dots,x_n)$ est un point critique de f_n si et seulement si

$$\forall j\in[\![1,n]\!], \sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}=\frac{1}{x_j^2}\sum_{i=1}^n x_i.$$

Il vient alors, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$,

$$x_j^2=\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \text{ puis[1] } x_j=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}}.$$

[1] x_j est positif par définition de U.

Par conséquent, si $(x_1,\dots,x_n)$ est un point critique, alors $x_1=\dots=x_n$.

Inversement, si $x_1=\dots=x_n=a$, alors on a

$$\forall j\in[\![1,n]\!], \partial_j f_n(a,\dots,a)=\sum_{i=1}^n\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^n a=\frac{n}{a}-\frac{na}{a^2}=0.$$

Et donc $(a,\dots,a)$ est bien un point critique de f_n.

Ainsi, $\boxed{f_n \text{ possède une infinité de points critiques, qui sont les } (a,\dots,a), a\in\mathbf{R}_+^*.}$

> **Méthode**
> Ici, nous n'avons pas travaillé avec des équivalences, nous avons seulement montré qu'un point critique possédait toutes ses coordonnées égales. Il est indispensable de s'assurer que tous les points dont les coordonnées sont égales sont bien des points critiques de f, peut-être n'est-ce pas le cas !

3.a. On a, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$,

$$\boxed{\partial^2_{j,j}f_n(x_1,\dots,x_n)=-\frac{1}{x_j^2}-\frac{1}{x_j^2}+\frac{2}{x_j^3}\sum_{i=1}^n x_i.}$$

Et si $k\neq j$, alors

$$\boxed{\partial^2_{j,k}f_n(x_1,\dots,x_n)=-\frac{1}{x_k^2}-\frac{1}{x_j^2}.}$$

> **Astuce**
> En cas de difficultés pour donner une formule générale pour les dérivées partielles secondes, il est possible de calculer $\partial^2_{1,1}$, $\partial^2_{2,2}$ et de constater qu'il y a un «motif» général qui se dessine pour les $\partial^2_{i,i}$.
> De même pour les dérivées croisées, calculer $\partial^2_{1,2}$ et $\partial^2_{2,3}$ (par exemple) peut permettre de «deviner» la formule générale.
> A priori, si on demande de calculer les dérivées partielles d'une fonction de n variables, avec n quelconque, c'est que $x_1,\dots,x_n$ doivent jouer des rôles «symétriques».

3.b. Soit $(a,\dots,a)$ un point critique de f_n. Alors, en vertu des calculs de la question précédente, on a

$$\forall j\in[\![1,n]\!], \partial^2_{j,j}f_n(a,\dots,a)=-\frac{2}{a^2}+\frac{2}{a^3}na=\frac{2}{a^2}(n-1).$$

Et si $k\neq j$, alors

$$\partial^2_{j,k}f_n(a,\dots,a)=-\frac{2}{a^2}.$$

Ainsi, la matrice hessienne de f_n en $(a,\dots,a)$ est donnée par

$$\nabla^2 f_n(a,\dots,a)=\frac{2}{a^2}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1\\ -1 & n-1 & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ -1 & \dots & -1 & n-1\end{pmatrix}=\boxed{\frac{2}{a^2}(nI_n-J_n)=\frac{2}{a^2}K_n.}$$

4.a. Les colonnes de J_n sont toutes égales, et non nulles, donc le rang de J_n qui est égal au rang de la famille de ses vecteurs colonnes vaut 1.
On en déduit que 0 est vecteur propre de J_n et que

$$\boxed{\dim E_0(J_n) = n - \operatorname{rg}(J_n) = n - 1.}$$

> **Rédaction** ✎
> Il n'est pas inutile de remarquer que les colonnes sont non nulles, car une matrice dont toutes les colonnes seraient égales à la colonne nulle n'est pas de rang 1, mais de rang 0 !

4.b. J_n est symétrique réelle, donc diagonalisable.
Puisque nous avons déjà une valeur propre avec un sous-espace propre de dimension $n-1$, J_n possède exactement une autre valeur propre, que nous noterons λ, avec un sous-espace propre de dimension 1.
Mais alors $\operatorname{tr}(J_n) = (n-1)\times 0 + \lambda$, et puisque $\operatorname{tr}(J_n) = n$, alors $\lambda = n$.
Ainsi, $\operatorname{Spec}(J_n) = \{0, n\}$.
Par conséquent, il existe une matrice inversible P telle que

$$J_n = P^{-1}\operatorname{diag}\Big(\underbrace{0,\dots,0}_{(n-1)\text{ fois}}, n\Big)P.$$

Et alors

$$K_n = nI_n - J_n = P^{-1}nI_nP - P^{-1}\operatorname{diag}\Big(\underbrace{0,\dots,0}_{(n-1)\text{ fois}}, n\Big)P = P^{-1}\operatorname{diag}\Big(\underbrace{n,\dots,n}_{(n-1)\text{ fois}}, 0\Big)P.$$

> **☠ Danger !**
> En général, on ne peut affirmer que les valeurs propres de $A-B$ sont les valeurs propres de A moins les valeurs propres de B.
> Dans le cas particulier où, comme ici, $A = I_n$, on peut utiliser le fait que quelle que soit la matrice inversible P, on a
> $$I_n = P^{-1}I_nP.$$

Ainsi, K_n est semblable à une matrice diagonale : K_n est diagonalisable, et ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux de cette matrice diagonale, c'est-à-dire

$$\boxed{\operatorname{Spec}(K_n) = \{n, 0\}.}$$

4.c. Si $(a,\dots,a)$ est un point critique de f_n, alors $\nabla^2 f_n(a,\dots,a) = \dfrac{2}{a^2}K_n$, de sorte que les valeurs propres de la hessienne sont celles de K_n multipliées par $\dfrac{2}{a^2}$. Ainsi

$$\boxed{\operatorname{Spec}\left(\nabla^2 f_n(a,\dots,a)\right) = \left\{0, \frac{2n}{a^2}\right\}.}$$

Les valeurs propres de la hessienne sont toutes positives, mais 0 est valeur propre : nous sommes donc exactement dans le cas où une étude de la hessienne ne permet pas de conclure quant à la nature des points critiques.

5. **Étude du cas $n = 2$**

5.a. On a

$$(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1-x_2)^2 \geqslant 0.$$

Et donc $\boxed{4x_1x_2 \leqslant (x_1+x_2)^2.}$

5.b. Pour $(x_1, x_2) \in]0, +\infty[^2$, on a

$$f_2(x_1,x_2) = (x_1+x_2)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = \frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2} \geqslant \frac{4x_1x_2}{x_1x_2} = 4.$$

Or, pour tout $a > 0$,

$$f_2(a,a) = 2a \times \frac{2}{a} = 4.$$

$\boxed{\text{Donc } f_2 \text{ admet sur }]0,+\infty[^2 \text{ un minimum global égal à 4, atteint en tout point critique.}}$

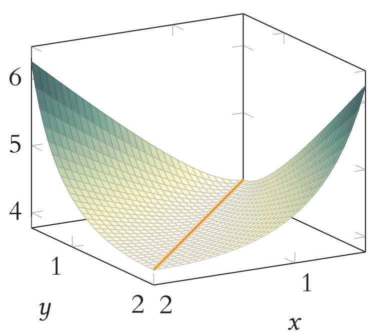


FIGURE 1– La fonction f_2 et sa demi-droite de points critiques.

6. Étude du cas général

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in U$. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ $x = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$. Alors

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}^2}\right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right) = f_n(x_1, \dots, x_n).$$

Cauchy-Schwarz
Sans plus de précisions, cela signifie qu'on applique Cauchy-Schwarz dans $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Or,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\frac{1}{\sqrt{x_i}} = \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

Et donc on a bien

$$f_n(x_1, \dots, x_n) \geqslant n^2.$$

Reste à prouver que cette valeur n^2 est bien le minimum de f_n et pas seulement un minorant, c'est-à-dire qu'il s'agit bien d'une valeur prise par la fonction.
Mais pour tout $a > 0$, $f_n(a, \dots, a) = na \times \frac{n}{a} = n^2$.

$\boxed{\text{Ainsi, } f_n \text{ admet bien un minimum global sur } U\text{, et ce minimum global est atteint en chacun des points critiques.}}$

EXERCICE 2

1. $\mathrm{Vect}(u)$ est de dimension 1 car u est non nul[2], et donc

$$\dim(\mathrm{Vect}(u))^\perp = \dim E - \dim \mathrm{Vect}(u) = \boxed{n-1.}$$

[2] Car $\|u\| \neq 0$.

2. Il est clair que f_λ est à valeurs dans E, il s'agit donc de montrer que f_λ est linéaire.
Soient donc $x, y, \in E$ et $\mu \in \mathbf{R}$. Alors

$$f_\lambda(\mu x+y) = \lambda(\mu x+y|u)u+\mu x+y = \lambda(\mu(x|u)+(y|u))u+\mu x+y = \mu\left(\lambda(x|u)u + x\right)+\lambda(y|u)u+y = \mu f_\lambda(x)+f_\lambda(y).$$

Ainsi, $\boxed{f_\lambda \text{ est bien un endomorphisme de } E.}$

3. Soit $x \in E$. On a alors

$$\begin{aligned} f_\lambda^2(x) &= f_\lambda(\underbrace{\lambda(x|u)}_{\in\mathbf{R}}u + x) = \lambda(x|u)f_\lambda(u) + f_\lambda(x) \\ &= \lambda(x|u)\left(\lambda\underbrace{(u|u)}_{=1}u + u\right) + \lambda(x|u)u + x = \lambda^2(x|u)u + 2\lambda(x|u)u + x. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$(\lambda+2)f_\lambda(x) - (\lambda+1)x = \lambda^2(x|u)u + \lambda x + 2\lambda(x|u)u + 2x - (\lambda+1)x = \lambda^2(x|u)u + 2\lambda(x|u)u + x.$$

On a donc $f_\lambda^2(x) - (\lambda+2)f_\lambda(x) + (\lambda+1)\mathrm{id}_E(x) = 0$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, il vient donc $f_\lambda^2 - (\lambda+2)f_\lambda + (\lambda+1)\mathrm{id}_E = 0$.
Et alors $\boxed{X^2 - (\lambda+2)X + (\lambda+1) \text{ est un polynôme annulateur de } f_\lambda.}$

4.a. Soient $x, y \in E$. On a

$$(f_\lambda(x)|y) = (\lambda(x|u)u + x|y) = \lambda(x|u)(u|y) + (x|y).$$

Ceci étant vrai pour tout x, y, en inversant le rôle de x et y, on a

$$(x|f_\lambda(y)) = (f_\lambda(y)|x) = \lambda(y|u)(x|u) + (y|x) = (f_\lambda(x)|y).$$

Donc $\boxed{f_\lambda \text{ est un endomorphisme symétrique de } E.}$

4.b. On a $f_\lambda(u) = \lambda(u|u)u + u = \lambda u + u = \boxed{(\lambda+1)u.}$
Et si $v \in (\mathrm{Vect}\, u)^\perp$, alors

$$f_\lambda(v) = \lambda(v|u)u + v = \boxed{v.}$$

4.c. Notons que le polynôme annulateur obtenu précédemment a pour racines $\lambda+1$ et 1.
Donc les seules valeurs propres possibles de f_λ sont $\lambda+1$ et 1.
Mais nous venons de prouver que $f_\lambda(u)=(\lambda+1)u$, donc, puisque $u\neq 0$, $\lambda+1$ est bien valeur propre, et $\mathrm{Vect}(u)\subset E_{\lambda+1}(f_\lambda)$.
De même, si $v\in(\mathrm{Vect}(u))^\perp$, alors $f_\lambda(v)=v$, donc 1 est bien[3] valeur propre de f_λ, et $(\mathrm{Vect}(u))^\perp\subset E_1(f_\lambda)$.
Puisque $\lambda\neq 0$, on a donc deux valeurs propres distinctes, avec $\dim E_{\lambda+1}(f_\lambda)\geqslant 1$ et $\dim E_1(f_\lambda)\geqslant n-1$.
Mais comme f_λ est diagonalisable[4], on a $\dim E_{\lambda+1}(f_\lambda)+\dim E_1(f_\lambda)=n$, et donc

$$\dim E_{\lambda+1}(f_\lambda)=1 \text{ et } \dim E_1(f_\lambda)=n-1.$$

On en déduit donc que $\boxed{E_{\lambda+1}(f_\lambda)=\mathrm{Vect}(u) \text{ et } E_1(f_\lambda)=(\mathrm{Vect}(u))^\perp.}$

Danger ! Rappelons (une fois encore) que les racines du polynôme annulateur ne sont pas nécessairement toutes des valeurs propres. Il faut vérifier une par une si elles sont valeurs propres ou non.

[3] $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ n'est pas réduit au vecteur nul.

[4] Car symétrique.

5.a. Le polynôme annulateur de f_{-1} obtenu précédemment est alors $X^2-X+0=X^2-X$.
On a donc $f_{-1}^2=f_{-1}$: $\boxed{f_{-1} \text{ est un projecteur.}}$

Alternative On peut aussi remarquer que f_{-1} est diagonalisable et ne possède que 0 et 1 comme valeurs propres ,ce qui est une caractérisation des projecteurs.

5.b. Puisque f_{-1} est à la fois un projecteur et un endomorphisme symétrique, c'est un projecteur orthogonal.
D'après la question 4.c, on a alors $E_1(f_{-1})=(\mathrm{Vect}(u))^\perp$.
Et donc $\boxed{f_{-1} \text{ est le projecteur orthogonal sur } (\mathrm{Vect}(u))^\perp.}$

Rappel Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $E_1(p)=F$ et $E_0(p)=\mathrm{Ker}\,p=G$.

Exercice 3

1.a. Une densité de Y est $f_Y : x\mapsto\begin{cases}\frac{1}{a} & \text{si } x\in[0,a]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ Donc par transformation affine, une densité de $-Y$ est

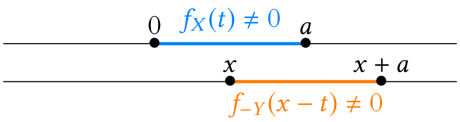
$$f_{-Y}:x\mapsto\frac{1}{|-1|}f_Y(-x)=\begin{cases}\frac{1}{a} & \text{si } -x\in[0,a]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{a} & \text{si } -a\leqslant x\leqslant 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Autrement dit $-Y$ suit la loi uniforme sur $[-a,0]$, et on pouvait obtenir ce résultat par transformation affine de loi uniforme.

1.b. Les variables X et $-Y$ sont indépendantes, donc par convolution, une densité de $X-Y=X+(-Y)$ est donnée par

$$g:x\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(t)f_{-Y}(x-t)\,dt.$$

On a $f_X(t)\neq 0\Leftrightarrow 0\leqslant t\leqslant a$ et $f_{-Y}(x-t)\neq 0\Leftrightarrow -a\leqslant x-t\leqslant 0\Leftrightarrow x\leqslant t\leqslant x+a$.



Ainsi, si $x\leqslant -a$, on a $g(x)=0$. Et de même si $x\geqslant a$.
Pour $x+a\in[0,a]\Leftrightarrow x\in[-a,0]$, on a

$$g(x)=\int_0^{x+a}f_X(t)f_{-Y}(x-t)\,dt=\int_0^{x+a}\frac{1}{a^2}\,dt=\frac{x+a}{a^2}.$$

Support Ce résultat est prévisible si on s'intéresse au support : $X-Y$ prend ses valeurs dans $[-a;a]$.

Et si $0\leqslant x\leqslant a$, alors

$$g(x)=\int_x^a f_X(t)f_{-Y}(x-t)\,dt=\frac{a-x}{a^2}.$$

Notons que pour $-a\leqslant x\leqslant 0$, on a bien $x+a=a+x=a-(-x)=a-|x|$. Et donc une densité de $X-Y$ est donnée par

$$\boxed{g(x)=\begin{cases}\frac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x\in[-a,a]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$$

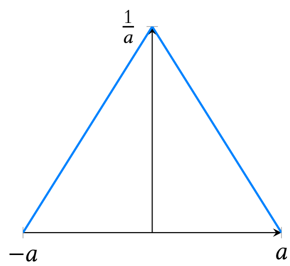


Figure 2– La densité g.

2.a. Il est évident que Z ne prend que des valeurs positives. Et donc, pour $x < 0$, on a

$$H(x) = F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = 0.$$

Pour $x \geqslant 0$, alors on a

$$\begin{aligned} H(x) = F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P(|X-Y| \leqslant x) &= P(-x \leqslant X - Y \leqslant x) \\ &= P(X-Y \leqslant x) - P(X-Y < -x) = G(x) - G(-x). \end{aligned}$$

Densité
On a

$$P(X-Y<-x) = P(X-Y \leqslant -x) = G(-x)$$

car $X-Y$ est une variable à densité.

2.b. G est continue sur $\mathbf{R}$ en tant que fonction de répartition d'une variable à densité. Donc H est continue sur $[0; +\infty[$, et elle l'est évidemment sur $\mathbf{R}_-^*$.
Comme on a de plus $H(0) = 0 = \lim\limits_{x \to +^-} H(x)$, alors H est continue en 0, et donc sur $\mathbf{R}$.
Il est évident que F_Z est dérivable sur $\mathbf{R}_-^*$, de dérivée nulle.
La densité g que nous avons obtenue précédemment est continue sur $]-\infty, a[$, sur $]-a, a[$ et sur $]a; +\infty[$, donc G est dérivable sur ces intervalles, avec $G'(x) = g(x)$.

Ainsi, F_Z est dérivable sur $\mathbf{R}$, sauf peut-être en $-a$ en 0 et en a. On a alors

$$\forall x \notin \{-a, 0, a\},\ F_Z'(x) = G'(x) + G'(-x) = g(x) + g(-x).$$

Toute fonction qui coïncide avec F_Z' là où celle-ci est définie est une densité de Z. On peut donc prendre la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} g(x) + g(-x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons alors que g est paire, de sorte que $g(x) + g(-x) = 2g(x)$. Et donc une densité de Z est

$$h(x) = \begin{cases} 2g(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \boxed{\begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Pour la culture
La loi ainsi obtenu s'appelle loi de Xenakis de paramètre a

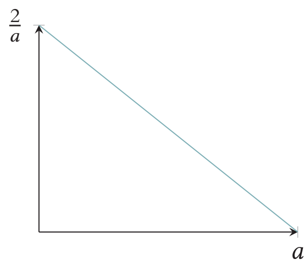


FIGURE 3– La densité h.

3. On sait que Z admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)\,dx$ converge. Or,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)\,dx = \int_0^a \frac{2x(a-x)}{a^2}\,dx.$$

Notons dès à présent qu'il n'y a aucun problème de convergence, l'intégrande étant continue sur $[0, a]$. Il vient alors

$$E(X) = \int_0^a \frac{2x(a-x)}{a^2}\,dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \boxed{\frac{a}{3}.}$$

De même, $E(X^2)$ existe car $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2h(x)\,dx = \int_0^a x^2\frac{2a(x-a)}{a^2}\,dx$ converge et on a alors

$$E(X^2) = \int_0^a x^2\frac{2a(x-a)}{a^2}\,dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^2}{6}.$$

Et donc, par la formule de Huygens, il vient

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} = \boxed{\frac{a^2}{18}.}$$

4. Il s'agit d'utiliser la définition de Z : c'est la valeur absolue de la différence de deux uniformes.

```
function y= simulation(a)
  y = abs(a*rand()-a*rand()) ;
endfunction
```

Remarque
Pour simuler une uniforme sur $[0, a]$, on dispose bien entendu de la fonction `grand` avec l'option `'unf'`, mais on peut également utiliser la commande `rand`, qui simule une uniforme sur $[0, 1]$, et multiplier son résultat par a.

Problème

Préliminaire

1.a. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$, et en particulier sur $[k, k+1]$. Donc

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Et par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dt$$

soit encore

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.}$$

1.b. En sommant les relations précédemment obtenues pour k allant de 1 à $n-1$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

soit encore

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.}$$

2. D'après ce qui précède, on a

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Mais une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est $t \mapsto 2\sqrt{t}$, de sorte que

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n+1} - 2 \geqslant 2\sqrt{n} - 2 \text{ et } \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} + 1 = [2\sqrt{t}]_1^n = 2\sqrt{n} - 1$$

On a donc bien

$$\boxed{2\sqrt{n} - 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1.}$$

Partie 1 : convergence complète

1. Si la série de terme général $P(|X_n - X \geqslant \varepsilon)$ est convergente, alors son terme général tend vers 0, et donc

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $\boxed{\text{la suite } (X_n) \text{ converge bien en probabilité vers } X.}$

2.a. Puisque Y_n est à valeurs dans $\mathbf{N}$, on a

$$P(Y_n \geqslant 1) = 1 - P(Y_n < 1) = 1 - P(Y_n = 0) = \boxed{1 - e^{-\frac{1}{n}}.}$$

2.b. Soit $\varepsilon > 0$. Si $\varepsilon > 1$, alors

$$[Y_n \geqslant \varepsilon] \subset [Y_n \geqslant 1]$$

et donc

$$P(Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant P(Y_n \geqslant 1) = 1 - e^{-\frac{1}{n}}.$$

Si $0 < \varepsilon \leqslant 1$, alors comme Y_n est à valeurs dans $\mathbf{N}$, on a $[Y_n \geqslant \varepsilon] = [Y_n \geqslant 1]$. Et donc

$$P(Y_n \geqslant \varepsilon) = P(Y_n \geqslant 1) = 1 - e^{-\frac{1}{n}}.$$

Dans tous les cas, on a

$$\boxed{P(Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant 1 - e^{-\frac{1}{n}}.}$$

2.c. Puisque $1 - e^{-\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après le théorème des gendarmes, on a

$$\forall \varepsilon > 0, P(Y_n \geqslant \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc $\boxed{(Y_n) \text{ converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle.}}$

2.d. Effectuons un développement limité de $1 - e^{-\frac{1}{n}}$:

$$1 - e^{-\frac{1}{n}} = 1 - \left(1 - \left(-\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mais alors $P(Y_n \geqslant 1) = 1 - e^{-\frac{1}{n}} \sim \frac{1}{n}$.
Le critère des équivalents pour les séries à termes positifs nous dit alors que puisque la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de la série de terme général $P(Y_n \geqslant 1)$.
Et donc $\boxed{\text{la suite } (Y_n) \text{ ne peut converger complètement vers la variable aléatoire certaine nulle.}}$

Partie 2 : étude d'un exemple

1.a. On a

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(B_k) \text{ et } V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(B_k)$$

le deuxième point venant de l'indépendance des B_k.

1.b. $E(B_k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $V(B_k) = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, de sorte que $V(B_k) \leqslant E(B_k)$.
En sommant ces inégalités, on obtient

$$\boxed{V(S_n) \leqslant E(S_n).}$$

2.a. Notons que $E(Z_n) = 1$, et que Z_n admet une variance car S_n admet une variance.
Donc par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il vient

$$\forall \varepsilon > 0, P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) = P(|Z_n - E(Z_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2}.$$

Or, $V(Z_n) = \frac{1}{E(S_n)^2} V(S_n) \leqslant \frac{1}{E(S_n)}$ car $V(S_n) \leqslant E(S_n) \Leftrightarrow \frac{V(S_n)}{E(S_n)} \leqslant 1$.
Ainsi, on a bien

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_n)}.}$$

2.b. Nous avons prouvé que

$$E(S_n) = \sum_{k=}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Nous reconnaissons là la somme partielle d'ordre n de la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{1/2}}$, qui est une série de Riemann divergente.
Mais s'agissant d'une série à termes positifs, elle diverge si et seulement si la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$ (cette suite des sommes partielles est croissante).
Et donc $\frac{1}{E(S_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, quel que soit $\varepsilon > 0$, on a, par le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to\infty} P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) = 0$$

et donc $\boxed{(Z_n) \text{ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.}}$

3. Nous avons prouvé en 2.a que pour $\varepsilon > 0$,

$$P(|Z_{n^4} - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 E(S_{n^4})}.$$

Or, $E(S_{n^4}) = \sum_{k=1}^{n^4} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
Mais d'après le préliminaire,

$$2n^2 - 2 = 2\sqrt{n^4} - 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n^4} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Ainsi, il vient

$$\frac{1}{\varepsilon^2 E(S_{n^4})} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2(2n^2-2)}.$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{\varepsilon^2(n^2-2)}$ est convergente car

$$0 \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2(2n^2-2)} \sim \frac{1}{2\varepsilon^2 n^2}$$

qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.
Par application du critère des équivalents pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\dfrac{1}{\varepsilon^2(2n^2-2)}$ est convergente, puis par domination (toujours pour les séries à termes positifs), que la série de terme général $\dfrac{1}{\varepsilon^2 E(S_{n^4})}$ converge.

$\boxed{\text{Et donc enfin, la série de terme général } P(|Z_{n^4} - 1| \geqslant \varepsilon) \text{ converge.}}$

4.a. Puisque $e_n^4 \leqslant n < (e_n+1)^4$, par sommation de termes positifs, on a

$$S_{e_n^4} = \sum_{k=1}^{e_n^4} B_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} B_k \leqslant \sum_{k=1}^{(e_n+1)^4} B_k = S_{(e_n+1)^4}.$$

Puis par croissance de l'espérance, on en déduit que

$$E(S_{e_n^4}) \leqslant E(S_n) \leqslant E(S_{(e_n+1)^4}$$

et donc par passage à l'inverse (ces trois espérances sont positives),

$$\frac{1}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leqslant \frac{1}{E(S_n)} \leqslant \frac{1}{E(S_{e_n^4})}.$$

Enfin, en multipliant les inégalités (toutes formées de nombres positifs), il vient

$$\frac{S_{e_n^4}}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leqslant \frac{S_n}{E(S_n)} \leqslant \frac{S_{(e_n+1)^4}}{E(S_{e_n^4})}$$

qui est bien l'inégalité souhaitée.

4.b. Par croissance de l'espérance, l'inégalité précédente nous permet d'obtenir

$$\frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leqslant E(Z_n) \leqslant \frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}.$$

Mais notons que $E(Z_n) = 1$.
Enfin, en multipliant cette inégalité par l'inégalité

$$Z_{e_n^4} \leqslant Z_n \leqslant Z_{(e_n+1)^4}$$

on obtient

$$\boxed{\frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} Z_{e_n^4} \leqslant Z_n \leqslant \frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} Z_{(e_n+1)^4}.}$$

5.a. Il s'agit d'utiliser les majorations données dans le préliminaire : on a

$$E(S_{(e_n+1)^4}) = \sum_{k=1}^{(e_n+1)^4} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

et donc

$$2(e_n+1)^2 - 2 \leqslant E(S_{(e_n+1)^4}) \leqslant 2(e_n+1)^2 - 1.$$

De même,

$$2e_n^2 - 2 \leqslant E(S_{e_n^4}) \leqslant 2e_n^2 - 1$$

et donc

$$\frac{1}{2e_n^2-1} \leqslant \frac{1}{E(S_{e_n^4})} \leqslant \frac{1}{2e_n^2-2}.$$

On en déduit que

$$\frac{2(e_n+1)^2-2}{2e_n^2-1} \leqslant \frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \leqslant \frac{2(e_n+1)^2-1}{2e_n^2-2}$$

Mais lorsque $n \to \infty$, $n^{1/4} \to \infty$, et donc $e_n = \lfloor n^{1/4} \rfloor \to \infty$.
Puisque les fonctions $x \mapsto \frac{2(x+1)^2-2}{2x^2-1}$ et $x \mapsto \frac{2(x+1)^2-1}{2x^2-2}$ ont pour limite 1 en $+\infty$ (ce qui se voit facilement en prenant des équivalents), il vient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(e_n+1)^2-2}{2e_n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(e_n+1)^2-1}{2e_n^2-2} = 1.$$

Et donc par le théorème des gendarmes, il vient

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} = 1.}$$

5.b. Par définition de la convergence d'une suite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant N$,

$$\left| \frac{E(S_{'e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} - 1 \right| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, pour $n \geqslant N$, on a

$$\frac{E(S_{'e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} - 1 \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \frac{E(S_{'e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

De plus, puisque $\frac{E(S_{'e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{'e_n+1)^4})} = 1.$$

Notons que $\frac{2+\varepsilon}{2(2+\varepsilon)} = \frac{2+2\varepsilon-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} = 1 - \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$.
Soit alors $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$, de sorte que $1 - \varepsilon' = \frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$. Alors il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\left| \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{'e_n+1)^4})} - 1 \right| \leqslant \varepsilon'.$$

En particulier, pour $n \geqslant N_1$, on a

$$\varepsilon' \leqslant \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{'e_n+1)^4})} - 1$$

soit

$$1 - \varepsilon' \leqslant \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{'e_n+1)^4})}.$$

Et donc pour $n \geqslant N_1$,
$$\frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{'e_n+1)^4})} \geqslant 1-\varepsilon' = \frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}.$$
Enfin, l'énoncé est un peu flou à ce sujet, mais il semblerait qu'on veuille avoir les deux inégalités vérifiées à la fois pour n suffisamment grand. Si on pose $N = \max(N, N_1)$, alors pour $n \geqslant N$, on a
$$\frac{E(S_{'e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \leqslant 1+\varepsilon. \text{ et } \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{'e_n+1)^4})}\frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}.$$

5.c. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 5.b, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, on ait
$$\frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \leqslant 1+\varepsilon \text{ et } \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} \geqslant \frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}.$$
En utilisant alors l'inégalité obtenue à la question 4.b, il vient
$$Z_{e_n^4} \leqslant \frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} Z_n.$$
En particulier, si $Z_n \leqslant 1-\varepsilon$, alors
$$Z_{e_n^4} \leqslant \frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}(1-\varepsilon) \leqslant (1-\varepsilon)(1+\varepsilon) \leqslant 1-\varepsilon^2 \Leftrightarrow Z_{e_n^4} - 1 \leqslant -\varepsilon^2$$
Et donc nous avons l'inclusion d'événements
$$[Z_n \leqslant 1-\varepsilon] \subset [Z_{e_n^4} - 1 \leqslant -\varepsilon^2].$$
De même, pour $n \geqslant N$, on a
$$Z_{(e_n+1)^4} \geqslant \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} Z_n$$
et donc si $Z_n \geqslant 1+\varepsilon$, alors
$$Z_{(e_n+1)^4} \geqslant (1+\varepsilon)\frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} \geqslant 1+\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
Ainsi, nous venons de prouver l'inclusion d'événements :
$$[Z_n \geqslant 1+\varepsilon] \subset \left[Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

5.d. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $n \geqslant N$, où N est comme dans la question précédente. Alors on a
$$P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) = P(Z_n - 1 \geqslant \varepsilon) + P(Z_n - 1 \leqslant -\varepsilon) = P(Z_n \geqslant 1+\varepsilon) + P(Z_n \leqslant 1-\varepsilon).$$
Or, d'après la question précédente, on a, pour $n \geqslant N$,
$$P(Z_n \leqslant 1-\varepsilon) \leqslant P(Z_{e_n^4} - 1 \leqslant -\varepsilon^2) \text{ et } P(Z_n \geqslant 1+\varepsilon) \leqslant P\left(Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$
Enfin, $[Z_{e_n^4} - 1 \leqslant -\varepsilon^2] \subset [|Z_{(e_n+1)^4} - 1| \geqslant \varepsilon^2]$ et donc
$$P(Z_{e_n^4} - 1 \leqslant -\varepsilon^2) \leqslant P(|Z_{(e_n+1)^4} - 1| \geqslant \varepsilon^2).$$
De même,
$$P\left(Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant P\left(|Z_{(e_n+1)^4} - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$
On a donc bien, pour $n \geqslant N$,
$$\boxed{P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\left(|Z_{(e_n+1)^4} - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + P(|Z_{(e_n+1)^4} - 1| \geqslant \varepsilon^2).}$$

5.e. Cette question est malheureusement fausse. L'idée première du concepteur du sujet était probablement de nous faire dire que les séries de terme général

$$P(|Z_{e_n^4} - 1| \geqslant \varepsilon^2) \text{ et } P\left(|Z_{(e_n+1)^4} - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

étaient convergentes d'après la question 3.
Ceci serait vrai si e_n^4 ne prenait qu'une fois chaque valeur, car alors on aurait une série à termes positifs, qui ne prendrait que certaines des valeurs de la série $\sum P(|Z_{n^4} - 1| \geqslant \varepsilon)$, elle même convergente.
Ceci ne fonctionne pas, car e_n^4 peut prendre plusieurs fois la même valeur.
Ainsi, $e_1 = \lfloor 1^{\frac{1}{4}} \rfloor = 1$, mais on a aussi $e_2 = 1, e_3 = 1, \dots e_{15} = 1$.
Pire : $e_{16} = e_{17} = \cdots = e_{80} = 2$.
Et ainsi de suite : e_n^4 prend chaque valeur entière un nombre de plus en plus grand de fois, et on ne dispose d'aucun contrôle sur la convergence de la série

$$\sum P(|Z_{e_n^4} - 1| \geqslant \varepsilon).$$

Donnons un exemple très concret de situation où l'on reprend les termes d'une série convergente, mais en les répétant un certain nombre de fois chacun, de manière à donner une série divergente : la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Mais si l'on répète une fois le premier terme, deux fois le deuxième, trois fois le troisième, etc, on obtient

$$1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Autrement dit, on obtient ainsi la série harmonique, qui est divergente !

EDHEC 2009

Exercice 1

Sujet : Convergence en moyenne vs. convergence en probabilités. **Facile**
Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆
Thèmes du programme abordés : variables aléatoires discrètes, convergence en probabilité.
Commentaires : assez pédestre, intéressant pour manipuler la convergence en probabilités.

On admet que si une suite $(T_n)_n$ de variables aléatoires converge en probabilité, alors la limite de cette suite est une variable aléatoire presque sûrement unique.
Plus précisément, si l'on a $T_n \xrightarrow{P} T$ et $T_n \xrightarrow{P} T'$, alors $P(T = T') = 1$.

On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires converge en moyenne vers une variable aléatoire U si et seulement si : pour tout entier naturel n, la variable aléatoire $|U - U_n|$ possède une espérance et

$$\lim_{n\to+\infty} E(|U_n - U|) = 0.$$

On rappelle l'inégalité de Markov, valable pour une variable aléatoire V à valeurs positives et possédant une espérance mathématique :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(V > \varepsilon) \leqslant \frac{E(V)}{\varepsilon}.$$

1. Dans cette question, on considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et une variable aléatoire X, elle aussi définie sur cet espace probabilisé.
   Montrer que, si la suite (X_n) converge en moyenne vers X, alors elle converge en probabilité vers X.

On se propose, dans la suite, d'étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse.
Pour ce faire, on considère une suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre λ, avec $\lambda > 1$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} Z_k$.

2. a. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer $P(Y_n \neq 0)$.
   b. Pour tout ε strictement positif, comparer les événements $[Y_n > \varepsilon]$ et $[Y_n \neq 0]$.
   c. En déduire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.
3. Dans cette question, on suppose que la suite (Y_n) converge en moyenne vers une variable aléatoire Y.
   a. Montrer que $P(Y = 0) = 1$.
   b. Calculer l'espérance de Y_n.
   c. Établir que $E(|Y_n - Y|) \geqslant E(Y_n) - E(Y)$, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} E(|Y_n - Y|)$.
4. Conclure.

Exercice 2

Sujet : Étude d'une série d'intégrales à paramètres. **Moyen**
Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆
Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, suites, séries.
Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

On désigne par α un entier strictement supérieur à 1, et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}.$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira u_n au lieu de $u_n(\alpha)$.

1. a. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$.
   b. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, et en conclure qu'elle converge.
2. a. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$.

b. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on a $u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{k\alpha}\right)$.

3. En considérant $\ln(u_n)$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_n = \dfrac{n\alpha}{\alpha - 1} u_{n+1}$.

   b. En déduire que : $\forall n \geqslant 2, \ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum\limits_{k=2}^{n}\left[\ln\left(1 - \dfrac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)\right]$.

   c. À l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en $\frac{1}{k}$, donner un équivalent, lorsque k est au voisinage de $+\infty$, de $\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

   d. Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.

5. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$. Compléter le programme suivant afin qu'il retourne la valeur de u_n :

```
function y=u(n)
  y = ...
  for k=...
    y=...
  end
endfunction
```

Exercice 3

Sujet : Étude d'un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. Moyen

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : polynômes, diagonalisation, produit scalaire, endomorphismes symétriques.

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n+1$.
Pour tout k de $\{0, 1, \ldots, 2n+1\}$, on admet que l'expression $X^{2n+1} \times \dfrac{1}{X^k}$ désigne le polynôme X^{2n+1-k}.
On désigne par Id l'endomorphisme identique de E et on note f l'application qui à toute fonction P de E associe la fonction $f(P)$ définie par $f(P) = X^{2n+1} P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. a. Vérifier que $f \circ f = \mathrm{Id}$.

   b. En déduire les deux valeurs propres possibles de f.

3. Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ un polynôme quelconque de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

   a. Montrer que les a_k $(0 \leqslant k \leqslant 2n+1)$ sont solutions du système : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, a_k = a_{2n+1-k}$.

   b. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

4. Déterminer de la même façon une base de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

5. On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$ qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P, Q) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k b_k$ où l'on a noté $P = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} b_k X^k$.

   a. Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E.

   b. Établir alors que f est un endomorphisme symétrique.

   c. En déduire que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Problème

Sujet : Autour du maximum d'un nombre aléatoire de variables à densité. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ (questions 1 à 4) **Intérêt** : ★★★

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Modifications apportées au sujet d'origine : La question 5.b a été adaptée pour pallier à la disparition des lois Γ du programme. Dans la partie 3, les sup ont été remplacés par des max.

Commentaires : un thème plutôt classique des sujets de parisiennes, mais bien guidé ici. Seule la question 7.a. (montrer que Z est une variable aléatoire) peut être déroutante.

Partie I : préliminaire

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1. a. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

   b. En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

   c. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

   d. Établir alors que la série de terme général $\dfrac{x^p}{p}$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

2. a. Après avoir vérifié que, pour tout entier naturel n non nul, on a $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ est convergente.

   b. Utiliser la première question pour établir que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$.

Partie II

On considère une variable aléatoire X de densité f, nulle sur $]-\infty,0[$, continue sur $[0,+\infty[$ et strictement positive sur $[0,+\infty[$. On note alors F la fonction de répartition de X.

3. Justifier que, pour tout réel x, on a $1-F(x) > 0$.
   On définit alors la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} -f(x)\ln(1-F(x)) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4. Montrer que g peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire Y.

5. **Étude d'un cas particulier.**

   a. Montrer qu'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle vérifie les conditions imposées dans cette partie.

   b. On suppose ici que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Reconnaître alors la loi de λY. En déduire l'espérance et la variance de Y.

Partie III

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$, mutuellement indépendantes, ayant toutes la même loi que X (c'est-à-dire de densité f, nulle sur $]-\infty,0[$ continue sur $[0,+\infty[$, strictement positive sur $[0,+\infty[$, et de fonction de répartition notée F).

On se propose, à partir de cette suite, de construire une variable aléatoire Z ayant comme densité la fonction g nulle sur $]-\infty,0[$, et définie pour tout réel x positif par : $g(x) = -f(x)\ln(1-F(x))$.

Pour ce faire, on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres positifs, définie par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

6. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

On considère dès lors une variable aléatoire N, définie elle aussi sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendante des variables X_i, et dont la loi est donnée par : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(N = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

On pose alors $Z = \max(X_0, X_1, \ldots, X_N)$, ce qui signifie que :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \max\left(X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega)\right).$$

7. a. Montrer que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et que sa fonction de répartition F_Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F_Z(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(F(x))^{n+1}}{n(n+1)}.$$

   b. Utiliser le préliminaire pour en déduire, à l'aide de la fonction F, une expression explicite de F_Z sur $[0, +\infty[$.

   c. Vérifier que Z est une variable aléatoire à densité et qu'elle admet bien la fonction g comme fonction densité.

EDHEC 2009 : Corrigé

Exercice 1

1. Si (X_n) converge en moyenne vers X, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} E(|X_n - X|) = 0$.
Mais, pour tout $\varepsilon > 0$, en appliquant l'inégalité de Markov à la variable $|X_n - X|$, qui est positive, et qui admet bien une espérance par hypothèse, on a

$$0 \leqslant P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E(|X_n - X|)}{\varepsilon} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc $\boxed{X_n \xrightarrow{P} X.}$

> **Hypothèses**
> L'inégalité de Markov nécessite d'avoir une variable positive, donc avant de l'appliquer, on n'oubliera pas de vérifier que c'est le cas, et on le mentionnera clairement.

2.a. Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, donc $[Y_n \neq 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{n} [Z_k \neq 0]$.

Par indépendance des Z_k, il vient alors

$$P(Y_n \neq 0) = \prod_{k=1}^{n} P(Z_k \neq 0) = P(Z_1 \neq 0)^n.$$

Mais on a $P(Z_1 \neq 0) = 1 - P(Z_1 = 0) = 1 - e^{-\lambda}$. Et donc

$$\boxed{P(Y_n \neq 0) = \left(1 - e^{-\lambda}\right)^n.}$$

2.b. Si $Y_n > \varepsilon$, alors $Y_n \neq 0$, de sorte que $[Y_n > \varepsilon] \subset [Y_n \neq 0]$.

> **Inclusion**
> Pour deux événements A et B, $A \subset B$ signifie «si A est réalisé, alors B est réalisé».

2.c. Notons que Y_n est une variable aléatoire à valeurs positives, et donc $|Y_n| = Y_n$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on a

$$0 \leqslant P(|Y_n - 0| \geqslant \varepsilon) = P(Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant P(Y_n \neq 0) \leqslant \left(1 - e^{-\lambda}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - 0| \geqslant \varepsilon) = 0$$

et donc $\boxed{Y_n \xrightarrow{P} 0.}$

3.a. Si (Y_n) convergeait en moyenne vers une variable aléatoire Y, alors par la question 1 (Y_n) devrait converger en probabilité vers Y. Comme l'énoncé nous explique que la limite est presque sûrement unique, on doit avoir $\boxed{P(Y = 0) = 1.}$

3.b. Les variables Z_k étant indépendantes, Y_n admet une espérance et

$$E(Y_n) = E\left(\prod_{k=1}^{n} Z_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(Z_k) = \boxed{\lambda^n.}$$

> **Rappel**
> Si X et Y sont indépendantes et admettent une espérance, alors XY admet aussi une espérance et
> $$E(XY) = E(X)E(Y).$$

3.c. On a $Y_n - Y \leqslant |Y_n - Y|$ et donc, par croissance de l'espérance,

$$E(Y_n) - E(Y) \leqslant E(|Y_n - Y|).$$

Puisque $E(Y) = 0$, on en déduit que $E(|Y_n - Y|) \geqslant E(Y_n) - 0 = \lambda^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Et alors nécessairement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} E(|Y_n - Y|) = +\infty.}$

> **Valeur absolue**
> Pour tout nombre x, on a $x \leqslant |x|$.
> S'il est positif, c'est trivial car $|x| = x$. Et sinon, $|x| \geqslant 0$, donc le résultat est immédiat.

4. Nous venons de prouver que $E(|Y_n - Y|)$ ne tend pas vers 0, et donc (Y_n) ne converge pas en moyenne.

EXERCICE 2

1.a. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est continue et positive sur $[0;+\infty[$. Donc l'éventuel problème de convergence est en $+\infty$. Or on a

$$\frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha n}}$$

et puisque $\alpha > 1$ et $n \geqslant 1$, $\alpha n > 1$, de sorte que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha n}}$ converge.

Par critère de comparaison pour les fonctions positives, il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$,

et donc $\boxed{u_n \text{ est bien défini.}}$

Et puisque la fonction intégrée est strictement positive, par croissance de l'intégrale, on a $\boxed{u_n > 0.}$

> **Méthode**
> Toujours commencer l'étude d'une intégrale impropre par l'étude du domaine de continuité de l'intégrande afin de repérer les éventuels problèmes de convergence de l'intégrale.

1.b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$. Alors $1 \leqslant 1 + t^\alpha$, et donc $1 \leqslant (1+t^\alpha)^n \leqslant (1+t^\alpha)^{n+1}$. Par passage à l'inverse, on a alors

$$0 \leqslant \frac{1}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}.$$

Ceci étant vérifié pour tout $t \geqslant 0$, par croissance de l'intégrale, on a alors

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^{n+1}} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} \Leftrightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Et donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

Alors (u_n) étant décroissante et minorée (par 0), $\boxed{\text{elle converge.}}$

> **⚠ Attention !**
> Il est important de vérifier que $1 + t^\alpha$ est plus grand que 1. En effet, la suite $(q^n)_n$ est croissante si $q \geqslant 1$ et décroissante si $0 \leqslant q \leqslant 1$!

> **Méthode**
> Quand on a peu d'informations sur une suite et qu'on doit prouver qu'elle converge, il faut le plus souvent aller chercher du côté du théorème de la limite monotone.

2.a. Procédons à une intégration par parties sur un segment de la forme $[0, A]$, $A \geqslant 0$ En posant $u' = 1$ et $v = \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$, soit $u = t$ et $v' = -\dfrac{n\alpha t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^{n+1}}$, on définit bien deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$ et

$$\int_0^A \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^\alpha)^n}\right]_0^A + \int_0^A \frac{n\alpha t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\,dt = \frac{A}{(1+A^\alpha)^n} + n\alpha \int_0^A \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\,dt$$

En passant à la limite lorsque $A \to +\infty$, on a alors

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} = n\alpha \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\,dt \\ &= n\alpha \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha + 1 - 1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\,dt = n\alpha\left(\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha+1}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}\right) \\ &= \boxed{n\alpha(u_n - u_{n+1}).} \end{aligned}$$

> **IPP**
> Ici la fonction intégrée est continue en 0, donc pas la peine de prendre un segment de la forme $[A, B]$, autant inclure 0 dans le segment de départ, et conclure en prenant une seule limite.

> **Précaution**
> On peut utiliser la linéarité de l'intégrale pour séparer l'intégrale en deux, car on sait que les deux morceaux convergent.

2.b. Procédons par récurrence sur n. D'après la question précédente, on a

$$u_1 = \alpha(u_1 - u_2) \Leftrightarrow \alpha u_2 = (\alpha+1)u_1 \Leftrightarrow u_2 = u_1\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \prod_{k=1}^{2-1}\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$

Supposons que $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$. Alors, par la question précédente,

$$u_{n+1} = \frac{n\alpha - 1}{n\alpha} u_n = \left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right) u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) \times \left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right) = u_1 \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).$$

Donc la formule donnée dans l'énoncé est encore valable au rang $n+1$, et donc par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right).}$$

3. On a

$$\ln(u_n) = \ln\left(u_1 \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right)\right) = \ln(u_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right).$$

Mais on a

$$\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{k\alpha}.$$

Par critère de comparaison pour les séries à termes de signe constant[1], on en déduit que la série de terme général $\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right)$ diverge.

[1] $-\frac{1}{k\alpha} \leqslant 0$.

Or il s'agit d'une série à termes négatifs, donc la suite de ses sommes partielles est décroissante. Mais une suite décroissante et divergente tend nécessairement vers $-\infty$.
On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) = -\infty \text{ et donc } \lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty.$$

Par passage à l'exponentielle, il vient alors $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

4.a. Utilisant le résultat de la question 2.a, on a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1}) \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} k u_k - \alpha \sum_{k=1}^{n} k u_{k+1} = \alpha \sum_{k=1}^{n} k u_k - \alpha \sum_{i=2}^{n+1} (i-1) u_i \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} k u_k - \alpha \sum_{k=2}^{n+1} k u_k + \alpha \sum_{k=2}^{n+1} u_k \\
&= \alpha\left(u_1 - (n+1)u_{n+1} + (S_n - u_1 + u_{n+1})\right) \\
&= \alpha(S_n - n u_{n+1})
\end{aligned}$$

Chgt d'indice

$i = k+1 \Leftrightarrow k = i-1.$

Et donc

$$S_n(1-\alpha) = -\alpha n u_{n+1} \Leftrightarrow \boxed{S_n = \frac{n\alpha}{\alpha-1} u_{n+1}.}$$

Alternative : notons qu'il était également possible de prouver la formule demandée par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$.

4.b. On en déduit, à l'aide de la question 2.b, que pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\ln(S_n) &= \ln(n\alpha) - \ln(\alpha-1) + \ln(u_{n+1}) \\
&= \ln(u_1) + \ln(n\alpha) - \ln(\alpha-1) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) \\
&= \ln(u_1) + \ln(n) - \ln\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) \\
&= \ln(u_1) + \ln(n) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Il reste à constater que

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln(1) - \ln(n).$$

Et donc

$$\boxed{\ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right].}$$

4.c. On a

$$\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k\alpha}+o\left(\frac{1}{k\alpha}\right)+\frac{1}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}-\frac{1}{k\alpha}+o\left(\frac{1}{k}\right). = \frac{\alpha-1}{k\alpha}+o\left(\frac{1}{k}\right).$$

> **Négligeabilité**
> Puisque α est une constante, il n'y a pas de différence entre $o\left(\frac{1}{k}\right)$ et $o\left(\frac{1}{k\alpha}\right)$.

On en déduit que

$$\boxed{\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha-1}{k\alpha}.}$$

Notons que cet équivalent est positif.

4.d. Grâce à l'équivalent obtenu à la question précédente, par critère de comparaison pour les séries de signe constant, on en déduit que la série de terme général $\ln\left(1-\frac{1}{k\alpha}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ diverge. Puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$, et donc $\ln(S_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On en déduit que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc $\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$

5. Il s'agit d'utiliser le résultat de la question 2.b, et notant que

$$u_0 = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dt}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty}\operatorname{Arctan}(A) = \frac{\pi}{2}.$$

```
function y = u(n)
  y = %pi/2
  for k=1 :n-1
    y = y*(1-1/(2*k)) ;
  end
endfunction
```

EXERCICE 3

1. Commençons par vérifier que f est bien à valeurs dans E, ce qui n'est pas évident sur la définition.

Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_kX^k \in E$. Alors

$$f(P) = X^{2n+1}\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\frac{1}{X^k} = \sum_{k=0}^{n} a_kX^{2n+1-k} \in E.$$

> **Remarque**
> Les $2n+1-k$ sont tous positifs, donc on a bien un polynôme (il n'y a que des puissances positives de X.)

Soient $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_kX^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{2n+1} b_kX^k$ deux éléments de E et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P+Q) &= X^{2n+1}(\lambda P+Q)\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= X^{2n+1}\sum_{k=0}^{2n+1}(\lambda a_k+b_k)\frac{1}{X^k} \\ &= \lambda\sum_{k=0}^{2n+1} a_kX^{2n+1-k}+\sum_{k=0}^{2n+1} b_kX^{2n+1-k} = \lambda f(P)+f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire, et c'est donc bien $\boxed{\text{un endomorphisme de } E.}$

2.a. Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_kX^k \in E$. Alors

$$f(f(P)) = f\left(\sum_{k=0}^{2n+1} a_kX^{2n+1-k}\right) = X^{2n+1}\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\frac{1}{X^{2n+1-k}} = \sum_{k=0}^{2n+1} a_kX^k.$$

Ainsi, pour tout polynôme $P \in E$, on a $f(f(P)) = P$, de sorte que $\boxed{f\circ f = \mathrm{Id}.}$

2.b. Un polynôme annulateur de f est X^2-1, et donc les valeurs propres possibles de f sont les racines de ce polynôme, qui sont 1 et -1.

3.a. On a $(f-\mathrm{Id})(P)=0 \Leftrightarrow f(P)=P$.

Mais nous avons précédemment calculé $f(P)$, qui vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^{2n+1-k}$.

En procédant au changement d'indice $i=2n+1-k$, il vient donc $f(P)=\displaystyle\sum_{i=0}^{2n+1} a_{2n+1-i}X^i$.

Et alors, par identification[2] des coefficients, on a

$$\forall k\in\{0,1,\dots,2n+1\},\, a_k=a_{2n+1-k}.$$

On obtient ainsi $2n+2$ égalités, et si l'on ne garde que les $n+1$ premières, il vient

$$\boxed{\forall k\in\{0,\dots,n\},\, a_k=a_{2n+1-k}.}$$

[2] Deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux.

Remarque

S'il suffit de ne garder que les $n+1$ premières égalités, on peut aussi remarquer que les $n+1$ suivantes sont redondantes.
En effet, la première égalité est $a_0=a_{2n+1}$, et la dernière est ...$a_{2n+1}=a_0$.
De même, la seconde est identique à l'avant-dernière, etc.

3.b. La remarque faite à la question précédente prouve que P est dans $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$ **si et seulement si**[3] les a_k sont solutions du système de $n+1$ équations ci-dessus.
Or, on a

$$P=\sum_{k=0}^{2n+1} a_kX^k=\sum_{k=0}^{n} a_kX^k+\sum_{k=n+1}^{2n+1} a_kX^k=\sum_{k=0}^{n} a_kX^k+\sum_{j=0}^{n} a_{2n+1-j}X^j=\sum_{k=0}^{n}(a_kX^k+a_{2n+1-k}X^{2n+1-k}).$$

Donc

$$\begin{aligned}P=\sum_{k=0}^{2n+1} a_kX^k\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}) &\Leftrightarrow \forall k\in\{0,\dots,n\},\ a_k=a_{2n+1-k}\\ &\Leftrightarrow P=\sum_{k=0}^{n} a_k(X^k+X^{2n+1-k})\\ &\Leftrightarrow P\in\mathrm{Vect}(1+X^{2n+1},X+X^{2n},\dots,X^n+X^{n+1}).\end{aligned}$$

La famille $1+X^{2n+1},X+X^{2n},\dots,X^n+X^{n+1}$ est donc génératrice de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$, et elle est libre car composée de polynômes de degrés deux à deux distincts : c'est une base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$.

[3] Alors que l'énoncé de la question précédente nous demandait de prouver uniquement une implication, ce qui ne suffit pas à déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$, mais seulement à donner une base de l'ensemble des solutions du système, qui pourrait a priori être plus gros que $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$.

4. De la même manière, un polynôme $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_kX^k$ est dans $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id})$ si et seulement si $f(P)=-P$ et donc si et seulement si les a_k sont solutions du système

$$\forall k\in\{0,1,\dots,n\},\ a_k=-a_{2n+1-k}.$$

Une base de $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id})$ est alors

$$\boxed{X^{2n+1}-1,X^{2n}-X,\dots,X^{n+1}-X^n=\left\{X^{2n+1-k}-X^k,k\in[\![0,n]\!]\right\}.}$$

5.a. Notons que φ est bien à valeurs dans $\mathbf{R}$, puisque $\varphi(P,Q)$ est une somme de réels.
Soient $P=\sum a_kX^k, Q=\sum b_kX^k$ et $R=\sum c_kX^k$ trois éléments de E, et soit $\lambda\in\mathbf{R}$. Alors $\lambda P+Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}(\lambda a_k+b_k)X^k$ et donc

$$\varphi(\lambda P+Q,R)=\sum_{k=0}^{2n+1}(\lambda a_k+b_k)c_k=\lambda\sum_{k=0}^{2n+1}a_kc_k+\sum_{k=0}^{2n+1}b_kc_k=\lambda\varphi(P,R)+\varphi(Q,R).$$

Donc φ est linéaire à gauche.

$$\varphi(P,Q)=\sum_{k=0}^{2n+1}a_kb_k=\sum_{k=0}^{2n+1}b_ka_k=\varphi(Q,P).$$

Donc φ est symétrique, et par conséquent bilinéaire symétrique.

$$\varphi(P,P)=\sum_{k=0}^{2n+1}a_k^2\geqslant 0.$$

Et de même[4],

$$\varphi(P,P)=0\Leftrightarrow \forall k\in [\![0,2n+1]\!], a_k^2=0\Leftrightarrow \forall k\in [\![0,2n+1]\!], a_k=0\Leftrightarrow P=0.$$

[4] Une somme de nombres positifs est nulle ssi tous ces nombres sont nuls.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est bien un produit scalaire sur } E.}$

5.b. Soient $P=\sum_{k=0}^{2n+1}a_kX^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{2n+1}b_kX^k$ deux polynômes de E. Alors

$$\varphi\left(f(P),Q\right)=\varphi\left(\sum_{i=0}^{2n+1}a_{2n+1-i}X^i,\sum_{k=0}^{2n+1}b_kX^k\right)=\sum_{k=0}^{2n+1}a_{2n+1-k}b_k.$$

De la même manière, on a

$$\varphi\left(f(Q),P\right)=\sum_{k=0}^{2n+1}a_kb_{2n+1-k}=\sum_{i=0}^{2n+1}a_{2n+1-i}b_i.$$

Chgt d'indice
$i=2n+1-k$.

Et donc, pour tous $P,Q\in E$, $\varphi\left(f(P),q\right)=\varphi\left(P,f(Q)\right)$: f est un endomorphisme symétrique de E.

5.c. Puisque f est symétrique, il est diagonalisable, et possède deux sous-espaces propres correspondant aux valeurs propres -1 et 1.
Donc $E=E_1(f)\oplus E_{-1}(f)=\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})\oplus\operatorname{Ker}(f+\mathrm{Id})$.
Comme de plus les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux, on en déduit que $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(f+\mathrm{Id})$ sont supplémentaires orthogonaux.
Autrement dit, on a $\boxed{\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})=(\operatorname{Ker}(f+\mathrm{Id}))^\perp.}$

Remarque
Les questions 3.b et 4 ont prouvé que 1 et -1 étaient bien des valeurs propres de f, et pas uniquement des valeurs propres possibles.

PROBLÈME

Partie I : préliminaire.

1.a. Puisque $t\leqslant x<1$, on a $t\neq 1$ et donc

$$\sum_{p=1}^{n}t^{p-1}=\sum_{k=0}^{n-1}t^k=\boxed{\frac{1-t^n}{1-t}.}$$

1.b. L'égalité précédemment obtenue étant valable pour tout $t\in[0,x]$, en l'intégrant sur le segment $[0,x]$, il vient

$$\int_0^x\sum_{p=1}^{n}t^{p-1}\,dt=\int_0^x\frac{1-t^n}{1-t}\,dt.$$

Mais d'une part, on a $\displaystyle\int_0^x\sum_{p=1}^{n}t^{p-1}\,dt=\sum_{p=1}^{n}\int_0^x t^{p-1}\,dt=\sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p}$.

Et d'autre part,

$$\int_0^x\frac{1-t^n}{1-t}\,dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}\,dt-\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\,dt=-\ln(1-x)-\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

Et donc

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n}\frac{t^p}{p}=-\ln(1-x)-\int_0^x\frac{t^p}{1-t}\,dt.}$$

1.c. Pour $t \in [0,x]$, on a $0 \leqslant \dfrac{t^n}{1-t} \leqslant \dfrac{x^n}{1-t}$, et donc, par croissance de l'intégrale, il vient

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{1-t}\,dt \leqslant x^n \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt \leqslant -x^n \ln(1-x).$$

Or $0 \leqslant x < 1$, de sorte que $x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -x^n \ln(1-x) = 0$.
Et donc, par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0.}$$

1.d. En combinant les résultats des deux questions précédentes, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{t^p}{p} = -\ln(1-x).$$

Cela signifie que la série de terme général $\dfrac{t^p}{p}$ est convergente et que $\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^p}{p} = -\ln(1-x).}$

Rappel
Par **définition**, une série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge. Et la limite de cette suite, si elle existe, est alors la somme de la série.

2.a. On a $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} \leqslant x^{n+1}$.
Puisque la série de terme général x^{n+1} est une série géométrique convergente[5], on en déduit que la $\boxed{\text{série de terme général } \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} \text{ est également convergente.}}$

[5] Car $0 \leqslant x < 1$

2.b. Pour $N \in \mathbf{N}^*$, on a donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{x^k}{k} = x\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} - \sum_{k=1}^{N+1} \frac{x^k}{k} + \frac{x}{1}.$$

Lorsque $N \to +\infty$, en utilisant la question précédente, il vient

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -x\ln(1-x) - (-\ln(1-x)) + x = x + (1-x)\ln(1-x).$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x).}$$

Partie 2

3. Puisque F est une fonction de répartition, pour tout x, $F(x) \leqslant 1$, et donc $1 - F(x) \geqslant 0$.
Notons que f étant nulle sur $]-\infty, 0[$, alors pour tout $x \leqslant 0$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$.
Soit à présent $x > 0$. Alors

$$1 - F(x) = 1 - \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Par hypothèse, f est continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$, et donc en particulier sur $[x, +\infty[$, de sorte que

$$1 - F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt > 0.$$

Positivité
Rappelons que la seule fonction continue et positive d'intégrale nulle est la fonction nulle. Et donc une fonction continue strictement positive en au moins un point est forcément d'intégrale non nulle.

4. F est une fonction de répartition, et par conséquent positive. Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $1 - F(x) \leqslant 1$ et donc $\ln(1 - F(x)) \leqslant 0$.
Puisque f est positive[6], on a donc $-f(x)\ln(1 - F(x)) \geqslant 0$.

[6] C'est une densité.

Et pour $x < 0$, on a évidemment $g(x) \geqslant 0$.
Ainsi, g est une fonction positive sur $\mathbf{R}$.
Par composition de fonctions continues[7], g est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, et elle est évidemment continue sur $\mathbf{R}_-^*$, donc g est continue sauf éventuellement en 0.
Enfin, pour $A > 0$, on a

$$\int_{-\infty}^{A} g(t)\,dt = \int_0^A -f(t)\ln(1-F(t))\,dt.$$

Procédons à une intégration par parties en posant $u(t) = 1 - F(t)$, $v(t) = -\ln(1-F(t))$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$, avec $u'(t) = -f(t)$ et $v'(t) = \dfrac{f(t)}{1-F(t)}$. Alors

$$\int_0^A f(t)\ln(1-F(t))\,dt = [(1-F(t))\ln(1-F(t))]_0^A + \int_0^A f(t)dt = (1-F(A))\ln(1-F(A)) + \int_0^A f(t)\,dt.$$

Lorsque $A \to +\infty$, on a $1 - F(A) \to 0$. Or, nous savons, par croissances comparées que $\lim\limits_{X\to 0} X\ln(X) = 0$, de sorte que $\lim\limits_{A\to+\infty} (1-F(A))\ln(1-F(A)) = 0$.
Et d'autre part, $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.
On en déduit que $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^A g(t)\,dt = 1$, de sorte que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ est convergente et vaut 1.
Et donc $\boxed{g \text{ est bien une densité de probabilités.}}$

[7] F est continue car fonction de répartition d'une variable à densité.

5. **Étude d'un cas particulier**

5.a. Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, alors une densité de X est $f : t \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

Cette densité est bien nulle sur $]-\infty, 0[$, et continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$. Elle vérifie donc les conditions imposées dans cette partie.

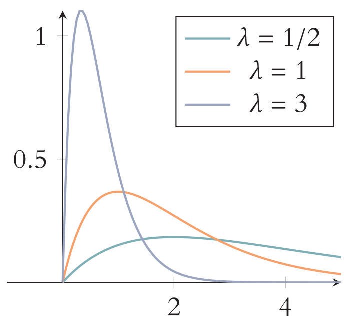


FIGURE 1– La densité g pour différentes valeurs de λ.

5.b. Nous savons que $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Et donc

$$g(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}\lambda x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par transformation affine, une densité de λY est donc

$$x \mapsto \frac{1}{\lambda} g\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \begin{cases} x e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque $\Gamma(2) = 1! = 1$, on reconnaît alors la densité d'une loi $\gamma(2)$.
On en déduit que $E(\lambda Y) = 2$ et $V(\lambda Y) = 2$, de sorte que

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda}E(\lambda Y) = \boxed{\frac{2}{\lambda}} \text{ et } V(Y) = \frac{1}{\lambda^2}V(\lambda Y) = \boxed{\frac{2}{\lambda^2}}.$$

Partie 3

6. Nous avons déjà prouvé en 2.b que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

Et donc pour $N \geqslant 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Chgt d'indice
On a posé $k = n + 1$.

En particulier,

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

On en déduit que la série de terme général u_n est convergente et que $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1.}$

7.a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors on a

$$[Z \leqslant x] = [Z \leqslant x] \cap \Omega = [Z \leqslant x] \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}[N=n]\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty}[Z \leqslant x] \cap [N=n].$$

Mais pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$[Z \leqslant x]\cap[N=n] = [N=n]\cap[\max(X_0,\dots,X_n) \leqslant x] = [N=n]\cap[X_0 \leqslant x]\cap\cdots\cap[X_n \leqslant x].$$

N et les X_i étant des variables aléatoires, on a

$$[N=n] \in \mathscr{A} \text{ et } \forall i \in \mathbf{N}, [X_i \leqslant x] \in \mathscr{A}.$$

Puisque $\mathscr{A}$ est stable par intersections finies, il vient

$$[N \leqslant n] \cap [Z \leqslant x] = [N=n] \cap \bigcap_{i=0}^{n}[X_i \leqslant x] \in \mathscr{A}.$$

Et enfin, $\mathscr{A}$ étant stable par union dénombrable,

$$[Z \leqslant x] = \bigcup_{n=1}^{+\infty}[N=n] \cap [Z \leqslant x] \in \mathscr{A}.$$

Ainsi, quel que soit $x \in \mathbf{R}$, on a $[Z \leqslant x] \in \mathscr{A}$: $\boxed{Z \text{ est bien une variable aléatoire sur } (\Omega, \mathscr{A}).}$
Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[N=n],\ n \in \mathbf{N}\}$, on a, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([Z \leqslant x] \cap [N=n]).$$

Or, d'après ce qui a été dit précédemment, $[Z \leqslant x] \cap [N=n] = [N=n] \cap \bigcap_{i=0}^{n}[X_i \leqslant x]$.

Par indépendance des X_i et de N, on a alors

$$P([N=n] \cap [Z \leqslant x]) = P(N=n)\prod_{i=0}^{n} P(X_i \leqslant x) = \frac{1}{n(n+1)}F(x)^{n+1}.$$

Et donc on en déduit que

$$\boxed{F_Z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{F(x)^{n+1}}{n(n+1)}.}$$

7.b. D'après la question 2.b[8], on a donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ F_Z(x) = F(x) + (1-F(x))\ln(1-F(x)).}$$

7.c. F est continue sur $\mathbf{R}$, donc par somme et composition de fonctions continues, F_Z l'est également.
De plus, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0, et donc de même, par opérations usuelles, F_Z est $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0.
Ainsi, $\boxed{Z \text{ est une variable à densité.}}$
Une densité en est alors donnée sur $\mathbf{R}^*$ par[9]

$$F_Z'(x) = f(x) - (1-F(x))\frac{f(x)}{1-F(x)} - f(x)\ln(1-F(x)) = -f(x)\ln(1-F(x)).$$

En particulier, pour $x < 0$, on a $F_Z'(x) = 0$.
On peut alors choisir comme $\boxed{\text{densité de } Z \text{ la fonction } g.}$

Méthode
Il s'agit d'une question difficile, usuellement réservée aux parisiennes.
Il faut revenir à la définition de variable aléatoire, et prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $[Z \leqslant x] \in \mathscr{A}$.
Pour cela, on utilisera le fait que les X_i et N sont des variables aléatoires, et les propriétés d'une tribu (stabilité par passage au complémentaire, stabilité par unions et intersections dénombrables).

Convergence
Rappelons que la formule des probabilités totales garantit la convergence de cette série, et qu'il n'y a donc pas lieu d'étudier cette convergence.

[8] Qui s'applique car pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F(x) < 1$ comme expliqué à la question 3.

[9] Notons que la distinction de cas dans la définition de g n'est absolument pas nécessaire : pour $x < 0$, on a $f(x) = 0$ et $\ln(1-F(x)) = \ln(1) = 0$, de sorte que $-f(x)\ln(1-F(x)) = 0 = g(x)$.

Densité
Attention à ne pas dériver F_Z en 0 : on ne sait pas si c'est possible. On commence donc par dériver F_Z là où c'est possible, puis en les points restants (qui sont en nombre fini), on pourra choisir une valeur arbitraire pour une densité.

EDHEC 2008

Exercice 1

Sujet : Diagonalisabilité d'une matrice aléatoire **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : diagonalisation, variables à densité, produit de convolution.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$, élément de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

   Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels x et y pour que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

2. Dans la suite, X et Y sont des variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$. On note F_X (respectivement F_Y) la fonction de répartition de X (resp. Y).

   a. Déterminer une densité de X^2 (on ne demande pas de vérifier que X^2 est une variable aléatoire à densité).

   b. Déterminer une densité de $-Y$ (on ne demande pas de vérifier que $-Y$ est une variable aléatoire à densité).

   c. En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   d. Déterminer enfin la probabilité que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Exercice 2

Sujet : Calcul de la somme d'une série alternée **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : intégration sur un segment, séries, trigonométrie.

On se propose dans cet exercice de montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin n}{n}$ est convergente et de calculer sa somme.

1. On désigne par f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$ et par λ un réel strictement positif. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt = 0$.

2. a. On rappelle que : $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

   Exprimer, pour tout réel t, $\cos\frac{t}{2}\cos(kt)$ en fonction de $\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right)$ et $\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)$.

   b. En déduire que :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ \cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\frac{t}{2}\right).$$

   c. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,dt - \frac{1}{2}$.

3. Utiliser la première question pour conclure que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 3

Sujet : Conditions suffisantes pour que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : diagonalisation.

Dans cet exercice, f désigne un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On se propose d'étudier quelques situations dans lesquelles on peut établir que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

1. a. Montrer que si f est un automorphisme de E, alors on a bien $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

   b. Étude d'un exemple : on considère deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G, de E. Tout élément de E s'écrit donc de manière unique $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On appelle alors symétrie par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme s de E défini par

   $$s(x) = x_F - x_G.$$

   Déterminer s^2 et en déduire que $E = \operatorname{Ker} s \oplus \operatorname{Im} s$.

2. Dans cette question, on suppose f diagonalisable et f non bijectif (le cas où f est bijectif ayant été traité dans la première question).

   a. Traiter le cas où f est l'endomorphisme nul.

   b. Dans cette question, on suppose que f n'est pas l'endomorphisme nul.

      i. Montrer que f a d'autres valeurs propres que la valeur propre 0.

      ii. Montrer que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre non nulle est inclus dans $\operatorname{Im} f$.

      iii. En déduire que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

3. Dans cette question, on considère un endomorphisme f de E dont un polynôme annulateur est de la forme $P = \sum_{k=1}^{p} a_k X^k$ ou encore $P = a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_p X^p$ avec $a_1 \neq 0$ et $p \geqslant 1$.

   a. Soit y un élément de $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$.

      i. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $y = f(x)$ et $f^2(x) = 0$.

      ii. En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a $f^k(x) = 0$.

   b. Établir que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Problème

Sujet : Comparaison de deux stratégies dans un jeu de hasard. **Facile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : probabilités discrètes, espérances conditionnelles.

Modifications apportées au sujet d'origine : ajout d'une question sur l'indépendance de G_1 et G_2.

Commentaires : très joli sujet, très bien guidé, qui propose une belle application de la formule de l'espérance totale.

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et p est un entier naturel.
Un jeu oppose n joueurs $J_1, J_2, \ldots, J_n$.
Le jeu se déroule de la façon suivante : une pièce équilibrée est lancée $(2p+1)$ fois. Avant les lancers, chaque joueur écrit une liste de prévisions pour ces lancers. Cette liste contient donc une suite de $(2p+1)$ caractères P (pour *pile*) ou F (pour *face*). Les gagnants sont les joueurs ayant le plus grand nombre de prévisions correctes et ils se partagent équitablement la somme de $n!$ euros.
Par exemple, pour $p = 1$, si les lancers donnent trois fois *pile*, le joueur ayant noté (P, F, P) a deux prévisions correctes, et si les lancers donnent dans cet ordre P, F, P, le joueur ayant noté (F, P, F) n'a aucune prévision correcte.
Pour i de $[\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du joueur J_i, on note G_i la variable aléatoire égale au gain du joueur J_i et $E(G_i)$ l'espérance de G_i.

L'objectif du problème est de déterminer l'espérance de gain du joueur J_1 selon deux stratégies présentées dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : quelques résultats utiles pour les parties suivantes.

1. Montrer que les variables X_i suivent toutes la même loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   On pose alors, pour tout i de $[\![1,n]\!]$ et tout k de $X_i(\Omega)$: $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$.

2. On pose $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k}$ et $T_p = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$.

   a. Calculer $S_p + T_p$.

   b. Montrer que $S_p = T_p$.

   c. Déduire des deux résultats précédents la valeur de S_p puis montrer que $r_p = \dfrac{1}{2}$.

Partie 2 : les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres.
Dans cette partie, les variables X_i sont donc mutuellement indépendantes.

3. Montrer que $G_1(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \dfrac{n!}{j+1} \middle| j \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

4. a. Montrer que $P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \dfrac{n!}{n}\right) = (q_0)^{n-1}$.

   b. Montrer que, pour tout j de $[\![0, n-2]\!]$: $P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \dfrac{n!}{j+1}\right) = 0$.

   c. En déduire que l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $[X_1 = 0]$ est :
   $$E\left(G_1 \,|X_1 = 0\right) = (n-1)!(q_0)^{n-1}$$

5. a. Établir que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$ et pour tout j élément de $[\![0, n-1]\!]$, on a :
   $$P_{[X_1=k]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-1}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-1-j}$$

   b. Établir que $\dfrac{1}{j+1}\dbinom{n-1}{j} = \dfrac{1}{n}\dbinom{n}{j+1}$ puis en déduire que, pour tout k non nul de $X_1(\Omega)$, l'espérance de G_1 conditionnellement à l'événement $[X_1 = k]$ est :
   $$E\left(G_1 \,|X_1 = k\right) = (n-1)!\frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k}$$

   c. Vérifier que cette expression reste valable pour $k = 0$ en posant $r_{-1} = 0$.

6. Utiliser les questions 5.b. et 5.c. pour établir que $E(G_1) = (n-1)!$.

7. Les variables aléatoires G_1 et G_2 sont-elles indépendantes ?

Partie 3 : J_1 et J_2 forment un groupe et les autres joueurs jouent comme dans la partie 2.
Dans cette partie, J_1 et J_2 adoptent la stratégie suivante : J_1 joue au hasard mais J_2 joue, pour chaque lancer, les prévisions contraires de J_1. Par exemple, pour $p = 1$, si J_1 a choisi (F, P, P) alors J_2 choisit (P, F, F).
On note G' le gain du groupe formé par ces deux joueurs, J_1 et J_2 décidant de partager équitablement ce gain. On a donc, en désignant par G'_1 et G'_2 les gains respectifs de J_1 et J_2 : $G' = G'_1 + G'_2$ et $G'_1 = G'_2$.
On pose, pour tout i de $[\![1, \ldots, n]\!]$ et pour tout k de $X_i(\Omega)$: $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leqslant k)$. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de prévisions correctes du meilleur de J_1 et J_2.

8. a. Montrer que un et un seul des joueurs J_1 et J_2 a au moins $p+1$ prévisions correctes.

   b. En déduire que : $Y(\Omega) = [\![p+1, 2p+1]\!]$.

9. Vérifier que, dans l'exemple donné au début de cette partie, Y prend la valeur 3 si les lancers donnent dans cet ordre F, P, P ou P, F, F et Y prend la valeur 2 sinon.

10. Pour tout k de $[\![p+1, 2p+1]\!]$, montrer que : $P(Y = k) = 2q_k$.

11. Montrer que $G'(\Omega) = \{0\} \cup \left\{ \dfrac{n!}{j+1} \;\middle|\; j \in [\![0, n-2]\!] \right\}$.

12. a. Établir que, pour tout k de $[\![p+1, 2p+1]\!]$ et tout j de $[\![0, n-1]\!]$, on a :
    $$P_{[Y=k]}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-2}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-2-j}.$$

b. En déduire que, pour tout k de $[\![p+1, 2p+1]\!]$, l'espérance de G' conditionnellement à l'événement $[Y=k]$ est :

$$E\left(G' \mid Y=k\right) = n(n-2)! \frac{(r_k)^{n-1} - (r_{k-1})^{n-1}}{q_k}$$

13. a. En déduire, en utilisant le résultat de la deuxième question de la partie 1, que :

$$E(G') = 2n(n-2)! \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

b. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 3 \Rightarrow 2^{n-1} > n$.

c. Déterminer $E(G'_1)$ et vérifier que la stratégie adoptée par les joueurs J_1 et J_2 est avantageuse pour J_1 (et donc pour J_2) du point de vue de l'espérance de leur gain.

EDHEC 2008 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, soit si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$.
Or, $\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda - 1 & \\ y & 2x - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2x\lambda + y$.
Et donc les valeurs propres de A sont les racines du polynôme[1] $\lambda^2 + 2x\lambda + y$.
Ce polynôme a alors pour discriminant $4x^2 - 4y = 4(x^2 - y)$.

[1] De degré 2.

• Si $x^2 - y < 0 \Leftrightarrow x^2 < y$, alors A ne possède pas de valeurs propres, et donc n'est pas diagonalisable.
• Si $x^2 - y > 0 \Leftrightarrow x^2 > y$, alors il y a deux racines qui sont $x - \sqrt{x^2 - y}$ et $x + \sqrt{x^2 - y}$, et donc A possède deux valeurs propres. Par conséquent, A est diagonalisable.
• Si $x^2 = y$, alors A possède une seule valeur propre x.
Mais alors $\mathrm{rg}(A - xI_2) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -x & -1 \\ x^2 & x \end{pmatrix}\right) = 1$, et donc $\dim E_x(A) = 1$.
On en déduit que A n'est pas diagonalisable.
Par conséquent, nous avons prouvé que $\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } x^2 > y.}$

2.a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Un carré étant toujours positif, X^2 est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ et donc pour $x < 0$, on a $P(X^2 < x) = 0$.
Si $x \geqslant 0$, alors

$$F_{X^2}(x) = P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - \underbrace{F_X(-\sqrt{x})}_{=0} = F_X(\sqrt{x}) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Donc une densité de X^2 est donc obtenue en dérivant F_X là où c'est possible[2] :

[2] C'est-à-dire partout sauf en 0 et en 1.

$$\boxed{F'_{X^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

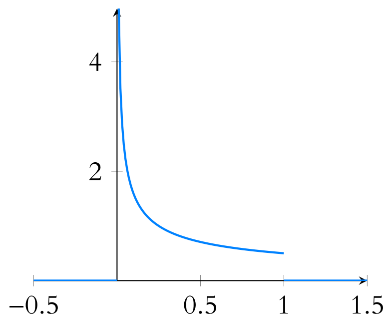


FIGURE 1– La densité de X^2.

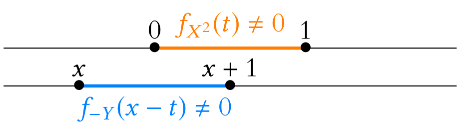
2.b. Il s'agit d'une transformation affine de densité : une densité de $-Y$ est

$$\boxed{f_{-Y}(x) = f_Y(-x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1,0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2.c. Les variables X et Y étant indépendantes, il en est de même de X^2 et de $-Y$.
De plus, une densité de $-Y$ est bornée donc une densité de $X^2 - Y$ est donnée par le produit de convolution :

$$f_{X^2-Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(t) f_{-Y}(x-t)\,dt.$$

On a $f_{X^2}(t) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant t \leqslant 1$ et $f_{-Y}(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x - t \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant t \leqslant x+1$.



Rappel
Le dessin sert à déterminer les valeurs de t pour lesquelles $f_{X^2}(t) f_{-Y}(x-t)$ est nul, et donc à restreindre le domaine d'intégration.

Si $x > 1$, alors $f_{X^2-Y}(x) = 0$.
De même, si $x \leqslant -1$, on a $x + 1 \leqslant 0$ et donc $f_{X^2-Y}(x) = 0$.
Si $x \in [-1, 0]$, alors

$$f_{X^2-Y}(x) = \int_0^{x+1} \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \left[\sqrt{t}\right]_0^{x+1} = \sqrt{x+1}.$$

Enfin, si $x \in [0,1]$, alors

$$f_{X^2-Y}(x) = \int_x^1 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \left[\sqrt{t}\right]_x^1 = 1-\sqrt{x}.$$

En résumé, une densité de $X^2 - Y$ est bien donnée par

$$\boxed{f_{X^2-Y}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1-\sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

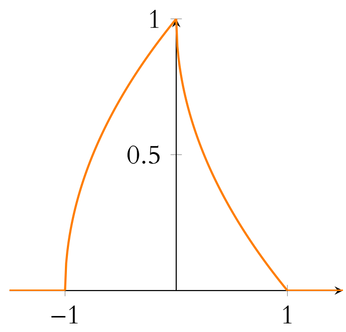


FIGURE 2– La densité de $X^2 - Y$.

2.d. D'après la question 1, M est diagonalisable si et seulement $X^2 > Y$.
Ainsi, la probabilité que M soit diagonalisable est

$$\begin{aligned} P\left(X^2 > Y\right) &= P\left(X^2 - Y > 0\right) = \int_0^{+\infty} f_{X^2-Y}(x)\,dx = \int_0^1 (1-\sqrt{x})\,dx \\ &= 1 - \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = 1 - \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

EXERCICE 2

1. Une intégration par parties, en posant $u = f$ et $v(t) = \dfrac{\sin(\lambda t)}{\lambda}$, qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ nous donne

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt &= \left[f(t)\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}\right]_a^b - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a)\right) - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt. \end{aligned}$$

Puisque pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $|\sin(\lambda b)| \leqslant 1$, alors $\left|\dfrac{1}{\lambda}f(b)\sin(\lambda b)\right| \leqslant \left|\dfrac{f(b)}{\lambda}\right| \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Et de même, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \dfrac{1}{\lambda}f(a)\sin(\lambda a) = 0$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, donc f' est continue sur le segment $[a,b]$, et par conséquent y est bornée : il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall t \in [a,b], |f'(t)| \leqslant M$.
Et alors, $\forall t \in [a,b], \forall \lambda > 0$, $|f'(t)\sin(\lambda t)| \leqslant M$, de sorte que, par croissance de l'intégrale,

> **Rappel**
> Une fonction continue sur un segment est bornée.

$$\int_a^b |f'(t)\sin(\lambda t)|\,dt \leqslant M(b-a).$$

Mais par l'inégalité triangulaire généralisée, on a

$$\left|\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f'(t)\sin(\lambda t)|\,dt \leqslant M(b-a).$$

Et donc, pour tout $\lambda > 0$,

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}M(b-a) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par somme de limites, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt = 0.}$$

2.a. On a d'une part

$$\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) = \cos\left(\frac{t}{2} + kt\right) = \cos\frac{t}{2}\cos(kt) - \sin\frac{t}{2}\sin(kt)$$

et d'autre part,

$$\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right) = \cos\left(kt + \left(-\frac{t}{2}\right)\right) = \cos(kt)\cos\left(-\frac{t}{2}\right) - \sin(kt)\sin\left(-\frac{t}{2}\right)$$
$$= \cos(kt)\cos\frac{t}{2} + \sin(kt)\sin\frac{t}{2}.$$

Remarque
Le sujet était généreux en rappelant la formule pour $\cos(a+b)$, qui est explicitement au programme. Rappelons qu'en changeant b en $-b$, on obtient la formule pour $\cos(a-b)$ (qui est également au programme).

En sommant ces deux formules et en divisant par 2, on obtient alors

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right) = \cos(kt)\cos\frac{t}{2}.}$$

2.b. En multipliant par $(-1)^k$, puis en sommant les relations ainsi obtenues pour k variant de 1 à n, on obtient, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
2\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) &= 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\frac{t}{2}\cos(kt)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\left(\cos\frac{2k+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k+1}{2}t\right) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\\
&= \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i-1}\cos\left(\frac{2i-1}{2}t\right) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\\
&= (-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{2k-1}{2}t\right)\right) - \cos\frac{t}{2}\\
&= (-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\frac{t}{2}.
\end{aligned}$$

Chgt d'indice
Dans la première somme, on a posé $i = k+1$.

En divisant par 2, on obtient alors

$$\boxed{\cos\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\frac{t}{2}\right).}$$

2.c. En divisant la relation précédente par $\cos\frac{t}{2}$, ce qui est légitime car $\cos\frac{t}{2}$ ne s'annule pas sur $[0,1]$ puisque $0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, on obtient

Méthode
Avant d'effectuer une division, ne pas oublier de s'assurer (et de l'écrire !) que l'on divise par une quantité non nulle.

$$\forall t \in [0,1],\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = (-1)^n\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Puis en intégrant cette égalité,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1\cos(kt)\,dt = (-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,dt - \frac{1}{2}.$$

Mais pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_0^1\cos(kt)\,dt = \frac{\sin k}{k} - \frac{\sin(0)}{k} = \frac{\sin k}{k}$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n}u_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\sin k}{k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1\cos(kt)\,dt = \boxed{(-1)^n\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,dt - \frac{1}{2}.}$$

3. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2\cos\frac{t}{2}}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,1]$, car inverse d'une fonction $\mathscr{C}^1$ ne s'annulant pas.

D'après la question 1, on a donc $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^1\frac{\cos(\lambda t)}{2\cos\frac{t}{2}}\,dt = 0.$

Mais lorsque $n \to +\infty$, $\dfrac{2n+1}{2} \to +\infty$, et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,dt = 0$.

Puisque $(-1)^n$ est une suite bornée, il vient alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,dt = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = -\frac{1}{2}$. C'est donc que la série de terme général u_n converge et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n} = -\frac{1}{2}.}$$

Rappel Une série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge. La somme de la série est alors la limite de la suite de ses sommes partielles.

Exercice 3

1.a. Si f est un automorphisme de E, alors en particulier f est injectif de sorte que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Et f est surjectif, de sorte que $\operatorname{Im} f = E$. On a donc bien $\boxed{E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.}$

1.b. Notons qu'avec les notations de l'énoncé, si $x = x_F + x_G$, alors $s(x) = x_F - x_G = x_F + (-x_G)$, avec $x_F \in F$ et $-x_G \in G$. Donc

$$s^2(x) = x_F - (-x_G) = x_F + x_G = x.$$

Ainsi, $s^2 = \mathrm{id}$. Par conséquent, s est un automorphisme de E, et on a $s^{-1} = s$.
Et donc, par la question précédente, $\boxed{E = \operatorname{Im} s \oplus \operatorname{Ker} s.}$

Somme directe L'unique écriture de $s(x)$ comme un élément de F et un élément de G est

$$s(x) = x_F - x_G.$$

2.a. Si f est l'endomorphisme nul, alors $\operatorname{Ker} f = E$ et $\operatorname{Im} f = \{0\}$, donc comme précédemment, $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

2.b.i. f est diagonalisable, de sorte que $\displaystyle\sum_{\lambda\in\operatorname{Spec}(f)} \dim E_\lambda(f) = n$.

Si f ne possédait que 0 comme valeur propre, alors on aurait nécessairement $\dim E_0(f) = n$, c'est-à-dire $E_0(f) = E$. Or $E_0(f) = \operatorname{Ker} f$, et donc f serait l'endomorphisme nul. Ainsi, $\boxed{f \text{ possède une valeur propre non nulle.}}$

Attention ! Nous ne venons pas de dire qu'un endomorphisme ne possédant que 0 comme valeur propre est nul, mais qu'un endomorphisme **diagonalisable** ne possédant que 0 comme valeur propre est nul.

2.b.ii. Soit λ une valeur propre non nulle de f et soit $x \in E_\lambda(f)$.

Alors $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\lambda} f(x) = f\left(\dfrac{1}{\lambda}x\right)$. Et ainsi $x \in \operatorname{Im} f$. On en déduit que $\boxed{E_\lambda(f) \subset \operatorname{Im} f.}$

2.b.iii. De la question précédente, on déduit que

$$\bigoplus_{\substack{\lambda\in\operatorname{Spec}(f)\\ \lambda\neq 0}} E_\lambda(f) \subset \operatorname{Im} f$$

et donc $\displaystyle\dim \operatorname{Im} f \geqslant \sum_{\substack{\lambda\in\operatorname{Spec}(f)\\ \lambda\neq 0}} \dim E_\lambda(f)$.

Rappel La dimension d'une somme directe de sous-espaces vectoriels est la somme des dimensions. Ceci est faux si la somme n'est pas directe.

D'autre part, on a

$$\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \operatorname{Ker} f = n - \dim E_0(f).$$

Enfin, f est diagonalisable, de sorte que $\displaystyle\sum_{\lambda\in\operatorname{Spec}(f)} \dim E_\lambda(f) = n$.

Et donc $\displaystyle\dim E_0(f) = n - \sum_{\substack{\lambda\in\operatorname{Spec}(f)\\ \lambda\neq 0}} \dim E_\lambda(f)$.

On en déduit que

$$\dim \operatorname{Im} f \leqslant \sum_{\substack{\lambda\in\operatorname{Spec}(f)\\ \lambda\neq 0}} \dim E_\lambda(f) = \dim\left(\bigoplus_{\substack{\lambda\in\operatorname{Spec}(f)\\ \lambda\neq 0}} E_\lambda(f)\right).$$

Par double inégalité, on a alors $\displaystyle\dim \operatorname{Im} f = \sum_{\substack{\lambda\in\operatorname{Spec}(f)\\ \lambda\neq 0}} \dim E_\lambda(f)$ et donc[3] $\displaystyle\operatorname{Im} f = \bigoplus_{\substack{\lambda\in\operatorname{Spec}(f)\\ \lambda\neq 0}} E_\lambda(f)$.

[3] On a déjà une inclusion, et nous venons de prouver l'égalité des dimensions.

Enfin, on sait que $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} E_\lambda(f)$ et donc

$$E = E_0(f) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathrm{Spec}(f) \\ \lambda \neq 0}} E_\lambda(f) \right) = \boxed{\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f.}$$

3.a.i. Si $y \in \mathrm{Im}\, f$, alors par définition de $\mathrm{Im}\, f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Mais $y \in \mathrm{Ker}\, f$, de sorte que $f(y) = 0$ et donc $\boxed{f(f(x)) = 0.}$

3.a.ii. Pour $k \geqslant 2$, on a

$$f^k(x) = f^{k-2}(f^2(x)) = f^{k-2}(0) = \boxed{0.}$$

3.b. Par le théorème du rang, nous savons déjà que $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = n$.
De plus, si $y \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$, alors en reprenant les notations de la question précédente, on a

$$P(f)(x) = 0 \Leftrightarrow a_1 f(x) + a_2 f^2(x) + \cdots + a_p f^p(x) = 0.$$

Mais pour $k \geqslant 2$, $f^k(x) = 0$ et donc

$$a_1 f(x) = 0 \Leftrightarrow a_1 y = 0.$$

Puisque par hypothèse $a_1 \neq 0$, alors $y = 0$.
Nous avons donc prouvé que $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ et donc $\boxed{E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f.}$

PROBLÈME

Partie 1 : quelques résultats utiles pour les parties suivantes

1. Les prévisions du joueur i étant fixées, chacune d'entre elles a une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ de se réaliser, et les lancers des dés étant indépendants, chacune se réalise ou non indépendamment des autres.

Ainsi, X_i suit la loi binomiale $\boxed{\mathscr{B}\left(2p+1, \frac{1}{2}\right).}$

2.a. La somme $S_p + T_p$ fait clairement apparaître un binôme de Newton :

$$S_p + T_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} + \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} = \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} = (1+1)^{2p+1} = \boxed{2^{2p+1}.}$$

Astuce
La somme des coefficients binomiaux est en fait $(a+b)^n$ avec $a = b = 1$.

2.b. Rappelons que $\forall n \in \mathbf{N}, \forall k \in [\![0, n]\!], \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et donc pour $n = 2p+1$, on a

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2p+1-k} = \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} = \boxed{T_p.}$$

Explication
On a utilisé ici la symétrie des coefficients binomiaux, et le fait que nous savons calculer la somme des coefficients d'une ligne du triangle de Pascal. Ce qui nous permet de calculer la somme d'une demi-ligne.

2.c. On en déduit que $S_p + T_p = 2S_p$, et donc $2S_p = 2^{2p+1} \Leftrightarrow \boxed{S_p = 4^p.}$
Ainsi, puisque nous connaissons la loi des X_i, il vient

$$r_p = P(X_i \leqslant p) = \sum_{k=0}^{p} P(X_i = k) = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{2p+1-k}} = \frac{1}{2^{2p+1}} \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{k} = \boxed{\frac{1}{2}.}$$

Partie 2 : les joueurs jouent au hasard et indépendamment les uns des autres

3. Il est clair que $G_1(\Omega) \subset \{0\} \cup \left\{ \frac{n!}{j+1}, j \in [\![0, n-1]\!] \right\}$ car le gain du joueur 1 est soit nul[4], soit $n!$ divisé par le nombre de joueurs ayant le plus de prévisions correctes, et ce nombre de joueurs est nécessairement compris entre 1 et n.
De plus, 0 est bien une valeur possible pour G_1, par exemple dans le cas où le joueur 1 n'a rien prévu correctement et que les autres ont une (ou plusieurs) prévisions exactes. Et pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, le joueur 1 peut gagner exactement $\frac{n!}{j+1}$ dans le cas (par exemple) où toutes ses prévisions sont correctes et où exactement j autres joueurs ont prévu les mêmes résultats.

[4] si ce n'est pas lui qui a le plus de prévisions correctes.

Rédaction
Ce type de question n'est pas forcément facile à rédiger, car il faut essayer de trouver le bon équilibre entre l'intuition que l'on se fait de la situation et un raisonnement probabiliste avec des événements, des formules, etc.

4.a. On a $P(X_1 = 0) = q_0$ (par définition de q_0), et l'événement $[X_1 = 0] \cap \left[G_1 = \dfrac{n!}{n}\right]$ est l'événement «tous les joueurs ont toutes leurs prévisions fausses», qui se réécrit

$$[X_1 = 0] \cap \left[G_1 = \frac{n!}{n}\right] = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap \cdots \cap [X_n = 0].$$

Mais par indépendance des variables X_i, on a

$$P([X_1 = 0] \cap \cdots \cap [X_n = 0]) = P(X_1 = 0) \cdots P(X_n = 0) = q_0^n.$$

Ainsi, il vient

$$P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{n}\right) = \frac{P\left([X_1 = 0] \cap \left[G_1 = \frac{n!}{n}\right]\right)}{P(X_1 = 0)} = \frac{q_0^n}{q_0} = \boxed{q_0^{n-1}.}$$

4.b. Si $X_1 = 0$, alors pour $j < n-1$, $P\left(\left[G_1 = \frac{n!}{j+1}\right] \cap [X_1 = 0]\right) = 0$.
En effet, si le joueur 1 n'a aucune prévision correcte, son gain ne peut être strictement positif qu'à condition que tous les autres joueurs n'aient aucune prévision correcte. Et donc G_1 ne peut prendre que la valeur 0 ou la valeur $\dfrac{n!}{n}$. En particulier, ce gain ne peut valoir $\dfrac{n!}{j+1}$.

4.c. On en déduit que

$$\begin{aligned} E(G_1|X_1 = 0) &= 0 \times P_{[X_1=0]}(G_1 = 0) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j+1} P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) \\ &= \frac{n!}{n} P_{[X_1=0]}\left(G_1 = \frac{n!}{n}\right) \boxed{= (n-1)!q_0^{n-1}.} \end{aligned}$$

Espérance cond. Par définition, l'espérance conditionnelle $E(X|A)$ est l'espérance pour la probabilité P_A, donc on a

$$E(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P_A(X = x).$$

5.a. Sachant que le joueur 1 a exactement k prévisions correctes, son gain G_1 ne peut valoir $\dfrac{n!}{j+1}$ que si j autres joueurs ont exactement k prévisions correctes et que tous les autres ont strictement moins de k prévisions correctes.
Or, il y a exactement $\binom{n-1}{j}$ manières de choisir les j joueurs **autres**[5] **que le joueur** 1 ayant k prévisions correctes.
Une fois le choix de ces j joueurs effectué, la probabilité qu'ils aient exactement k bons résultats et que les autres en aient strictement moins est, par indépendance des joueurs,

$$P(X_1 = k)^j \times P(X_1 \leqslant k-1)^{n-1-j} = q_k^j r_{k-1}^{n-1-j}.$$

Donc au total,

$$\boxed{P_{[X_1=k]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-1}{j} (q_k)^j (r_{k-1})^{n-1-j}.}$$

[5] Ce qui explique que l'on prenne $\binom{n-1}{j}$ et non $\binom{n}{j}$.

En détail : l'explication précédente, avec une phrase est probablement suffisante. Donnons tout de même le détail avec un calcul, bien plus délicat à rédiger.
Notons I l'ensemble des parties de $[\![2, n]\!]$ formée de j éléments deux à deux distincts. Alors card$(I) = \binom{n-1}{j}$, car choisir un élément de I, c'est choisir j joueurs parmi $J_2, \ldots, J_{n-1}$.
On a alors

$$[X_1 = k] \cap \left[G_1 = \frac{n!}{j+1}\right] = \bigcup_{J \in I} \left([X_1 = k] \cap \bigcap_{i \in J} [X_i = k] \cap \bigcap_{i \notin J} [X_i \leqslant k-1]\right).$$

Explication Un élément de I est un choix de j joueurs autres que le premier. Cela correspond aux j joueurs ayant k prévisions correctes.

Ces événements étant deux à deux disjoints, il vient alors

$$P\left([X_1 = k] \cap \left[G_1 = \frac{n!}{j+1}\right]\right) = \sum_{J \in I} P\left([X_1 = k] \cap \bigcap_{i \in J} [X_i = k] \cap \bigcap_{i \notin J} [X_i \leqslant k-1]\right).$$

Par indépendance des choix des différents joueurs, on a alors, pour tout $J \in I$,

$$P\left([X_1 = k] \cap \bigcap_{i\in J}[X_i = k] \cap \bigcap_{i\notin J}[X_i \leqslant k-1]\right) = q_k^{j+1} r_k^{n-1-j}.$$

Et donc,

$$P\left([X_1 = k] \cap \left[G_1 = \frac{n!}{j+1}\right]\right) = \binom{n-1}{j} q_k^{j+1} r_k^{n-1-j}.$$

Explication Tous les termes de la somme précédente sont égaux, et la somme comporte card$(I) = \binom{n-1}{j}$ termes.

On en déduit donc que

$$P_{[X_1=k]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = \frac{P\left([X_1 = k] \cap \left[G_1 = \frac{n!}{j+1}\right]\right)}{P(X_1 = k)} = q_k^j r_k^{n-1-j}.$$

5.b. On a, pour $j \leqslant n-1$,

$$\frac{1}{j+1}\binom{n-1}{j} = \frac{1}{j+1}\frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} = \frac{(n-1)!}{(j+1)!(n-(j+1))!} = \frac{1}{n}\frac{n!}{(j+1)!(n-(j+1))!} \boxed{= \frac{1}{n}\binom{n}{j+1}}.$$

Classique C'est l'égalité usuelle

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E(G_1|X_1 = k) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j+1} P_{[X_1=k]}\left(G_1 = \frac{n!}{j+1}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j+1}\binom{n-1}{j}(q_k)^j (r_{k-1})^{n-1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{n}\binom{n}{j+1}(q_k)^j (r_{k-1})^{n-1-j} = (n-1)!\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j+1}(q_k)^j (r_{k-1})^{n-(j+1)} \\
&= (n-1)!\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(q_k)^{i-1}(r_{k-1})^{n-i} \\
&= \frac{(n-1)!}{q_k}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(q_k)^i (r_{k-1})^{n-i} - (n-1)!\frac{r_{k-1}^n}{q_k} \\
&= \frac{(n-1)!}{q_k}(q_k + r_{k-1})^n - \frac{(n-1)! r_{k-1}^n}{q_k} \\
&= \boxed{(n-1)!\frac{r_k^n - r_{k-1}^n}{q_k}}
\end{aligned}$$

Chgt d'indice $i = j+1$.

Binôme de Newton

Car $q_k + r_{k-1} = r_k$.

5.c. Pour $k = 0$, on retrouve

$$E(G_1|X_1 = 0) = (n-1)!\frac{r_0^n}{q_0} = (n-1)!\frac{q_0^n}{q_0} = (n-1)! q_0^{n-1}$$

ce qui est bien l'expression obtenue à la question 4.c.

6. D'après la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'événements $\{[X_1 = k], k \in [\![0, 2p+1]\!]\}$, on a

$$\begin{aligned}
E(G_1) &= \sum_{k=0}^{2p+1} E(G_1|X_1 = k)P(X_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{2p+1} (n-1)!\frac{(r_k)^n - (r_{k-1})^n}{q_k} q_k \\
&= (n-1)!\sum_{k=0}^{2p+1}((r_k)^n - (r_{k-1})^n) \\
&= (n-1)! r_{2p+1}^n \\
&= \boxed{(n-1)!}
\end{aligned}$$

Convergence Il n'y a ici pas de problème de convergence, puisque G_1 est une variable aléatoire qui ne peut pendre qu'un nombre fini de valeurs, donc elle possède une espérance, et donc la formule de l'espérance totale s'applique.

Somme téléscopique

$r_{2p+1} = P(X_1 \leqslant 2p+1) = 1.$

7. Les variables aléatoires G_1 et G_2 ne sont pas indépendantes.
En effet, on a d'une part $P(G_1 = n!) = q_{2p+1} r_{2p}^{n-1} > 0 > 0$.
Et de même $P(G_2 = n!) > 0$.
Pourtant, on a $P([G_1 = n!] \cap [G_2 = n!]) = 0$ car les deux joueurs J_1 et J_2 ne peuvent être simultanément les seuls à avoir le maximum de prévisions correctes.

Intuition Il est possible que toutes les prévisions de J_1 soient correctes, et qu'il soit le seul.

Partie 3 : J_1 et J_2 forment un groupe et les autres joueurs jouent comme dans la partie 2

8.a. Notons comme précédemment X_i le nombre prévisions correctes de J_i.
Alors, si $X_1 \geqslant p+1$, $X_2 = 2p+1-X_1 \leqslant (2p+1)-(p+1) \leqslant p$.
Si $X_1 \leqslant p$, alors $X_2 = (2p+1)-k \geqslant p+1$.
Dans les deux cas, un et un seul des deux joueurs a au moins $p+1$ prévisions correctes.

Explication
Puisque les deux joueurs jouent à chaque fois des prévisions contraires, à eux eux ils ont toujours $2p+1$ prévisions correctes et donc

$$X_1 + X_2 = 2p+1.$$

8.b. Puisque $Y = \max(X_1, X_2)$, on a toujours $Y \geqslant p+1$, et donc $Y(\Omega) \subset [\![p+1, 2p+1]\!]$.
De plus, on a bien l'égalité (et non juste une inclusion), car si J_1 a eu exactement $k \in [\![p+1, 2p+1]\!]$ prévisions correctes et que tous les joueurs $J_3, \dots, J_n$ n'ont aucune prévision correcte, alors $Y = k$.

9. Si les lancers donnent F, P, P, alors J_1 a ses trois prévisions correctes (et donc J_2 n'en a aucune), alors que si les lancers donnent P, F, F, J_2 a ses trois prévisions correctes (et donc J_1 n'en a aucune). Dans ces deux cas, Y vaut 3.
Enfin, pour tout autre résultat, l'une au moins des prévisions de J_1 s'avérera correcte et une autre fausse, donc on aura $1 \leqslant X_1 \leqslant 2$ et donc $1 \leqslant X_2 \leqslant 2$, de sorte que $Y = \max(X_1, X_2) = 2$.

10. Soit $k \in [\![p+1, 2p+1]\!]$. Puisque $Y = \max(X_1, X_2)$, on a

$$[Y=k] = ([X_1=k] \cap [X_2<k]) \cup ([X_1<k] \cap [X_2=k]) \cup ([X_1=k] \cap [X_2=k]).$$

Notons que cette fois, X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes, bien au contraire[6], car on a $X_2 = 2p+1-X_1$.
De plus, les événements $[X_1 = k]$ et $[X_2 = k]$ sont incompatibles en raison de ce qui a été prouvé à la question 8.a. Donc

$$[Y=k] = ([X_1=k] \cap [X_2<k]) \cup ([X_1<k] \cap [X_2=k]).$$

Mais $[X_1 = k] \subset [X_2 < k]$, car si $X_1 = k \geqslant p+1$, nécessairement $X_2 \leqslant p$. Ainsi, $[X_1=k] \cap [X_2<k] = [X_1=k]$. De même, $[X_2=k] \cap [X_1<k] = [X_2=k]$.
Donc, par incompatibilité des événements $[X_1 = k]$ et $[X_2 = k]$, on a

$$P(Y=k) = P(X_1=k) + P(X_2=k) = q_k + P(X_1 = 2p+1-k) = q_k + q_{2p+1-k}.$$

Or $q_k = \binom{2p+1}{k}\dfrac{1}{2^{2p+1}} = \binom{2p+1}{2p+1-k}\dfrac{1}{2^{2p+1}} = q_{2p+1-k}$.
On en déduit que $\boxed{P(Y=k) = 2q_k.}$

[6] En fait, X_2 est une fonction affine de X_1, donc $|\rho_{X_1,X_2}| = 1$, ce qui est le cas où elles sont «le moins indépendantes».

11. La seule différence avec la question 3 est qu'on ne peut avoir les n joueurs qui ont tous à la fois le plus grand nombre de prévisions correctes, puisque les deux joueurs J_1 et J_2 n'ont pas le même nombre de prévisions correctes.
Donc $G'(\Omega) \subset \{0\} \cup \left\{\frac{n!}{j+1}, j \in [\![0, n-2]\!]\right\}$.
Si J_1 a exactement une prévision correcte et que J_3 a toutes les prévisions correctes, alors $G' = 0$.
Enfin, si $j \in [\![0, n-2]\!]$, il est possible que J_1 aie toutes les prévisions correctes, de même que $J_3, \dots, J_{j+2}$ (soit exactement j joueurs), et que tous les autres n'aient aucune prévision correcte. Dans ce cas, on a $G' = \dfrac{n!}{j+1}$.
En conclusion, on a bien

$$\boxed{G'(\Omega) = \{0\} \cup \left\{\frac{n!}{j+1}, j \in [\![0, n-2]\!]\right\}.}$$

Support
Il est souvent facile de montrer que les valeurs possibles sont parmi telles valeurs. Mais alors on a uniquement une inclusion d'ensembles (comme ici).
Pour montrer qu'on a bien l'égalité, il faut encore prouver que G' peut bien prendre toutes ces valeurs avec une probabilité non nulle.

12.a. Soit $k \in [\![p+1, 2p+1]\!]$ et soit $j \in [\![0, n-2]\!]$.
Sachant que l'un des deux joueurs J_1, J_2 a exactement k prévisions correctes, la probabilité que G' soit égal à $\frac{n!}{j+1}$ est la probabilité que j joueurs parmi $J_3, \dots, J_n$ aient exactement k prévisions correctes, et tous les autres aient strictement moins de k prévisions correctes, donc au plus $k-1$.
Il y a $\binom{n-2}{j}$ manières de choisir ces j joueurs. Une fois ces joueurs choisis, la probabilité qu'ils aient k prévisions correctes et que les autres en aient strictement moins de k est, par indépendance des joueurs, égale à

$$(q_k)^j (r_{k-1})^{n-2-j}.$$

On en déduit que

$$\boxed{P_{[Y=k]}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right) = \binom{n-2}{j}(q_i)^j(r_{k-1})^{n-2-j}.}$$

12.b. Par définition de l'espérance conditionnelle, on a

$$\begin{aligned}
E(G'|Y=k) &= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{j+1} P_{[Y=k]}\left(G' = \frac{n!}{j+1}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{j+1}\binom{n-2}{j}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-2-j}\\
&= \frac{n!}{n-1}\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-1}{j+1}(q_k)^j(r_{k-1})^{n-2-j}\\
&= n(n-2)!\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}(q_k)^{i-1}(r_{k-1})^{n-1-i}\\
&= \frac{n(n-2)!}{q_k}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(q_k)^i(r_{k-1})^{n-1-i} - \frac{n(n-2)!r_{k-1}^{n-1}}{q_k}\\
&= n(n-2)!(q_k+r_{k-1})^{n-1} - \frac{n(n-2)!(r_{k-1})^{n-1}}{q_k}\\
&= \boxed{n(n-2)!\frac{(r_k)^{n-1}-(r_{k-1})^{n-1}}{q_k}.}
\end{aligned}$$

$\frac{1}{j+1}\binom{n-2}{j} = \frac{1}{n-1}\binom{n-1}{j+1}$ comme à la question 5.b.

Chgt d'indice
$i = j+1$.

Binôme de Newton.

$q_k + r_{k-1} = r_k$.

13.a. Par application de la formule de l'espérance totale au système complet d'événements $\{[Y=k], k \in [\![p+1, 2p+1]\!]\}$

$$\begin{aligned}
E(G') &= \sum_{k=p+1}^{2p+1} E(G'|Y=k)P(Y=k)\\
&= \sum_{k=p+1}^{2p+1} n(n-2)!\frac{(r_k)^{n-1}-(r_{k-1})^{n-1}}{q_k}2q_k\\
&= 2n(n-2)!\sum_{k=p+1}^{2p+1}\left((r_k)^{n-1}-(r_{k-1})^{n-1}\right)\\
&= 2n(n-2)!\left((r_{2p+1})^{n-1}-(r_p)^{n-1}\right)\\
&= \boxed{2n(n-2)!\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}
\end{aligned}$$

Convergence
Comme à la question 6, pas de problème de convergence car G' est une variable finie, donc admet une espérance.

Somme télescopique.

D'après 2.c.

13.b. Pour $n=3$, on a $2^{3-1}=4>3$. Si pour $n>3$, on a $2^{n-1}>n$, alors $2^n > 2n > n+1$. Ainsi, par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ 2^{n-1} > n.}$$

13.c. Puisque $G' = 2G'_1$, on a $E(G'_1) = \frac{1}{2}E(G') = n(n-2)!\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$.
Or, $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{n}$ et donc $1-\frac{1}{2^{n-1}} > 1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$. On en déduit que

$$E(G'_1) > n(n-2)!\frac{n-1}{n} = (n-1)! = E(G_1).$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la seconde stratégie est en moyenne plus avantageuse pour } J_1.}$

EXTRAITS COMMENTÉS DU RAPPORT DU JURY

Les correcteurs ont constaté que lorsque les résultats sont donnés par l'énoncé, certains candidats sont prêts à tout pour faire croire qu'ils ont prouvé le résultat demandé (pour les questions portant sur les probabilités notamment) : qu'ils sachent que ceci est sanctionné sévèrement.

✎ Tout est dit...

Exercice 2

Il n'est pas suffisant d'écrire que $f(b)\sin(\lambda b)$ est un réel pour garantir que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} f(b)\sin(\lambda b)=0$.

✎ En effet, le produit d'une fonction qui tend vers 0 par une fonction quelconque ne tend pas forcément vers 0, penser par exemple à $\dfrac{1}{x}\times x^2$ en $+\infty$ où encore à $\dfrac{1}{n}(-1)^n n$.
On peut alors soit utiliser le fait que le produit d'une fonction de limite nulle par une fonction **bornée** est de limite nulle, ou des croissances comparées pour se débarrasser d'une forme indéterminée du type $0\times\infty$.

Lorsqu'on a établi $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,dt=0$, il n'est pas question d'en déduire sans argumenter que $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\frac{t}{2}}\,dt=0$.

✎ C'est la même erreur que dans la remarque précédente : le bon argument est que la suite $(-1)^n$ est bornée.

Problème

Une remarque d'ordre général : trop de candidats se contentent de plagier l'énoncé et donnent des explications très succinctes ou floues pour établir le résultat demandé lorsque celui est donné.

✎ Si le résultat est donné dans l'énoncé, c'est souvent afin de permettre au candidat qui ne saurait répondre de poursuivre le sujet. Mais cela signifie également qu'on attend une réponse parfaitement justifiée.
Autant que possible, en probas, il faut essayer de justifier à l'aide de théorèmes usuels : formules des probabilités composées, des probabilités totales, des arguments d'indépendance ou d'incompatibilité, etc. Ce qui nécessite souvent de nommer des événements.
Il existe toutefois quelques cas où il est dur de justifier tout cela correctement, et où l'explication attendue est une phrase : dans ce cas celle-ci doit être syntaxiquement correcte (sujet/verbe/complément) et compréhensible par le correcteur.

Il faut absolument éviter de citer et de manipuler des «événements conditionnels», du genre $A|B$ ou ${}_BA$, cette notion n'ayant pas encore été inventée.

✎ Ce point est délicat, mais vous n'avez probablement jamais entendu parlé d'événements conditionnels pour la bonne raison que ceux-ci n'existent pas : on peut parler de probabilité conditionnelle, mais pas d'événement conditionnel !
Si vous avez envie de considérer un événement du type «A sachant B», c'est probablement à l'événement $A\cap B$ que vous devriez faire référence. Ou alors passer directement aux probabilités conditionnelles.

EDHEC 2007

Exercice 1

Sujet : Étude d'une suite d'intégrales.
Abordable en première année : ✓
Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, suites

Facile
Intérêt : ★★☆

Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\, dx$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bien définie.
2. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on pose alors

$$v_n = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\, dx \text{ et } w_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\, dx.$$

   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, 0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{e}$.
   b. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n \geqslant \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$.
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. On se propose de trouver un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
   a. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\, dx$ est une intégrale convergente.
   b. Établir que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\, dx \leqslant I$.
   c. En déduire un encadrement de v_n valable pour tout n de $\mathbf{N}^*$.
   d. Donner enfin, en utilisant cet encadrement, un équivalent simple de u_n.

Exercice 2

Sujet : Étude d'un automorphisme de l'espace vectoriel des quaternions (plongé dans $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$).
Abordable en première année : ✓ (sauf question 5 et 6)
Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire, diagonalisation, endomorphismes symétriques
Modifications apportées au sujet d'origine : suppression du rappel sur la trace, explicitement au programme 2015. On a explicité ce que signifie «E est stable pour le produit matriciel».

Facile
Intérêt : ★★☆

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ engendré par (I, J, K, L), et Id l'endomorphisme identité de E.
On pose $A = J + K$.

1. Montrer que (I, J, K, L) est une base de E et donner la dimension de E.
2. a. Exprimer JK, KL et LJ en fonction respectivement de L, J et K.
   b. Calculer J^2, K^2 et L^2, puis en déduire que $KJ = -L, LK = -J$ et $JL = -K$.
   c. En déduire que E est stable pour le produit matriciel, c'est-à-dire que : $\forall (M,N) \in E^2$, $MN \in E$.
3. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A.
4. On considère maintenant l'application φ_A qui à toute matrice M de E associe

$$\varphi_A(M) = AMA^{-1}.$$

   a. Montrer que φ_A est un endomorphisme de E.

b. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi_A$ puis montrer que φ_A est un automorphisme de E.

5. a. Déterminer la matrice Φ_A de φ_A dans la base (I, J, K, L), puis justifier que φ_A est diagonalisable.

   b. Donner les valeurs propres de φ_A ainsi que les sous-espaces propres associés.

On rappelle que l'application qui à tout couple (M, N) de $E \times E$ associe le réel $(M|N)$ défini par $(M|N) = \operatorname{tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur E.
On munit désormais E de ce produit scalaire.

6. a. Montrer que, pour tout couple (P, Q) de $E \times E$, $\operatorname{tr}(PQ) = \operatorname{tr}(QP)$.

   b. Établir alors que φ_A est un endomorphisme symétrique de E.

   c. En déduire que $\operatorname{Ker}(\varphi_A - \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(\varphi_A + \mathrm{Id})$ sont orthogonaux dans E.

Exercice 3

Sujet : Équivalent d'une intégrale à paramètre à l'aide du théorème central limite

Moyen

Abordable en première année : ✗

Intérêt : ★★☆

Thèmes du programme abordés : variables à densité, théorème central limite.

Commentaires : une application originale du théorème central limite.

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Rappeler quelle est la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de S_n.

2. À l'aide du théorème de la limite centrée, établir que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P(S_n \leqslant n) = \frac{1}{2}$.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}\, dt$.

4. a. Utiliser le résultat précédent pour montrer que $\displaystyle\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz}\, dz \underset{+\infty}{\sim} \frac{n!}{2n^{n+1}}$.

   b. On admet que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$. En déduire un nouvel équivalent de $\displaystyle\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz}\, dz$.

Problème

Sujet : Tirages dans deux urnes suivant différentes modalités

Facile

Abordable en première année : ✓

Intérêt : ★★★

Thèmes du programme abordés : probabilités discrètes, `Scilab`

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Commentaires : des probabilités discrètes très classiques. Les seules difficultés sont celles de tout problème de probabilités discrètes : bien comprendre la situation considérée, et choisir pertinemment les événements que l'on considère. Un excellent entraînement aux probabilités discrètes.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dispose de deux urnes U et V, l'urne U contenant une boule blanche et $n-1$ boules noires, l'urne V contenant une boule noire et $n-1$ boules blanches.
Un joueur choisit une urne au hasard pour le premier tirage puis il effectue des tirages d'une boule avec remise de cette boule dans l'urne dont elle provient, selon trois protocoles étudiés dans les trois parties de ce problème.
Pour tout i élément de $\mathbf{N}^*$, on note B_i l'événement «on obtient une boule blanche au i-ème tirage».
On note X le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule noire et Y le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule blanche. On admet que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Pour finir, on note U l'événement «le premier tirage a eu lieu dans l'urne U».

Partie I

Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans l'urne qui a été choisie au premier tirage.

1. a. Déterminer $P(X = 1)$.

b. Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $[X = k]$ à l'aide de certains des événements B_i ou $\overline{B_i}$, puis montrer que

$$\forall k \geqslant 2, P(X = k) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}\right).$$

Vérifier que cette formule reste vraie pour $k = 1$.

2. Établir que X possède une espérance et donner sa valeur.
3. Montrer que X et Y suivent la même loi.
4. On décide de coder l'événement U par 1 et l'événement V par 0.
Recopier et compléter (en remplaçant les parties étoilées) le programme Scilab suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie.

```
function y = partieun(n)
   urne = grand(1,1,'uin',0,1) ;
   y = 1 ;
   if urne == 0 then
     while grand(1,1,'uin',1,n) >1
       y = y+1 ;
     end
   else
      while ************
        *********
       end
   end
endfunction
```

Partie II
Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier ont lieu dans l'urne U si le tirage précédent a donné une boule blanche et dans l'urne V sinon.

5. **a.** Donner $P(X = 1)$.
   b. En procédant comme dans la partie I, montrer que

$$\forall k \geqslant 2, P(X = k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \frac{n-1}{n}.$$

6. Établir que X possède une espérance et donner sa valeur.
7. Montrer que X et Y suivent la même loi.
8. Avec les mêmes conventions et les mêmes notations que dans la partie 1, écrire un programme Scilab permettant le calcul de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie.

Partie III
Dans cette partie, chacun des tirages suivant le premier tirage a lieu dans la même urne que le tirage qui le précède si ce dernier a donné une boule blanche, et dans l'autre urne dans le cas contraire.

9. **a.** Donner $P(X = 1)$.
   b. Toujours selon la même méthode, montrer que

$$\forall k \geqslant 2,\ P(X = k) = \frac{(n-1)^{k-1} + n - 1}{2n^k}.$$

   Vérifier que la formule précédent reste valable pour $k = 1$.
   c. Donner l'espérance de X.
10. **a.** En procédant comme à la question 9.b, montrer que

$$\forall i \in \mathbf{N}^*,\ P(Y = 2i) = \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1} \frac{n^2 - 2n + 2}{2n^2}.$$

   b. Montrer également que : $\forall i \in \mathbf{N}^*,\ P(Y = 2i + 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i$.
   Vérifier que cette formule reste valable pour $i = 0$.

c. On pose

$$\forall p \in \mathbf{N}^*,\ E_{2p}(Y) = \sum_{k=1}^{2p} kP(Y = k) \text{ et } \forall p \in \mathbf{N},\ E_{2p+1}(Y) = \sum_{k=1}^{2p+1} kP(Y = k).$$

Montrer que la suite $(E_{2p}(Y))_{p\in\mathbf{N}^*}$ converge et donner sa limite.
Montrer que la suite $(E_{2p+1}(Y))_{p\in\mathbf{N}}$ converge et a la même limite que $(E_{2p}(Y))_{p\in\mathbf{N}^*}$.
En déduire que Y possède une espérance et que

$$E(Y) = \frac{3n^2}{2(n^2 - n + 1)}.$$

11. **a.** Montrer que X et Y suivent la même loi lorsque $n = 2$. Quelle est cette loi ?

b. Comment pouvait-on justifier, sans calcul, les deux résultats ci-dessus ?

12. Montrer que $E(Y) \leqslant E(X)$ avec égalité si et seulement si $n = 2$.

13. Écrire un programme permettant de calculer la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie.

EDHEC 2007 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ fixé, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

De plus, pour $x \geqslant 1$, on a $0 \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant e^{-x}$, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$ converge.

Et par conséquent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx$ converge. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est bien définie.}}$

> **Méthode**
> Commencer systématiquement l'étude d'une intégrale impropre par l'étude du domaine de continuité de l'intégrande permet de repérer les éventuels problèmes de convergence.
> Ici l'intégrande est continue en 0, donc le seul problème est au voisinage de $+\infty$.

2.a. Pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant e^{-x}$, donc par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant w_n \leqslant \int_1^{\infty} e^{-x}\,dx.$$

Mais pour $A > 1$, on a

$$\int_1^A e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_1^A = \frac{1}{e} - e^{-A} \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$$

de sorte que $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{e}$. On a donc bien

$$\boxed{0 \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{e}.}$$

> **Détails**
> La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $[0,1]$ et donc pour $x \in [0,1]$,
> $$e^{-x} \geqslant e^{-1}.$$

2.b. Pour $x \in [0,1]$, on a $\dfrac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \geqslant \dfrac{e^{-1}}{x+\frac{1}{n}}$, et donc par croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
v_n &\geqslant \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+\frac{1}{n}}dx\\
&= \left[\frac{1}{e}\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]_0^1\\
&= \frac{1}{e}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{e}\left(\ln(n+1)-\ln(n)+\ln(n)\right) = \boxed{\frac{1}{e}\ln(n+1).}
\end{aligned}$$

2.c. Remarquons que par la relation de Chasles, $u_n = v_n + w_n$, et donc

$$u_n \geqslant \frac{1}{e}\ln(n+1).$$

Mais lorsque $n \to \infty$, $\ln(n+1) \to \infty$, et donc

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty.}$$

3.a. La fonction $x \mapsto \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ est continue sur $]0,1]$.
De plus, au voisinage de 1, $1-e^{-x} = 1-(1-x+o(x))$, de sorte que

$$\frac{1-e^{-x}}{x} = \frac{x+o(x)}{x} = 1+o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

> **$o(1)$**
> Rappelons que $o(1)$ désigne toute quantité qui tend vers 0.

Ainsi, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx \text{ est faussement impropre, donc convergente.}}$

3.b. Pour $x \in]0,1]$, on a $1-e^{-x} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{x}$ et donc

$$0 \leqslant \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1-e^{-x}}{x}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx = I.}$$

Signe

Il est important de vérifier que $1-e^{-x} \geqslant 0$. Si ce n'était pas le cas, on multiplierait une inégalité par une quantité négative, et donc il faudrait changer le sens de l'inégalité.

3.c. On a d'après ce qui précède :

$$\int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}\,dx - \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+\frac{1}{n}}\,dx \leqslant I \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}\,dx - I \leqslant v_n.$$

Mais nous savons déjà[1] que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{n}}\,dx = \ln(n+1)$.

On en déduit que

$$\boxed{\ln(n+1) - I \leqslant v_n \leqslant \ln(n+1).}$$

[1] Voir la question 2.b.

3.d. Les questions précédentes prouvent que

$$\ln(n+1) - I \leqslant u_n \leqslant \ln(n+1) + \frac{1}{e}.$$

En divisant tous les membres de cette inégalité par $\ln(n+1)$, il vient

$$1 - \underbrace{\frac{I}{\ln(n+1)}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \leqslant \frac{u_n}{\ln(n+1)} \leqslant 1 + \underbrace{\frac{1}{e\ln(n+1)}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

Par le théorème des gendarmes, on a alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n+1)} = 1 \text{ soit } u_n \sim \ln(n+1).}$$

Mieux !

Notons que l'on pourrait encore montrer que

$$\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n),$$

et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

Exercice 2

1. Il est évident que (I,J,K,L) est une famille génératrice de E, par définition de E.
Soient à présent $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K + \lambda_4 L = 0$. Alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & -\lambda_4 & -\lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_4 & \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Par identification des coefficients, on en déduit que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Donc la famille (I,J,K,L) est libre.
On en déduit que (I,J,K,L) est une base de E, et donc $\boxed{\dim E = 4.}$

2.a. Le calcul nous donne

$$\boxed{JK = L, KL = J \text{ et } LJ = K.}$$

2.b. On a $J^2 = K^2 = L^2 = -I$. On en déduit que

$$KJ = (LJ)J = LJ^2 = L(-I) = \boxed{-L}, LK = (JK)K = JK^2 = \boxed{-J} \text{ et } JL = (KL)L = KL^2 = \boxed{-K}.$$

2.c. Soient $M, N \in E$. Alors il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ tels que

$$M = \lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K + \lambda_4 L \text{ et } N = \mu_1 I + \mu_2 J + \mu_3 K + \mu_4 L.$$

Alors

$$\begin{aligned}
MN &= (\lambda_1 I + \lambda_2 J + \lambda_3 K + \lambda_4 L)(\mu_1 I + \mu_2 J + \mu_3 K + \mu_4 L)\\
&= \lambda_1\mu_1 I + \lambda_1\mu_2 J + \lambda_1\mu_3 K + \lambda_1\mu_4 L + \lambda_2\mu_1 J + \lambda_2\mu_2 J^2 + \lambda_2\mu_3 JK + \lambda_2\mu_4 JL\\
&+ \lambda_3\mu_1 K + \lambda_3\mu_2 KL + \lambda_3\mu_3 K^2 + \lambda_3\mu_4 KL + \lambda_4\mu_1 L + \lambda_4\mu_2 LJ + \lambda_4\mu_3 LK + \lambda_4\mu_4 L^2\\
&= (\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2 - \lambda_3\mu_3 - \lambda_4\mu_4)I + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + \lambda_3\mu_4 - \lambda_4\mu_3)J\\
&+ (\lambda_1\mu_3 + \lambda_3\mu_1 + \lambda_4\mu_2 - \lambda_2\mu_4)K + (\lambda_4\mu_1 + \lambda_1\mu_4 + \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)L \in \mathrm{Vect}(I, J, K, L) = E.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{E \text{ est stable pour le produit matriciel.}}$

> **Plus simplement**
> Plutôt que de faire un calcul fastidieux, on peut expliquer par une phrase que MN est une combinaison linéaire de $IJ, K, L, IJ, IK, \dots$, et que toutes ces matrices étant dans E d'après les questions précédentes, MN est dans E.

3. On a
$$A^2 = (J+K)(J+K) = J^2 + JK + KJ + K^2 = -2I + L - L = -2I.$$
On en déduit que
$$A\left(-\frac{1}{2}A\right) = I.$$
Et donc A est inversible, d'inverse $\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{2}A.}$

> **Danger !**
> Attention à ne pas écrire
> $$(J+K)^2 = J^2 + 2JK + K^2.$$
> En effet, il s'agit là d'un cas particulier du binôme de Newton, qui ne saurait s'appliquer ici car J et K ne commutent pas.

4.a. Commençons par remarquer que $A \in E$ car combinaison linéaire d'éléments de E, et que par conséquent, $A^{-1} = -\frac{1}{2}A \in E$.
Donc si $M \in E$, par stabilité de E pour le produit matriciel, on a
$$\varphi_A(M) = AMA^{-1} \in E.$$
Montrons à présent que φ_A est linéaire : soient $M, N \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors
$$\varphi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N)A^{-1} = \lambda AMA^{-1} + ANA^{-1} = \lambda\varphi_A(M) + \varphi_A(N).$$
Donc $\boxed{\varphi_A \text{ est un endomorphisme de } E.}$

4.b. Soit $M \in \mathrm{Ker}\varphi_A$. Alors $AMA^{-1} = 0$.
En multipliant à gauche par A^{-1} et à droite par A, il vient $M = 0$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}\varphi_A = \{0\}$, et donc φ_A est injectif.
Mais E étant un espace de dimension finie, φ_A est injectif si et seulement si φ_A est bijectif.
Et donc $\boxed{\varphi_A \text{ est un automorphisme de } E.}$

5.a. Le calcul donne

$$\begin{aligned}
\varphi_A(I) &= I\\
\varphi_A(J) &= -\frac{1}{2}(J+K)J(J+K) = -\frac{1}{2}(J^3 + KJ^2 + J^2K + KJK) = K\\
\varphi_A(K) &= -\frac{1}{2}(J+K)K(J+K) = -\frac{1}{2}(JKJ + K^2J + JK^2 + K^3) = J\\
\varphi_A(L) &= -\frac{1}{2}(J+K)L(J+K) = -\frac{1}{2}(JLJ + JLK + KLJ + KLK) = -L
\end{aligned}$$

On a donc

$$\Phi_A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi_A(I) & \varphi_A(J) & \varphi_A(K) & \varphi_A(L) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ I \\ J \\ K \\ L \end{array}.$$

$\boxed{\varphi_A \text{ est diagonalisable}}$ car Φ_A est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable.

5.b. **Première méthode : avec un polynôme annulateur.** : Remarquons que $\Phi_A^2 = I$. Donc $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ est un polynôme annulateur de Φ_A (et donc de φ_A), de sorte que les valeurs propres de φ_A sont parmi 1 et -1.
Mais $\varphi_A(I) = I$, donc $1 \in \mathrm{Spec}(\varphi_A)$ et $\varphi_A(L) = -L$ donc $-1 \in \mathrm{Spec}(\varphi_A)$.
Ainsi, $\boxed{\text{les valeurs propres de } \varphi_A \text{ sont 1 et } -1.}$

Deuxième méthode : par la méthode du pivot.
Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors λ est valeur propre de φ_A si et seulement si $\mathrm{rg}(\Phi_1 - \lambda I) < 4$. Mais

$$\Phi_A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est triangulaire, donc elle est de rang strictement inférieur à 4 si et seulement si $1-\lambda = 0$ ou $1-\lambda^2 = 0$ ou $-1-\lambda = 0$, donc si et seulement si $\lambda = \pm 1$.
Ainsi, $\mathrm{Spec}(\varphi_A) = \mathrm{Spec}(\Phi_A) = \boxed{\{-1, 1\}.}$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$. Alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_1(\Phi_A)$ si et seulement si

$$\Phi_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

On en déduit que $\boxed{E_1(\varphi_A) = \mathrm{Vect}(I, J+K).}$

> **Coordonnées**
> N'oublions pas qu'une fois connue une base de vecteurs propres de Φ_A, il faut «traduire» ces vecteurs de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ en vecteurs de E.
> Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne des coordonnées de I dans la base (I, J, K, L) et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le vecteur colonne des coordonnées de $J+K$.

De même, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_{-1}(\Phi_A)$ si et seulement si

$$\Phi_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \\ -t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Et donc $\boxed{E_{-1}(\varphi_A) = \mathrm{Vect}(J-K, L).}$

6.a. Soient $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4}$ et $Q = (q_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4}$ deux matrices de E. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(PQ) &= \sum_{i=1}^{4} (PQ)_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} p_{i,k} q_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} q_{k,i} p_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^{4} (PQ)_{k,k} = \mathrm{tr}(QP) \end{aligned}$$

6.b. On a, pour tout $P, Q \in E$:

$$(P|\varphi_A(Q)) = (P|AQA^{-1}) = \mathrm{tr}({}^tPAQA^{-1}) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^tPAQA).$$

> **Rappel** : $A^{-1} = -\frac{1}{2}A$.

De même, en remarquant que ${}^tA = -A$, on a

$$(\varphi_A(P)|Q) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^t(APA)Q) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^tA\,{}^tP\,{}^tAQ) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(-A\,{}^tP(-A)Q) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(A\,{}^tPAQ)$$

Mais en utilisant la question 6.a, il vient

$$\mathrm{tr}(A({}^tPAQ)) = \mathrm{tr}(({}^tPAQ)A) = \mathrm{tr}({}^tPAQA)$$

et donc $(\varphi_A(P)|Q) = (P|\varphi_A(Q))$.
Donc $\boxed{\varphi_A \text{ est un endomorphisme symétrique de } E.}$

6.c. Puisque φ_A est symétrique, ses sous-espaces propres sont orthogonaux.
Or, les valeurs propres de φ_A sont 1 et -1, donc

$$E_1(\varphi_A) = \mathrm{Ker}(\varphi_A - \mathrm{Id}) \text{ et } E_{-1}(\varphi_A) = \mathrm{Ker}(\varphi_A + \mathrm{Id})$$

sont orthogonaux dans E.

EXERCICE 3

1. Les X_i suivent la loi $\mathscr{E}(1)$, qui est également la loi $\gamma(1)$, et sont indépendantes, donc $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi $\gamma(n)$.
En particulier, on a $\boxed{E(S_n) = V(S_n) = n.}$

> **Rappel**
> L'espérance et la variance d'une loi $\gamma(\nu)$ sont toutes deux égales, et valent ν.

2. Notons que la variable centrée réduite associée à S_n est $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.
D'après le théorème central limite, qui s'applique ici car les X_n sont i.i.d et admettent une variance, $\left(\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)_n$ converge en loi vers une variable X suivant la loi normale centrée réduite.
Mais alors, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$P(S_n \leqslant n) = P(S_n - n \leqslant 0) = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P(X \leqslant 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Et donc on a prouvé que $\boxed{\lim_{n\to\infty} P(S_n \leqslant n) = \frac{1}{2}.}$

> **Danger !**
> Attention à ne pas dire que
> $$P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right)$$
> est **égale** à $P(X \leqslant 0)$.
> Pour n grand, ces probabilités sont sans doute proches, mais on ne peut faire l'économie de la limite.

3. Rappelons qu'une densité de S_n est

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

> **Rappel**
> Pour tout entier $n > 0$, on a
> $$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Ainsi, pour tout n, on a

$$P(S_n \leqslant n) = \int_{-\infty}^{n} f_n(t)\,dt = \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}\,dt$$

et alors le résultat de la question 2 nous indique que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}.}$$

4.a. Dans l'intégrale précédente, procédons au changement de variable $t = nz$, qui est de classe $\mathscr{C}^1$. Alors

$$\int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t}\,dt = \int_0^1 \frac{(nz)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-nz} n\,dz = \frac{n^n}{(n-1)!} \int_0^1 z^{n-1} e^{-nz}\,dz.$$

> **Chgt de variable**
> Notons que nous procédons ici à un changement de variable sur un segment, et que donc il n'est pas nécessaire de vérifier la stricte monotonie du changement de variable.

Or nous savons que

$$\frac{n^n}{(n-1)!} \int_0^1 z^{n-1} e^{-nz}\,dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \iff \int_0^1 z^{n-1} e^{-nz} dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n-1)!}{2n^n} = \boxed{\frac{n!}{2n^{n+1}}}.$$

> **Stirling**
> L'équivalent qui est fourni par l'énoncé n'est autre que la formule de Stirling, dont on trouve par exemple une preuve dans EML 2012 (et une autre dans Maths II 2017).

4.b. En remplaçant dans l'équivalent précédent $n!$ par $\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, on obtient

$$\boxed{\int_0^1 z^{n-1} e^{-nz} dz \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n} e^{-n}}{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}.}$$

Problème

Partie I

1.a. Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{U, V\}$, on a

$$P(X=1) = P_U(X=1)P(U) + P_V(X=1)P(V) = \frac{1}{2}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Détail

Si on tire dans l'urne U, on a une probabilité $\frac{n-1}{n}$ d'avoir une boule blanche puisqu'il y a $n-1$ boules balnches parmi n boules, et sinon cette probabilité vaut $\frac{1}{n}$.

1.b. On a

$$[X=k] = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}.$$

Alors comme précédemment, par la formule des probabilités totales, on a

$$P(X=k) = P_U(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k})P(U) + P_V(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k})P(V)$$

avec $P(U) = P(V) = \frac{1}{2}$.

Mais les tirages sont indépendants, de sorte que les événements $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, \overline{B_k}$ sont indépendants, pour les probabilités P_U et P_V. Et donc

Indépendance

Les événements B_1 et B_2 ne sont pas indépendants (faire les calcul pour s'en convaincre), ils le sont une fois le choix de l'urne effectué, car les tirages ont lieu toujours dans la même urne et avec remise.

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{1}{2}\left(P_U(B_1)\cdots P_U(B_{k-1})P_U(\overline{B_k}) + P_V(B_1)\cdots P_V(B_{k-1})P_V(\overline{B_k})\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Pour $k=1$, cette formule donne

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

et on retrouve bien $P(X=1)$ calculé à la question précédente.

Alternative : il est également possible de remarquer qu'une fois le choix de l'urne effectué, les tirages étant sans remise, ils sont indépendants, et donc X compte le nombre d'essais nécessaires à l'obtention d'un premier succès lors d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

Et donc X suit une loi géométrique.

Plus précisément : la loi de X sachant U est une loi géométrique de paramètre[2] $\dfrac{n-1}{n}$, et la loi de X sachant V est une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{n}$. Donc, sans calculs,

[2] C'est la probabilité d'obtenir une boule noire en tirant dans U.

$$P_U(X=k) = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} \text{ et } P_V(X=k) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}.$$

On obtient alors $P(X=k)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$P(X=k) = P(U)P_U(X=k) + P(V)P_V(X=k) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right).$$

Notons que ce que nous venons de faire est également valable pour $k = 1 =$.

2. Notons que X est à support dans $\mathbf{N}^*$.

Support

Nous pourrions montrer à l'aide du théorème de la limite monotone que la probabilité de n'avoir jamais une boule blanche est nulle.

Par définition, X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X=k)$ converge[3].

[3] absolument, mais il s'agit ici d'une série à termes positifs.

Or les séries de termes généraux $k\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$ et $k\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}$ convergent car il s'agit de séries géométriques dérivées de raisons strictement comprises entre 0 et 1, donc la série de terme général $kP(X=k)$ converge et

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) &= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{n}\frac{1}{(1-\frac{n-1}{n})^2}\right) \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\frac{n^2}{(n-1)^2}+\frac{1}{n}n^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-1}+n\right)=\boxed{\frac{n^2}{2(n-1)}}.$$

Alternative : avec la formule de l'espérance totale.
Si jamais on a fait apparaître des lois conditionnelles dans la question 1.b, il y a plus simple, car nous connaissons l'espérance d'une loi géométrique.
Ainsi, $E(X|U)=\dfrac{n}{n-1}$ et $E(X|V)=n$.
Par la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'événements $\{U,V\}$, il vient alors

$$E(X)=P(U)E(X|U)+P(V)E(X|V)=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-1}+n\right)=\frac{n^2}{2(n-1)}.$$

Existence — Notons que le s.c.e étant finie, la somme qui apparaît est finie, et donc ceci suffit à garantir l'existence de $E(X)$.

3. Il s'agit de refaire les mêmes calculs qu'à la question 1.
En particulier, si $k\geqslant 2$, on a

$$[Y=k]=\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}\cap B_k$$

et donc

$$P(Y=k)=P(U)P_U(\overline{B_1})\cdots P_U(\overline{B_{k-1}})P_U(B_k)+P(V)P_V(\overline{B_1})\cdots P_V(\overline{B_{k-1}})P_V(B_k).$$

Mais pour tout $i\geqslant 1$, $P_U(\overline{B_i})=P_V(B_i)$ et $P_U(B_i)=P_V(\overline{B_i})$, de sorte que $P(X=k)=P(Y=k)$.
Bien entendu, cette formule reste valable pour $k=1$, et donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi.}}$

Intuition — Avec ce protocole de tirage, les boules noires et les boules blanches ont des rôles symétriques, et donc il est logique les lois de X et de Y soient les mêmes.

4.

```
function y = partieun(n)
  urne = grand(1,1,'uin',0,1) ;
  y = 1 ;
  if urne == 0 then
    while grand(1,1,'uin',1,n) >1
      y = y+1 ;
    end
  else
     while grand(1,1,'uin',1,n)==1
       y = y+1 ;
     end
  end
endfunction
```

Ce programme simule l'expérience décrite en numérotant les boules de 1 à n dans les deux urnes, les premières boules étant les noires, les suivantes étant les blanches.
Ainsi, dans l'urne U, la boule 1 est blanche alors que les boules de 2 à n sont noires. Dans l'urne V, au contraire, les boules de 1 à $n-1$ sont blanches et la boule n est noire.
Ainsi, si on tire dans l'urne U (c'est-à-dire si urne vaut 1), alors on tire des boules jusqu'à obtenir une boule portant un numéro strictement plus grand que 1, et si on tire dans l'urne V, on tire des boules jusqu'à obtenir une boule portant un autre numéro que 1.
Notons que le nombre de passage dans la boucle sera égal au nombre de fois où on aura tiré une boule **blanche**, mais que puisque nous initialisons y à 1, nous comptons bien le nombre total de tirages avant de tirer une boule noire.

Partie II

5.a. Les calculs réalisés à la question 1.a sont inchangés, on a toujours

$$P(X=1)=P_U(B_1)P(U)+P_V(B_1)P(V)=\frac{1}{n}\frac{1}{2}+\frac{n-1}{n}\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

5.b. Le résultat obtenu en 1.b n'a pas changé, on a toujours

$$[X=k]=B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}$$

et donc, par la formule des probabilités totales,

$$P(X=k)=P\left(U\cap B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}\right)+P\left(V\cap B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}\right)$$

Et alors, par la formule des probabilités composées,

$$P(X=k)=P(U)P_U(B_1)P_{U\cap B_1}(B_2)\cdots P_{U\cap B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}\left(\overline{B_k}\right)+P(V)P_V(B_1)P_{V\cap B_1}(B_2)\cdots P_{V\cap B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}$$

$$P(X=k)=P_U(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k})P(U)+P_V(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k})P(V).$$

Cette fois, les tirages ne sont plus indépendants.
Mais nous savons tout de même que si on obtient une boule blanche lors d'un tirage, alors le tirage suivant a lieu dans l'urne U, donc

$$P_{U\cap B_1}(B_2)=P_{V\cap B_1}(B_2)=\cdots=P_{U\cap B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})=P_{U\cap B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})=\frac{1}{n}.$$

D'autre part, $P_{U\cap B_1\cdots\cap B_{k-1}}(\overline{B_k})=P_{V\cap B_1\cdots\cap B_{k-1}}(\overline{B_k})=\dfrac{n-1}{n}$.
Enfin, $P_U(B_1)=\dfrac{1}{n}$ et $P_V(B_1)=\dfrac{n-1}{n}$.
On en déduit donc que

$$P(X=k)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\right)=\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n}}.$$

Alternative : il existait une méthode plus simple, bien que moins intuitive. En effet, on a

$$P(X=k)=P_{B_1}(X=k)P(B_1)+P_{\overline{B_1}}(X=k)P(\overline{B_1}).$$

Mais pour $k\geqslant 2$, on a $P_{\overline{B_1}}(X=k)=0$, car si l'on obtient une boule noire au premier tirage, nécessairement $X=1$.
Et alors on avait facilement $P_{B_1}(X=k)=\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-2}\dfrac{n-1}{n}$ puisque les tirages suivant le premier ont nécessairement lieu dans l'urne U (si B_1 est réalisé), et sont indépendants[4]
Enfin, comme dans la partie 1, $P(B_1)=P(Y=1)=\dfrac{1}{2}$.

6. Nous avons déjà mentionné précédemment que la série de terme général $k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}$ converge, et donc la série de terme général $k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}$ converge. Ainsi, X admet une espérance, et celle-ci vaut

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}kP(X=k)=P(X=1)+\sum_{k=2}^{+\infty}kP(X=k)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{+\infty}k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}.$$

Or, nous savons que

$$\sum_{k=2}^{+\infty}k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}=\sum_{i=1}^{+\infty}(i+1)\left(\frac{1}{n}\right)^{i-1}=\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{j}+\sum_{i=1}^{+\infty}i\left(\frac{1}{n}\right)^{i-1}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{n}}+\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^2}=\frac{n}{n-1}\left(1+\frac{n}{n-1}\right).$$

Ainsi, on a

$$E(X)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{n-1}\right)=\boxed{\frac{3n-2}{2(n-1)}}.$$

7. La situation est de nouveau totalement symétrique, et il semble relativement clair que X et Y suivent bien la même loi. Malgré tout, il semble relativement difficile de le prouver correctement sans détailler les calculs...
On a toujours, comme dans la partie I, pour $k\geqslant 2$,

$$[Y=k]=\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}\cap B_k$$

et donc[5], $P(Y=k)=P(U\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}\cap B_k)+P(V\cap\overline{B_1})\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}\cap B_k)$.
Appliquons ensuite la formule des probabilités composées :

$$P(Y=k)=P(U)P_U\left(\overline{B_1}\right)\cdot P_{U\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}}(B_k)+P(V)P_V\left(\overline{B_1}\right)\cdot P_{V\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}}(B_k).$$

Indépendance
Les tirages ne sont pas indépendants, car le résultat d'un tirage décide de l'urne dans laquelle a lieu le suivant, et donc influe fortement sur le tirage suivant.

Danger !
La formule obtenue à la question précédente n'est valable que pour $n\geqslant 2$. On prendra donc soin à ne pas remplacer $P(X=1)$ par $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{-1}\frac{n-1}{n}$.

Chgts d'indices
$i=k-1$, puis $j=i-1$.

[4] Sachant B_1.

[5] Toujours par la formule des probabilités totales.

Mais cette fois, si un tirage donne une boule noire, le tirage suivant a lieu dans l'urne V et donc

$$P_{U\cap\overline{B_1}}\left(\overline{B_2}\right) = P_{V\cap\overline{B_1}}\left(\overline{B_2}\right) = \cdots = P_{U\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-2}}}\left(\overline{B_{k-1}}\right) = P_{U\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-2}}}\left(\overline{B_{k-1}}\right) = \frac{1}{n}.$$

D'autre part, $P_{U\cap\overline{B_1}\cdots\cap\overline{B_{k-1}}}(B_k) = P_{V\cap\overline{B_1}\cdots\cap\overline{B_{k-1}}}(B_k) = \dfrac{n-1}{n}$.
Enfin, $P_U\left(\overline{B_1}\right) = \dfrac{1}{n}$ et $P_V\left(\overline{B_1}\right) = \dfrac{n-1}{n}$.
Et donc on a

$$P(Y=k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n} = P(X=k).}$$

Enfin, Y étant à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, et puisque nous savons déjà que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} P(Y=k) = \sum_{k=2}^{+\infty} P(X=k) = 1 - P(X=1) = \frac{1}{2},$$

on a nécessairement $P(Y=1) = \dfrac{1}{2}$.
Pour conclure, nous avons bien prouvé que $\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi.}}$

8. Il existe de nombreuses manières de procéder, essayons d'adapter un peu le programme de la question 4.
Le principal changement à apporter est que désormais, si le premier tirage a lieu dans l'urne V et donne une boule blanche, alors tous les suivants auront lieu dans l'urne U.

```
1  function y = partiedeux(n)
2          urne=grand(1,1,'uin',0,1) ;
3          if urne == 0 then
4                  if grand(1,1,'uin',1,n) > 1 then
5                          y= y+1 ;
6                          while grand(1,1,'uin',1,n)==1 then
7                                  y=y+1 ;
8                          end
9                  end
10         else
11                 while grand(1,1,'uin',1,n)==1 then
12                         y=y+1 ;
13                 end
14         end
15 endfunction
```

Le principal ajout concerne la ligne 4 : si le premier tirage est effectué dans V, et s'il a donné une boule blanche, alors les tirages suivants s'effectuent dans U, et donc avec la même boucle `while` que dans le programme de la question 4.

Partie III

9.a. Le raisonnement tenu dans les parties précédentes est toujours valable, et donc $\boxed{P(X=1) = \dfrac{1}{2}.}$

9.b. Comme dans les deux parties précédentes, nous avons $[X=k] = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}$.
Et donc, les probabilités totales suivies des probabilités composées nous donnent toujours

$$P(X=k) = P(U)P_U(B_1)P_{U\cap B_1}(B_2)\cdots P_{U\cap B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}\left(\overline{B_k}\right)+P(V)P_V(B_1)P_{V\cap B_1}(B_2)\cdots P_{V\cap B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}\left(\overline{B_k}\right).$$

Cette fois, tant que les tirages donnent une boule blanche, ils ont lieu dans la même urne.
Et donc

$$P_U(B_1) = P_{U\cap B_1}(B_2) = \cdots = P_{U\cap B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1}) = \frac{1}{n} \text{ et } P_{U\cap B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}\left(\overline{B_k}\right) = \frac{n-1}{n}.$$

De même,

$$P_V(B_1) = P_{V\cap B_1}(B_2) = \cdots = P_{V\cap B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1}) = \frac{n-1}{n} \text{ et } P_{V\cap B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}\left(\overline{B_k}\right) = \frac{1}{n}.$$

On en déduit donc que

$$P(X=k) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right] = \boxed{\frac{(n-1)^{k-1}+n-1}{2n^k}.}$$

Pour $k=1$, on a bien $\dfrac{(n-1)^{1-1}+(n-1)}{2n^1} = \dfrac{1}{2} = P(X=1)$, donc la formule reste valable.

9.c. Remarquons que la loi de X est exactement la même que celle obtenue dans la partie I.

Et donc l'espérance est également celle obtenue à la partie I : $\boxed{E(X) = \dfrac{n^2}{2(n-1)}.}$

> **Explication**
> Ceci s'explique très bien : tant qu'on obtient des boules blanches, on reste dans la même urne.
> Il s'agit donc de la situation de la partie I : on choisit une urne, et on tire (des boules blanches) jusqu'à obtenir enfin une boule noire.

10.a. Nous avons toujours

$$[Y=2i] = \overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{2i-1}}\cap B_{2i}$$

et donc, toujours avec les raisonnements précédents,

$$P(Y=2i) = P\left(U\cap\overline{B_1}\right)\cdots P_{U\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{2i-1}}}(B_{2i}) + P\left(V\cap\overline{B_1}\right)\cdots P_{V\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{2i-1}}}(B_{2i}).$$

Par la formule des probabilités composées,

$$P\left(U\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{2i-1}}\cap B_{2i}\right) = P(U)P_U\left(\overline{B_1}\right)\cdots P_{U\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{2i-1}}}(B_{2i}).$$

Nous savons déjà que $P_U\left(\overline{B_1}\right) = \dfrac{n-1}{n}$, $P_V\left(\overline{B_1}\right) = \dfrac{n-1}{n}$.
Et tant que l'on tire des boules noires, on change d'urne à chaque tirage. En particulier, si le premier tirage a lieu dans l'urne U, alors tous les tirages d'ordre pair ont lieu dans l'urne U et tous les tirages d'ordre impair ont lieu dans l'urne V. Ainsi,

$$\forall j\in[\![1,i-1]\!],\ P_{U\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{2j-1}}}\left(\overline{B_{2j}}\right) = \frac{1}{n} \text{ et } \forall j\in[\![2,n]\!],\ P_{U\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{2j-2}}}\left(\overline{B_{2j-1}}\right) = \frac{n-1}{n}.$$

Enfin, $P_{U\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{2i-1}}}(B_{2i}) = \dfrac{n-1}{n}$.
On en déduit que

$$P\left(U\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{2i}}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{P(U)}\underbrace{\frac{n-1}{n}\frac{1}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{1}{n}}_{(i-1)\text{ fois}}\frac{n-1}{n}\frac{n-1}{n}.$$

De la même manière, on prouve que

$$P\left(V\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{2i-1}}\cap B_{2i}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{=P(V)}\underbrace{\frac{1}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{n}\frac{n-1}{n}}_{(i-1)\text{ fois}}\frac{1}{n}\frac{1}{n}.$$

> **Détail**
> Cette fois, tous les tirages pairs ont lieu dans V et tous les tirages impairs ont lieu dans U, car le premier a lieu dans V et qu'on change d'urne à chaque tirage (du moins chaque fois qu'on obtient une boule noire, ce qui est le cas ici).

Donc

$$P(Y=2i) = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\left(\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right) = \boxed{\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\frac{n^2-2n+2}{2n^2}.}$$

10.b. On procède de la même manière que précédemment, en ajoutant un tirage d'une boule noire. On a ainsi,

$$P\left(U\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{2i}}\cap B_{2i+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i\frac{n-1}{n}$$

et

$$P\left(V\cap\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{2i}}\cap B_{2i+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i\frac{1}{n}.$$

Et donc il vient

$$P(Y=2i+1)=\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n}\right)=\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^i.}$$

Pour $i=0$, on a

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i=\frac{1}{2}=P(Y=1).$$

Donc la formule reste valable pour $i=0$.

10.c. On a

$$\begin{aligned}E_{2p}(Y)=\sum_{k=1}^{2p}kP(Y=k)&=\sum_{i=0}^{p-1}(2i+1)P(Y=2i+1)+\sum_{i=1}^{p}(2i)P(Y=2i)\\&=\sum_{i=0}^{p-1}(2i+1)\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i+2\sum_{i=1}^{p}i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\frac{n^2-2n+2}{2n^2}\\&=\sum_{i=0}^{p-1}i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i+\frac{n^2-2n+2}{n^2}\sum_{i=1}^{p}i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\end{aligned}$$

Mais les séries de termes généraux $i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i$, $\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i$ et $i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}$ sont des séries géométriques et géométriques dérivées de raison dans $]0,1[$ et donc convergent, de sorte que la suite $(E_{2p}(Y))_p$ converge et

Rappel
La limite des sommes partielles d'une série est, par définition, la somme de la série.

$$\begin{aligned}\lim_{p\to+\infty}E_{2p}(Y)&=\frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{+\infty}i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i+\frac{n^2-2n+2}{n^2}\sum_{i=1}^{+\infty}i\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}\\&=\left(\frac{n-1}{n^2}+\frac{n^2-2n+2}{n^2}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{n-1}{n^2}}\\&=\frac{n^2-n+1}{n^2}\frac{n^4}{(n^2-n+1)^2}+\frac{1}{2}\frac{n^2}{n^2-n+1}\\&=\frac{n^2}{n^2-n+1}\left(1+\frac{1}{2}\right)\\&=\boxed{\frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}.}\end{aligned}$$

Ensuite, notons que $E_{2p+1}(Y)=E_{2p}(Y)+(2p+1)P(Y=2p+1)$.
Mais $(2p+1)P(Y=2p+1)=\frac{2p+1}{2}\left(\frac{n-1}{n^2}\right)^p\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
Ainsi, puisque la suite $(E_{2p}(Y))_p$ est convergente, la suite $(E_{2p+1}(Y))_p$ est convergente, et de même limite que $(E_{2p}(Y))_p$.

Pour $p\in\mathbf{N}^*$, on a $E_p(Y)=\sum_{k=1}^{p}kP(Y=k)$, qui est la somme partielle d'ordre n de la série de terme général $kP(Y=k)$.
Alors nous venons de prouver que les deux sous-suites de $(E_p(Y))_p$ formées des termes d'ordre pair et d'ordre impair convergent vers une même limite.
Par conséquent, la suite $(E_p(Y))_p$ converge, et a pour limite la limite commune à ces deux suites. Et donc puisque la suite des sommes partielles de la série $\sum_{k\geqslant 1}kP(Y=k)$ converge, cette série converge[6].
Ainsi, Y admet une espérance et

Rappel
La suite (u_n) converge si et seulement si les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers **une même** limite.

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{+\infty}kP(Y=k)=\lim_{n\to+\infty}E_n(Y)=\lim_{p\to\infty}E_{2p}(Y)=\boxed{\frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}.}$$

[6] Et même converge absolument puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs.

11.a. Lorsque $n = 2$, on a $\dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, on a, pour $i \geqslant 1$,

$$P(Y = 2i) = \frac{1}{4^{i-1}}\frac{1}{4} = \frac{1}{4^i} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{2i-2}}\frac{1}{2} = P(X = 2i)$$

et de même,

$$P(Y = 2i+1) = \frac{1}{2}\frac{1}{4^i} = \frac{1}{2^{2i+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{2i-1}}\frac{1}{2} = P(X = 2i+1).$$

Donc X et Y suivent la même loi, et on a

$$P(X = k) = \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

de sorte que la loi commune à X et Y est $\boxed{\text{la loi géométrique de paramètre } \frac{1}{2}.}$

11.b. Ces résultats étaient prévisibles, car alors chaque urne contient une boule blanche et une boule noire, de sorte que l'urne dans laquelle a lieu un tirage donné n'a aucune importance. Et donc les tirages sont indépendants.

Ainsi, nous avons une répétitions d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $\dfrac{1}{2}$, jusqu'à obtention d'un succès[7] et $\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent donc une loi géométrique de paramètre } \dfrac{1}{2}.}$

[7] Ici le succès est l'obtention d'une boule blanche pour X, d'une noire pour Y.

12. D'après les calculs réalisés précédemment, on a

$$\begin{aligned} E(Y) - E(X) = \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)} - \frac{n^2}{2(n-1)} &= \frac{n^2(3(n-1) - (n^2-n+1))}{2(n-1)(n^2-n+1)} \\ &= \frac{n^2(-n^2+4n-4)}{2(n-1)(n^2-n+1)} = -\frac{n^2(n-2)^2}{2(n-1)(n^2-n+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $E(Y) - E(X) \leqslant 0$ avec égalité si et seulement si $n = 2$.

Et donc $\boxed{E(Y) \leqslant E(X) \text{ avec égalité si et seulement si } n = 2.}$

13. Nous avons déjà remarqué que X suivait la même loi que dans la partie I. Donc plutôt que de simuler cette expérience un peu plus complexe, on peut tout simplement reprendre le programme écrit à la partie I.

Donnons tout de même un programme simulant la bonne expérience :

```
function y = partietrois(n)
        urne = grand(1,1,'uin',0,1) ; // une variable qui vaudra 0 si on tire dans U et 1 sinon
        boule =grand(1,1,'uin',1,n) ; // le premier tirage
        y=1 ;
        while (((urne==0) & (boule==1)) | ((urne==1) & (boule <>1)))
                boule = grand(1,1,'uin',1,n) ; // on tire une boule
                y = y+1 ;
end
endfunction
```

Notons qu'il ne serait pas beaucoup plus compliqué de simuler Y : il faudrait échanger le rôle des boules noires et des boules blanches, et, tant qu'on obtient des boules noires, changer d'urne à chaque tirage, par exemple avec `urne = 1-urne`.

EDHEC 2006

Exercice 1

Sujet : Matrices de taille impaire dont le carré vaut $-I_n$. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★☆☆

Commentaires : si le résultat prouvé est intéressant, l'utilisation des vecteurs propres complexes d'une matrice réelle est à la limite du programme et n'est pas un des objectifs du programme d'ECS.

Dans cet exercice, m désigne un entier naturel non nul. On note id (respectivement θ) l'endomorphisme identité (respectivement l'endomorphisme nul) du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^m$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbf{C}^m$ vérifiant : $(f-\lambda_1\mathrm{id})\circ(f-\lambda_2\mathrm{id})=\theta$ où λ_1 et λ_2 sont deux complexes distincts.

1. a. Vérifier que $\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left((f-\lambda_1\mathrm{id})-(f-\lambda_2\mathrm{id})\right)=\mathrm{id}$.
   b. En déduire que : $\mathbf{C}^m=\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\mathrm{id})\oplus\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\mathrm{id})$.
   c. Conclure que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres (on sera amenés à étudier trois cas).

Dans la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel et l'on se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R})$ telle que $A^2=-I$, où I désigne la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R})$ dont les éléments diagonaux valent 1.

2. Trouver une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{C})$ telle que $A^2=-I$.
3. Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R})$ telle que $A^2=-I$.
   a. Utiliser la première question pour montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{C})$ et que ses valeurs propres sont i et $-i$.
   b. Pour toute matrice $M=(m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice $(\overline{m_{i,j}})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$.
   On note E_i et E_{-i} les sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres i et $-i$.
   Montrer que $X\in E_i\Leftrightarrow\overline{X}\in E_{-i}$.
   c. En déduire que, si $(u_1,u_2,\ldots,u_p)$ est une base de E_i, alors $(\overline{u_1},\overline{u_2},\ldots,\overline{u_p})$ est une famille libre de E_{-i}. Conclure que $\dim E_i=\dim E_{-i}$.
   d. Établir enfin le résultat demandé.

Exercice 2

Sujet : Étude d'une suite définie par récurrence à partir de la somme des termes précédents. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : suites, séries.

Modifications apportées au sujet d'origine : la formulation de la question 1.a a été modifiée (suppression du terme unique)

1. a. Montrer que la suite (u_n) définie par
$$u_1=1\text{ et }\forall n\geqslant 2,\ u_n=\frac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{n-1}u_j$$
   est bien définie et à termes strictement positifs.
   b. Vérifier que $u_2=\dfrac{1}{3}$, puis calculer u_3.
2. En minorant les sommes partielles, montrer que la série de terme général u_n est divergente, et donner $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}u_j$.
3. a. Établir que : $\forall n\geqslant 2, u_{n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}u_n$.
   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c. Donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ lorsque $n\to+\infty$ puis déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

d. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(u_n)$, puis montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. **a.** On rappelle que $\binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$.

b. En utilisant la question 2, déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n$, puis montrer que

$$\binom{2n}{n} = o(4^n).$$

5. En utilisant le résultat de la question 3, montrer que

$$\frac{4^n}{n} = o\left(\binom{2n}{n}\right).$$

Exercice 3

Sujet : Espérance et variance du maximum de deux lois normales centrées réduites indépendantes. **Facile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : variables à densité, intégrales impropres.

Modifications apportées au sujet d'origine : nous précisons que φ est **la** densité continue de la loi normale centrée réduite.

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite. On note φ la densité continue sur $\mathbf{R}$ de la loi normale centrée réduite et Φ sa fonction de répartition.

On pose $Z = \max(X, Y)$ et l'on se propose de déterminer la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.

1. **a.** Montrer que Z est une variable aléatoire à densité définie elle aussi sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

b. Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x).$$

2. **a.** Rappeler la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

b. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

c. En remarquant que, pour tout réel x, $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

d. Montrer de même que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xf(x)\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\,dt$.

En déduire que Z a une espérance et donner sa valeur.

3. **a.** Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

b. Déterminer $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

Problème

Sujet : Étude d'un mobile, temps du premier retour à l'origine. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : probabilités discrètes

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0).

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $\dfrac{k+1}{k+2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{k+2}$.

Pour tout n de $\mathbf{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout n de $\mathbf{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et on pose $u_n = P(X_n = 0)$.

Partie I : Étude de la variable X_n.

1. Vérifier que $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ puis donner la loi de X_1.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$.
3. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ P(X_n = k) = \dfrac{k}{k+1} P(X_{n-1} = k-1)$.

   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}, \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ P(X_n = k) = \dfrac{1}{k+1} u_{n-k}$.

   c. En remarquant que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$, montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$

   d. Retrouver ainsi les valeurs de u_0 et u_1 puis déterminer u_2 et u_3.
4. a. En remarquant que la relation obtenue à la question 3.a peut s'écrire sous la forme $(k+1)P(X_n = k) = kP(X_{n-1} = k-1)$, montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ E(X_n) - E(X_{n-1}) = u_n$.

   b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, $E(X_n)$ sous forme de somme mettant en jeu certains termes de la suite (u_n).

   c. Pour tout entier naturel n non nul, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j}$ et vérifier que :
   $$u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1.$$
   Déduire de ces deux résultats que : $\displaystyle u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}$.

   d. Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$. Déterminer ensuite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Partie II : Étude du premier retour à l'origine.

On note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ) et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On convient que T prend la valeur 0 si le mobile ne revient jamais en O.
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0, 0, 1, 2, 0, 0, 1$, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : $1, 2, 3, 0, 0, 1$, alors on a $T = 4$.

5. a. Pour tout k de $\mathbf{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.

   b. Montrer que : $\forall k \in \mathbf{N}^*,\quad P(T = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

   c. Déterminer les constantes a et b telles que : $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.
   En déduire que $P(T = 0) = 0$, puis interpréter ce dernier résultat.
6. La variable T a-t-elle une espérance ?

Partie III : Simulation

7. Compléter les deux instructions manquantes dans le code `Scilab` suivant pour que la fonction `edhec_2006`, qui prend comme paramètre un entier $n \geqslant 1$, calcule $u_0, u_1, \ldots, u_n$ et retourne un vecteur `u` contenant ces nombres ainsi qu'un réel `e` correspondant à l'espérance de X_n.

```
function [u,e] = edhec_2006(n)
        u = zeros(1,n+1) ;
        u(1) = 1 ;
        e = 0 ;
        for k=1 :n
                s = 0 ;
                for i = 1 :k
                        s = ------ ;
                        u(k+1) = 1-s ;
                end
        e = ----- ;
        end
endfunction
```

8. a. Compléter le programme suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur prise par T lors de l'expérience aléatoire étudiée.

```
function T = edhec_2006_bis()
        T = 1 ;
        hasard = grand(1,1,'uin',0,1) ;
        while hasard>0
                hasard=grand(1,1,'uin',---,---) ;
                T = --- ;
        end
endfunction
```

b. Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle `while` est fini ?

EDHEC 2006 : Corrigé

Exercice 1

1.a. On a $(f-\lambda_1\mathrm{id})-(f-\lambda_2\mathrm{id})=(\lambda_2-\lambda_1)\mathrm{id}$ et donc

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left((f-\lambda_1\mathrm{id})-(f-\lambda_2\mathrm{id})\right)=\mathrm{id}.}$$

1.b. Puisque $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\mathrm{id})$ sont deux sous-espaces propres distincts de f, éventuellement réduits au vecteur nul[1], nous savons déjà qu'ils sont en somme directe.
Soit $x\in\mathbf{C}^m$. Alors, d'après la question 1.a,

$$x=\mathrm{id}(x)=\underbrace{(f-\lambda_1\mathrm{id})\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}x\right)}_{\in\mathrm{Im}(f-\lambda_1\mathrm{id})}+\underbrace{(f-\lambda_2\mathrm{id})\left(-\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}x\right)}_{\in\mathrm{Im}(f-\lambda_2\mathrm{id})}\in\mathrm{Im}(f-\lambda_1\mathrm{id})+\mathrm{Im}(f-\lambda_2\mathrm{id}).$$

D'autre, puisque par hypothèse $(f-\lambda_1\mathrm{id})\circ(f-\lambda_2\mathrm{id})=\theta$, alors $\mathrm{Im}(f-\lambda_2\mathrm{id})\subset\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\mathrm{id})$.

De plus, $f-\lambda_1\mathrm{id}$ et $f-\lambda_2\mathrm{id}$ étant des polynômes en f, ils commutent entre eux[2] et donc de même on a $\mathrm{Im}(f-\lambda_1\mathrm{id})\subset\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\mathrm{id})$.
Ainsi, $x\in\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\mathrm{id})+\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\mathrm{id})$.
Ceci étant vrai pour tout $x\in\mathbf{C}^m$, on en déduit que $\mathbf{C}^m\subset\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\mathrm{id})+\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\mathrm{id})$.
L'inclusion réciproque étant évidente, $\mathbf{C}^m=\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\mathrm{id})+\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\mathrm{id})$.
Et donc, la somme étant directe,

$$\boxed{\mathbf{C}^m=\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\mathrm{id})\oplus\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\mathrm{id}).}$$

1.c. Si λ_1 et λ_2 sont des valeurs propres de f, alors

$$\mathbf{C}^m=\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\mathrm{id})\oplus\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\mathrm{id})=E_{\lambda_1}(f)\oplus E_{\lambda_2}(f).$$

Donc $\mathbf{C}^m$ est la somme directe des sous-espaces propres de f : f est diagonalisable.
Si λ_1 n'est pas valeur propre de f, alors $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1\mathrm{id})=\{0\}$ et donc $\dim E_{\lambda_2}(f)=m$. En particulier, $\mathbf{C}^m=\mathrm{Ker}(f-\lambda_2\mathrm{id})$.
On en déduit que $f-\lambda_2\mathrm{id}=\theta$
Soit encore $f=\lambda_2\mathrm{id}$, et donc la matrice de f dans n'importe quelle base de $\mathbf{C}^m$ est $\lambda_2 I_m$: f est diagonalisable.
De même, si λ_2 n'est pas valeur propre de f, $f=\lambda_1\mathrm{id}$ est diagonalisable.

2. Soit A la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{C})$ dont tous les coefficients diagonaux valent i.

Alors $A^2=\begin{pmatrix} i^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & i^2 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & i^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -1 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & -1\end{pmatrix}=-I.$

3.a. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{C}^{2n+1}$ dont la matrice dans la base canonique est A. Alors $A^2=-I\Leftrightarrow f^2=-\mathrm{id}$.
Soit encore $f^2+\mathrm{id}=\theta\Leftrightarrow(f-i\,\mathrm{id})\circ(f+i\mathrm{id})=\theta$.
Ainsi, en appliquant le résultat de la question 1, avec $\lambda_1=i$ et $\lambda_2=-i$, f est diagonalisable, et ses valeurs propres sont parmi i et $-i$.
De plus, f ne peut avoir qu'une seule valeur propre, car sinon[3] on aurait $f=i\cdot\mathrm{id}$ ou $f=-i\cdot\mathrm{id}$. Soit encore $A=iI$ ou $A=-iI$, ce qui n'est pas possible puisque A est une matrice à coefficients réels.
Donc $\mathrm{Spec}(A)=\{-i,i\}$.

3.b. Soit $X\in E_i$. Alors $AX=iX$.
En conjuguant cette relation, il vient $\overline{AX}=\overline{iX}$, soit encore $\overline{A}\,\overline{X}=\overline{i}\,\overline{X}=-i\overline{X}$.
Et A étant une matrice à coefficients réels, on a $\overline{A}=A$, et donc $A\overline{X}=-i\overline{X}$, de sorte que $\overline{X}\in E_{-i}(A)$.

[1] Si λ_1 ou λ_2 n'est pas une valeur propre de f.

Très classique !
Si $g\circ f=0$, alors $\mathrm{Im} f\subset\mathrm{Ker}\, g$.

[2] Ce qu'on pourrait vérifier «à la main», sans parler de polynômes d'endomorphisme.

Détail
Le seul endomorphisme dont le noyau est $\mathbf{C}^m$ tout entier est l'endomorphisme nul θ.

Factorisation
Rappelons que le polynôme X^2+1 est scindé dans $\mathbf{C}$: on a

$$X^2+1=(X-i)(X+i).$$

Précision
L'énoncé est très flou à ce sujet, mais on a choisi ici de voir A comme une matrice complexe (ce qui est toujours possible, un réel étant un complexe de partie imaginaire nulle).
Et alors les sous-espaces propres sont formés de vecteurs **complexes**, c'est-à-dire dans $\mathbf{C}^q$.

[3] D'après les deux derniers cas de la question 1.c.

De même, si $\overline{X} \in E_{-i}(A)$, alors $A\overline{X} = -i\overline{X}$, ce qui, après conjugaison nous donne $AX = iX$, soit $X \in E_i(A)$.
Ainsi, $\boxed{X \in E_i(A) \Leftrightarrow \overline{X} \in E_{-i}(A).}$

3.c. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des complexes tels que

$$\lambda_1\overline{u_1} + \lambda_2\overline{u_2} + \dots + \lambda_p\overline{u_p} = 0.$$

Alors, en conjuguant cette relation, il vient

$$\overline{\lambda_1}u_1 + \overline{\lambda_2}u_2 + \dots + \overline{\lambda_p}u_p = 0.$$

Et $(u_1, \dots, u_p)$ étant une famille libre par hypothèse, on en déduit que $\overline{\lambda_1} = \overline{\lambda_2} = \dots = \overline{\lambda_p} = 0$.
Soit encore[4] $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p$.
Et donc $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille libre de $\mathbf{C}^{2n+1}$.
De plus, elle est bien formée de vecteurs de E_{-i} par la question précédente.

[4] Un complexe est nul si et seulement si son conjugué est nul.

Si $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de E_i, alors $p = \dim E_i$.
Et alors $(\overline{u_1}, \dots, \overline{u_p})$ est une famille libre de E_{-i}, de cardinal p, de sorte que $p \leqslant \dim E_{-i}$.
Et donc $\dim E_i \leqslant \dim E_{-i}$.
Inversement, on peut prouver[5] que si $(v_1, \dots, v_q)$ est une base de E_{-i}, alors $(\overline{v_1}, \dots, \overline{v_q})$ est une famille libre de E_i, et donc que $\dim E_{-i} \leqslant \dim E_i$.
On en déduit que $\boxed{\dim E_i = \dim E_{-i}.}$

[5] Comme nous venons de le faire.

3.d. Puisque A est diagonalisable, on doit avoir $2n+1 = \dim \mathbf{C}^{2n+1} = \dim E_i + \dim E_{-i}$.
Mais nous venons de prouver que $\dim E_i = \dim E_{-i}$, et donc $2n+1 = 2\dim E_i$.
Puisque $\dim E_i$ est un entier, ceci n'est pas possible car $2\dim E_i$ est pair et $2n+1$ est impair.
On en déduit $\boxed{\text{qu'il n'existe pas de matrice } A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R}) \text{ telle que } A^2 = -I.}$

Exercice 2

1.a. Prouvons par récurrence forte sur n la propriété «u_n est bien défini et est strictement positif.»
Pour $n = 1$, la propriété est vérifiée.
Supposons donc que la propriété soit vérifiée pour $1, 2, \dots, n$, c'est-à-dire que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, u_i est définie et $u_i > 0$.
Alors $u_{n+1} = \dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} u_j$ est bien défini, et de plus

$$u_{n+1} = \frac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{n} u_j > 0$$

car tous les u_j sont strictement positifs. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
Ainsi, par le principe de récurrence forte, $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ u_n \text{ est défini et strictement positif.}}$

Récurrence forte
Pour prouver que u_{n+1} est bien défini, il faut supposer que les u_i, $i \leqslant n$ sont bien définis. D'où la nécessité d'une récurrence forte.
Notons que cela revient à faire une récurrence simple avec pour hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$: «pour tout $i \leqslant n$, u_i est bien défini.»

1.b. On a $u_2 = \dfrac{1}{3}u_1 = \boxed{\dfrac{1}{3}}$. De même, $u_3 = \dfrac{1}{5}(u_1 + u_2) = \boxed{\dfrac{4}{15}}$.

2. Puisque tous les termes de la suite (u_n) sont positifs, on a,

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{n-1} u_j \geqslant \frac{u_1}{2n-1} \geqslant \frac{1}{2n-1} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n}$ est divergente (il s'agit d'un multiple de la série harmonique), donc $\sum u_n$ diverge également.
Puisque (u_n) est une suite à termes positifs, la suite de ses sommes partielles est croissante.
Puisque nous venons de prouver qu'elle divergeait, c'est nécessairement vers $+\infty$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_j = +\infty.}$$

Limite
Le raisonnement que nous venons de tenir ne vaut que pour les séries à termes positifs : si $u_n \geqslant$ et si $\sum u_n$ diverge, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty.$$

Ceci tient au fait que la suite des sommes partielles est croissante et qu'une suite croissante qui diverge possède nécessairement $+\infty$ comme limite.
Ce résultat n'est plus vrai si (u_n) n'est pas de signe constant. Par exemple la série de terme général $(-1)^n$ diverge, mais ses sommes partielles ne tendent pas vers $+\infty$ (elles valent alternativement 0 ou 1).

3.a. Soit $n \geqslant 2$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{n} u_j \\ &= \frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{n-1} u_j + \frac{1}{2n+1}u_n \\ &= \frac{2n-1}{2n+1}u_n + \frac{1}{2n+1}u_n \\ &= \boxed{\frac{2n}{2n+1}u_n.} \end{aligned}$$

3.b. La question précédente prouve que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante car $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n}{2n+1} \leqslant 1$. Puisqu'il s'agit d'une suite minorée[6], $\boxed{\text{elle est convergente.}}$

[6] Par 0.

3.c. On a, pour $n \geqslant 1$,

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

De plus, puisque $\forall n \geqslant 1$, $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right) \geqslant 0$, on peut utiliser le critère de comparaison : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2n}$ diverge, donc il en est de même de $\displaystyle\sum \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

Équivalents
N'oublions pas qu'il faut vérifier la positivité pour utiliser le critère de comparaison.

3.d. Remarquons que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ est une série télescopique. En effet, $\forall n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{u_k}{u_{k+1}}\right) &= \sum_{k=1}^{n}(\ln(u_k) - \ln(u_{k+1})) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln(u_k) - \sum_{k=1}^{n}\ln(u_{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln(u_k) - \sum_{i=2}^{n+1}\ln(u_i) \\ &= \ln(u_1) - \ln(u_{n+1}) = \boxed{-\ln(u_{n+1}).} \end{aligned}$$

Chgt d'indice
$i = k+1$

Puisque la série à termes positifs $\sum \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ diverge, c'est que ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. Par conséquent, $\boxed{\lim_{n\to\infty}\ln(u_n) = -\infty.}$

Puis, par passage à l'exponentielle (la fonction $x \mapsto e^x$ est continue), on a

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0.}$$

Continuité
Pour affirmer que

$$u_n \to \ell \Rightarrow f(u_n) \to f(\ell)$$

il faut s'assurer que f est continue afin d'utiliser résultat du cours.

4.a. Prouvons par récurrence sur $n \geqslant 2$ que $u_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$.

Pour $n = 2$, on a $u_n = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{16}{8\binom{4}{2}} = \dfrac{16}{8\times 6} = \dfrac{1}{3}$.

Supposons que $u_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}\,\frac{4^n}{4n\binom{2n}{n}} = \frac{1}{2n+1}\,\frac{4^n(n!)^2}{2(2n)!}.$$

D'autre part,

$$\frac{4^{n+1}}{4(n+1)\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{4^n(n+1)!(n+1)!}{(n+1)(2n+2)!} = \frac{4^n n!(n+1)!}{(2n+2)!} = \frac{4^n n!(n+1)!}{2(n+1)(2n+1)(2n)!} = \frac{1}{2n+1}\,\frac{4^n(n!)^2}{2(2n)!}.$$

On a donc bien $u_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}}{4(n+1)\binom{2n+2}{n+1}}$. Par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}.}$$

4.b. On a $nu_n = \dfrac{n}{2n-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} u_j \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} u_j$.

Or, nous avons prouvé précédemment que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n} u_j = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n-1} u_j = +\infty$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} nu_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} u_j = +\infty.}$$

Méthode

Pour montrer que $u_n = o(v_n)$, le plus efficace est souvent de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Or $nu_n = \dfrac{1}{4}\dfrac{4^n}{\binom{2n}{n}}$, de sorte que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}} = +\infty$.

En passant à l'inverse, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = 0$ et donc $\boxed{\dbinom{2n}{n} = o(4^n).}$

5. Nous avons prouvé précédemment que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Donc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{n\binom{2n}{n}} = \lim_{n\to\infty} 4u_n = 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{\frac{4^n}{n} = o\left(\binom{2n}{n}\right).}$$

Exercice 3

1.a. Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ car maximum de deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Il s'agit donc de montrer que sa fonction de répartition est continue sur $\mathbf{R}$, $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Pour $x \in \mathbf{R}$, on a, par indépendance de X et Y :

$$F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]) = P(X \leqslant x)P(Y \leqslant x) = \Phi^2(x).$$

Puisque Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, il en est de même de F_Z, et donc Z est une variable à densité.

$\mathscr{C}^1$

Φ est $\mathscr{C}^1$ car c'est une primitive d'une fonction continue sur $\mathbf{R}$: la fonction φ.
Et donc F_Z est $\mathscr{C}^1$, et en particulier continue.

1.b. Puisque F_Z est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, on peut prendre pour densité de Z la fonction F_Z', qui est donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F_Z'(x) = \boxed{2\varphi(x)\Phi(x).}$$

2.a. Nous savons que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$. Or, φ étant une densité, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}.}$$

2.b. Procédons au changement de variable $t = \sqrt{2}x$, qui est légitime car affine. Alors

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sqrt{2}\,dx.$$

Ceci prouve que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge[7] et vaut $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{\pi}.}$

[7] Car l'intégrale avant changement de variable était déjà convergente.

2.c. Comme indiqué, on a $\varphi'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} = -x\varphi(x)$.
Procédons donc à une intégration par parties sur un segment $[0, A]$, $A > 0$ en posant $u(x) = 2\Phi(x)$ et $v(x) = -\varphi(x)$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$ avec $u'(x) = 2\varphi(x)$ et $v'(x) = x\varphi(x)$. Alors

$$\int_0^A xf(x)\,dx = \int_0^A u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_0^A + 2\int_0^A \varphi^2(x)\,dx$$
$$= f(0) - f(A) + 2\frac{1}{2\pi}\int_0^A e^{-x^2}\,dx.$$

Or, $f(0) = 2\varphi(0)\Phi(0) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
Lorsque $A \to +\infty$, on a $\Phi(A) \to 1$ et $\varphi(A) \to 0$, de sorte que $f(A) \to 0$. Et donc il vient

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.}$$

> **Convergence**
> Notons que ceci prouve la convergence de $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$. En effet, l'intégrale entre 0 et A admet une limite finie lorsque $A \to +\infty$: c'est donc la définition d'une intégrale convergente.

2.d. De même, pour $B < 0$, la même intégration par parties sur le segment $[B, 0]$ nous donne

$$\int_B^0 xf(x)\,dx = -f(0) + f(B) + \frac{1}{\pi}\int_B^0 e^{-x^2}\,dx.$$

En faisant tendre B vers $-\infty$, on obtient alors

$$\int_{-\infty}^0 xf(x)\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}\,dt.$$

On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ converge.
D'autre part, sur $[0, +\infty[$, $x \mapsto xf(x)$ est une fonction positive, donc la convergence de $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ est équivalente à sa convergence absolue.
De même, sur $]-\infty, 0]$, $x \mapsto xf(x)$ est négative, de sorte que $|xf(x)| = -xf(x)$ et donc $\int_{-\infty}^0 |xf(x)|\,dx = -\int_{-\infty}^0 xf(x)\,dx$, qui converge donc. Ainsi, $\int_{-\infty}^0 xf(x)\,dx$ converge absolument et donc il en est de même de $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$.
On en déduit que Z admet une espérance et que

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^0 xf(x)\,dx + \int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\sqrt{\pi} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}.$$

> **Convergence absolue**
> Rappelons que par définition, une variable aléatoire de densité f admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ converge **absolument**.
> Cette convergence absolue est en fait toujours équivalent à la convergence, car f étant positive, la preuve donnée ici de la convergence absolue est toujours valable.

3.a. Z^2 est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, de sorte que pour $x < 0$, $F_{Z^2}(x) = 0$.
De même, pour $x < 0$, on a $F_{X^2}(x) = 0$.
Pour $x \geqslant 0$, on a

$$F_{Z^2}(x) = P\left(Z^2 \leqslant x\right) = P(-\sqrt{x} \leqslant Z \leqslant \sqrt{x}) = F_Z(\sqrt{x}) - F_Z(\sqrt{-x}) = \Phi^2\left(\sqrt{x}\right) - \Phi^2\left(-\sqrt{x}\right).$$

Soit encore

$$F_{Z^2}(x) = \Phi^2\left(\sqrt{x}\right) - \left(1 - \Phi\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 = 2\Phi\left(\sqrt{x}\right) - 1.$$

> **Rappel**
> Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

D'autre part, on a

$$P\left(X^2 \leqslant x\right) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = \Phi\left(\sqrt{x}\right) - \Phi\left(-\sqrt{x}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{x}\right) - 1.$$

Ainsi, X^2 et Z^2 possèdent la même fonction de répartition : $\boxed{\text{elles ont même loi.}}$

3.b. D'après ce qui précède, $E(Z^2) = E(X^2)$.
Mais alors, par la formule de Huygens, il vient

$$E\left(X^2\right) = V(X) + E(X)^2 = 1 + 0 = 1.$$

Et donc $E(Z^2) = 1$.
Enfin, la formule de Huygens, appliquée cette fois à Z nous donne

$$V(Z) = E\left(Z^2\right) - E(Z)^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = \boxed{1 - \frac{4}{\pi}}.$$

Astuce
Rappelons que la formule de Huygens relie $E(X)$, $V(X)$ et $E(X^2)$. Et donc si l'on connaît deux de ces trois nombres, on connaît le troisième.
En règle générale, on s'en sert pour trouver la variance à partir du moment d'ordre 2 et de l'espérance, mais si on connaît variance et espérance, il est aisé d'obtenir le moment d'ordre 2.

Problème

Étude de la variable X_n

1. De l'origine, le mobile va au point d'abscisse 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ (auquel cas $X_1 = 1$) et reste à l'origine avec probabilité $\frac{1}{2}$, auquel cas $X_1 = 0$.
Ce sont les seuls cas possibles, donc $\boxed{X_1(\Omega) = \{0, 1\}.}$
De plus, on a $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$, donc $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$

Bernoulli
Le support nous garantit que X_1 suit une loi de Bernoulli, donc il suffit de calcul $P(X_1 = 1)$ pour en déterminer le paramètre, pas besoin de vérifier que $P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$.

2. La propriété vient d'être vérifiée pour $n = 1$. Supposons que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
Alors pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X_{n+1}(\omega) = X_n(\omega) + 1$ (si le mobile s'est déplacé vers la droite) ou $X_{n+1}(\omega) = 0$.
Donc pour tout $\omega \in \Omega$, $X_{n+1}(\omega) \in [\![0, n+1]\!]$. Et donc $\boxed{X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!].}$
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

3.a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Notons alors A_n l'événement «le mobile s'est déplacé vers la droite au n-ème mouvement», de sorte que $\{A_n, \overline{A_n}\}$ est un système complet d'événements.
Par la formule des probabilités totales, on a

$$P(X_n = k) = P(A_n \cap [X_n = k]) + P(\overline{A_n} \cap [X_n = k]).$$

Mais si $\overline{A_n}$ est réalisé, le mobile est retourné à l'origine, et donc $X_n = 0$, de sorte que $\overline{A_n} \cap [X_n = k] = \emptyset$.
Donc on en déduit que

$$P(X_n = k) = P(A_n \cap [X_n = k]) = P(A_n \cap [X_{n-1} = k-1]) = P(X_{n-1} = k-1) P_{[X_{n-1}=k-1]}(A_n)$$
$$= \boxed{P(X_{n-1} = k-1)\frac{k}{k+1}}.$$

Méthode
Il s'agit de bien interpréter l'énoncé : on connait la probabilité que le mobile se déplace au n-ème mouvement, sachant où il était avant ce mouvement. Donc on connait les $P_{[X_{n-1}=i]}(A_n)$, et pas les $P_{[X_n=i]}(A_n)$

3.b. Prouvons le résultat par récurrence sur n.
Pour $n = 0$, le seul entier de $\{0, \dots, n\}$ est $k = 0$, et par définition, $u_0 = P(X_0 = 0) = 1$.
Donc la propriété est vérifiée.
Supposons que pour $n \in \mathbf{N}$, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $P(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$.
Soit alors $k \in [\![0, n+1]\!]$. Si $k = 0$, par définition, on a $P(X_{n+1} = 0) = u_{n+1}$.
Si $k \neq 0$, alors par la question précédente,

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{k}{k+1} P(X_n = k-1) = \frac{k}{k+1}\frac{1}{k} u_{n-(k-1)} = \frac{1}{k+1} u_{(n+1)-k}.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.
Par le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \forall k \in [\![0, n]\!], P(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}.}$$

Récurrence
Attention, ici la propriété que l'on cherche à prouver au rang n comporte encore un quantificateur : $\forall k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}.$$

3.c. On a

$$\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{n-k}}{k+1} = 1.$$

Procédons alors au changement d'indice $j = n - k$. Lorsque k prend les valeurs de 0 à n, alors j prend les valeurs de 0 à n également, et donc il vient

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1.}$$

Précision
L'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$$

vient du fait que X_n est une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs dans $[\![0, n]\!]$ et donc

$$\{[X_n = k], k \in [\![0, n]\!]\}$$

est un système complet d'événements.

3.d. En particulier, pour $n = 0$, la somme précédemment obtenue ne comporte qu'un terme, celui pour $j = 0$, et il vient $u_0 = 1$.
Pour $n = 1$, la somme comporte deux termes : $j = 0$ et $j = 1$, et donc

$$\frac{u_0}{2} + \frac{u_1}{1} = 1 \Leftrightarrow u_1 = 1 - \frac{u_0}{2} = \boxed{\frac{1}{2}.}$$

De même, on a

$$\frac{u_0}{3} + \frac{u_1}{2} + u_2 = 1 \Leftrightarrow u_2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

$$\frac{u_0}{4} + \frac{u_1}{3} + \frac{u_2}{2} + u_3 = 1 \Leftrightarrow u_3 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{5}{24} = \boxed{\frac{9}{24}.}$$

4.a. X_n et X_{n-1} admettent une espérance car sont des variables finies. Donc

$$\begin{aligned}
E(X_n) - E(X_{n-1}) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k) - \sum_{j=0}^{n-1} jP(X_{n-1} = j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k) - \sum_{j=1}^{n-1} jP(X_{n-1} = j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+1)P(X_n = k) - \sum_{k=1}^{n} P(X_n = k) - \sum_{j=1}^{n-1} jP(X_{n-1} = j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X_{n-1} = k-1) - (1 - P(X_n = 0)) - \sum_{j=1}^{n-1} jP(X_{n-1} = j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)P(X_{n-1} = i) - 1 + u_n - \sum_{j=1}^{n-1} jP(X_{n-1} = j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} P(X_{n-1} = i) - 1 + u_n \\
&= 1 - 1 + u_n = \boxed{u_n.}
\end{aligned}$$

Les termes en $j = 0$ et $k = 0$ sont nuls.

$\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1.$

Chgt d'indice
$i = k - 1.$

4.b. On a donc

$$E(X_n) = u_n + E(X_{n-1}) = u_n + u_{n-1} + E(X_{n-2}) = \cdots = \sum_{i=1}^{n} u_i + E(X_0).$$

Mais $X_0 = 0$, donc $E(X_0) = 0$ et alors

$$\boxed{E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i.}$$

4.c. Le résultat de la question 3.c appliqué à $n - 1$ donne

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-1) - j + 1} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} = 1.}$$

De même, on a

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} + \frac{u_n}{n-n+1} = u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1.$$

On en déduit que

$$u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j}.$$

Et donc

$$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} u_j \left(\frac{1}{n-j} - \frac{1}{n-j+1} \right) = \boxed{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}.}$$

4.d. Notons que pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$2 \leqslant n-j+1 \leqslant n+1 \text{ et donc } \frac{1}{n-j+1} \geqslant \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit[8] alors que

$$u_n \geqslant \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j} \frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j}.$$

Or, nous venons de prouver que cette dernière somme vaut 1, donc $\boxed{u_n \geqslant \frac{1}{n+1}.}$

On en déduit que $E(X_n) \geqslant \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Mais la série de terme général $\frac{1}{k}$ diverge et est à termes positifs[9], donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = +\infty.}$

[8] En multipliant l'inégalité précédemment obtenue par $\frac{u_j}{n-j} \geqslant 0$ puis en sommant les relations ainsi obtenues pour j allant de 0 à $n-1$.

[9] Rappelons que la suite des sommes partielles d'une série divergente ne tend pas toujours vers $\pm\infty$ (penser à $\sum(-1)^n$). C'est vrai si le terme général de la série est de **signe constant**, et c'est alors une conséquence du théorème de la limite monotone.

Étude du premier retour à l'origine

5.a. $T = k$ si et seulement si lors des $k-1$ premiers mouvements, le mobile s'est déplacé vers la droite et que lors du k-ième mouvement, le mobile est retourné à l'origine. Donc

$$[T = k] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 2] \cap \cdots [X_{k-1} = k-1] \cap [X_k = 0] = \bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = i] \cap [X_k = 0].$$

5.b. Par la formule des probabilités composées, on a alors

$$P(T = k) = P(X_1 = 1) P_{[X_1=1]}(X_2 = 2) \times \cdots \times P_{[X_1=1]\cap\cdots\cap[X_{k-2}=k-2]}(X_{k-1} = k-1) \times P_{[X_1=1]\cap\cdots\cap[X_{k-1}=k-1]}(X_k = 0).$$

Mais notons qu'à chaque instant, le déplacement du mobile ne dépend que de sa position à l'instant précédente, donc pour $i \leqslant k-1$,

$$P_{[X_1=1]\cap\cdots\cap[X_{i-1}=i-1]}(X_i = i) = P_{[X_{i-1}=i-1]}(X_i = i) = \frac{i}{i+1}.$$

De même, on a

$$P_{[X_1=1]\cap\cdots\cap[X_{k-1}=k-1]}(X_k = 0) = P_{[X_{k-1}=k-1]}(X_k = 0) = \frac{1}{k+1}.$$

Et donc

$$P(T = k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{i}{i+1} \right) \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

Précision
Formellement, ce résultat peut se prouver par récurrence sur i, mais c'est laborieux. En revanche, la compréhension qu'on a de l'énoncé nous indique bien que le mouvement qu'effectue le mobile n'est déterminé que par sa position, pas ses positions passées, donc il faut s'en servir !

Produit
Ce produit est un produit télescopique : les termes se simplifient presque tous deux à deux, et il reste juste à isoler ceux qui ne se simplifient pas.

5.c. C'est ultra-classique : on a

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{ak + a + bk}{k(k+1)}.$$

Donc pour que ceci soit égal à $\frac{1}{k(k+1)}$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, on doit avoir $(a+b)k + a = 1$. Or, deux fonction polynomiales sont égales[10] si et seulement si $a = 1$ et $a = -b$.

[10] Ici on demande juste qu'elles prennent les mêmes valeurs sur $\mathbf{N}^*$, et pas sur $\mathbf{R}$. Mais $\mathbf{N}^*$ est infini, et deux polynômes qui coïncident en une infinité de nombres sont égaux.

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbf{N}^*, \ \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}.}$

Puisque T est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, on doit avoir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(T=k) = 1.$$

Or, on a déjà

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Danger !
Attention à ne pas faire apparaitre la somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

qui est une somme d'une série divergente.

Donc nécessairement, $\boxed{P(T=0)=0.}$

Notons que ce résultat aurait également pu s'obtenir via le théorème de la limite monotone.
Il signifie que le mobile finit (presque) toujours par revenir à l'origine.

6. T admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(T=k)$ converge[11].
Mais $kP(T=k) = \dfrac{1}{k+1} \sim \dfrac{1}{k}$, et la série de terme harmonique diverge.
Donc $\boxed{T \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

[11] Absolument, mais il s'agit d'une série à termes positifs.

Partie III : Simulation

7. La principale difficulté vient du fait qu'en `Scilab` , les éléments d'un tableau sont numérotés à partir de 1 et non de 0.
Ainsi, `u(i)` contient la valeur de u_{i-1}.
Ceci étant dit, le résultat de la question 3.c permet de calculer successivement les u_i, en notant que

$$u_k = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{u_j}{k-j+1} = 1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{u_{i-1}}{k-i+2}.$$

Chgt d'indice
$i = j+1$.

```
function [u,e] = edhec_2006(n)
        u = zeros(1,n+1) ;
        u(1) = 1 ;
        e = 0 ;
        for k=1 :n
                s = 0 ;
                for i = 1 :k
                        s = s + u(i)/(k-i+2) ;
                        u(k+1) = 1-s ;
                end
        e = sum(u)-1 ;
        end
endfunction
```

8.a. Tant que le mobile n'est pas revenu à l'origine, c'est qu'il se trouve en position T (il a avancé d'une case à chaque étape). On se propose donc de tirer un nombre entier entre 0 et $T+1$.
Si ce nombre est nul, ce qui arrive avec probabilité $\dfrac{1}{T+2}$, alors l'expérience s'arrête. Sinon, on recommence, sans oublier d'augmenter T d'une unité afin de compter le nombre de fois où le mobile a avancé.

```
function T = edhec_2006_bis()
        T = 1 ;
        hasard = grand(1,1,'uin',0,1) ;
        while hasard>0
                hasard=grand(1,1,'uin',0,T) ;
                T = T+1 ;
        end
endfunction
```

8.b. Le résultat de la question 5 nous assure que $P(T = 0) = 0$, c'est-à-dire que presque sûrement, le mobile fini par revenir à l'origine.
Donc en théorie, il est possible que le mobile avance une infinité de fois sans jamais revenir à l'origine, et donc que la boucle `while` ne s'arrête jamais, mais en pratique, la probabilité que ceci se produise est nulle.

EDHEC 2005

Exercice 1

Sujet : Étude d'endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la forme $M \mapsto M + \mathrm{tr}(M)J$ Facile

Abordable en première année : ✗

Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire, diagonalisation.

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1. On note tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.
   a. Montrer que $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr} = \mathbf{R}$.
   b. En déduire la dimension de Ker(tr).
   c. Établir que $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I)$.
2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ associe $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I$.
   a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   b. Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f. En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
3. Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ associe $g(M) = M + \mathrm{tr}(M)J$ où J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont la trace est nulle.
   On admet que g est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   a. Établir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.
   b. Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.
   c. g est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Sujet : Partie entière et premier nombre après la virgule d'une loi exponentielle. Moyen

Abordable en première année : ✓ (sauf la question 3) **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : variables à densité, variables aléatoires discrètes.

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et on rappelle que $\lfloor x \rfloor$ est le seul entier vérifiant :
$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$). On note F sa fonction de répartition.
On pose $X_1 = \lfloor X \rfloor$, $X_2 = \lfloor 10(X - X_1) \rfloor$ et on admet que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires définies elles aussi sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. a. Déterminer $X_1(\Omega)$.
   b. Pour tout k de $X_1(\Omega)$, exprimer $P(X_1 = k)$ à l'aide de F.
   c. En déduire que $X_1 + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
   d. Déterminer $E(X_1)$ en fonction de λ.
2. a. Déterminer $X_2(\Omega)$ et dire ce que représente X_2.
   b. Justifier que, pour tout k élément de $\{0, 1, \ldots, 9\}$, $P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P([X_1 = i] \cap [X_2 = k])$, puis montrer que

   $$\forall k \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(F\left(i + \frac{k+1}{10}\right) - F\left(i + \frac{k}{10}\right) \right).$$

   En déduire que

   $$\forall k \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ P(X_2 = k) = e^{-\frac{\lambda k}{10}} \frac{1 - e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1 - e^{-\lambda}}.$$
3. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Exercice 3

Sujet : Recherche des extrema locaux d'une fonction de n variables. **Facile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : fonctions de plusieurs variables, calcul différentiel d'ordre 1 et 2, diagonalisation.

Modifications apportées au sujet d'origine : dans la question 2.b, la formulation (malheureuse) «matrice unité» a été remplacée par «matrice identité». Suppression de la question 4.a, inutile avec le programme 2015.

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère la fonction de n variables réelles, notée f, définie par :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n,\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

1. a. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}^n$.
   b. Calculer les dérivées premières et secondes de f.
2. a. Déterminer le seul point critique $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de f sur $\mathbf{R}^n$.
   b. Vérifier que la hessienne de f en ce point est la matrice $A_n = 2(I_n + J_n)$, où I_n désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.
3. a. Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
   b. Calculer le produit $J_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   c. À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n, puis celles de A_n.
4. En déduire que f admet un minimum local en $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et vérifier que ce minimum est égal à $-\dfrac{n}{4(n+1)}$.

Problème

Sujet : Étude d'un jeu de hasard **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : probabilités discrètes, `Scilab`

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

On considère deux jetons J_1, et J_2, équilibrés (c'est-à-dire tels que chaque face a une chance sur deux d'apparaître au cours d'un lancer).
Le jeton J_1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1.
Le jeton J_2 possède deux faces numérotées 1.
Un joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton.
On note E l'événement «le jeton J_1 est choisi pour le jeu» et, pour tout entier naturel k non nul, U_k l'événement «le k-ième lancer fait apparaître une face numérotée 1».

Partie 1 : étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve.

1. a. Déterminer la probabilité que le joueur obtienne n fois ($n \in \mathbf{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers.
   b. Dans cette question, on suppose que le joueur a obtenu n fois ($n \in \mathbf{N}^*$) une face portant le numéro 1 lors des n premiers lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec le jeton J_1 ?
   Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter ce résultat.

Dans la suite, on considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.
On considère également la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 1 et on pose $Y = 0$ si la face portant le numéro 1 n'apparaît jamais.
On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

2. a. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(X = n)$.
   b. En déduire que $P(X = 0) = \frac{1}{2}$. Ce résultat était-il prévisible ?
   c. Montrer que X a une espérance puis déterminer $E(X)$.
   d. Montrer que $X(X-1)$ a une espérance, la déterminer puis vérifier que $V(X) = 2$.
3. a. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la probabilité $P(Y = n)$.
   b. En déduire que $P(Y = 0) = 0$.
   c. Montrer que Y a une espérance puis déterminer $E(Y)$.
   d. Montrer que $Y(Y-1)$ a une espérance, la déterminer puis vérifier que $V(Y) = \frac{5}{4}$.
4. On définit sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ la variable aléatoire S par : $\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega))$.
   a. Déterminer $S(\Omega)$.
   b. Montrer que $P(S = 1) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$.
   c. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, comparer d'une part $[X = n]$ et $[Y < n]$ et d'autre part $[Y = n]$ et $[X < n]$, puis en déduire que : $[S = n] = [X = n] \cup [Y = n]$.
   d. Reconnaître alors la loi de S et préciser son espérance et sa variance.
5. On définit sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ la variable aléatoire I par : $\forall \omega \in \Omega, \quad I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$.
   a. Montrer que I est une variable de Bernoulli.
   b. Déterminer $P(I = 0)$ puis donner la loi de I, ainsi que son espérance et sa variance.

Partie 2 : simulation des variables X et Y.

6. On considère le programme suivant :

```
function X = edhec2005()
        X = 0 ;
        jeton = floor(2*rand())+1 ;
        lancer = floor(2*rand()) ;
        if jeton==1 then
                X = 1 ;
                while lancer <>0
                        lancer = floor(2*rand()) ;
                        X = X+1 ;
                end
        end
endfunction
```

   a. Expliquer le fonctionnement de la fonction `edhec2005`. Que représente la valeur qu'elle retourne ?
   b. Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle `while` est fini ?
7. Écrire une fonction `Scilab` qui simule la variable aléatoire Y.

EDHEC 2005 : Corrigé

Exercice 1

1.a. Rappelons que la trace est une forme linéaire, c'est-à-dire une application linéaire à valeurs dans $\mathbf{R}$. Et donc $\operatorname{Im}\operatorname{tr}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}$. C'est donc soit $\mathbf{R}$ soit $\{0\}$. Or, $n = \operatorname{tr}(I) \in \operatorname{Im}(\operatorname{tr})$, donc $\operatorname{Im}\operatorname{tr} \neq \{0\}$.
On en déduit que $\boxed{\operatorname{Im}\operatorname{tr} = \mathbf{R}.}$

Sev de R
$\mathbf{R}$ est de dimension un, donc ses sous-espaces vectoriels sont de dimension 0 ou 1, c'est-à-dire soit $\{0\}$, soit $\mathbf{R}$ tout entier.

1.b. Par le théorème du rang appliqué à l'application trace, on a

$$\dim \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \dim \operatorname{Ker}\operatorname{tr} + \dim \operatorname{Im}\operatorname{tr}$$

et donc

$$\dim \operatorname{Ker}\operatorname{tr} = \dim \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) - \dim \operatorname{Im}\operatorname{tr} = \boxed{n^2 - 1.}$$

Hyperplan
Autrement dit, $\operatorname{Ker}\operatorname{tr}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. C'est peu surprenant : c'est le noyau de la forme linéaire trace (qui est non nulle). Nous venons en fait de redémontrer que le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan.

1.c. On a déjà $\dim \operatorname{Vect}(I) = 1$ et $\dim \operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) = n^2 - 1$, donc

$$\dim \operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) + \dim \operatorname{Vect}(I) = n^2 = \dim \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).$$

De plus, si $A \in \operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) \cap \operatorname{Vect}(I)$, alors $\operatorname{tr}(A) = 0$ et il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $A = \lambda I$. Et alors

$$0 = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(\lambda I) = \lambda \operatorname{tr}(I) = \lambda n.$$

On en déduit que $\lambda = 0$ et donc que $A = 0$. Ainsi, $\operatorname{Ker}\operatorname{tr} \cap \operatorname{Vect} I = \{0\}$.
Et donc $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$ et $\operatorname{Vect}(I)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$: $\boxed{\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) \oplus \operatorname{Vect}(I).}$

2.a. Il est évident que f est à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, donc il s'agit de montrer la linéarité de f.
Soient $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$f(\lambda M + N) = \lambda M + N + \operatorname{tr}(\lambda M + N)I = \lambda M + N + \lambda \operatorname{tr}(M)I + \operatorname{tr}(N)I = \lambda f(M) + f(N).$$

Donc f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

2.b. On a déjà $f(I) = I + \operatorname{tr}(I)I = (n+1)I$. Donc I est un vecteur propre de f, associé à la valeur propre $n+1$. De plus, si $\operatorname{tr}(M) = 0$, c'est-à-dire si $M \in \operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$, alors

$$f(M) = M + \operatorname{tr}(M)I = M.$$

Et donc 1 est valeur propre de f et $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) \subset E_1(f)$, de sorte que $\dim E_1(f) \geqslant n^2 - 1$.
Comme de plus on a $\dim E_{n+1}(f) \geqslant 1$, et qu'on doit avoir

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Spec}(f)} \dim E_\lambda(f) \leqslant n^2$$

alors nécessairement $\dim E_{n+1}(f) = 1$ et $\dim E_1(f) = n^2 - 1$.
De plus, on a alors $\dim E_{n+1}(f) + \dim E_1(f) = n^2 = \dim \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, et donc f est diagonalisable.

Précision
On a déjà la somme des dimensions de deux sous-espaces propres égale à $\dim \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et donc il n'y a pas d'autre valeur propre.

Enfin, f est un automorphisme car 0 n'est pas valeur propre de f.
Solution alternative, plus matricielle : puisque $\mathscr{M}_n(\mathbf{R}) = \operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) \oplus \operatorname{Vect}(I)$, la concaténation d'une base de $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$ et d'une base de $\operatorname{Vect}(I)$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
Soit donc $(e_1, \dots, e_{n^2-1})$ une base de $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$, de sorte que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{n^2-1}, I)$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
Puisque les e_i, $1 \leqslant i \leqslant n^2 - 1$ sont dans $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$, alors $f(e_i) = e_i + \underbrace{\operatorname{tr}(e_i)}_{=0} I = e_i$.

Et $f(I) = I + \operatorname{tr}(I)I = (n+1)I$.
Donc la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & \dots & f(e_{n^2-1}) & f(I) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & n+1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_{n^2-1} \\ I \end{array} \end{array} = \operatorname{Diag}\Big(\underbrace{1, \dots, 1}_{n^2-1 \text{ fois}}, n+1\Big).$$

Puisque cette matrice est diagonale, f est diagonalisable, et ses valeurs propres sont 1 et $n+1$.

Rappel
Un endomorphisme est diagonalisable si sa matrice, dans une bonne base, est diagonale.

3.a. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a

$$g^2(M) = g(M+\operatorname{tr}(M)J) = g(M)+\operatorname{tr}(M)g(J) = M+\operatorname{tr}(M)J+\operatorname{tr}(M)\Big(J+\underbrace{\operatorname{tr}(J)}_{=0}J\Big) = g(M)+\operatorname{tr}(M)J = 2g(M)-M.$$

Et donc $g^2(M) - 2g(M) + M = 0 \Leftrightarrow (g^2 - 2g + \mathrm{id})(M) = 0$.
Ainsi, $\boxed{X^2 - 2X + 1 \text{ est annulateur de } g.}$

3.b. Le polynôme annulateur de la question précédente est en fait $(X-1)^2$, qui possède une seule racine 1. Donc g possède au plus une valeur propre : 1.
Comme de plus $g(J) = J + \operatorname{tr}(J)J = J$. Puisque $J \neq 0$, 1 est bien valeur propre de g.

⚠ Attention ! On n'a pas prouvé que 1 est la seule valeur propre, mais uniquement que s'il y a une valeur propre, c'est 1 !

3.c. Puisque g n'a qu'une valeur propre, g est diagonalisable si et seulement si $\dim E_1(g) = n^2$, c'est-à-dire si et seulement si $E_1(g) = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Or, $g(I) = I + nJ \neq I$, donc $I \notin E_1(M)$, de sorte que $E_1(g) \neq \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et donc g n'est pas diagonalisable.

EXERCICE 2

1.a. $X(\Omega) = \mathbf{R}_+$, et donc X_1 est à valeurs dans $\mathbf{N}$: $\boxed{X_1(\Omega) = \mathbf{N}.}$

1.b. On a $[X_1 = k] = [\lfloor X \rfloor = k] = [k \leqslant X < k+1]$. Et donc, X étant à densité, il vient

$$P(X_1 = k) = P(k \leqslant X < k+1) = P(k < X \leqslant k+1) = \boxed{F(k+1) - F(k).}$$

1.c. Nous savons que pour $x \geqslant 0$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ et donc

$$\forall k \in \mathbf{N}, P(X_1 = k) = (1 - e^{-\lambda(k+1)}) - (1 - e^{-\lambda k}) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}).$$

Soit encore :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, P(X_1 + 1 = k) = P(X_1 = k-1) = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda}) = (1 - e^{-\lambda})(1 - (1 - e^{-\lambda}))^{k-1}.$$

On reconnaît alors que $\boxed{X_1 + 1 \text{ suit une loi géométrique de paramètre } 1 - e^{-\lambda}.}$

Astuce Si on ne voit pas quel est le paramètre de la loi géométrique, on peut remarquer que si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors

$$P(X = 1) = p.$$

En particulier, ici le paramètre doit être

$$P(X_1 = 0) = 1 - e^{-\lambda}.$$

1.d. On a donc $E(X_1 + 1) = \dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}}$.
Mais, par linéarité de l'espérance, on a $E(X_1 + 1) = E(X_1) + 1$ et donc

$$E(X_1) = E(X_1 + 1) - 1 = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} - 1 = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} = \boxed{\frac{1}{e^{\lambda} - 1}.}$$

2.a. $X - X_1$ prend ses valeurs dans $[0, 1[$, et donc $10(X - X_1)$ est à valeurs dans $[0, 10[$. Et donc, en considérant la partie entière, il vient $X_2(\Omega) = [\![0, 9]\!]$.
On sait que X_1 est la partie entière de X, donc $X - X_1$ est sa partie décimale[1]
Si on multiplie cette partie décimale par 10, on obtient un nombre compris entre 0 et 10, et sa partie entière est alors le premier chiffre de la partie décimale de X, c'est-à-dire le premier chiffre après la virgule.
Par exemple, si $X = 2,345$, alors $X_1 = \lfloor X \rfloor = 2$, $X - X_1 = 0,345$, $10(X - X_1) = 3,45$ et donc $X_2 = \lfloor 3,45 \rfloor = 3$.

Remarque Si on ne devinait pas ce résultat, l'énoncé de la question suivante le suggérait tout de même fortement !

[1] Ce qui reste après la virgule.

2.b. Puisque X_1 est à valeurs dans $\mathbf{N}$, $\{[X_1 = i], i \in \mathbf{N}\}$ est un système complet d'événements, et donc, par la formule des probabilités totales, il vient

$$\boxed{P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P([X_1 = i] \cap [X_2 = k]).}$$

Mais on a $[X_1 = i] \cap [X_2 = k]$ est réalisé si et seulement si

$$\begin{cases} i \leqslant X < i+1 \\ k \leqslant 10(X - X_1) < k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i \leqslant X < i+1 \\ i + \frac{k}{10} \leqslant X < i + \frac{k+1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow i + \frac{k}{10} \leqslant X < i + \frac{k+1}{10}.$$

Décimales On est ici en train de dire que X a pour partie entière i et que son premier chiffre après la virgule est k. Donc il est compris entre $i + \frac{k}{10}$ et $i + \frac{k+1}{10}$.

Il vient donc, X étant à densité

$$P([X_1=i]\cap[X_2=k]) = P\left(i+\frac{k}{10}\leqslant X\leqslant i+\frac{k+1}{10}\right) = F\left(i+\frac{k+1}{10}\right)-F\left(i+\frac{k}{10}\right).$$

Et alors

$$\boxed{P(X_2=k)=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(F\left(i+\frac{k+1}{10}\right)-F\left(i+\frac{k}{10}\right)\right).}$$

Et donc, en utilisant l'expression de F, il vient

$$\begin{aligned}P(X_2=k) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\left(1-e^{-\lambda\left(i+\frac{k+1}{10}\right)}\right)-\left(1-e^{-\lambda\left(i+\frac{k}{10}\right)}\right)\right)\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(e^{-\lambda\left(i+\frac{k}{10}\right)}-e^{-\lambda\left(i+\frac{k+1}{10}\right)}\right)\\ &= e^{-\frac{\lambda k}{10}}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{10}}\right)\sum_{i=0}^{+\infty}e^{-\lambda i}\\ &= e^{-\frac{\lambda k}{10}}\frac{1-e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1-e^{-\lambda}}.\end{aligned}$$

Somme d'une série géométrique de paramètre $e^{-\lambda}\in[0,1[$.

3. Puisque X_1 et X_2 sont discrètes, elles sont indépendantes si et seulement si

$$\forall i\in\mathbf{N},\forall k\in\{0,\dots,9\},\ P([X_1=i]\cap[X_2=k])=P(X_1=i)P(X_2=k).$$

Or on a

$$P(X_1=i)P(X_2=k)=e^{-\lambda i}(1-e^{-\lambda})e^{-\frac{\lambda k}{10}}\frac{1-e^{-\frac{\lambda}{10}}}{1-e^{-\lambda}}=e^{-\lambda\left(i+\frac{k}{10}\right)}\left(1-e^{-\frac{\lambda}{10}}\right)=e^{-\lambda\left(i+\frac{k}{10}\right)}-e^{-\lambda\left(i+\frac{k+1}{10}\right)}.$$

Nous retrouvons bien l'expression de $P([X_1=i]\cap[X_2=k])$ obtenue à la question précédente, donc $\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes.}}$

Exercice 3

1.a. f est une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}^n$ et donc y est de classe $\mathscr{C}^2$.

1.b. On a, pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,

$$\partial_1 f(x_1,\dots,x_n)=2x_1+2\sum_{k=1}^n x_k-1.$$

Et plus généralement, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ et pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,

$$\boxed{\partial_i f(x_1,\dots,x_n)=2x_i+2\sum_{k=1}^n x_k-1.}$$

Astuce

Si on a du mal à calculer les dérivées partielles d'une fonction de n variables, avec n quelconque, on peut commencer par calculer la dérivée par rapport à x_1, éventuellement la dérivée par rapport à x_2 et essayer d'en déduire une formule générale. Une telle méthode ne vaut que si les x_k jouent des rôles «symétriques» dans l'expression de f.

Il vient alors

$$\partial^2_{1,1}f(x_1,\dots,x_n)=2+2=4$$

et pour tout $j\in[\![2,n]\!]$,

$$\partial^2_{1,j}f(x_1,\dots,x_n)=2.$$

Plus généralement, pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on a

$$\boxed{\partial^2_{i,j}f(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}4 & \text{si } i=j\\ 2 & \text{sinon}\end{cases}}$$

2.a. $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases}2x_1+2\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k-1 &=0\\ & \vdots\\ 2x_n+2\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k-1&=0\end{cases}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ \vdots\\ L_n\leftarrow L_n-L_1}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}2x_1+2\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k-1&=0\\ 2x_2-2x_1&=0\\ &\vdots\\ 2x_1-2x_n&=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2=\cdots=x_n\\ 2x_1=-2\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\cdots=x_n\\ 2x_1=-2nx_1+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1=\cdots=x_n=\frac{1}{2n+2}.$$

Ainsi $\boxed{f \text{ admet un unique point critique } (a_1,\dots,a_n)=\left(\frac{1}{2n+2},\dots,\frac{1}{2n+2}\right)}.$

Détails
Si tous les x_i valent x_1, leur somme vaut nx_1.

2.b. D'après le calcul des dérivées partielles secondes effectué à la question 1.b, la hessienne de f en $(a_1,\dots,a_n)$ est

$$\nabla^2 f(x_1,\dots,x_n)=\begin{pmatrix}4&2&\dots&\dots&2\\ 2&4&\ddots&&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&2\\ 2&\dots&\dots&2&4\end{pmatrix}=\boxed{2(I_n+J_n).}$$

Remarque
Notons que les dérivées secondes ne dépendant pas des x_i, la hessienne de f est la même en tout point de $\mathbf{R}^n$.

3.a. Toutes les colonnes de J_n sont égales, et non nulles, donc $\operatorname{rg}(J_n)=1$.
En particulier, on a $\operatorname{rg}(J_n)<n$, et donc 0 est valeur propre de J_n.
Et alors $\dim E_0(J_n)=n-\operatorname{rg}(J_n)=\boxed{n-1.}$

Détail
Il n'est pas inutile de préciser que ces colonnes sont non nulles, car la matrice nulle a toutes ses colonnes égales mais n'est pas de rang 1 pour autant.

3.b. On a

$$J_n\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\dots&1\\ \vdots&\ddots&&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\vdots\\ 1&\dots&\dots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n\\n\\ \vdots\\n\end{pmatrix}=\boxed{n\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}.}$$

Remarque
En règle générale on peut uniquement affirmer que

$$\sum_{\lambda\in\operatorname{Spec}(J_n)}\dim E_\lambda(J_n)\leqslant n$$

mais puisque J_n est symétrique, nous savons qu'elle est diagonalisable et donc il y a égalité.

3.c. La question précédente prouve que n est valeur propre de J_n, avec $\dim E_n(J_n)\geqslant 1$.
Puisqu'on a déjà $\dim E_0(J_n)=n-1$ et que $\displaystyle\sum_{\lambda\in\operatorname{Spec}(J_n)}\dim E_\lambda(J_n)=n$, alors nécessairement les seules valeurs propres de J_n sont 0 et n, et $\dim E_n(J_n)=1$.
Ainsi, il existe une matrice $P\in GL_n(\mathbf{R})$ telle que $J_n=P^{-1}\operatorname{Diag}(\underbrace{0,\dots,0}_{n-1 \text{ fois}},n)P$.

Et donc

$$A_n=2(I_n+J_n)=2(P^{-1}I_nP+P^{-1}\operatorname{Diag}(\underbrace{0,\dots,0}_{n-1\text{ fois}},n)P)=P^{-1}\operatorname{Diag}(\underbrace{2,\dots,2}_{n-1\text{ fois}},2n+2)P.$$

En particulier, A_n est semblable à la matrice diagonale $\operatorname{Diag}(\underbrace{2,\dots,2}_{n-1\text{ fois}},2n+2)$.

Elle est donc diagonalisable[2], et $\boxed{\operatorname{Spec}(J_n)=\{2,2n+2\}.}$

Astuce
Quelle que soit la matrice P inversible, on a toujours

$$I_n=P^{-1}I_nP.$$

[2] Ce qui n'est pas une surprise car une matrice hessienne est toujours symétrique, donc diagonalisable.

4. Les valeurs propres de $A_n=\nabla^2 f(a_1,a_2,\dots,a_n)$ sont toutes strictement positives, donc f admet un $\boxed{\text{minimum local en } (a_1,a_2,\dots,a_n).}$
Ce minimum vaut

$$f(a_1,\dots,a_n)=\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{2n+2}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{2n+2}\right)^2-\sum_{k=1}^n\frac{1}{2n+2}=\frac{n}{(2n+2)^2}+\frac{n^2}{(2n+2)^2}-\frac{n}{2n+2}$$
$$=\frac{n+n^2-n(2n+2)}{(2n+2)^2}=-\frac{n^2+n}{(2n+2)^2}=-\frac{n(n+1)}{4(n+1)^2}=\boxed{-\frac{n}{4(n+1)}.}$$

Remarque
Le théorème permettant de donner la nature locale du point critique en fonction du signe des valeurs propres s'applique bien car $\mathbf{R}^n$ est un ouvert.

Problème

Partie 1 : étude de quelques variables aléatoires liées à cette épreuve.

1.a. Notons A_i l'événement «le joueur obtient la face 1 lors du $i^{\text{ème}}$ lancer».
Alors l'événement «le joueur obtient n faces lors des n premiers lancers» est l'événement

$A_1 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

De plus, nous savons que pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, $P_E(A_i) = \frac{1}{2}$ et $P_{\overline{E}}(A_i) = 1$.
Enfin, une fois le jeton choisi, le résultat d'un lancer n'influe pas sur le suivant, et donc les événements $(A_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ sont indépendants pour la probabilité P_E et pour la probabilité $P_{\overline{E}}$.
Ainsi, il vient

$$P_E\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P_E(A_i) = \frac{1}{2^n}.$$

Et de même,

$$P_{\overline{E}}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P_{\overline{E}}(A_i) = 1^n = 1.$$

Et donc, par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{E, \overline{E}\}$, on a

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P_E\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)P(E) + P_{\overline{E}}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)P\left(\overline{E}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{2^n+1}{2^{n+1}}}.$$

Indépendance

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, les événements A_i ne sont pas indépendants, ils le sont **une fois le jeton choisi**, c'est-à-dire pour P_E et $P_{\overline{E}}$.
Par exemple, si on obtenu 1 au premier lancer, il est plus probable qu'on soit en train d'utiliser le jeton J_2 que le jeton J_1, et donc il est plus probable d'obtenir de nouveau un 1 au second lancer.
Au contraire, si le premier lancer a donné un 0, alors nous sommes sûr que nous jouons avec le jeton J_1, et donc nous avons une chance sur 2 d'obtenir un 1 au lancer suivant.

1.b. Nous cherchons $P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}(E)$.
D'après la formule de Bayes, on a

$$P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}(E) = \frac{P_E\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)P(E)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)} = \frac{1}{2^n}\frac{1}{2}\frac{2^{n+1}}{2^n+1} = \frac{1}{1+2^n}.$$

Cette probabilité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Et donc cela signifie que plus l'on fait de 1 de suite lors des premiers lancers, plus il est probable que le jeton utilisé soit J_2.

Bayes

On cherche une probabilité conditionnelle $P_A(B)$ alors que l'on connait $P_B(A)$: c'est typiquement la situation où il faut utiliser Bayes.

2.a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si on joue avec le jeton J_2, alors nous ne ferons jamais de 0, et donc $P_{\overline{E}}(X = n) = 0$.
En revanche, si on joue avec le jeton J_1, alors le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier 0 est une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ et donc $P_E(X = n) = \frac{1}{2^n}$.
Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{E, \overline{E}\}$, on a donc

$$P(X = n) = P_E(X = n)P(E) + P_{\overline{E}}(X = n)P\left(\overline{E}\right) = \boxed{\frac{1}{2^{n+1}}}.$$

2.b. Puisque $\{[X = n], n \in \mathbf{N}\}$ est un système complet d'événements[3], on doit avoir
$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$ et donc $P(X = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)$.
Or on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Et donc $\boxed{P(X = 0) = \frac{1}{2}}$.
Ce résultat était prévisible : si on joue avec J_2, alors $X = 0$ (on n'aura jamais de face 0), alors que si l'on joue avec J_1, on finira presque sûrement par avoir une face 0.

[3] Par définition de X : X ne peut prendre que la valeur 0 ou une valeur strictement positive.

Détails

On a reconnu une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2.c. La variable aléatoire X possède une espérance si et seulement si la série de terme général $nP(X=n)$ converge absolument. Puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, elle converge absolument si et seulement si elle converge.

Puisque $nP(X=n) = n\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}n\frac{1}{2^{n-1}}$, nous reconnaissons le terme général d'une série géométrique dérivée convergente[4] et donc $E(X)$ existe et vaut

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \boxed{1.}$$

[4] Car de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$.

2.d. D'après le théorème de transfert[5], la variable aléatoire $X(X-1)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $n(n-1)P(X=n)$ converge[6].

Mais $n(n-1)P(X=n) = n(n-1)\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{8}n(n-1)\frac{1}{2^{n-2}}$, et on reconnaît alors le terme général d'une série géométrique dérivée seconde convergente[7].
Donc $X(X-1)$ admet une espérance et

$$E(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) = \frac{1}{8}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{8}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \boxed{2.}$$

On en déduit que $E\left(X^2\right) = E(X(X-1)) + E(X) = 2+1 = 3$ et alors, par la formule de Huygens,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = 3-1 = \boxed{2.}$$

[5] Appliqué à la fonction $f : x \mapsto x(x-1)$.

[6] Absolument, mais comme précédemment, il s'agit d'une série à termes positifs.

[7] Car de raison $1/2$.

3.a. Par le même raisonnement qu'à la question 2.a, on a $P_E(Y=n) = \frac{1}{2^n}$.
En revanche, si l'on joue avec le jeton J_2, la première face 1 apparaît nécessairement lors du premier lancer et donc $P_{\overline{E}}(Y=1) = 1$ et$P_{\overline{E}}(Y=n) = 0$ si $n \geqslant 2$.
Par la formule des probabilités totales, on en déduit donc que

$$P(Y=1) = P_E(Y=1)P(E) + P_{\overline{E}}(Y=1)P\left(\overline{E}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

et pour $n \geqslant 2$,

$$P(Y=n) = P_E(Y=n)P(E) + \underbrace{P_{\overline{E}}(Y=n)}_{=0}P\left(\overline{E}\right) = \boxed{\frac{1}{2^{n+1}}.}$$

3.b. Comme à la question 2.b, on doit avoir $\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n) = 1$ soit

$$P(Y=0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n) = 1 - \frac{3}{4} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+3}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 0.$$

Chgt d'indice
$k = n-2$.

3.c. La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement la série de terme général $nP(Y=n)$ converge[8].

Or, pour $n \geqslant 2$, on a $nP(Y=n) = \frac{1}{2}n\frac{1}{2^n}$, qui est le terme général d'une série géométrique dérivée convergente. Et donc

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} nP(Y=n) = \frac{3}{4} + \sum_{n=2}^{+\infty} nP(Y=n) = \frac{3}{4} + \sum_{n=2}^{+\infty} nP(Y=n)\\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} n\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1\right) = \frac{3}{4} + 1 - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{2}.}\end{aligned}$$

[8] Absolument, mais il s'agit d'une série à termes positifs.

Convergence
Les premiers termes d'une série n'ont pas d'influence sur sa nature. Donc pour étudier la convergence, il suffit de s'intéresser à n «grand» (ici $n \geqslant 2$).

3.d. D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $Y(Y-1)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $n(n-1)P(Y=n)$ converge.

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $n(n-1)P(Y=n) = n(n-1)\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{8}n(n-1)\frac{1}{2^{n-2}}$ qui est le

terme général d'une série convergente.
Et donc $Y(Y-1)$ admet une espérance, égale à

$$E(Y(Y-1)) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(Y=n) = \frac{1}{8}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{8}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \boxed{2.}$$

On en déduit que $E\left(Y^2\right) = E(Y(Y-1)) + E(Y) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.
Et alors, par la formule de Huygens,

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{7}{2} - \frac{9}{4} = \boxed{\frac{5}{4}.}$$

4.a. X et Y prennent leurs valeurs dans $\mathbf{N}$, donc S prend également ses valeurs dans $\mathbf{N}$.
Nous pouvons même affirmer que S ne prend pas la valeur 0, car cela signifierait que X et Y prennent simultanément la valeur 0, et donc que le joueur n'a obtenu aucun 0 et aucun 1 lors de ses lancers. Et donc $\boxed{S(\Omega) = \mathbf{N}^*.}$

4.b. Notons qu'on ne peut avoir simultanément $X = 1$ et $Y = 1$, car cela signifierait que le premier lancer a donné un 1 **et** un 0.
On a donc $[S = 1] = ([X = 0] \cap [Y = 1]) \cup ([X = 1] \cap [Y = 0])$ et ces deux événements sont incompatibles, de sorte que

$$P(S = 1) = P([X = 0] \cap [Y = 1]) + P([X = 1] \cap [Y = 0]).$$

Mais $P([X = 1] \cap [Y = 0]) \leqslant P(Y = 0) = 0$.
D'autre part, si $[X = 0]$, alors le joueur n'a obtenu que des faces numérotées 1. C'est en particulier le cas au premier lancer, et donc $[X = 0] \subset [Y = 1]$.
Alors $[X = 0] \cap [Y = 1] = [X = 0]$, de sorte que $P([X = 0] \cap [Y = 1]) = P(X = 0)$.

Nous avons donc bien $\boxed{P(S = 1) = P(X = 0) = \frac{1}{2}.}$

> **Rappel**
> On a une inclusion entre événement $A \subset B$ si dès que A est réalisé, alors B l'est aussi.

4.c. Si $X = n$, avec $n \geqslant 2$, alors le premier 0 n'est pas apparu avant le $n^{\text{ème}}$ lancer, de sorte que les lancers 1 à $n-1$ ont nécessairement produit des 1 : $[Y < n]$ est donc réalisé.
Et donc $\boxed{[X = n] \subset [Y < n].}$
De même, on $[Y = n] \subset [X < n]$.
Enfin, puisque X et Y ne peuvent prendre simultanément la même valeur, on a

$$[S = n] = ([X = n] \cap [Y < n]) \cup ([Y = n] \cap [X < n]) = [X = n] \cup [Y = n].$$

> **Mieux**
> Nous pouvons même affirmer que $Y = 1$ est réalisé.

> **Max**
> Le maximum de X et Y vaut n si l'une des deux variables vaut n et si l'autre est inférieure ou égale à n.
> Mais X et Y ne peuvent être égale, donc il faut et il suffit que l'une vaille n et que l'autre soit strictement inférieure à n.

4.d. Les deux événements $[X = n]$ et $[Y = n]$ sont incompatibles, donc

$$P(S = n) = P(X = n) + P(Y = n) = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \boxed{\frac{1}{2^n}.}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $P(S = n) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Nous reconnaissons là une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$: $\boxed{S \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right).}$

Et donc $E(S) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \boxed{2}$ et $V(S) = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^2}} = \boxed{2.}$

5.a. A priori, I prend ses valeurs dans $\mathbf{N}$. Mais le premier lancer donne toujours un 0 ou un 1, de sorte que soit $X = 1$, soit $Y = 1$. Et donc on a toujours $\min(X, Y) \leqslant 1$.
Ainsi, I ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1 : $\boxed{\text{c'est une variable de Bernoulli.}}$

5.b. On a $[I = 0] = [X = 0] \cup [Y = 0]$.
Ces deux événements sont incompatibles comme expliqué à la question 4.a.
Et donc $P(I = 0) = P(X = 0) + P(Y = 0) = \frac{1}{2}$.

On en déduit que $I \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et donc que $\boxed{E(I) = \frac{1}{2}}$ et $V(I) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{4}.}$

Partie 2 : simulation des variables X et Y.

6.a. La ligne 3 permet de choisir un jeton : `2*rand()` retourne un nombre entre 0 et 2, suivant une loi uniforme sur $[0,2]$, de sorte que sa partie entière vaut soit 0, soit 1, avec probabilité $\frac{1}{2}$. En ajoutant 1, on obtient donc 1 ou 2, de manière équiprobable.
La variable `jeton` contient donc le numéro du jeton choisi.
Les lignes 4 et 8 simulent sur le même principe le choix d'une face, celle-ci valant 0 ou 1.
Si le jeton choisi est le jeton J_1, alors, tant que de nouveau lancers donne une face numérotée 1, on effectue un nouveau lancer, tout en prenant soin d'incrémenter `X`, de sorte que cette variable compte le nombre de lancers nécessaires à l'obtention d'une face 1.
Et si on joue avec J_2, alors `X` garde la valeur 0.

Au final, ce programme simule la variable X.

6.b. A priori, la boucle `while` pourrait ne jamais s'arrêter, si on joue avec J_1 et que l'on obtient une infinité de faces numérotées 1.
Toutefois, la probabilité que ceci se produise est nulle comme mentionné dans la question 2.b.

7. Il y a peu de choses à changer ici : si on joue avec J_2, alors Y prendra toujours la valeur 1, et sinon, il suffit de modifier la ligne 7 du précédent programme.

```
function Y = simul()
        Y = 1 ;
        jeton = floor(2*rand())+1 ;
        lancer = floor(2*rand()) ;
        if jeton==1 then
                while lancer <>1
                        lancer = floor(2*rand()) ;
                        Y = Y+1 ;
                end
        end
endfunction
```

EDHEC 2004

Exercice 1

Sujet : Étude de la queue d'une loi de Poisson. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : variables aléatoires discrètes, inégalité de Markov, série numériques.

Modifications apportées au sujet d'origine : suppression de la question 2.a : l'inégalité de Markov est au programme.

Commentaires : exercice intéressant, qui demande de l'habitude dans la manipulation des événements.

Dans tout cet exercice, on note X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

1. **Une première inégalité**
   a. Montrer que $P(|X-\lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.
   b. En déduire l'inégalité
   $$P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}. \tag{$\star$}$$
2. **Première amélioration de l'inégalité** ($\star$)
   Soit Z une variable aléatoire discrète, d'espérance nulle et admettant une variance σ^2.
   a. Montrer que pour tout couple $(a,x) \in]0;+\infty[\times\mathbf{R}_+$, on a
   $$P(Z \geqslant a) \leqslant P\left((Z+x)^2 \geqslant (a+x))^2\right).$$
   b. En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(Z+x)^2$, montrer que
   $$\forall a > 0, \forall x \geqslant 0, P(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}.$$
   c. En déduire que
   $$\forall a > 0, P(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$
   Indication : on pourra à cet effet étudier sur $\mathbf{R}_+$ *la fonction* $x \mapsto \dfrac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}$.
   d. Utiliser cette dernière inégalité pour prouver que $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda+1}$.
3. **Seconde amélioration de l'inégalité** ($\star$)
   Pour tout t réel, on pose
   $$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)t^k.$$
   a. Justifier la convergence de la série définissant $G_X(t)$, et prouver que $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
   b. Montrer que
   $$\forall t \in [1;+\infty[, \forall a > 0, P(X \geqslant a) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^a}.$$
   c. Déterminer le minimum sur $[1;+\infty[$ de la fonction $g : t \mapsto \dfrac{e^{t-1}}{t^2}$.
   d. En déduire que $P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$.
4. Montrer que la majoration de $P(X \geqslant 2\lambda)$ obtenue à la question précédente est meilleure que celle obtenue à la question 2.d dès que λ est assez grand.

Exercice 2

Sujet : Étude d'une fonction définie par une intégrale. **Facile**

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, fonctions d'une variable.

1. On pose, lorsque c'est possible, $f(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$.
Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est décroissante sur $]0,+\infty[$.
3. a. Justifier l'existence de la quantité $g(x)$ définie sur $]0,+\infty[$ par

$$g(x)=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t(1+t^x)}.$$

b. Pour tout x de $]0,+\infty[$, et pour tout t de $]1,+\infty[$, simplifier $\frac{1}{t}-\frac{t^{x-1}}{1+t^x}$, puis établir que :

$$\forall x\in]0,+\infty[, g(x)=\frac{\ln 2}{x}.$$

c. En déduire que

$$\forall x\in]0,+\infty[, 0\leqslant f(x)\leqslant\frac{\ln 2}{x}$$

puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

4. a. Montrer que

$$\forall x\in]0,+\infty[, 0\leqslant\frac{\ln 2}{x}-f(x)\leqslant\frac{1}{2x+1}.$$

b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0^+. *Indication : on pourra commencer par déterminer la limite de $xf(x)$.*

5. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 3

Sujet : Espérance d'une loi de Xenakis de paramètre 1 — Moyen

Abordable en première année : ✗ — **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : variables à densité

Modifications apportées au sujet d'origine : ajout d'une question de Scilab

Commentaires : bien guidé, le résultat de la question 2 est semblable à l'exercice 3 d'EDHEC 2010, mais s'obtient ici sans le produit de convolution.

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies toutes les deux sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$, indépendantes, et suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose alors $Z=X+Y$.

1. a. Déterminer une densité de Z

b. Montrer que pour tout $x\in]0,1[$, $[Z>1]$ et $[1-x<Z<1+x]$ sont deux événements indépendants.

2. On pose $T=\mathrm{Max}(X,Y)$. On admet que T est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$.

a. Montrer que T est une variable à densité, puis donner une densité de T.

b. En déduire que T possède une espérance $E(T)$ et la déterminer.

c. On pose $U=|X-Y|$, et on admet que U est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$. Montrer que U est combinaison linéaire de Z et de T, puis en déduire l'espérance de U.

d. Proposer un code `Scilab` permettant de vérifier numériquement le résultat de la question précédente, par exemple à l'aide de 10000 simulations de la variable U.

Problème — Non corrige

Abordable en première année : ✓ (sauf 7.d et 7.e)

Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier naturel.

Partie 1.

On note E_n le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,1]$.
En particulier, E_0 est le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$.
On note N l'ensemble des fonctions f de E_2 vérifiant de plus $f(0)=f(1)=0$.
On considère l'application u de N dans E_0 qui, à toute fonction f de N associe sa dérivée seconde, notée f''.

1. Montrer que N est un sous-espace vectoriel de E_2.
2. Montrer que u est une application linéaire injective.
3. Soit g un élément de E_0. Pour tout x de $[0,1]$, on pose $G(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t|g(t)\,dt$.
   a. Justifier que G est un élément de E_1 et montrer que :
   $$\forall x\in[0,1],\ G'(x)=\frac{1}{2}\left(\int_0^x g(t)\,dt-\int_x^1 g(t)\,dt\right).$$
   b. En déduire que G est un élément de E_2 et déterminer G''.
   c. Pour tout x de $[0,1]$, on pose $H(x)=G(x)+ax+b$. Déterminer les réels a et b (sous forme d'intégrales) pour que H appartienne à N.
   d. Déterminer $u(H)$ puis en déduire que u surjective.
   e. Que peut-on déduire des questions 2 et 3.d ?
4. Vérifier que, pour tout x élément de $[0,1]$:
$$(u^{-1})(g)(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|g(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)\,dt-\frac{x}{2}\int_0^1(1-2t)g(t)\,dt.$$

Partie 2.

On note P_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x, on pose $e_k(x)=x^k$, avec bien sûr $e_0(x)=1$, et on rappelle que $\mathscr{B}=(e_0,e_1,\dots,e_n)$ est une base de P_n.
On note N_n le sous-espace vectoriel de P_n constitué des fonctions polynomiales P de degré inférieur ou égal à n et telles que $P(0)=P(1)=0$.
Pour tout entier naturel k et pour tout réel x on pose $f_k(x)=x^{k+1}(x-1)$.

5. Montrer que $C=(f_0,f_1,\dots,f_n)$ est une base de N_{n+2}.

On considère l'application linéaire v de N_{n+2} dans P_n qui, à toute fonction P de N_{n+2} associe sa dérivée seconde, notée P''.

6. a. Pour tout k de $\{0,1,\dots,n\}$, déterminer $v(f_k)$ en fonction de certains des vecteurs de $\mathscr{B}$, puis en déduire la matrice A de v relativement aux bases C et $\mathscr{B}$.
   b. En déduire que v est un isomorphisme de N_{n+2} sur P_n.
   c. Simplifier, pour tout réel x et pour tout entier naturel k, la somme $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} f_j(x)$.
   d. Justifier que le résultat de la question 4 peut s'appliquer ici, puis déterminer, en utilisant le résultat de la question 6.c, la matrice A^{-1}.
   e. Vérifier cette dernière, dans le cas où $n=2$ (les calculs devront figurer sur la copie).
7. On considère l'application w qui à tout élément P de P_n associe $w(P)$, où $w(P)$ est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2-x)P(x)$.
   a. Montrer que w est un endomorphisme de P_n.
   b. Pour tout k de $\{0,1,\dots,n\}$, déterminer $w(e_k)$.
   c. En déduire que la matrice de w dans $\mathscr{B}$ n'est autre que la matrice A de la question 6.a.
   d. L'endomorphisme w est-il diagonalisable ?
   e. Dans le cas $n=2$, déterminer les sous-espaces propres de w.

EDHEC 2004 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1.a. La variable aléatoire X admet une espérance égale à λ et une variance égale à λ également. On peut donc lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et il vient alors

$$P(|X - E(X)| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{V(X)}{\lambda^2}$$

ce qui ici donne

$$\boxed{P(|X-\lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\lambda}{\lambda^2} \leqslant \frac{1}{\lambda}.}$$

Valeur absolue

Rappelons que la valeur absolue de x est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

1.b. L'événement $[|X-\lambda| \geqslant \lambda]$ peut également s'écrire

$$[X-\lambda \geqslant \lambda] \cup [X - \lambda \leqslant -\lambda] = [X \geqslant 2\lambda] \cup [X \leqslant 0].$$

En particulier, on a $[X \geqslant 2\lambda] \subset [|X-\lambda| \geqslant \lambda]$.
Par croissance de la probabilité, on en déduit que

$$\boxed{P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant P(|X-\lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}.}$$

Croissance

La «croissance de la probabilité» signifie que si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$.

2.a. Puisque $a > 0$, si $Z \geqslant a$, alors

$$(Z+x)^2 = Z^2 + 2Zx + x^2 \geqslant a^2 + 2ax + x^2 = (a+x)^2.$$

Ainsi, on a donc l'inclusion d'événements

$$[Z \geqslant a] \subset \left[(Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2\right]$$

et par croissance de la probabilité, il vient

$$\boxed{P(Z \geqslant a) \leqslant P((Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2).}$$

Danger

Attention à ne pas affirmer que

$$[(Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2] = [Z + x \geqslant a + x].$$

En effet, la variable $Z + x$ n'est pas nécessairement à valeurs positives, et donc on ne peut utiliser la croissance de la fonction racine carrée.

2.b. La variable aléatoire $(Z+x)^2$ est à valeurs positives, et elle admet une espérance. En effet,

$$(Z+x)^2 = Z^2 + 2xZ + x^2$$

et Z admet une espérance, donc il est de même de $2xZ$, et puisque Z possède une variance, Z^2 possède une espérance (c'est le moment d'ordre 2 de Z).
De plus, puisque $E(Z) = 0$, on a

$$\sigma^2 = V(Z) = E((Z - E(Z))^2) = E(Z^2).$$

Alternative

On aurait également pu utiliser la formule de Huygens, qui relie espérance, variance et moment d'ordre 2.

On en déduit que

$$E((Z+x)^2) = E(Z^2) + 2xE(Z) + x^2 = \sigma^2 + x^2.$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité de Markov à $(Z+x)^2$, qui admet une espérance, il vient :

$$\boxed{P((Z+x)^2 \geqslant (a+x)^2) \leqslant \frac{E\left((Z+x)^2\right)}{(a+x)^2} \leqslant \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}.}$$

2.c. Étudions sur $\mathbf{R}_+$ la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$.
Elle est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ car quotient[1] de deux fonction dérivables et

$$f'(x) = \frac{2x(a+x)^2 - 2(\sigma^2 + x^2)(a+x)}{(a+x)^4} = \frac{(a+x)(2x^2 + 2ax - 2\sigma^2 - 2x^2)}{(a+x)^4} = \frac{2ax - 2\sigma^2}{(a+x)^3}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

[1] Le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbf{R}_+^*$ car $a \geqslant 0$.

x	0		$\frac{\sigma^2}{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{\sigma^2}{a^2}$	$\searrow$		$\nearrow$	1

f admet donc un minimum égal à

$$f\left(\frac{\sigma^2}{a}\right)=\frac{\sigma^2+\left(\frac{\sigma^2}{a}\right)^2}{\left(a+\frac{\sigma^2}{a}\right)^2}=\frac{\frac{a^2\sigma^2+\sigma^4}{a^2}}{\frac{(a^2+\sigma^2)^2}{a^2}}=\frac{a\sigma^2+\sigma^4}{(a^2+\sigma^2)^2}=\frac{(a^2+\sigma^2)\sigma^2}{(a^2+\sigma^2)^2}=\frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}.$$

On en déduit que pour tout $x \geqslant 0$, $\dfrac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2} \leqslant \dfrac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}$ et donc, d'après les résultats des questions 2.a et 2.b, on a

$$\boxed{P(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}.}$$

2.d. L'inégalité que nous venons de démontrer peut s'appliquer à la variable aléatoire $Z = X - \lambda$, qui est bien d'espérance nulle, et qui admet une variance car $V(X-\lambda) = V(X) = \lambda$.
On en déduit, en prenant $a = \lambda$ que

$$\boxed{P(X-\lambda \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\lambda}{\lambda+\lambda^2} \leqslant \frac{\lambda}{\lambda(\lambda+1)} \leqslant \frac{1}{\lambda+1}.}$$

3.a. Il s'agit de justifier la convergence de la série de terme général $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k t^k}{k!} = e^{-\lambda}\dfrac{(t\lambda)^k}{k!}$.

Or, la série $\displaystyle\sum_k \frac{(t\lambda)^k}{k!}$ est une série exponentielle, donc convergente et de somme $e^{t\lambda}$. On en déduit que la série définissant $G_X(t)$ converge et que

Série exp.

Rappelons que $\displaystyle\sum_n \frac{x^n}{n!}$ converge **pour tout** $x \in \mathbf{R}$ et que sa somme vaut e^x.

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{(t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{t\lambda} = \boxed{e^{\lambda(t-1)}.}$$

3.b. Commençons par préciser $P(X \geqslant a)$. Notons n l'entier immédiatement supérieur[2] à a.
Puisque X suit une loi de Poisson, elle ne prend que des valeurs entières, et donc $[X \geqslant a] = [X \geqslant n]$, de sorte que $P(X \geqslant a) = P(X \geqslant n)$. Mais

[2] C'est-à-dire $n = \lfloor a \rfloor + 1$ si $a \notin \mathbf{N}$, et $a = n$ si $a \in \mathbf{N}$.

$$P(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(X = k).$$

Pour $t \geqslant 1$ et $a > 0$, on a

$$\frac{G_X(t)}{t^a} = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\frac{t^k}{t^a} = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)t^{k-a}.$$

Nous allons découper en deux morceaux cette somme, en séparant les indices supérieurs à a et ceux inférieurs à a.On a

$$\frac{G_X(t)}{t^a} = \sum_{k=0}^{n-1} P(X=k)t^{k-a} + \sum_{k=n}^{\infty} P(X=k)t^{k-a}.$$

Chacun des termes composant la première somme étant strictement positif, la somme est encore positive, et donc

$$\frac{G_X(t)}{t^a} \geqslant \sum_{k=n}^{\infty} P(X=k)t^{k-a}.$$

Mais puisque $t \geqslant 1$ et que pour chacun des termes de cette somme, $k \geqslant a$, $t^{k-a} \geqslant 1$, et donc

$$\frac{G_X(t)}{t^a} \geqslant \sum_{k=n}^{\infty} P(X=k).$$

Ainsi, nous avons bien prouvé que

$$\boxed{\frac{G_X(t)}{t^a} \geqslant P(X \geqslant a).}$$

3.c. La fonction g est dérivable sur $[1;+\infty[$, de dérivée

$$g'(t) = \frac{e^{t-1}t^2 - 2te^{t-1}}{t^4} = e^{t-1}\frac{t-2}{t^3}.$$

Elle admet donc un minimum en $t=2$, et ce minimum vaut $\boxed{g(2) = \frac{e}{4}.}$

3.d. Soit $t \geqslant 1$. En appliquant l'inégalité de la question 3.b avec $a = 2\lambda$, il vient

$$P(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}} \leqslant \left(\frac{e^{t-1}}{t^2}\right)^{\lambda}$$

Et par la question 3.c, $\dfrac{e^{t-1}}{t^2} \leqslant \dfrac{e}{4}$, de sorte que

$$\boxed{P(X \geqslant a) \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}.}$$

4. On a $0 < \dfrac{e}{4} < 1$, de sorte que

$$\frac{\left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}}{\frac{1}{\lambda+1}} = (\lambda+1)\left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda} \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que pour λ suffisamment grand

$$\frac{\left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}}{\frac{1}{\lambda+1}} \leqslant 1 \Leftrightarrow \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda} \leqslant \frac{1}{\lambda+1}.$$

Ceci prouve bien que la majoration de la question 3.d est meilleure que celle de la question 2.d, au moins pour λ suffisamment grand.

> **Détails**
> Revenons à la définition d'une limite : si $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} f(\lambda) = 0$, alors
> $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbf{R} :$$
> $$\lambda \geqslant A \Rightarrow |f(\lambda)| \leqslant \varepsilon.$$
> En particulier, si on choisit $\varepsilon = 1$, alors il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que $\lambda \geqslant A \Rightarrow |f(\lambda)| \leqslant 1$ et donc $f(\lambda) \leqslant 1$.
> Notons que cela garantit juste l'existence de A mais ne nous dit pas si $A = 1$ convient ou s'il faut prendre $A = 10^6$...

EXERCICE 2

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^{x+1}}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$, donc le seul éventuel problème de convergence de l'intégrale est au voisinage de $+\infty$.

Si $x > 0$, alors au voisinage de $+\infty$, on a $1+t+t^{x+1} \sim t^{x+1}$ et donc $\dfrac{1}{1+t+t^{x+1}} \sim \dfrac{1}{t^{x+1}}$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc par critère de comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$ converge.

Si $x = 0$, alors au voisinage de $+\infty$, on a $1+t+t^{x+1} = 1+2t \sim 2t$.

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$ diverge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$), par critère de comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$ diverge.

Enfin, pour $x < 0$, au voisinage de $+\infty$, $1+t+t^{x+1} \sim t$. Mais l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, donc il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$.

Ainsi, $\boxed{\text{le domaine de définition de } f \text{ est } \mathbf{R}_+^*.}$

> **Rédaction**
> Si cette fonction était continue seulement sur $]1,+\infty[$, on devrait étudier la convergence de l'intégrale en 1. Ici nous n'en avons pas besoin.
> Avant d'étudier une intégrale impropre, on commencera **toujours** par déterminer le domaine de continuité.

2. Soient $x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+^*$, avec $x_1 \leqslant x_2$.
Alors pour tout $t \geqslant 1$, on a $t^{x_1+1} \leqslant t^{x_2+1}$ et donc $1+t+t^{x_1+1} \leqslant 1+t+t^{x_2+1}$. On en déduit que

$$\forall t \geqslant 1,\ \frac{1}{1+t+t^{x_1+1}} \geqslant \frac{1}{1+t+t^{x_2+1}}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors

$$f(x_1) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x_1+1}} \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x_2+1}} = f(x_2).$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est décroissante sur } \mathbf{R}_+^*.}$

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une fonction, on utilise la dérivée lorsqu'on la connaît (ce qui n'est pas le cas ici), sinon il faut revenir à la définition de la monotonie.

3.a. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(1+t^x)}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$, donc le seul éventuel problème de convergence de l'intégrale est au voisinage de $+\infty$.
Mais au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{1}{t(1+t^x)} \sim \frac{1}{t^{x+1}}$$

On conclut comme dans la question 1, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, que l'intégrale définissant $g(x)$ est convergente.

3.b. On a, $\forall x \in]0;+\infty[, \forall t \in]1,+\infty[$,

$$\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x} = \frac{1+t^x-t^x}{t(1+t^x)} = \frac{1}{t(1+t^x)}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{t^{x-1}}{1+t^x}\right) dt \\
&= \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dt}{t} - \int_1^A \frac{t^{x-1}}{1+t^x}\, dt \\
&= \lim_{A\to+\infty} \ln(A) - \left[\frac{1}{x}\ln(1+t^x)\right]_1^A \\
&= \lim_{A\to+\infty} \ln(A) - \frac{1}{x}\ln(1+A^x) + \frac{\ln(2)}{x} \\
&= \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{A^x}{1+A^x}\right) + \frac{\ln(2)}{x} \\
&= \boxed{\frac{\ln(2)}{x}} \qquad \left(\text{car } \lim_{A\to+\infty} \frac{A^x}{1+A^x} = 1\right)
\end{aligned}$$

☠ Danger !

La tentation est grande d'écrire $g(x) =$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} - \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t^x} dt.$$

Malheureusement, ces deux intégrales sont divergentes !

3.c. Pour tout $x > 0$ et tout $t > 1$, on a $1+t+t^{x+1} \geqslant t(1+t^x)$ et donc

$$0 \leqslant \frac{1}{1+t+t^{x+1}} \leqslant \frac{1}{t(1+t^x)}.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\boxed{0 \leqslant f(x) \leqslant g(x) = \frac{\ln 2}{x}.}$$

Par le théorème des gendarmes, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln 2}{x} = 0$, il vient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

4.a. Nous avons déjà prouvé que $0 \leqslant \dfrac{\ln 2}{x} - f(x)$. De plus,

$$\frac{\ln 2}{x} - f(x) = g(x) - f(x) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t(1+t^x)} - \frac{1}{1+t+t^{x+1}}\right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+t^{x+1})(1+t+t^{x+1})}$$

Mais $(t+t^{x+1})(1+t+t^{x+1}) \geqslant t^{2x+2}$ et donc pour tout $t \in]1, +\infty[$, $\dfrac{1}{(1+t^{x+1})(1+t+t^{x+1})} \leqslant \dfrac{1}{t^{2x+2}}$.
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\frac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x+2}}.$$

Il reste donc à calculer cette dernière intégrale. Mais

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x+2}} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{dt}{t^{2x+2}} = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{2x+1}\frac{1}{t^{2x+1}} \right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2x+1}\left(1 - \frac{1}{A^{2x+1}}\right) = \frac{1}{2x+1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{0 \leqslant \frac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \frac{1}{2x+1}.}$$

4.b. Les calculs précédemment réalisés montrent que

$$\frac{\ln 2}{x} - \frac{1}{2x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln 2}{x}.$$

En divisant gauche et droite par $\frac{\ln 2}{x}$, il vient

$$1 - \frac{x}{\ln(2)(2x+1)} \leqslant \frac{xf(x)}{\ln 2} \leqslant 1.$$

Méthode
Pour montrer que $f \sim g$, le premier réflexe doit être d'essayer de prouver que $\lim \frac{f}{g} = 1$.

Par le théorème des gendarmes, il vient

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{xf(x)}{\ln 2} = 1$$

soit $\boxed{f(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\ln 2}{x}.}$

5. D'après les résultats des questions 2, 3.c et 4.b, on a

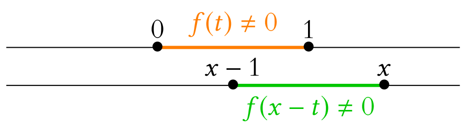
x	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0

EXERCICE 3

1.a. Notons $f : t \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ une densité de la loi $\mathcal{U}([0,1])$.
Puisque f est bornée, une densité de Z est donnée par

$$hx \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)\,dt$$

On a $f(t) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant t \leqslant 1$ et $f(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant x-t \leqslant 1 \Leftrightarrow x-1 \leqslant t \leqslant x$.



Donc pour $x \leqslant 0$ ou $x - 1 \geqslant \Leftrightarrow x \geqslant 2$, on a $h(x) = 0$.
Si $x \in [0,1]$, alors

$$h(x) = \int_0^x 1 \times 1\,dt = x.$$

Et si $x \in]1, 2]$,alors

$$h(x) = \int_{x-1}^{1} 1 \times 1\, dt = 1 - (x-1) = 2 - x.$$

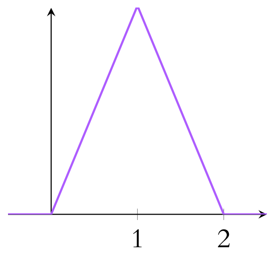


Figure 1– La densité h.

On en déduit que $\boxed{h(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

1.b. On a, pour $x \in]0, 1[$,

$$[Z > 1] \cap [1 - x < Z < 1 + x] = [1 < Z < 1 + x]$$

Donc il vient

$$\begin{aligned} P([X > 1] \cap [1 - x < Z < 1 + x]) &= \int_1^{1+x} h(t)\, dt = \int_1^{1+x} (2-t)\, dt \\ &= \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^{1+x} = 2 + 2x - \frac{(1+x)^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} \\ &= x - \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part, $P(Z > 1) = \displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\, dt = \int_1^2 (2-t)\, dt = \frac{1}{2}$ et

$$P(1-x < Z < 1+x) = \int_{1-x}^{1+x} h(t)\, dt = \int_{1-x}^{1} t\, dt + \int_1^{1+x} (2-t)\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{1-x}^{1} + \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^{1+x} = 2x - x^2.$$

On a donc bien

$$P([Z > 1] \cap [1 - x < Z < 1 + x]) = P(Z > 1) P(1 - x < Z < 1 + x)$$

et donc $\boxed{\text{les événements } [Z > 1] \text{ et } [1 - x < Z < 1 + x] \text{ sont indépendants.}}$

2.a. Puisque X et Y sont à valeurs dans $[0, 1]$, T est également à valeurs dans $[0, 1]$. Ainsi, nous savons déjà que sa fonction de répartition F_T vérifie

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Pour $x \in [0, 1[$, on a

$$[T \leqslant x] = [X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]$$

et donc, par indépendance de X et Y

$$F_T(x) = P(T \leqslant x) = P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]) = P(X \leqslant x) P(Y \leqslant x).$$

Mais X et Y suivent des lois uniformes sur $[0, 1]$, de sorte que $P(X \leqslant x) = P(Y \leqslant x) = x$, et on en déduit que $F_T(x) = x^2$. Donc

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x^2 \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

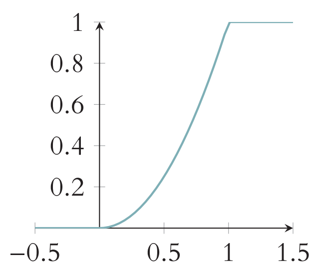


Figure 2– La fonction de répartition de T.

Ainsi, la fonction F_T est continue sur $\mathbf{R}_-^*$, et sur $]1; +\infty[$ (car elle y est constante), ainsi que sur $]0, 1[$ car elle y est polynomiale. Enfin on a

$$\lim_{x \to 0^-} F_T(x) = 0 = F_T(0) = \lim_{x \to 0^+} F_T(x).$$

Donc F_T est continue en 0.
De même,

$$\lim_{x \to 1^-} F_T(x) = 1 = F_T(1) = \lim_{x \to 1^+} F_T(x)$$

et donc F_T est continue en 1. Pour conclure, F_T est continue sur $\mathbf{R}$.
De plus, F_T est dérivable sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $]1;+\infty[$, de dérivée nulle. Elle est également dérivable sur $]0,1[$, avec $F_T'(x) = 2x$.
Nous venons donc de prouver que F_T est continue sur $\mathbf{R}$, dérivable et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ privé de 0 et 1 : $\boxed{\text{la variable } T \text{ admet une densité.}}$
De plus, une densité de T est donnée par toute fonction coïncidant avec F_T' là où celle-ci est définie, c'est-à-dire sur $\mathbf{R} \setminus \{0,1\}$. Par exemple, on peut prendre

$$\boxed{g : t \mapsto \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

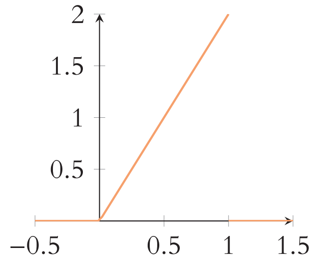


FIGURE 3– La densité de T.

2.b. T possède une espérance si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t)\,dt = \int_0^1 2t^2\,dt \text{ converge (absolument, mais il s'agit d'une fonction positive).}$$

Or, il s'agit là d'une intégrale sur un segment, donc elle converge et vaut $\frac{2}{3}$. Ainsi $\boxed{E(T) \text{ existe et vaut } \frac{2}{3}.}$

2.c. Si $X \geqslant Y$, alors $|X-Y| = X - Y = 2X - (X+Y) = 2\max(X,Y) - (X+Y)$.
De même, si $Y \geqslant X$, alors $|X-Y| = Y - X = 2Y - (X+Y) = 2\max(X,Y) - (X+Y)$.
Ainsi, on a bien

$$U = |X-Y| = 2\max(X,Y) - (X+Y) = 2T - Z.$$

On en déduit que U admet une espérance, et que celle-ci vaut

$$E(U) = 2E(T) - E(Z) = 2E(T) - (E(X) + E(Y)) = 2\frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Plus généralement

Pour tous réels x et y, on a

$$\max(x,y) = \frac{|x-y| - (x+y)}{2}.$$

2.d. Il s'agit de simuler 10000 réalisations de U et de calculer la moyenne de l'échantillon obtenu. Celle-di devrait être proche de 1/3.

```
X = grand(1,10000,'unf',0,1) ;
Y = grand(100,10000,'unf',0,1) ;
U = abs(X-Y) ;
disp(mean(U))
```

EDHEC 2003

Exercice 1

Sujet : suite récurrente linéaire d'ordre 3

Abordable en première année : ✓

Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire de base, polynômes

Facile

Intérêt : ★★☆

P désignant un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, on rappelle que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$,
$P(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m$, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
On admet que, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$ et si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, alors : $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$.

On se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et la relation, valable pour tout n de $\mathbf{N}$: $u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$.

Pour ce faire, on pose, pour tout n de $\mathbf{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. a. Écrire la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, indépendante de n, telle que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
   b. Vérifier que $(A-I)^2(A-2I) = 0$.
2. On considère le polynôme P de $\mathbf{R}[X]$ défini par $P(X) = (X-1)^2(X-2)$.
   a. Justifier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'existence et l'unicité d'un couple (Q_n, R_n) de $\mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}_2[X]$, tel que : $X^n = PQ_n + R_n$.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que : $R_n(X) = a_n + b_n(X-1) + c_n(X-1)^2$.
   c. Établir que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = 1$, $b_n = n$ et $c_n = 2^n - n - 1$.
3. a. Utiliser la question précédente pour écrire, pour tout n de $\mathbf{N}$, A^n comme combinaison linéaire de I, $A - I$ et $(A-I)^2$.
   b. Pour tout n de N, donner la troisième ligne de la matrice A^n.
4. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   b. En déduire, pour tout n de $\mathbf{N}$, u_n en fonction de n.

Exercice 2

Sujet : Comparaison série/intégrale, équivalent du reste et application à une série de Bertrand

Moyen

Abordable en première année : ✓

Intérêt : ★★★

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, séries numériques.

Commentaires : thème assez classique, mais les premières questions ne sont pas beaucoup guidées et nécessitent un peu de familiarité avec le sujet.

Soit p un entier naturel et f une fonction continue, strictement positive, décroissante sur $[p, +\infty[$ et telle que $\int_p^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on pose $S_n = \sum_{k=p}^{n} f(k)$.

1. a. Utiliser la décroissance de f pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a : $S_n - f(p) \leqslant \int_p^n f(t)\,dt$.
   b. En déduire que la série de terme général $f(n)$ est convergente.

On pose désormais, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à p, on a :

$$\int_n^{+\infty} f(t)\,dt - f(n) \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.$$

b. En déduire une condition suffisante portant sur $f(n)$ et $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,dt$ pour que : $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,dt$.

3. Dans cette question, pour tout réel x de $[2,+\infty[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$.

   a. Montrer que cette fonction vérifie les quatre hypothèses de l'énoncé ainsi que la condition trouvée à la question 2.b.

   b. En déduire un équivalent, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$.

   c. La série de terme général R_n est-elle convergente ?

Exercice 3

Sujet : Étude d'un projecteur orthogonal dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ **Facile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★☆☆

Thèmes du programme abordés : produit scalaire, projecteurs orthogonaux

Commentaires : À la rigueur, pour s'entraîner aux calculs de projetés orthogonaux.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A et $\mathrm{tr}(A)$ la trace de A.

On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et on considère la matrice J, élément de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

À tout couple (A,B) de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on associe le réel $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\left({}^tAB\right)$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Dans la suite, on se place dans l'espace euclidien $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ muni de ce produit scalaire.

2. Montrer que (I,J,J^2) est une famille orthogonale.
3. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ engendré par (I,J,J^2).

   a. Déterminer une base orthonormale de E, notée (K_0,K_1,K_2) telle que pour tout $i \in \{0,1,2\}$, K_i soit proportionnelle à J^i.

   b. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ dont le coefficient à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A est $a_{i,j}$.
   Pour tout i de $\{0,1,2\}$, déterminer $\langle K_i, A\rangle$ en fonction de certain des coefficients de A.

   c. On note p la projection orthogonale sur E. Exprimer $p(A)$ en fonction de K_0,K_1,K_2 et de certains éléments de A.

   d. En déduire une base de $\mathrm{Ker}\,p$.

Problème

Sujet : Estimation du paramètre p d'une loi binomiale négative. **Difficile**

Abordable en première année : ✓ (sauf dernière question) **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : fonctions d'une variables, séries numériques, probabilités discrètes, estimation ponctuelle.

Commentaires : joli sujet, constitue un bon entraînement aux calculs de probabilités discrètes et à la manipulation des coefficients binomiaux.

Partie 1

Dans cette partie, r désigne un entier naturel et x désigne un réel de $]0,1]$.

1. Pour tout entier naturel k non nul, calculer la dérivée k-ème de la fonction f définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$.
2. Montrer que lorsque n est au voisinage de $+\infty$, $\dbinom{n+r}{n} \sim \dfrac{n^r}{r!}$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{r+1}x^n = 0$.
4. Soit φ_x la fonction définie sur $[0,x]$ par $\varphi_x(t) = \dfrac{x-t}{1-t}$.
   Montrer que : $\forall t \in [0,x], 0 \leqslant \varphi_x(t) \leqslant x$.
5. a. Écrire la formule de Taylor entre 0 et x avec reste intégral pour la fonction f à l'ordre n.

b. En déduire que : $0 \leqslant f(x) - \sum_{k=0}^{n} \binom{k+r}{k} x^k \leqslant (n+r+1)\binom{n+r}{n} x^n \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{r+2}}$.

c. Montrer finalement que : $\forall x \in]0,1[, \forall r \in \mathbf{R}, \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+r}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

Partie II

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.
On effectue une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes telles que pour chacune d'entre elles, la probabilité de succès soit égale à p, avec $0 < p < 1$.
On note X_n le nombre d'épreuves qu'il faut réaliser pour obtenir, pour la première fois n succès, pas forcément consécutifs (X_n est donc le numéro de l'épreuve où on obtient le n-ème succès). On convient que $X_n = 0$ si l'on obtient pas de succès.

6. Dans cette question seulement, on considère le cas $n = 1$.
   - **a.** Reconnaître la loi de X_1.
   - **b.** Donner l'espérance et la variance de X_1.

Dans toute la suite, on suppose que $n \geqslant 2$.

7. **a.** Déterminer $X_n(\Omega)$.
   - **b.** Pour tout entier naturel k, calculer la probabilité que l'on obtienne $n-1$ succès au cours des $n+k-1$ premières épreuves.
   - **c.** Déduire de la question précédente que : $\forall k \in \mathbf{N}, P(X_n = n+k) = \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k$.
   - **d.** Utiliser le résultat de la partie 1 pour vérifier que
   $$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n+k) = 1.$$
   En déduire $P(X_n = 0)$.

8. **a.** Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in \mathbf{N}, (n+k)\binom{n+k-1}{n-1} = n\binom{n+k}{n}$.
   - **b.** En utilisant le fait que, pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_{n+1} = n+1+k) = 1$, montrer que X_n possède une espérance et donner sa valeur en fonction de n et p.

9. **a.** Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \frac{n-1}{n+k-1}\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-2}{n-2}$.
   - **b.** Utiliser le théorème de transfert pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $\frac{n-1}{X_n - 1}$ possède une espérance et que $E\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right) = p$.

10. **a.** Justifier que $\frac{n}{X_n}$ possède une espérance (on n'en demande pas le calcul).
    - **b.** Montrer, sans calculer $E\left(\frac{n}{X_n}\right)$ que $E\left(\frac{n}{X_n}\right) > p$.

11. Dans cette question, on suppose que le paramètre p est inconnu.
    Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $Y_n = \frac{n-1}{X_n - 1}$ et $Z_n = \frac{n}{X_n}$.
    Des deux estimateurs Y_n et Z_n, lequel est un estimateur sans biais de p ?

EDHEC 2003 : CORRIGÉ

EXERCICE 1

1.a. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Alors

$$AX_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n \\ du_{n+2} + eu_{n+1} + fu_n \\ gu_{n+2} + hu_{n+1} + iu_n \end{pmatrix}.$$

Et donc si l'on veut avoir $AX_n = X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, par identification des coefficient, il faut avoir, pour tout n,

$$\begin{cases} u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n \\ u_{n+1} = du_{n+2} + eu_{n+1} + fu_n \\ u_{n+1} = gu_{n+2} + hu_{n+1} + iu_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n \\ u_{n+1} = du_{n+2} + eu_{n+1} + fu_n \\ u_{n+1} = gu_{n+2} + hu_{n+1} + iu_n \end{cases}$$

Pour cela, on peut donc prendre $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

1.b. Nous avons $A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc $(A-I_3)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

De même, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, d'où

$$(A-I_3)^2(A-2I_3) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.a. Il s'agit de la division euclidienne de X^n par P : P étant de degré 3 le théorème de la division euclidienne affirme qu'il existe un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbf{R}[X]^2$ tel que

$$X^n = Q_n P + R_n \text{ avec } \deg R_n < \deg P = 3.$$

2.b. Les trois polynômes $(1, (X-1), (X-1)^2)$ sont de degrés deux à deux distincts, et donc forment une famille libre de $\mathbf{R}_2[X]$.
Puisqu'elle est de cardinal $3 = \dim \mathbf{R}_2[X]$ c'est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
Ainsi, tout polynôme de $\mathbf{R}_2[X]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $1, X-1$ et $(X-1)^2$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique triplet de réels (a_n, b_n, c_n) tel que

$$\boxed{R_n(X) = a_n + b_n(X-1) + c_n(X-1)^2.}$$

> **Rappel**
> La dimension de $\mathbf{R}_k[X]$ est $k+1$.

> **Unicité**
> Notons que l'énoncé ne demandait pas l'unicité, mais seulement l'existence d'un tel triplet.
> Cette existence est garantie par le fait que la famille $(1, X-1, (X-1)^2)$ est une famille génératrice de $\mathbf{R}_2[X]$. C'est la liberté de cette famille qui garantit l'unicité.

2.c. Nous venons de prouver que

$$X^n = Q_n(X-1)^2(X-2) + a_n + b_n(X-1) + c_n(X-1)^2.$$

En évaluant en $X = 1$, il vient

$$\boxed{1 = 1^n = 0 + a_n + 0 + 0 = a_n.}$$

En évaluant en $X = 2$, nous obtenons $2^n = 0 + a_n + b_n + c_n$.
Enfin, en dérivant cette relation, puisque $P' = (X-1)(3X-5)$, il vient

$$nX^{n-1} = Q_n(X-1)(3X-5) + Q_n'P + b_n + 2c_n(X-1).$$

En évaluant en $X = 1$, il vient alors $\boxed{n = b_n.}$
On en déduit donc que $\boxed{c_n = 2^n - n - 1.}$

3.a. D'après ce qui précède, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, A^n = Q_n(A)\underbrace{P(A)}_{=0} + R_n(A) = R_n(A) = \boxed{2^n I_3 + n(A-I_3) + (2^n - n - 1)(A-I_3)^2.}$$

$P(A) = 0$ d'après le résultat de la question 1.b.

3.b. Nous avons déjà calculé $(A-I_3)$ et $(A-I_3)^2$, ce qui nous permet d'affirmer que la dernière ligne de A^n est

$$\left(2^n - n - 1, n - 2(2^n - n - 1), 1 - n + (2^n - n - 1)\right) = \left(2^n - n - 1, -2^{n+1} + 3n + 2, 2^n - 2n\right)$$

4.a. D'après l'énoncé, $X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Prouvons par récurrence sur n que $X_n = A^n X_0$.
Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_3$ et donc $X_0 = A^0 X_0$.
Supposons que $X_n = A^n X_0$.
Alors, $X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$.

Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, X_n = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$

Remarque

Notons que ceci ressemble beaucoup à une suite géométrique, mais puisqu'il s'agit d'une suite de vecteurs colonnes, et non d'une suite de réels, il n'est pas question d'évoquer une formule connue sur les suites géométriques.

4.b. Dans la relation de la question précédente, identifions les dernières lignes : le coefficient à la dernière ligne de X_n est u_n, et il s'obtient à partir de la 3e ligne de A^n (que nous avons déterminé précédemment) et du vecteur X_0. Autrement dit :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ 2^n - n - 1 & -2^{n+1} + 3n + 2 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ 2^n - n - 1 + (-2^{n+1} + 3n + 2) \end{pmatrix}.$$

Et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, u_n = 2^n - n - 1 + (-2^{n+1} + 3n + 2) = -2^n + 2n + 1.}$$

Exercice 2

1.a. Puisque f est décroissante, pour tout entier $k \geqslant p$, et pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $f(k+1) \leqslant f(t)$.
Par croissance de l'intégrale, il vient donc

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt.$$

En sommant ces relations pour k variant de p à $n-1$, il vient

$$\sum_{k=p}^{n-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_p^n f(t)\,dt.$$

Relation de Chasles.

Mais d'autre part, on a

$$\sum_{k=p}^{n-1} f(k+1) = \sum_{i=p+1}^{n} f(i) = \sum_{i=p}^{n} f(i) - f(p) = S_n - f(p).$$

Chgt d'indice

$i = k + 1$.

Et donc on a bien

$$\boxed{S_n - f(p) \leqslant \int_p^n f(t)\,dt.}$$

1.b. Puisque la série de terme général $f(n)$ est à termes positifs, elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Or, d'après la question 1.a, pour tout $n \geqslant p$, on a $S_n \leqslant f(p) + \displaystyle\int_p^n f(t)\,dt$.

D'autre part, f étant positive sur $[p, +\infty[$, on a

$$\int_p^n f(t)\,dt = \int_p^{+\infty} f(t)\,dt - \underbrace{\int_n^{+\infty} f(t)\,dt}_{\geqslant 0} \leqslant \int_p^{+\infty} f(t)\,dt.$$

⚠ Majoration

Cette inégalité ne prouve pas que la suite S_n est majorée : le majorant dépend encore de n !

Et donc pour tout $n \geqslant p$, $S_n \leqslant \int_p^{+\infty} f(t)\,dt + f(p)$: la suite $(S_n)_{n\geqslant p}$ est donc majorée, et ainsi $\boxed{\text{la série de terme général } f(n) \text{ converge.}}$

2.a. Soit $n \geqslant p$, et $k \geqslant n$. Alors, comme précédemment, par décroissance de f, on a, pour tout $t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$, de sorte que, par croissance de l'intégrale,

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dt = f(k).$$

En sommant ces relations pour k variant de n à $m \geqslant n$, il vient

$$\sum_{k=n}^{m} f(k+1) \leqslant \int_n^{m+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n}^{m} f(k).$$

Lorsque m tend vers $+\infty$, on a alors $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} f(k+1) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.

Mais $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} f(k+1) = \sum_{i=n+1}^{+\infty} f(i) = R_n$, de sorte que

$$R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant R_n + f(n).$$

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,dt - f(n) \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.}$

Limite

Le passage à la limite est bien justifié car toutes les quantités en jeu convergent : par hypothèses, c'est le cas de $\int_n^{+\infty} f(t)\,dt$ et pour la série, cela a été prouvé à la question 1.b.

2.b. On a[1]

$$1 - \frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,dt} \leqslant \frac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t)\,dt} \leqslant 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,dt} = 0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t)\,dt} = 1$,

de sorte que $\boxed{\displaystyle R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,dt.}$

Notons que la condition $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,dt} = 0$ s'écrit encore $\displaystyle f(n) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\int_n^{+\infty} f(t)\,dt\right)$.

[1] f étant strictement positive, son intégrale est non nulle et donc la division est légitime.

3.a. Sur $[2; +\infty[$, les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont positives strictement, continues et croissantes, donc il en est de même de $x \mapsto x(\ln x)^2$. Et alors, par passage à l'inverse[2], f est strictement positive, continue et décroissante.
De plus on a, pour $A > 2$,

$$\int_2^A f(t)\,dt = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_2^A = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(A)} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln 2}.$$

Et donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

De même, on prouve que pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{\ln(n)}$.

Enfin, on a $\displaystyle f(n) = \frac{1}{n\ln(n)^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ et donc la condition trouvée à la question 2.b est vérifiée.

[2] L'inverse d'une fonction croissante positive est une fonction décroissante.

Astuce

Ces primitives sont classiques : $\frac{1}{x(\ln x)^k}$ est de la forme $\frac{u'}{u^k}$ avec $u = \ln$ et donc nous savons l'intégrer.

3.b. D'après ce qui a été dit à la question 2.b, on a donc

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{\ln n}.$$

3.c. La fonction ln est concave (car dérivable, et de dérivée égale à $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui est décroissante), et donc sa courbe est située en dessous de ses tangentes.

En particulier, sa tangente au point d'abscisse 1 est la droite d'équation $y = x - 1$, de sorte que
$$\forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x - 1.$$

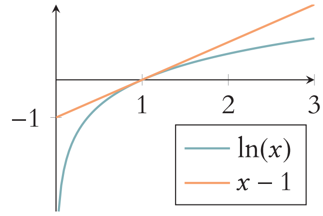


FIGURE 1– ln et sa tangente en $x = 1$.

On a alors notamment, pour $n \geqslant 2$, $\ln(n) \leqslant n-1$ et donc $\dfrac{1}{\ln n} \geqslant \dfrac{1}{n-1} \geqslant 0$.

Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n-1}$ diverge[3], par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, il en est de même de la série de terme général $\dfrac{1}{\ln n}$.

Et donc, d'après le critère des équivalents pour les séries à termes positifs[4], la série de terme général R_n diverge également.

Autre méthode : on a $\dfrac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$.

Et donc si $\sum \dfrac{1}{\ln n}$ convergeait, il en serait de même de $\sum \dfrac{1}{n}$, ce qui n'est pas le cas, donc $\sum \dfrac{1}{\ln n}$ diverge, et donc $\sum R_n$ diverge également.

[3] C'est la série harmonique.

[4] R_n est évidemment positif car somme de termes positifs.

EXERCICE 3

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Alors
$$\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}\left({}^t({}^tAB)\right) = \mathrm{tr}({}^tBA) = \varphi(B,A).$$
Donc φ est symétrique.

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors
$$\varphi(A+B,C) = \mathrm{tr}({}^t(\lambda A+B)C) = \mathrm{tr}((\lambda {}^tA + {}^tB)C) = \lambda \mathrm{tr}({}^tAC) + \mathrm{tr}({}^tBC) = \lambda\varphi(A,C) + \varphi(B,C).$$
Ainsi, φ est linéaire à gauche, et étant symétrique, elle est bilinéaire.

Rappel
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,
$$\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A).$$
Cela est dû au fait que les coefficients diagonaux de ${}^tA$ sont les mêmes que ceux de A.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Alors
$$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{3}\left({}^tAA\right)_{i,i} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left({}^tA\right)_{i,j}a_{j,i} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{i,j}^2.$$
Donc en particulier $\langle A, A\rangle \geqslant 0$.
De plus, une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, donc $\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ a_{i,j}^2 = 0 \Leftrightarrow a_{i,j} = 0$. Et donc si et seulement si $A = 0$.
Ainsi, $\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_3(\mathbf{R}).}$

Astuce
Ce produit scalaire est tellement classique qu'il est bon de savoir comment le manipuler rapidement !
Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, alors
$$\langle A, B\rangle = a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{1,2} + \cdots + a_{n,n}b_{n,n}.$$
Il s'agit donc de multiplier entre eux les coefficients de A et de B et d'en faire la somme.
Pour le dire autrement, cela revient à voir A et B comme deux vecteurs lignes de n^2 coefficients, et à calculer le produit scalaire canonique de ces deux vecteurs.

2. On a $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Et donc $\langle I, J\rangle = \mathrm{tr}(J) = 0$ et $\langle I, J^2\rangle = \mathrm{tr}(J^2) = 0$.

Enfin,
$$\langle J, J^2\rangle = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right) = 0.$$
Et donc $\boxed{(I, J, J^2) \text{ est une famille orthogonale.}}$

3.a. Puisque la famille (I, J, J^2) est orthogonale, il suffit de diviser chaque vecteur par sa norme.
On a $\|I\| = \sqrt{3}$, $\|J\| = \sqrt{2}$ et $\|J^2\| = 1$.

Donc on peut prendre[5] $\boxed{K_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}I, K_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}J, K_3 = J^2.}$

[5] Mais ce n'est pas le seul choix possible : $K_i = -\dfrac{J^i}{\|J^i\|}$ conviendrait aussi.

3.b. On a
$$\langle K_0, A\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle I, A\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{tr}(A) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}(a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3})}$$

$$\langle K_1, A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle J, A\rangle = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(a_{1,2}+a_{2,3})}$$
$$\langle K_2, A\rangle = \langle J^2, A\rangle = \boxed{a_{1,3}.}$$

3.c. Puisque (K_0, K_1, K_2) est une base orthonormée de E, on a

$$p(A) = \langle K_0, A\rangle K_0 + \langle K_1, A\rangle K_1 + \langle K_2, A\rangle K_2.$$

Et donc en combinant ceci aux résultats précédents, il vient alors

$$\boxed{p(A) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3})K_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{1,2}+a_{2,3})K_1 + a_{1,3}K_2.}$$

3.d. Puisque K_0, K_1, K_2 forment une famille libre, $p(A) = 0$ si et seulement si $\begin{cases} a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3} = 0 \\ a_{1,2}+a_{2,3} = 0 \\ a_{1,3} = 0 \end{cases}$

Soit encore si et seulement si

$$\begin{cases} a_{3,3} = -a_{1,1} - a_{2,2} \\ a_{1,2} = -a_{2,1} \\ a_{1,3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & -a_{2,1} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,1} & -a_{1,1}-a_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$A = a_{1,1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{2,1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{2,2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{2,3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{3,1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{3,2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la famille $\mathscr{B}$ de six matrices obtenue ci-dessus est génératrice de $\operatorname{Ker}(p)$.
D'autre part, nous savons que $\operatorname{Ker} p = E^{\perp}$ et donc $\dim \operatorname{Ker} p = \dim \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) - \dim E = 9 - 3 = 6$.
Puisque $\mathscr{B}$ est génératrice, et de cardinal $6 = \dim \operatorname{Ker} p$, c'est une base de $\operatorname{Ker} p$.

PROBLÈME

Partie 1

1. Il est évident que les dérivées k-èmes existent toutes, car f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par opérations sur les fonctions usuelles.
On a alors $f'(x) = \dfrac{r+1}{(1-x)^{r+2}}$, puis $f''(x) = \dfrac{(r+1)(r+2)}{(1-x)^{r+3}}$.
Montrons par récurrence sur $k \geqslant 1$ que $f^{(k)}(x) = \dfrac{(r+1)(r+2)\cdots(r+k)}{(1-x)^{r+k+1}}$.
Nous venons d'initialiser la récurrence pour $k = 1$ et $k = 2$.
Supposons donc que $f^{(k)}(x) = \dfrac{(r+1)\cdots(r+k)}{(1-x)^{r+k+1}}$. Alors

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}\right)'(x) = \frac{(r+1)\cdots(r+k)(r+k+1)}{(1-x)^{r+k+2}}.$$

Donc la propriété est vraie au rang $k+1$.
Par le principe de récurrence, pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\boxed{f^{(k)}(x) = \frac{(r+1)\cdots(r+k)}{(1-x)^{r+k+1}} = \frac{(r+k)!}{r!}\frac{1}{(1-x)^{r+k+1}}.}$$

> **Récurrence**
> Calculer les deux ou trois premières dérivées était indispensable pour voir apparaître un motif, et formuler une hypothèse de récurrence correcte.

2. Par définition, on a $\dbinom{n+r}{n} = \dfrac{(n+r)(n+r-1)\cdots(n+1)}{r!}$.
Le numérateur est un polynôme de degré r en n, qui est donc équivalent à son terme de plus haut degré : n^r.
Et le dénominateur est une constante qui ne dépend pas de n.

On en déduit que $\boxed{\dbinom{n+r}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^r}{r!}.}$

3. C'est du cours : par croissances comparées, $n^{r+1} = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ car $\frac{1}{x} \geqslant 1$. Et donc

$$n^{r+1}x^n = \frac{n^{r+1}}{\frac{1}{x^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. Pour $t \in [0,x]$, on a $\varphi_x(t) - x = \frac{x-t}{1-t} - x = \frac{x-t-x(1-t)}{1-t} = t\frac{x-1}{1-t} \leqslant 0$.
On en déduit que $\boxed{\varphi_x(t) \leqslant x.}$
De plus, puisque $x < 1$, $t < 1$, et donc le numérateur et le dénominateur de $\varphi_x(t)$ sont tous deux positifs, de sorte que $\boxed{\varphi_x(t) \geqslant 0.}$

5.a. La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$, la formule de Taylor s'applique bien, et on a

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.}$$

5.b. En utilisant le résultat de la question 1, on a alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(r+k)!}{r!k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\frac{(r+n+1)!}{r!}\frac{1}{(1-t)^{r+n+2}}\,dt.$$

De plus, on a

$$\frac{(r+n+1)!}{r!n!} = (r+n+1)\frac{(r+n)!}{r!n!} = (n+r+1)\binom{r+n}{n}$$

et donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{k}x^k + (n+r+1)\binom{n+r}{n}\int_0^x \underbrace{\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n}_{=\varphi_x(t)^n}\frac{dt}{(1-t)^{r+2}}.$$

Mais pour $t \in [0,x]$, $0 \leqslant \varphi_x(t) \leqslant x$, et donc $0 \leqslant \varphi_x(t)^n \leqslant x^n$.
On en déduit[6] que $0 \leqslant \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{dt}{(1-t)^{r+2}} \leqslant x^n \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{r+2}}$.
Et donc, il vient finalement

$$\boxed{0 \leqslant f(x) - \sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{k}x^k \leqslant (n+r+1)\binom{n+r}{n}x^n\int_0^x\frac{dt}{(1-t)^{r+2}}.}$$

[6] Par croissance de l'intégrale.

5.c. On a $\int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{r+2}}$ qui est une constante A ne dépendant pas de n.
De plus, $(n+r+1)\binom{n+r}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{n^r}{r!}x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{r+1}x^n}{r!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) - \sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{k}x^k = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{k}x^k = f(x).$$

Ceci signifie bien que la série de terme général $\binom{k+r}{k}x^k$ converge, et que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+r}{k}x^k = f(x) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.}$$

Rappel
Une série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge. La limite est alors la somme de la série.

Partie 2

6.a. Si $n = 1$, alors X_1 désigne le temps d'attente du premier succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes : $\boxed{X_1 \text{ suit la loi géométrique } \mathscr{G}(p).}$

6.b. On a

$$\boxed{E(X_1) = \frac{1}{p}} \text{ et } \boxed{V(X_1) = \frac{1-p}{p^2}}.$$

> **Question de cours**
> Aucune excuse, j'espère que vous avez tous les points !

7.a. Il faut au minimum n essais pour obtenir n succès. Et il n'y a pas de maximum à ce nombre d'essais. Comme de plus, X_n peut prendre la valeur 0 au cas où on n'aurait jamais n succès, il vient

$$X_n(\Omega) = \{0\} \cup \{k \in \mathbf{N}, k \geqslant n\}.$$

7.b. Notons S_i le nombre de succès obtenus au cours des i premières épreuves. Alors S_i suit la loi binomiale $\mathscr{B}(i,p)$.
L'événement «on obtient $n-1$ succès au cours de $n+k-1$ premières épreuves» est alors l'événement $[S_{n+k-1} = n-1]$.
Puisque $S_{n+k-1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n+k-1,p)$, il vient alors

$$P(S_{n+k-1} = n-1) = \binom{n+k-1}{n-1} p^{n-1}(1-p)^{n+k-1-(n-1)} = \boxed{\binom{n+k-1}{n-1} p^{n-1}(1-p)^k}.$$

> **À la main**
> Une manière un peu moins rigoureuse, mais probablement tout aussi convaincante d'obtenir ce résultat est d'expliquer qu'il faut $n-1$ succès parmi les $n+k-1$ répétitions, et donc que le coefficient binomial correspond au nombre de manières de choisir l'emplacement de ces succès. Le p^{n-k} et le $(1-p)^k$ sont alors respectivement les probas des $n-1$ succès et des k échecs.

7.c. Le n-ème succès arrive lors de la $(n+k)$-ème répétition si et seulement cette dernière répétition est un succès, et qu'on avait obtenu $n-1$ succès lors des $n+k-1$ répétitions précédentes. Autrement dit

$$[X_n = n+k] = [Y_{n+k} = 1] \cap [S_{n+k-1} = n-1].$$

Mais par le lemme des coalitions, S_{n+k-1} (qui est fonction de $Y_1, \dots, Y_{n+k-1}$) est indépendante de Y_{n+k}, et donc

$$P(X_n = n+k) = P(Y_{n+k} = 1)P(S_{n+k-1} = n-1) = \boxed{\binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k}.$$

7.d. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n+k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k \\
&= p^n \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+(n-1)}{n-1} (1-p)^k = p^n \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+(n-1)}{k} (1-p)^k \\
&= p^n \frac{1}{(1-(1-p))^{(n-1)+1}} \\
&= p^n \frac{1}{p^n} = 1.
\end{aligned}$$

> **Coeffs binomiaux**
> On a utilisé ici la symétrie des coefficients binomiaux :
> $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Question 5.c avec $r = n-1$ et $x = 1-p$.

Puisque X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0\} \cup \{k \in \mathbf{N}, k \geqslant n\}$, on a

$$1 = P(X_n = 0) + \sum_{i=n}^{+\infty} P(X_n = i) = P(X_n = 0) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n+k).$$

> **Chgt d'indice**
> $k = i - n \Leftrightarrow i = n+k.$

Or, on a déjà $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = n+k) = 1$, donc $\boxed{P(X_n = 0) = 0.}$

8.a. Il suffit de revenir à la définition des coefficients binomiaux à base de factorielles[7] :

$$(n+k)\binom{n+k-1}{n-1} = (n+k)\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = n\frac{(n+k)!}{k!n!} = \boxed{n\binom{n+k}{n}}.$$

[7] Ou de remarquer qu'il s'agit d'une formule du cours :
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

8.b. Notons que l'indication donnée dans l'énoncé se traduit par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} p^{n+1}(1-p)^k = 1.$$

Par définition, X_n admet une espérance si et seulement si la série suivante converge[8]

$$\begin{aligned}\sum_{i=n}^{+\infty} iP(X_n=i) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(n+k)P(X_n=n+k)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(n+k)\binom{n+k-1}{n-1}p^n(1-p)^k\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} n\binom{n+k}{n}p^n(1-p)^k\\ &= n\frac{1}{p}\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k}{n}p^{n+1}(1-p)^k}_{=1}\\ &= \boxed{\frac{n}{p}.}\end{aligned}$$

[8] absolument mais il s'agit d'une série à termes positifs.

Formule de 8.a.

Remarque

C'est n fois l'espérance d'une loi géométrique.
Ce n'est pas surprenant : attendre le n-ème succès, c'est attendre n fois le premier succès !

9.a. C'est encore une fois la même formule de cours qu'à la question 8.a., mais reprouvons le à l'aide de factorielles :

$$\frac{n-1}{n+k-1}\binom{n+k-1}{n-1} = \frac{n-1}{n+k-1}\,\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \frac{(n+k-2)!}{k!(n-2)!} = \frac{(n+k-2)!}{k!(n+k-2-k)!} = \boxed{\binom{n+k-2}{n-2}.}$$

9.b. Notons que, presque sûrement, $0 \leqslant \frac{n-1}{X_n-1} \leqslant 1$ car $X_n - 1$ prend presque sûrement des valeurs supérieures à $n-1$.
Et comme la variable constante égale à 1 admet une espérance, il en est de même de $\frac{n-1}{X_n-1}$.
D'après le théorème de transfert, appliqué à la fonction $g : x \mapsto \frac{n-1}{x-1}$, on a alors[9]

$$\begin{aligned}E\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} g(n+k)P(X_n=n+k)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n-1}{n+k-1}\binom{n+k-1}{n-1}p^n(1-p)^k\\ &= p^n\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k-2}{n-2}(1-p)^k\\ &= p^n\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k-2}{k}(1-p)^k\\ &= p^n\frac{1}{(1-(1-p))^{n-2+1}}\\ &= p^n\frac{1}{p^{n-1}} = p.\end{aligned}$$

Presque sûrement

X_n peut prendre la valeur 0, mais c'est avec probabilité nulle.

[9] L'espérance existe, donc le théorème de transfert garantit la convergence (absolue) de la série qui suit.

10.a. On a, presque sûrement , $0 \leqslant \frac{n}{X_n} \leqslant 1$, et donc $\frac{n}{X_n}$ admet une espérance.

10.b. De plus, on a

$$\frac{n}{X_n} - \frac{n-1}{X_n-1} = \frac{n(X_n-1)-(n-1)X_n}{X_n(X_n-1)} = \frac{X_n-n}{X_n(X_n-1)} \geqslant 0.$$

Et donc

$$E\left(\frac{n}{X_n}\right) - E\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow E\left(\frac{n}{X_n}\right) \geqslant E\left(\frac{n-1}{X_n-1}\right) \geqslant p.$$

De plus, $T_n = \frac{n}{X_n} - \frac{n-1}{X_n-1} = \frac{X_n-n}{X_n(X_n-1)}$ n'est pas la variable nulle car X_n n'est pas toujours égale à n.

Presque sûrement

Une fois encore, X_n peut s'annuler. Donc la variable

$$\frac{n}{X_n} - \frac{n-1}{X_n-1}$$

n'est pas positive, mais presque sûrement positive.

Autrement dit, il existe $k_0 > 0$ tel que $P(T_n = k_0) > 0$.
Et alors

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(T_n = k) \geqslant k_0 P(T_n = k_0) > 0.$$

Explication

On a en fait démontré ici un résultat intuitif : une variable discrète à valeurs positives est d'espérance nulle si et seulement si elle est (presque sûrement) nulle.

Et donc $E(T_n) > 0 \Leftrightarrow \boxed{E\left(\frac{n}{X_n}\right) > E\left(\frac{n-1}{X_n - 1}\right) \geqslant p.}$

11. Nous venons de prouver que $E(Y_n) = p$, et donc $\boxed{Y_n \text{ est un estimateur sans biais de } p.}$
En revanche, $E(Z_n) > p$, et donc $\boxed{b(Z_n) > 0.}$

EDHEC 2001

Exercice 1

Sujet : Structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

Moyen

Abordable en première année : ✓

Intérêt : ★★☆

Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire, intégrale sur un segment.

Commentaires : un exercice peu classique, mais qui permet de se tester sur les espaces vectoriels formés de fonctions et sur le théorème fondamental de l'analyse.

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ des fonctions définies sur $\mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$, muni des lois habituelles, possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.
On note E l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ qui vérifient la relation $(\star)$ suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \varphi''(x) = \left(1+x^2\right)\varphi(x).$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que si u et v sont deux éléments de E, alors $u'v - uv'$ est une fonction constante.
3. Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par : $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.
   a. Vérifier que f est un élément de E.
   b. Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) = f(x)\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}$.
      Montrer que g est élément de E.
4. a. Soit h une solution de $(\star)$. Montrer, en utilisant le résultat de la deuxième question appliqué aux fonctions h et f, que h est combinaison linéaire de f et de g.
   b. Montrer finalement que (f,g) est une base de E.

Exercice 3

Sujet : Étude d'un endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$

Facile

Abordable en première année : ✗

Intérêt : ★★☆

Thèmes du programme abordés : espaces euclidiens, supplémentaire orthogonal.

On considère l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$, muni du produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par :

$$\forall u = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3,\ \forall u' = (x',y',z') \in \mathbf{R}^3,\ \langle u,u'\rangle = xx' + yy' + zz'.$$

La norme du vecteur u est alors définie par $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$.
On note $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et on rappelle que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale pour le produit scalaire défini ci-dessus.
On désigne par a, b et c trois réels, on pose $\omega = (a,b,c)$ et on suppose que c est non nul.
On note φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ qui à tout vecteur $u = (x,y,z)$ de $\mathbf{R}^3$ associe le vecteur

$$\varphi(u) = (yc - zb, za - xc, xb - ya).$$

1. Écrire la matrice M de φ dans la base $\mathscr{B}$.
2. a. Vérifier que ω appartient à $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   b. Montrer que $(\varphi(e_1),\varphi(e_2))$ est une famille libre.
   c. Déduire des questions précédentes que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\omega)$.
3. a. Montrer que pour tout vecteur u de $\mathbf{R}^3$, $\langle\varphi(u),\omega\rangle = 0$.
   b. En déduire que : $\mathrm{Im}\varphi = (\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp$.
4. a. Justifier que pour tout vecteur u de $\mathbf{R}^3$, il existe un unique couple (u_1,u_2) élément de $\mathrm{Ker}\varphi \times \mathrm{Im}\varphi$ tel que $u = u_1 + u_2$.
   b. Montrer $\langle u,\omega\rangle = \langle u_1,\omega\rangle$.
   c. En déduire que $u_1 = \dfrac{\langle u,\omega\rangle}{\|\omega\|^2}\omega$, puis déterminer u_2 en fonction de u et ω.

5. a. Montrer que $M^3 = -\|\omega\|^2 M$.
   b. Montrer que : $\forall v \in \operatorname{Im}\varphi, (\varphi \circ \varphi)(v) = -\|\omega\|^2 v$.
   c. Montrer finalement que : $\forall u \in \mathbf{R}^3,\ (\varphi \circ \varphi)(u) = -\|\omega\|^2 u + \langle u, \omega\rangle \omega$.

Problème — Non relu

Sujet : Minimisation d'une espérance. **Facile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Modifications apportées au sujet d'origine : question 5 : on ne donne pas les valeurs propres. Question 6 : le lien entre extremum local et valeurs propres est clairement au programme, donc la question est un peu moins guidée. sujet

On désigne par n et r deux entiers naturels avec $n \geqslant 2$ et $r \geqslant 3$.
On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à r résultats différents $R_1, R_2, \ldots, R_r$, de probabilités respectives $x_1, x_2, \ldots, x_r$.
On admet que, pour tout i de $[\![1, r]\!]$, $0 < x_i < 1$.
On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.
Pour tout i de $[\![1, r]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue de ces n épreuves et qui vaut 0 sinon.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre des résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1. a. Exprimer la variable X en fonction des variables $X_1, \ldots, X_r$.
   b. Donner la loi de X_i, pour tout i de $[\![1, r]\!]$.
   c. En déduire que l'espérance de X est $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} (1 - x_i)^n$.

   La suite de cet exercice consiste à chercher les valeurs des réels x_i en lesquels $E(X)$ admet un minimum local.
2. a. Donner la valeur de $x_1 + \cdots + x_r$, puis écrire $E(X)$ comme une fonction, que l'on notera f, des $(r-1)$ variables $x_1, \ldots, x_{r-1}$.
   La fonction f est donc définie sur l'ouvert $(]0, 1[)^{r-1}$ de $\mathbf{R}^{r-1}$.
   b. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $(]0, 1[)^{r-1}$.
3. a. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   b. Montrer que le seul point de $(]0, 1[)^{r-1}$ en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément est le point $R = \left(\frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}\right)$.
4. Déterminer la matrice M, appartenant à $\mathscr{M}_{r-1}(\mathbf{R})$ dont le coefficient situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est $\partial^2_{i,j}(f)(R)$.
5. On pose $A = I + J$, où I est la matrice unité de $\mathscr{M}_{r-1}(\mathbf{R})$ et où J est la matrice de $\mathscr{M}_{r-1}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   a. Montrer que J est diagonalisable.
   b. Exprimer J^2 en fonction de J et r.
   c. En déduire les valeurs propres de J.
   d. Donner une matrice Δ diagonale, semblable à J.
6. a. Déterminer les valeurs propres de A, puis celles de M.
   b. En déduire que f présente un minimum local au point R.
   c. Donner la valeur de $E(X)$ correspondant à ce minimum.

EDHEC 2001 : Corrigé

Exercice 1

1. Par construction, E est inclus dans $\mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
La fonction nulle est bien dans E.
Soient $u, v \in E$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $\lambda u + v$ est[1] $\mathscr{C}^2$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$(\lambda u+v)''(x) = \lambda u''(x) + v''(x) = \lambda(1+x^2)u(x) + (1+x^2)v(x) = (1+x)^2(\lambda u(x)+v(x)).$$

Ceci prouve donc que $\lambda u + v \in E$, et donc $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R}).}$

[1] Car somme de fonctions $\mathscr{C}^2$.

2. Soient $u, v \in E$. Alors $w = u'v - uv'$ est dérivable car produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} w'(x) &= u''(x)v(x) + \cancel{u'(x)v'(x)} - \cancel{u'(x)v'(x)} - u(x)v''(x) \\ &= \left(1+x^2\right)u(x)v(x) - u(x)\left(1+x^2\right)v(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Et donc, puisque sa dérivée est nulle, w est une fonction constante sur $\mathbf{R}$.

3.a. La fonction f est bien $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ par composition de fonctions $\mathscr{C}^2$.
De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$.
Et donc

$$f''(x) = x^2 e^{\frac{x^2}{2}} + 1 \times e^{\frac{x^2}{2}} = \left(1+x^2\right)e^{\frac{x^2}{2}} = \left(1+x^2\right)f(x).$$

Et donc $\boxed{f \in E.}$

3.b. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(f(t))^2}$ est continue sur $\mathbf{R}$, car quotient d'une fonction continue qui ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$.
Donc, par le théorème fondamental de l'analyse, $t \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{(f(x))^2}$.
Donc, par produit de fonctions $\mathscr{C}^1$, g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et sa dérivée est

$$g'(x) = f'(x)\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2} + f(x)\frac{1}{(f(x))^2} = f'(x)\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2} + e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Et donc g' est encore dérivable car somme et produit de fonctions dérivables, et

$$\begin{aligned} g''(x) =& f''(x)\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2} + f'(x)\frac{1}{(f(x))^2} - xe^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \left(1+x^2\right)f(x)\int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2} + xe^{-\frac{x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}} = \left(1+x^2\right)g(x). \end{aligned}$$

Notons que ceci prouve en particulier que g est bien de classe $\mathscr{C}^2$ puisque sa dérivée seconde est continue en tant que produit de fonctions continues.
Et donc $\boxed{g \in E.}$

$\mathscr{C}^k$
Rappelons qu'une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ est une fonction k fois dérivable telle que $f^{(k)}$ soit continue.

4.a. D'après le résultat de la question 2, $h'f - hf'$ est une fonction constante.
Il existe donc $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}$, $h'(x)f(x) - h(x)f'(x) = \lambda$.
Mais puisque f ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$, on a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\frac{h'(x)f(x) - h(x)f'(x)}{f(x)^2} = \frac{\lambda}{f(x)^2}.$$

Mais nous savons que $\dfrac{h'f - hf'}{f^2}$ est la dérivée de $\dfrac{h}{f}$ et donc $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\frac{h(x)}{f(x)} - \frac{h(0)}{f(0)} = \int_0^x \left(\frac{h}{f}\right)'(t)\,dt = \int_0^x \frac{h'(t)f(t) - h(t)f'(t)}{f(t)^2}\,dt = \int_0^x \frac{\lambda}{f(t)^2}\,dt.$$

Soit encore

$$h(x) = \frac{h(0)}{f(0)} f(x) + \lambda f(x) \int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2} = \frac{h(0)}{f(0)} f(x) + \lambda g(x).$$

On en déduit donc que $h = \frac{h(0)}{f(0)} f + \lambda g$ $\boxed{\in \mathrm{Vect}(f, g).}$

Remarque

$\frac{h(0)}{f(0)}$ est une constante qui ne dépend pas de x.

4.b. Nous venons de prouver que toute fonction de E est combinaison linéaire de f et g, et donc (f, g) est une famille génératrice de E.
Montrons à présent qu'elle est libre : soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda f + \mu g = 0$.
En particulier, en évaluant en $x = 0$, il vient $\lambda f(0) + \mu h(0) = 0$.
Mais $f(0) = 1$ et $h(0) = 0$, donc $\lambda = 0$, de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\mu h(x) = \mu f(x) \int_0^x \frac{dt}{(f(t))^2} = 0.$$

Égalité de fonctions

Rappelons que par définition, deux fonctions sont égales si et seulement si elles prennent la même valeur en tout x.

En particulier, pour $x = 1$, on a $h(1) = e^{1/2} \int_0^1 \frac{dt}{(f(t))^2} = e^{1/2} \int_0^1 e^{-t^2}\, dt$.
Puisque la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, 1]$, positive et non nulle, nécessairement $\int_0^1 e^{-t^2}\, dt > 0$.
Et on en déduit donc que $\mu h(1) = 0 \Rightarrow \mu = 0$.
Ainsi, la famille (f, g) est libre, et donc $\boxed{\text{c'est une base de } E.}$

EXERCICE 3

1. On a $\varphi(e_1) = (0, -c, b)$, $\varphi(e_2) = (c, 0, -a)$ et $\varphi(e_3) = (-b, a, 0)$, donc

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \varphi(e_3) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}.$$

2.a. On a $\varphi(\omega) = (bc - cb, ca - ac, ab - ba) = (0, 0, 0)$, donc $\boxed{\omega \in \mathrm{Ker}(\varphi).}$

2.b. Les deux premières colonnes de M ne sont pas colinéaires, et donc forment une famille libre : $\boxed{(\varphi(e_1), \varphi(e_2)) \text{ est libre.}}$

Détails

Une famille de vecteurs est libre si et seulement si la famille des vecteurs colonnes de leurs coordonnées dans une base est libre.

2.c. Puisque $(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$ est libre, et qu'il s'agit d'une famille de $\mathrm{Im}\varphi$, on en déduit que $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim \mathrm{Im}\varphi \geqslant 2$.
Et par le théorème du rang, on a alors $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 3 - \mathrm{rg}(\varphi) \leqslant 1$.
Mais $\omega \neq 0$ et $\omega \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, ce qui prouve que $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 1$.
Enfin, puisque $\mathrm{Vect}(\omega) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$, et comme ces deux espaces ont même dimension (égale à 1), ils sont égaux :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\omega).}$$

3.a. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Alors

$$\langle \varphi(u), \omega \rangle = a(yc - zb) + b(za - xc) + c(xb - ya) = 0.$$

3.b. Nous venons de prouver que tout élément de $\mathrm{Im}(\varphi)$ est orthogonal à ω. Mais ω est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, de sorte que tout vecteur de $\mathrm{Im}\varphi$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, et donc

$$\mathrm{Im}\varphi \subset (\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp.$$

Mais $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 1$, et donc $\dim (\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp = \dim \mathbf{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 3 - 1 = 2 = \dim \mathrm{Im}\varphi$.
Par égalité des dimensions, on a alors

$$\boxed{\mathrm{Im}\varphi = (\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp.}$$

4.a. Rappelons que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, on a toujours $E = F \oplus F^\perp$.
En particulier, puisque $(\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp = \mathrm{Im}\varphi$, on a

$$\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi).$$

Et il s'agit alors d'une caractérisation de la somme directe : tout vecteur u de $\mathbf{R}^3$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\mathrm{Im}\varphi$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

4.b. Soit $u \in \mathbf{R}^3, u = u_1 + u_2, u_1 \in \mathrm{Ker}(\varphi), u_2 \in \mathrm{Im}\varphi$. Alors

$$\langle u, \omega\rangle = \langle u_1 + u_2, \omega\rangle = \langle u_1, \omega\rangle + \langle u_2, \omega\rangle.$$

Or $u_2 \in \mathrm{Im}\varphi = (\mathrm{Ker}(\varphi))^\perp$, de sorte que $\langle u_2, \omega\rangle = 0$. Et donc

$$\boxed{\langle u, \omega\rangle = \langle u_1, \omega\rangle.}$$

4.c. Puisque $u_1 \in \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\omega)$, il existe un réel λ tel que $u_1 = \lambda\omega$, et alors

$$\langle u, \omega\rangle = \langle u_1, \omega\rangle = \langle \lambda\omega, \omega\rangle = \lambda\langle \omega, \omega\rangle = \lambda\|\omega\|^2.$$

On en déduit donc[2] que $\lambda = \dfrac{\langle u, \omega\rangle}{\|\omega\|^2}$ et ainsi $\boxed{u_1 = \lambda\omega = \dfrac{\langle u, \omega\rangle}{\|\omega\|^2}\omega.}$

[2] $\|\omega\|^2 \neq 0$ puisque $\omega \neq 0$ par hypothèse.

Puis on en déduit que $u_2 = u - u_1 = \boxed{u - \dfrac{\langle u, \omega\rangle}{\|\omega\|^2}\omega.}$

5.a. C'est un simple calcul : on a

$$M^2 = \begin{pmatrix} -c^2 - b^2 & ab & ac \\ ab & -c^2 - a^2 & cb \\ ac & cb & -b^2 - a^2 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & -c(a^2+b^2+c^2) & b(a^2+b^2+c^2) \\ c(a^2+b^2+c^2) & 0 & -a(a^2+b^2+c^2) \\ -b(a^2+b^2+c^2) & a(a^2+b^2+c^2) & 0 \end{pmatrix} = -(a^2+b^2+c^2)M = \boxed{-\|\omega\|^2 M.}$$

5.b. Soit $v \in \mathrm{Im}\varphi$. Alors il existe $u \in \mathbf{R}^3$ tel que $v = \varphi(u)$. Mais d'après la question précédente, on a

$$\varphi^3 = -\|\omega\|^2\varphi$$

et donc

$$(\varphi \circ \varphi)(v) = \varphi^3(u) = -\|\omega\|^2\varphi(u) = \boxed{-\|\omega\|^2 v.}$$

5.c. Soit $u \in \mathbf{R}^3$. Alors $u = u_1 + u_2$, avec les expressions de u_1 et u_2 données précédemment. Et alors

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \varphi)(u) &= (\varphi \circ \varphi)(u_1) + (\varphi \circ \varphi)(u_2) \\ &= (\varphi \circ \varphi)(u_2) = -\|\omega\|^2 u_2 \\ &= -\|\omega\|^2\left(u - \frac{\langle u, \omega\rangle}{\|\omega\|^2}\omega\right) \\ &= \boxed{-\|\omega\|^2 u + \langle u, \omega\rangle\omega.}\end{aligned}$$

$\varphi(u_1) = 0$ car $u_1 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Problème

1.a. On a $X = X_1 + \cdots + X_r$.

1.b. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, notons $X_{i,j}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat i n'est pas obtenu lors de la j-ème épreuve et 0 sinon.

Alors $X_{i,j}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - x_i$, et $X_i = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} X_{i,j}$.

Alors, on a $P(X_i = 1) = P\left(\bigcap_{j=1}^{n}[X_{i,j} = 1]\right)$, et par indépendance des $X_{i,j}$ (indépendance des différentes épreuves), il vient

$$P(X_i = 1) = \prod_{j=1}^{n} P(X_{i,j} = 1) = (1 - x_i)^n.$$

De plus, X_i est une variable de Bernoulli (elle ne prend que les valeurs 0 et 1), et donc X_i suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}((1 - x_i)^n)$.

1.c. Par linéarité de l'espérance, on a

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} E(X_i) = \sum_{i=1}^{r}(1 - x_i)^n.$$

2.a. Puisque chaque épreuve possède r résultats possibles, on a, par la formule des probabilités totales,

$$x_1 + \cdots + x_r = 1.$$

Donc

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r}(1 - x_i)^n = \sum_{i=1}^{r-1}(1 - x_i)^n + (1 - x_r)^n = \sum_{i=1}^{r-1}(1 - x_i)^n + (x_1 + \cdots + x_{r-1})^n .$$

2.b. f est de classe $\mathscr{C}^2$ car polynomiale.

3.a. On a, pour tout $j \in [\![1, r - 1]\!]$,

$$\partial_j f(x_1, \ldots, x_{r-1}) = -n(1 - x_j)^{n-1} + n(x_1 + \cdots + x_{r-1})^{n-1}.$$

3.b. $(x_1, \ldots, x_{r-1})$ est un point critique de f si et seulement si

$$\forall j \in [\![1, r - 1]\!], \partial_j f(x_1, \ldots, x_{r-1}) = 0 \Leftrightarrow (1 - x_j)^{n-1} = (x_1 + \cdots + x_{r-1})^{n-1}.$$

Mais puisque les x_i sont tous positifs (on les a supposés dans $]0, 1[$), alors cette condition est équivalente à

$$\forall j \in [\![1, r - 1]\!], 1 - x_j = x_1 + \cdots + x_{r-1}.$$

En particulier, les x_j sont tous égaux à x_1, et alors $1 - x_1 = (r - 1)x_1$, de sorte que $x_1 = \frac{1}{r}$. Ainsi, l'unique point critique de f est $R = \left(\frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}\right)$.

4. On a :

$$\forall i \in [\![1, r - 1]\!], \partial^1_{i,i} f(x_1, \ldots, x_{r-1}) = n(n - 1)(1 - x_i)^{n-2} + n(n - 1)(x_1 + \cdots + x_{r-1})^{n-2}$$

et pour $i, j \in [\![1, r - 1]\!]^2, i \neq j$,

$$\partial^2_{i,j} f(x_1, \ldots, x_{r-1}) = n(n - 2)(x_1 + \cdots + x_{r-1})^{n-2}.$$

Ainsi, on a, en évaluant ces dérivées partielles en R,

$$M = \begin{pmatrix} 2n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2} & n(n-2)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2} & \ldots & n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2} \\ \left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2} & 2n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2} \\ n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2} & \ldots & n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2} & 2n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2} \end{pmatrix}$$

5.a. J est une matrice symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.

5.b. On a

$$J^2 = \begin{pmatrix} r-1 & r-1 & \ldots & r-1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r-1 & \ldots & \ldots & r-1 \end{pmatrix} = (r - 1)J.$$

5.c. Un polynôme annulateur de J est $X^2 - (r-1)X = X(X-(r-1))$, donc les valeurs propres de J sont parmi 0 et $r-1$.
Or, on a $\mathrm{rg}(J) = 1$, et donc $\dim E_0(J) = r - 1 - 1 = r - 2$.
Mais J est diagonalisable donc ne peut avoir comme unique valeur propre 0 (car $\dim E_0(J) < n$) donc $r-1$ est également valeur propre de J, avec $\dim E_{r-1}(J) = 1$.

5.d. D'après la question précédente, on peut prendre

$$\Delta = \mathrm{diag}(\underbrace{0,\dots,0}_{(r-2)\text{ fois}}, r-1).$$

6.a. D'après la question 5.a, il existe une matrice P inversible telle que $J = P^{-1}\Delta P$.
Et alors

$$A = J + I = P^{-1}\Delta P + I = P^{-1}(\Delta + I)P = P^{-1}\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{(r-2)\text{ fois}}, r)P.$$

Ainsi, A est diagonalisable (ce qui était évident car elle est symétrique), et ses valeurs propres sont 1 et r.
Puisque $M = n(n-1)A$, M est diagonalisable, et ses valeurs propres sont $n(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2}$ et $rn(n-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-2}$.

6.b. Puisque toutes les valeurs propres de la hessienne de f au point critique R sont strictement positives, f présente un minimum local au point R.

6.c. Le minimum de f est

$$f(R) = \sum_{i=1}^{r-1}\left(1 - \frac{1}{r}\right)^n + \left(\frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{r}\right)^n = (r-1)\left(\frac{r-1}{r}\right)^n + \left(\frac{r-1}{r}\right)^n = \frac{(r-1)^n}{r^{n-1}}.$$

EDHEC 1999

Exercice 2

Sujet : Suite de tirages sans remise et avec remise dans une urne bicolore. **Difficile**
Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆
Thèmes du programme abordés : probabilités discrètes, covariance.
Commentaires : un peu daté, et peut être plus tout à fait dans l'esprit actuel des concours, mais un bon moyen de s'entraîner et au raisonnement probabiliste et aux calculs. À réserver à des candidats solides.

Une urne contient une boule noire et $(n-1)$ boules blanches, n désignant un entier supérieur ou égal à 2. On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le deuxième s'effectue avec remise, le troisième s'effectue sans remise, le quatrième s'effectue avec remise, ... D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise et les tirages d'ordre pair s'effectuent avec remise de la boule tirée.

1. a. Quel est le nombre total N de tirages effectués lors de cette épreuve ?
   b. Pour j élément de $[\![1, n-1]\!]$, combien reste-t-il de boules avant le $(2j)^{\text{ème}}$ tirage ?
   Combien en reste-t-il avant le $(2j+1)^{\text{ème}}$ tirage ?

On désigne par X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule noire est obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage (que ce soit la première fois ou non) et 0 sinon. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la boule noire lors de cette épreuve.

2. a. Calculer $P(X_1 = 1), P(X_2 = 1)$.
   b. Pour tout entier naturel j de $[\![1, n-1]\!]$, calculer $P(X_{2j+1} = 1)$ et $P(X_{2j} = 1)$.
   c. En déduire la loi suivie par toutes les variables X_k.
3. Pour tout j élément de $[\![1, n]\!]$, on note U_j l'événement : «on obtient la boule noire pour la $1^{\text{ère}}$ fois au $(2j-1)^{\text{ème}}$ tirage».
   a. En considérant l'état de l'urne avant le $(2n-2)^{\text{ème}}$ tirage, montrer que $P(U_n) = 0$.
   Montrer que : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ P(U_j) = \dfrac{n-j}{n(n-1)}$.
   b. Exprimer l'événement $[X = 1]$ en fonction des U_j, puis en déduire la valeur de $P(X = 1)$.
   c. Montrer que $P(X = n) = \dfrac{1}{n!}$.
4. Montrer que $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} X_k$, puis en déduire l'espérance de X.
5. Soit i un entier naturel compris entre 0 et $n-2$.
   a. Pour tout j de $[\![1, 2n-2i-2]\!]$, donner la valeur de $P_{[X_{2i+1}=1]}(X_{2i+j+1} = 1)$.
   b. En déduire que : $\forall j \in [\![1, 2n-2i-2]\!],\ \mathrm{Cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) = \dfrac{-1}{n^2}$.
6. Soit i un entier naturel compris entre 1 et $n-1$.
   a. Montrer que, pour tout k de $[\![1, n-i-1]\!]$, $P_{[X_{2i}=1]}(X_{2i+2k} = 1) = \dfrac{1}{n-i}$.
   b. Montrer que, pour tout k de $[\![0, n-i-1]\!]$, $P_{[X_{2i}=1]}(X_{2i+2k+1} = 1) = \dfrac{1}{n-i}$.
   c. En déduire que : $\forall j \in [\![1, 2n-2i-1]\!],\ \mathrm{Cov}(X_{2i}, X_{2i+j}) = \dfrac{i}{n^2(n-i)}$.
7. Montrer que la variance de X est : $V(X) = \dfrac{(2n+1)(n-1)}{n^2} - \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\dfrac{1}{j}$.

Exercice 3 — Non corrige

Abordable en première année : ✓
Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire de base

On considère l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$, on note Id l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^2$ et $0_{\mathbf{R}^2}$ l'endomorphisme nul de $\mathbf{R}^2$.
On note $\mathscr{B} = (i, j)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
Le but de cet exercice est de trouver les couples (u, v) d'endomorphismes de $\mathbf{R}^2$ vérifiant les 4 assertions suivantes :

(A_1) : $u^2 = -\mathrm{Id}$ (il faut comprendre $u \circ u = -\mathrm{Id}$) ;

(A_2) : $v \neq \mathrm{Id}$;

(A_3) : $(v - \mathrm{Id})^2 = 0_{\mathbf{R}^2}$;

(A_4) : $\mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{Id}) \neq \{0\}$.

1. **Étude d'un exemple.**

   Vérifier que les endomorphismes u et v dont les matrices dans $\mathscr{B}$ sont respectivement $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont solutions du problème posé.

On revient au cas général et on considère un couple (u, v) solution du problème.

2. a. Montrer que u et v sont des automorphismes de $\mathbf{R}^2$, puis donner u^{-1} et v^{-1} en fonction de u, v et Id.

   b. Pour tout entier naturel n, exprimer v^n comme combinaison linéaire de v et Id.

3. a. Établir que : $\mathrm{Im}(v - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id})$.

   b. En déduire, en raisonnant sur les dimensions, que : $\mathrm{Im}(v - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id})$.

4. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que : $\dim \mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{Id}) = 1$.

5. Soit (e_2) une base de $\mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{Id})$, on pose : $e_1 = -u(e_2)$.

   a. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbf{R}^2$.

   b. Donner les matrices de u et v dans cette base.

6. Donner la conclusion de cet exercice.

EDHEC 1999 : CORRIGÉ

EXERCICE 2

1.a. Puisqu'on retire une boule tous les deux tirages, au bout de $2(n-1)$ tirages, il reste une seule boule dans l'urne, boule qui est retirée lors du $(2n-1)^{\text{ème}}$ tirage.
Ainsi, $\boxed{\text{l'urne est vidée au bout de } 2n-1 \text{ tirages.}}$

1.b. Avant le $(2j)^{\text{ème}}$ tirage, $2j-1$ tirages ont déjà eu lieu, dont j tirages d'ordre impair[1] et $j-1$ tirages d'ordre pair. Ainsi, j boules ont été retirées de l'urne, qui contient donc $n-j$ boules.
Puisqu'on ne retire aucune boule lors du $(2j)^{\text{ème}}$ tirage, il reste donc toujours $n-j$ boules avant le $(2j+1)^{\text{ème}}$ tirage.

[1] Les tirages $1, 3, \dots, 2j-1$.

2.a. Lors du premier tirage, il y a une chance sur n d'obtenir la boule noire, et donc $\boxed{P(X_1 = 1) = \frac{1}{n}.}$
Pour calculer $P(X_2 = 1)$, utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[X_1 = 0], [X_1 = 1]\}$:

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 1).$$

Or, $P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = 0$, car si la boule noire a été obtenue lors du premier tirage, elle a été enlevée de l'urne, et donc il n'est pas possible de l'obtenir lors du second tirage.
D'autre part, si la boule noire n'a pas été obtenue lors du premier tirage, alors, avant le second tirage, l'urne contient $n-1$ boules, dont une seule noire : $P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) = \frac{1}{n-1}$.
Et donc

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) = \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1} = \boxed{\frac{1}{n}.}$$

2.b. Si la boule noire est obtenue lors du $(2j+1)^{\text{ème}}$ tirage, c'est nécessairement qu'elle n'a pas été retirée de l'urne précédemment, et donc que tous les tirages d'ordre impair précédant le $(2j+1)^{\text{ème}}$ ont donné une boule blanche :

$$[X_{2j+1} = 1] = [X_1 = 0] \cap [X_3 = 0] \cap \cdots \cap [X_{2j-1} = 0] \cap [X_{2j+1} = 1].$$

Remarque
Il se peut que la boule noire soit sortie lors d'un tirage d'ordre pair, mais dans ce cas elle a été remise dans l'urne, ce qui ne change donc rien à la composition de l'urne.

Par la formule des probabilités composées, on a donc

$$\begin{aligned} P(X_{2j+1} = 1) &= P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_3 = 0)\cdots P_{[X_1=0]\cap\cdots\cap[X_{2j-3}=0]}(X_{2j-1} = 0)P_{[X_1=0]\cap\cdots\cap[X_{2j-1}=0]}(X_{2j+1} = 1) \\ &= \frac{\cancel{n-1}}{n}\frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}}\cdots\frac{\cancel{n-j}}{\cancel{n-j+1}}\frac{1}{\cancel{n-j}} \\ &= \boxed{\frac{1}{n}.} \end{aligned}$$

De même, on a $[X_{2j} = 1] = [X_1 = 0] \cap [X_3 = 0] \cap \cdots \cap [X_{2j-1} = 0] \cap [X_{2j} = 1]$. Et donc

$$\begin{aligned} P(X_{2j} = 1) &= P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_3 = 0)\cdots P_{[X_1=0]\cap\cdots\cap[X_{2j-3}=0]}(X_{2j-1} = 0)P_{[X_1=0]\cap\cdots\cap[X_{2j-1}=0]}(X_{2j} = 1) \\ &= \frac{\cancel{n-1}}{n}\frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}}\cdots\frac{\cancel{n-j}}{\cancel{n-j+1}}\frac{1}{\cancel{n-j}} \\ &= \boxed{\frac{1}{n}.} \end{aligned}$$

2.c. Puisque les X_k sont des variables aléatoires ne prenant que les valeurs 0 et 1, elles suivent des lois de Bernoulli.
Et puisque pour tout $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, $P(X_k = 1) = \frac{1}{n}$, les X_k suivent donc toutes la loi de $\boxed{\text{Bernoulli de paramètre } \frac{1}{n}.}$

Rappel
Toute variable aléatoire ne prenant que les valeurs 0 et 1 suit une loi de Bernoulli.

3.a. Avant le $(2n-2)^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contient $n-(n-1) = 1$ seule boule, qui sera remise dans l'urne à l'issue de ce tirage, et donc sera également la seule boule présente dans l'urne au moment du $(2n-1)^{\text{ème}}$ tirage.

Mais si U_n est réalisé, cela signifie donc que cette boule est noire, et donc la boule noire sera tirée au $(2n-2)^{\text{ème}}$ tirage, contredisant le fait qu'elle sera tirée pour la première fois au $(2n-1)^{\text{ème}}$ tirage. Et donc $\boxed{P(U_n) = 0.}$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Alors $U_j = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap \cdots \cap [X_{2j-2} = 0] \cap [X_{2j-1} = 1]$. Par la formule des probabilités composées, on a donc

$$\begin{aligned}
P(U_j) &= P(X_1 = 0) P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) P_{[X_1=0]\cap[X_2=0]}(X_3 = 0) \cdots P_{[X_1=0]\cap[X_2=0]\cap\cdots\cap[X_{2j-2}=0]}(X_{2j-1} = 1) \\
&= \frac{\cancel{n-1}}{n} \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \frac{\cancel{n-3}}{\cancel{n-2}} \frac{\cancel{n-3}}{\cancel{n-2}} \cdots \frac{\cancel{n-j+1}}{\cancel{n-j+2}} \frac{\cancel{n-j+1}}{\cancel{n-j+2}} \frac{n-j}{\cancel{n-(j-1)}} \frac{1}{\cancel{n-(j-1)}} \\
&= \boxed{\frac{n-j}{n(n-1)}.}
\end{aligned}$$

Détails

À l'exception du premier et du dernier terme, tous apparaissent deux fois puisque la probabilité d'obtenir une boule blanche est la même au $(2k)^{\text{ème}}$ tirage et au $(2k+1)^{\text{ème}}$.

3.b. Pour que l'événement $[X = 1]$ soit réalisé, il faut impérativement que la boule noire ne sorte à aucun des tirages d'ordre pair.
En effet, si tel est le cas, elle est remise dans l'urne, puis, étant donné que les boules sont tirées jusqu'à vider l'urne, elle sera nécessairement retirée au moins une fois lors d'un tirage d'ordre impair. Et alors $X \geqslant 2$.
Autrement dit, $[X = 1] = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$.
Les U_i étant deux à deux incompatibles par définition, on a donc

$$\begin{aligned}
P(X = 1) &= \sum_{j=1}^{n} P(U_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} (n-j) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n(n-1)} \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \boxed{\frac{n-2}{2n}.}
\end{aligned}$$

3.c. Notons que si la boule noire est obtenue lors d'un tirage d'ordre impair, elle est immédiatement retirée, et donc ne peut plus être obtenue lors des tirages suivants.
Donc pour que $[X = n]$ soit réalisé, il faut que la boule noire soit obtenue lors de $n-1$ tirages d'ordre pair, et lors d'un seul tirage d'ordre impair[2]
Mais il n'y a que $n-1$ tirages d'ordre pair, et donc nécessairement, la boule noire doit être tirée lors de tous les tirages d'ordre pair, ainsi que lors du dernier tirage, tous les autres tirages d'ordre impair donnant une boule blanche.
Autrement dit :

$$[X = n] = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 1] \cap [X_3 = 0] \cap [X_4 = 1] \cap \cdots \cap [X_{2n-2} = 1] \cap [X_{2n-1} = 1].$$

Et donc, toujours par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}
P(X = n) &= P(X_1 = 0) P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) P_{[X_1=0]\cap[X_2=1]}(X_3 = 0) \cdots P_{[X_1=0]\cap[X_2=1]\cap\cdots\cap[X_{2n-2}=1]}(X_{2n-1} = 1) \\
&= \frac{\cancel{n-1}}{n} \frac{1}{\cancel{n-1}} \frac{\cancel{n-2}}{n-1} \frac{\cancel{n-3}}{\cancel{n-2}} \frac{1}{n-2} \cdots \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{1} \frac{1}{1} \\
&= \frac{1}{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1} = \boxed{\frac{1}{n!}.}
\end{aligned}$$

[2] Puisqu'il faut bien qu'à un moment, la boule soit retirée de l'urne.

4. Puisque X_k vaut 1 si et seulement si la boule noire est apparue lors du $k^{\text{ème}}$ tirage, le nombre de fois où la boule noire est apparue est $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} X_k$ et donc

$$\boxed{X = \sum_{k=1}^{2n-1} X_k.}$$

Par linéarité de l'espérance, on a alors

$$E(X) = E\left(\sum_{k=1}^{2n-1} X_k\right) = \sum_{k=1}^{2n-1} E(X_k) = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{n} = \boxed{\frac{2n-1}{n}.}$$

5.a. Si la boule noire a été tirée lors du $(2i+1)^{\text{ème}}$ tirage, puisqu'il s'agit d'un tirage d'ordre impair, elle a alors été retirée de l'urne, et ne peut donc pas être obtenue plus tard : $\boxed{P_{[X_{2i+1}=1]}(X_{2i+j+1} = 1) = 0.}$

5.b. Puisque X_{2i+1} et X_{2i+j+1} ne peuvent prendre que les valeurs 0 et 1, il en est de même de leur produit $X_{2i+1}X_{2i+j+1}$.
Et donc son espérance est donnée par

$$\begin{aligned}E(X_{2i+1}X_{2i+j+1}) &= 0\cdot P(X_{2i+1}X_{2i+j+1}=0)+1\cdot P(X_{2i+1}X_{2i+j+1}=1)\\ &= P(X_{2i+1}X_{2i+j+1}=1) = P([X_{2i+1}=1]\cap[X_{2i+j+1}=1])\\ &= P(X_{2i+1}=1)P_{[X_{2i+1}=1]}(X_{2i+j+1}=1)=0.\end{aligned}$$

Le produit vaut 1 si et seulement si les deux termes valent 1.

Par la formule de Huygens, il vient alors

$$\mathrm{Cov}(X_{2i+1},X_{2i+j+1}) = E(X_{2i+1}X_{2i+j+1})-E(X_{2i+1})E(X_{2i+j+1}) = 0-\frac{1}{n}\frac{1}{n} = \boxed{-\frac{1}{n^2}.}$$

6.a. Sachant que $[X_{2i}=1]$ est réalisé, c'est qu'à l'issue du $(2i)^{\text{ème}}$ tirage, la boule noire est toujours dans l'urne.
Autrement dit, celle-ci contient une boule noire et $n-i-1$ boules blanches.
Et donc, selon le même raisonnement qu'à la question 2.b, la probabilité qu'au $(2k)^{\text{ème}}$ tirage suivant le $(2i)^{\text{ème}}$, on obtienne une boule noire est de $\frac{1}{n-i}$. Et donc

Détails
Puisqu'on vient de l'obtenir, c'est qu'elle était dans l'urne, et puisqu'il s'agit d'un tirage d'ordre pair, on la remet dans l'urne.

$$P_{[X_{2i}=1]}(X_{2i+2k}=1)=\frac{1}{n-i}.$$

De manière détaillée : par définition d'une probabilité conditionnelle

$$P_{[X_{2i}=1]}(X_{2i+2k}=1)=\frac{P([X_{2i}=1]\cap[X_{2i+2k}=1])}{P(X_{2i}=1)}=nP([X_{2i}=1]\cap[X_{2i+2k}=1]).$$

Mais

$$[X_{2i}=1]\cap[X_{2i+2k}=1]=[X_1=0]\cap[X_3=0]\cap\cdots\cap[X_{2i-1}=0]\cap[X_{2i}=1]\cap[X_{2i+1}=1]\cap\cdots\cap[X_{2i+2k-1}=0]\cap[X_{2i+2k}=1].$$

Et donc par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}P([X_{2i}=1]\cap[X_{2i+2k}=1]) &= P(X_1=0)P_{[X_1=0]}(X_3=0)\cdots P_{[X_1=0]\cap\cdots\cap[X_{2i-1}=0]}(X_{2i}=1)\cdots P_{[X_1=0]\cap\cdots\cap[X_{2i+2k-1}=0]}(X_{2i+2k}=1)\\ &= \frac{\cancel{n-1}}{n}\frac{n-2}{\cancel{n-1}}\cdots\frac{\cancel{n-(i-1)-1}}{\cancel{n-(i-1)}}\frac{1}{n-i}\frac{\cancel{n-i-1}}{\cancel{n-i}}\cdots\frac{\cancel{n-(i+k-2)-1}}{\cancel{n-(i+k-2)}}\frac{1}{\cancel{n-(i+k-1)}}\\ &= \frac{1}{n(n-i)}.\end{aligned}$$

Et donc $\boxed{P_{[X_{2i}=1]}(X_{2i+2k}=1)=\frac{1}{n-i}.}$

6.b. Le même raisonnement qu'à la question précédente peut être tenu, par analogie avec la question 2.b :

$$P_{[X_{2i}=1]}(X_{2i+2k+1}=1)=\frac{1}{n-i}.$$

6.c. Nous venons de prouver[3] que pour tout $j\in[\![1,2n-2i-1]\!]$, $P_{[X_{2i}=1]}(X_{2i+j}=1)=\frac{1}{n-i}$.
Comme à la question 5.b, $X_{2i}X_{2i+k}$ ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, de sorte que

$$\begin{aligned}E(X_{2i}X_{2i+k}) &= P(X_{2i}X_{2i+k}=1)=P([X_{2i}=1]\cap[X_{2i+k}=1])\\ &= P(X_{2i}=1)P_{[X_{2i}=1]}(X_{2i+k}=1)=\frac{1}{n}\frac{1}{n-i}=\frac{1}{n(n-i)}.\end{aligned}$$

[3] En distinguant les cas j pair et j impair.

Et donc par la formule de Huygens,

$$\mathrm{Cov}(X_{2i},X_{2i+k})=E(X_{2i}X_{2i+k})-E(X_{2i})E(X_{2i+k})=\frac{1}{n(n-i)}-\frac{1}{n^2}=\frac{n-(n-i)}{n^2(n-i)}=\boxed{\frac{i}{n^2(n-i)}.}$$

7. Par bilinéarité de la covariance, on a

$$V(X)=V\left(\sum_{k=1}^{n-1}X_k\right)=\mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}X_k,\sum_{i=1}^{2n-1}X_i\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{2n-1} \operatorname{Cov}\left(X_k, \sum_{i=1}^{2n-1} X_i\right)$$

Linéarité à gauche.

$$= \sum_{k=1}^{2n-1} \sum_{i=1}^{2n-1} \operatorname{Cov}(X_k, X_i)$$

Linéarité à droite.

$$= \sum_{k=1}^{2n-1} \operatorname{Cov}(X_k, X_k) + \sum_{1\leqslant k<i\leqslant 2n-1} \operatorname{Cov}(X_k, X_i) + \sum_{1\leqslant i<k\leqslant 2n-1} \operatorname{Cov}(X_k, X_i)$$

$$= \sum_{k=1}^{2n-1} V(X_k) + \sum_{1\leqslant k<i\leqslant 2n-1} \operatorname{Cov}(X_k, X_i) + \sum_{1\leqslant i<k\leqslant 2n-1} \operatorname{Cov}(X_i, X_k)$$

Symétrie de la covariance.

$$= \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) + 2\sum_{1\leqslant i<k\leqslant 2n-1} \operatorname{Cov}(X_i, X_k)$$

Les deux sommes sont les mêmes.

$$= \frac{(2n-1)(n-1)}{n^2} + 2\sum_{1\leqslant i<k\leqslant 2n-1} \operatorname{Cov}(X_i, X_k).$$

Mais, en séparant les cas où i est pair de ceux où i est impair, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<k<\leqslant 2n-1} \operatorname{Cov}(X_i, X_k) &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=2i+1}^{2n-1} \operatorname{Cov}(X_{2i}, X_k) + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=2i+2}^{2n-1} \operatorname{Cov}(X_{2i+1}, X_k) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{2n-2i-1} \operatorname{Cov}(X_{2i}, X_{2i+j}) + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{2n-2i-2} \operatorname{Cov}(X_{2i+1}, X_{2i+j+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{2n-2i-1} \frac{i}{n^2(n-i)} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{2n-2i-2} -\frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(2n-2i-1)i}{n^2(n-i)} - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i-1) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-i)(2i+1)-n}{n-i} - \frac{2}{n^2}\sum_{j=0}^{n-2} j \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}(2i+1) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-i} - \frac{2}{n^2}\frac{(n-2)(n-1)}{2} \\
&= \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} i + \frac{n-1}{n^2} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \\
&= \frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \\
&= \frac{2(n-1)}{n^2} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}
\end{aligned}$$

Chgt d'indice

Dans la seconde somme, on a posé

$$j = n-i-1.$$

Nous pouvons donc enfin conclure :

$$\begin{aligned}
V(X) &= \frac{(2n-1)(n-1)}{n^2} + \frac{2(n-1)}{n^2} + -\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} \\
&= \boxed{\frac{(2n+1)(n-1)}{n^2} - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}.}
\end{aligned}$$

4 Maths II

Maths II 2018

Sujet : Convergence de séries aléatoires **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : variables aléatoires discrètes, variables à densité, convergence des variables aléatoires, séries numériques, `Scilab`

Commentaires : La partie I est assez artificielle, puisqu'on y étudie des suites et pas des séries. Elle est calculatoire, et comme souvent permet aux candidats «moyens» de montrer leur connaissance du cours et leur aisance en calcul. La partie II est très analytique et seule la question 6 y est vraiment intéressante. Enfin, la partie III est vraiment probabiliste, très dense, et nécessitant de l'aisance et de l'autonomie dans les calculs.

• On rappelle que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si le réel x est strictement supérieur à 1.

• On note ζ la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $\forall x > 1,\ \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$; on admet que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

• Toutes les variables aléatoires introduites dans le problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

• Si R est un élément de la tribu $\mathscr{A}$, on note $\overline{R}$ l'événement contraire de R.

L'objet du problème est l'étude de la convergence de séries dont les termes sont des variables aléatoires.
La convergence de telles séries, en loi ou en probabilité, est celle de la suite des sommes partielles associées.
Autrement dit, pour toute suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 1} U_n$ converge (en loi ou en probabilité) lorsque la suite de variables aléatoires $\left(\sum_{k=1}^{n} U_k\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge (en loi ou en probabilité).

Partie I. Séries télescopiques.

Dans cette partie, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi qu'une variable aléatoire X de référence, et on étudie la convergence de la série aléatoire $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{X_n}{n} - \frac{X_{n+1}}{n+1}\right)$.

1. a. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$. Calculer la somme de cette série.

   b. Dans cet exemple, quelle est la loi de la variable aléatoire de référence X ?

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit Y_n une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\dfrac{1}{n+1} \text{ ou si } x > 1 \\ 1 + (n+1)x & \text{si } -\dfrac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant 0 \\ c_n & \text{si } 0 < x < \dfrac{n}{n+1} \\ (n+1)(1-x) & \text{si } \dfrac{n}{n+1} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

   où c_n est une constante strictement positive.

   a. Calculer la valeur de c_n et représenter graphiquement f_3 dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

   b. Déterminer la fonction de répartition F_n de Y_n. La fonction F_n est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$?

   c. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

3. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire de référence X possède une densité f bornée.

   Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $D_n = X_1 - \frac{X_{n+1}}{n+1}$.

   a. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{X_{n+1}}{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

   b. En déduire que la suite de variables aléatoires $(D_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X.

   c. Justifier que la variable aléatoire D_n admet pour densité la fonction f_{D_n} telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_{D_n}(x) = (n+1)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f((n+1)(t-x))\, dt.$$

d. En déduire une nouvelle démonstration du résultat obtenu dans la question 2.c.

4. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire de référence X suit une loi normale centrée réduite.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $U_n = \dfrac{X_n}{n} - \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$.

a. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire U_n.

b. Justifier la convergence en loi de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} U_n$.

c. Soit $(U'_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, U_n et U'_n ont même loi.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $T'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U'_k$.

i. Justifier que la suite de variables aléatoires $(T'_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée de variance $\dfrac{\pi^2}{3} - 1$.

ii. Pourquoi ce résultat ne contredit-il pas ceux obtenus dans les questions 3.b et 4.b.

Partie II. Séries harmoniques «lacunaires».

Dans cette partie, on étudie les séries numériques obtenues à partir de la série harmonique divergente $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *par effacement de certaines de ses termes.*

Pour tout partie $\mathcal{G}$ *de* $\mathbf{N}^*$*, on note* $\mathbb{1}_{\mathcal{G}}$ *la fonction indicatrice de* $\mathcal{G}$*, c'est-à-dire la fonction définie sur* $\mathbf{N}^*$ *à valeurs dans* $\{0,1\}$ *telle que :* $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{1}_{\mathcal{G}}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in \mathcal{G} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose : $\forall \mathcal{G} \subset \mathbf{N}^*$, $h_n(\mathcal{G}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{G}}(k)}{k}$.

Dans la question 5, on étudie deux cas de convergence et la question 6 est consacrée à un cas de divergence.

5. On pose : $\mathcal{D} = \{n^2,\ n \in \mathbf{N}^*\}$ et $\mathcal{T} = \{n^3,\ n \in \mathbf{N}^*\}$.

a. Exprimer $h_n(\mathcal{D})$ à l'aide d'une somme partielle de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

b. En déduire la convergence de la suite $(h_n(\mathcal{D}))_{n\in\mathbf{N}^*}$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(n)}{n}$.

c. Justifier que $\mathcal{D} \cap \mathcal{T}$ est l'ensemble des entiers m pour lesquels $m^{1/6} \in \mathbf{N}^*$.
Pour traiter cette question, on admet que la racine carrée d'un entier naturel qui n'appartient pas à $\mathcal{D}$ *est un nombre irrationnel, c'est-à-dire, un nombre qui ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux entiers.*

d. Montrer que la suite $(h_n(\mathcal{D}\cup\mathcal{T}))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et exprimer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}\cup\mathcal{T}}(n)}{n}$ à l'aide de certaines valeurs de la fonction ζ.

6. On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des entiers naturel impairs : $\mathcal{I} = \{2n-1,\ n \in \mathbf{N}^*\}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2t-1} \right) dt$.

a. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, établir l'encadrement : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{(2n-1)^2}$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $h_n(\mathcal{I}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k + \int_1^{\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor} \frac{1}{2t-1}\, dt$.

c. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, justifier l'encadrement : $0 \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{n} \left(2 \left\lfloor \dfrac{n+3}{2} \right\rfloor - 1 \right) \right) \leqslant \dfrac{2}{n}$.

d. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

On pose $\delta = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Établir l'égalité : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})) = \delta$.

e. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{1}{2n-1}$.

f. Justifier pour tout entier $n \geqslant 3$, l'encadrement : $-\dfrac{1}{n} \leqslant \delta - (h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})) \leqslant \dfrac{1}{n-2}$.

g. La fonction `Scilab` suivante, dont le script est incomplet (ligne 6), permet de donner une valeur approchée de δ en calculant successivement des valeurs de $h_n(\mathcal{I}) - \ln\left(\sqrt{n}\right)$ jusqu'à atteindre une précision donnée.

```
1 function s = delta(eps)
2         n=3 ;
3         s=1+1/3-(log(3)/2) ;
4         while 1/(n-2)>eps
5                 n=n+2
6                 s = s+1/n+......... ;
7         end
8 endfunction
```

i. Quelles sont les valeurs de $h_n(\mathcal{I}) - \ln\left(\sqrt{n}\right)$ affectées successivement à la variable `s` lorsqu'on applique cette fonction à `eps=0.2` ?

ii. Compléter la ligne 6.

iii. Pour quelles raisons l'algorithme utilisé peut-il assurer une précision arbitraire au calcul de la valeur approchée de δ ?

Partie III. Séries de Riemann alternées.

Dans cette partie, on note $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur la paire $\{-1,+1\}$ c'est-à-dire : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

7. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

On suppose l'existence d'un réel $\alpha \geqslant 0$ et d'un réel $M > 0$ tels que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, |s_n| \leqslant M n^{\alpha}$.

a. Soit β un réel tel que $\beta > \alpha$.

i. Montrer pour tout entier $n \geqslant 2$, l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k^{\beta}} = \frac{s_n}{n^{\beta}} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \left(\frac{1}{k^{\beta}} - \frac{1}{(k+1)^{\beta}}\right)$.

ii. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x_n}{n^{\beta}}$ est convergente.

b. Justifier pour tout réel $x > 0$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

8. Soit s et t des réels strictement positifs et n un entier supérieur ou égal à 1.

a. Calculer l'espérance de la variable aléatoire e^{tS_n}.

b. En utilisant l'écriture de $e^u (u \in \mathbf{R})$ sous forme de somme d'une série, établir l'inégalité :

$$\frac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}.$$

c. À l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que : $P(S_n > s) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2} - ts\right)$.

d. Justifier l'inégalité : $P(|S_n| > s) \leqslant 2\exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right)$.

9. Pour tout réel $\alpha \geqslant 0$, on pose : $\mathscr{C}_{\alpha} = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} [|S_k| > k^{\alpha}]\right)$.

a. Justifier que $\mathscr{C}_{\alpha}$ est un élément de la tribu $\mathscr{A}$.

b. Montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} P(|S_n| > n^{\alpha})$ est convergente.

c. En déduire que pour tout réel $\alpha > \frac{1}{2}$, on a $P(\mathscr{C}_{\alpha}) = 0$.

10. *Dans cette question, on s'intéresse à la série aléatoire* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{X_n}{n}$.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{X_n(\omega)}{n}$ converge et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}$.

Soit K l'application définie sur Ω par : $K(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} K_n(\omega) & \text{si } \omega \in \mathscr{C} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On admet sans démonstration que $\mathscr{C}$ est un élément de la tribu $\mathscr{A}$ et que K est une variable aléatoire.

a. En utilisant le résultat de la question 7.a, montrer que si α vérifie $0 \leqslant \alpha < 1$, alors on a : $\overline{\mathscr{C}_\alpha} \subset \mathscr{C}$.

b. À l'aide des résultats de la question 9, montrer que $P(\mathscr{C}) = 1$.

c. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on considère l'événement $E(\varepsilon)$ défini par : $E(\varepsilon) = \bigcap_{N=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} [|K - K_n| > \varepsilon] \right)$.

Montrer que $P(E(\varepsilon)) = 0$ et en déduire que la suite de variables aléatoires $(K_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire K.

On admet sans démonstration que la suite $(K_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge alors en loi vers K.

Dans les questions 11 et 12, on considère une suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k}$.

11. **a.** Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer l'espérance et la variance de H_n et trouver leurs limites respectives lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Montrer que, quel que soit le réel $r > 0$, on a : $\lim_{n\to+\infty} P(H_n \leqslant r) = 0$.

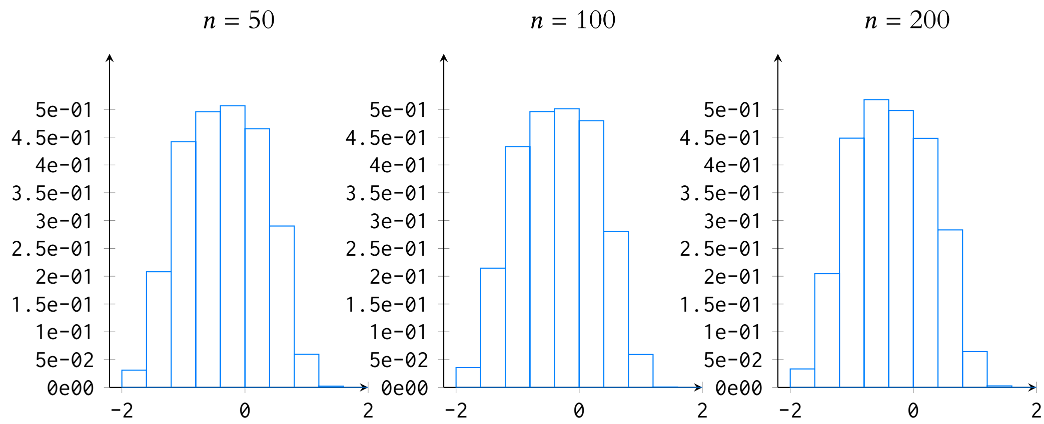
c. La fonction `Scilab` suivante, dont le script est incomplet (ligne 5) permet d'effectuer p simulations de la variable aléatoire $H_n - h_n(\mathcal{I})$, où $h_n(\mathcal{I})$ a été définie dans la partie II (préambule et question 6).

```
1 function y = simul(n,p)
2         y = zeros(p,1) ;
3         for i =1 :p
4                 for k=1 :n
5                         y(i,1) = y(i,1) + (grand(1,1,'bin',1,0.5)+.....)/k ;
6                 end
7         end
8 endfunction
```

i. Compléter la ligne 5.

ii. Les trois histogrammes suivants représentent la distribution simulée de la variable aléatoire $H_n - h_n(\mathcal{I})$ pour $n = 50, n = 100$ et $n = 200$. Par quelles instructions ont-il pu être obtenus ?

iii. Pourquoi ces histogrammes suggèrent-ils une convergence en loi de la suite $(H_n - h_n(\mathcal{I}))_{n\in\mathbf{N}^*}$?



12. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $B'_n = \frac{1 + X_n}{2}$.

a. Justifier pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la relation : $\sum_{k=1}^{n} \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathcal{I}) = \frac{K_n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}$.

b. En déduire que la suite de variables aléatoires $(H_n - h_n(\mathcal{I}))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de la forme $\lambda K + \mu$, où λ et μ sont des réels dont on précisera la valeur.

MATHS II 2018 : CORRIGÉ

Partie I. Séries télescopiques.

1.a. Pour $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
Et donc pour $N \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Et donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge, et sa somme vaut } 1.}$

Convergence

Notons que s'il fallait juste établir la convergence, il serait plus rapide d'utiliser un équivalent. Mais puisqu'on nous demande de calculer la somme, il est indispensable de passer par les sommes partielles, qui nous permettent à la fois de prouver la convergence et de calculer la somme.

1.b. Dans cet exemple, les X_n sont des variables certaines égales à 1.

2.a. Puisque f_n est une densité, son intégrale sur $\mathbf{R}$ doit être égale à 1. Or on a

$$\begin{aligned}\int_{-1/(n+1)}^{0} f_n(x)\,dx &= \int_{-1/(n+1)}^{0} (1+(n+1)x)\,dx = \left[x + \frac{(n+1)x^2}{2}\right]_{-1/(n+1)}^{0}\\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)}.\end{aligned}$$

Astuce

Il n'est pas indispensable de passer par une primitive : l'intégrale que nous calculons n'est rien d'autre que l'aire d'un triangle de base $\frac{1}{n+1}$ et de hauteur 1 (voir figure ci-dessous), il n'est alors pas interdit d'utiliser une formule apprise au collège !

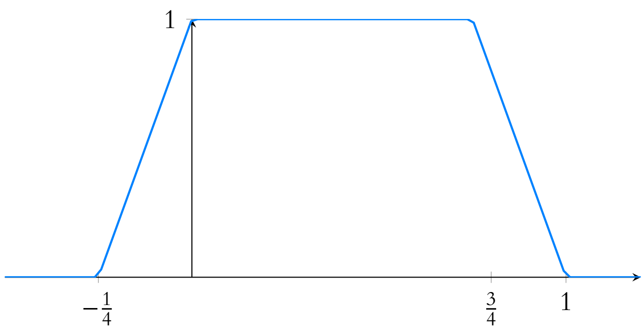
De même,

$$\int_{n/(n+1)}^{1} f_n(x)\,dx = \int_{n/(n+1)}^{1} (n+1)(1-x)\,dx = \left[-(n+1)\frac{(1-x)^2}{2}\right]_{n/(n+1)}^{1} = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Enfin, $\displaystyle\int_0^{n/(n+1)} c_n\,dx = \frac{n}{n+1}c_n$.
Et donc il vient, par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{2(n+1)} + \frac{nc_n}{n(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)} = 1\\ &\Leftrightarrow c_n\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1}\\ &\Leftrightarrow \boxed{c_n = 1.}\end{aligned}$$

Le graphique de la fonction f_3 est alors



2.b. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $F_n(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt$.

Donc déjà, pour $x \leqslant \dfrac{-1}{n+1}$, $F_n(x) = 0$, et pour $x \geqslant 1$, $F_n(x) = 1$.

Pour $x \in \left[-\dfrac{1}{n+1}, 0\right]$,

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{-1/(n+1)} f_n(t)\,dt + \int_{-1/(n+1)}^{x} (1+(n+1)t)\,dt = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{n+1}\right)(1+(n+1)x).$$

Pour $x \in \left[0, \dfrac{n}{n+1}\right]$, on a $F_n(x) = \underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt}_{=F_n(0)} + \displaystyle\int_0^x 1\,dt = \dfrac{1}{2(n+1)} + x$.

Enfin, pour $x \in \left[\dfrac{n}{n+1}, 1\right]$, on a

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt - \int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt \\ &= 1 - \int_x^1 (n+1)(1-t)\,dt \\ &= 1 - \frac{(n+1)(1-x)(1-x)}{2} \\ &= 1 - \frac{n+1}{2}(1-x)^2. \end{aligned}$$

Graphiquement

Là aussi il est permis de raisonner graphiquement, l'intégrale que nous calculons est l'aire d'un triangle, de hauteur $f_n(x) = (n+1)(1-x)$ et de base $(1-x)$.

Ainsi, la fonction de répartition F_n est donnée par

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -\dfrac{1}{n+1} \\ \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{n+1}\right)(1+(n+1)x) & \text{si } -\dfrac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2(n+1)} + x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{n}{n+1} \\ 1 - \dfrac{n+1}{2}(1-x)^2 & \text{si } \dfrac{n}{n+1} \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Il est évident que F_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en $-\dfrac{1}{n+1}$, en 0, en $\dfrac{n}{n+1}$ et en 1.
On pourrait vérifier qu'en tous ces points, F_n est dérivable à gauche et à droite, et que les deux dérivées latérales sont égales.
Il est plus simple de remarquer que f_n est continue en tous ces points, et donc sur $\mathbf{R}$, et alors par le théorème fondamental de l'analyse,

$$F_n : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt = \int_{-1/(n+1)}^{x} f_n(t)\,dt$$

est $\boxed{\text{une fonction de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbf{R}.}$

Continuité

La continuité de f_n serait tout de même à vérifier par des calculs de limite, mais ceux-ci sont quand même très simples. À vous de les faire si vous n'êtes pas convaincu !

2.c. Soit $x \in \mathbf{R}$.

• Si $x < 0$, alors pour n suffisamment grand, $x < -\dfrac{1}{n+1}$ de sorte que $F_n(x) = 0$. Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.

• Si $x \in [0, 1[$, alors puisque $\dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, pour n suffisamment grand, $x \leqslant \dfrac{n}{n+1}$, de sorte que $F_n(x) = \dfrac{1}{2(n+1)} + x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

• Enfin, si $x \geqslant 1$, alors $F_n(x) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, $F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Nous reconnaissons là la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1]$, et donc

$\boxed{Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y, \text{ où } Y \text{ est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur } [0,1].}$

Rappel

La limite d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes, et donc supposer que n est suffisamment grand ne change pas la limite.

3.a. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$P\left(\left|\frac{X_{n+1}}{n+1}\right| \geqslant \varepsilon\right) = P\left(|X_{n+1}| \geqslant (n+1)\varepsilon\right) = \int_{-\infty}^{-(n+1)\varepsilon} f(t)\,dt + \int_{(n+1)\varepsilon}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{-(n+1)\varepsilon} f(t)\,dt = 0$, puisqu'il s'agit du reste d'une intégrale convergente[1].

Et pour les mêmes raisons, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{(n+1)\varepsilon}^{+\infty} f(t)\,dt = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{X_{n+1}}{n+1}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$, ce qui signifie bien que $\boxed{\dfrac{X_{n+1}}{n+1} \xrightarrow{P} 0.}$

[1] L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ est bien convergente puisque f est une densité.

3.b. Puisque X_1 et X ont même loi, $X_1 \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, et donc par le théorème de Slutsky,

$$D_n = \underbrace{X_1}_{\xrightarrow{\mathscr{L}} X} - \underbrace{\frac{X_{n+1}}{n+1}}_{\xrightarrow{P} 0} \xrightarrow{\mathscr{L}} X - 0 = X.$$

> **Détails**
> $X_1 \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ signifie que la suite constante égale à X_1 converge en loi vers X.

3.c. Par transformation affine, une densité de $-\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est $h_n : t \mapsto (n+1)f(-(n+1)t)$.
Or, les variables X_1 et $-\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ sont indépendantes, et X_1 possède une densité bornée[2], donc par convolution, une densité de D_n est

$$f_{D_n} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h_n(x-t)\,dt = \boxed{(n+1)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f((n+1)(t-x))\,dt.}$$

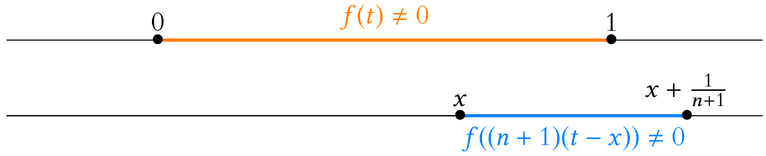
[2] Rappelons qu'il s'agit d'une des conditions auxquelles le théorème de convolution s'applique.

3.d. Supposons que la loi de référence soit une loi uniforme sur $[0,1]$.
Alors $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Et par la question précédente, une densité de D_n est donc

$$f_{D_n} : x \mapsto (n+1)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f((n+1)(t-x))\,dt.$$

Or, on a $f(t) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant t \leqslant 1$.
Et $f((n+1)(t-x)) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant (n+1)(t-x) \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant t \leqslant x + \dfrac{1}{n+1}$.

> **Intuition**
> À la question 3.b, nous avons prouvé que D_n converge en loi vers X.
> Et donc si nous voulons retrouver le résultat de la question 2.c, avec une convergence en loi vers une loi $\mathscr{U}([0,1])$, il faut que X suive cette loi uniforme.



Ainsi, pour $x \leqslant -\dfrac{1}{n+1}$, $f_{D_n}(x) = 0$.
Pour $x \in \left[-\dfrac{1}{n+1}, 0\right]$, $f_{D_n}(x) = (n+1)\displaystyle\int_0^{x+\frac{1}{n+1}} 1\,dt = 1 + (n+1)x$.
Pour $x \in \left[0, \dfrac{n}{n+1}\right]$, $f_{D_n}(x) = (n+1)\displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{n+1}} 1\,dt = 1$.
Et pour $x \in \left[\dfrac{n}{n+1}, 1\right]$, $f_{D_n}(x) = (n+1)\displaystyle\int_x^{1} 1\,dt = (n+1)(1-x)$.
Ainsi, $f_{D_n} = f_n$.
Autrement dit, D_n a même loi que la variable Y_n de la question 2.
Et donc en particulier, $\boxed{Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X, \text{ qui suit une loi uniforme sur } [0,1].}$

> **Détails**
> Dans cette intégrale et les suivantes, l'intégrande vaut 1, car lorsque $f(t)f((n+1)(t-x))$ est non nul, il vaut $1 \times 1 = 1$.

4.a. Puisque les X_i sont indépendantes, $\dfrac{X_n}{n}$ et $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ sont également indépendantes.
Par stabilité des lois normales, on a donc

$$U_n = \frac{X_n}{n} - \frac{X_{n+1}}{n+1} \hookrightarrow \mathscr{N}\left(0-0, \frac{1}{n^2} + \left(\frac{-1}{n+1}\right)^2\right) = \boxed{\mathscr{N}\left(0, \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right).}$$

> **Danger !**
> Attention au signe moins : si l'on soustrait bien les espérances, il faut tout de même ajouter les variances.

4.b. On a, pour $N \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} U_n = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{X_n}{n} - \frac{X_{n+1}}{n+1}\right) = X_1 - \frac{X_{N+1}}{N+1}.$$

Mais alors, le résultat de la question 3.b, qui s'applique car la densité d'une loi normale centrée réduite est bornée, montre que

$$\sum_{n=1}^{N} U_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X_1.$$

Et donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} U_n \text{ converge en loi.}}$

4.c.i. Puisque les U'_k sont indépendantes, et que $U'_k \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)$, nous pouvons de nouveau utiliser la stabilité des lois normales pour déterminer la loi de T'_n :

$$T'_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\right)\right) = \mathcal{N}\left(0, \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^2}\right).$$

La variable aléatoire $\dfrac{T'_n}{\sqrt{V(T'_n)}}$ suit alors une loi normale centrée réduite, de sorte que la fonction de répartition de T'_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F_{T'_n}(x) = P(T'_n \leqslant x) = P\left(\frac{T'_n}{\sqrt{V(T'_n)}} \leqslant \frac{x}{\sqrt{V(T'_n)}}\right) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{V(T'_n)}}\right).$$

Lorsque $n \to +\infty$,

$$V(T'_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = 2\zeta(2)-1 = \frac{\pi^2}{3}-1.$$

Détails
Le -1 vient du fait que la seconde série commence à $k=2$ et non à $k=1$.

Et donc $F_{T'_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{3}-1}}\right)$.
Nous reconnaissons alors la fonction de répartition d'une loi normale centrée de variance $\dfrac{\pi^2}{3}-1$, et donc $\boxed{T'_n \xrightarrow{\mathcal{L}} T, \text{ où } T \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\pi^2}{3}-1\right).}$

4.c.ii. La question est quelque peu étrange, nous venons d'étudier deux suites différentes, qui n'ont donc pas la même limite en loi, mais en quoi ceci serait contradictoire ?

Un point pourrait tout de même choquer : U_k et U'_k ont la même loi, mais pas $\sum_{k=1}^{n} U_k$ et $\sum_{k=1}^{n} U'_k$.
Ceci tient au fait que la loi d'une somme de variables aléatoires dépend de la loi conjointe de ces variables aléatoires (et donc des éventuels liens qui existent ou non entre ces variables) et pas seulement des lois de chacune des variables constituant la somme.
Or ici, les U'_k sont indépendantes, alors que les U_k ne le sont pas.

Non indép.
Il faudrait travailler un peu pour prouver que les U_k ne sont pas indépendantes (par exemple calculer une covariance), mais en tous cas il est clair qu'aucun argument facile ne prouve leur indépendance.

Partie II. Séries harmoniques «lacunaires»

5.a. On a $h_n(\mathcal{D}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(k)}{k}$.
Or, un entier k est dans $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $k = p^2$. Et si $k \leqslant n$, alors nécessairement $p \leqslant \sqrt{n} \Leftrightarrow p \leqslant \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

Autrement dit, $\boxed{h_n(\mathcal{D}) = \sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{p^2}.}$

5.b. Lorsque $n \to +\infty$, il vient donc $h_n(\mathcal{D}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Ceci signifie donc que la série de terme général $\dfrac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(k)}{k}$ converge et que $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(k)}{k} = \frac{\pi^2}{6}.}$

5.c. Montrons que $\mathcal{D}\cap\mathcal{T} = \{m \in \mathbf{N}^* \text{ tel que } m^{1/6} \in \mathbf{N}^*\} = \{k^6, k \in \mathbf{N}^*\}$.
Déjà, si $n = k^6$, alors $n = \left(k^3\right)^2 \in \mathcal{D}$ et $n = \left(k^2\right)^3 \in \mathcal{T}$.
Et donc $\{k^6,\ k \in \mathbf{N}^*\} \subset \mathcal{D}\cap\mathcal{T}$.
Inversement, soit $n \in \mathcal{D}\cap\mathcal{T}$. Il existe alors deux entiers p et q tels que $n = p^2 = q^3$.

Montrons que $\sqrt{q} \in \mathbf{N}$ (c'est-à-dire que $q \in \mathscr{D}$), de sorte que $n = (\sqrt{q})^6$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $q \notin \mathscr{D}$.
Alors, le résultat admis donné dans l'énoncé nous dit $\sqrt{q}$ est irrationnel.
Mais alors, $q\sqrt{q}$ est également un nombre irrationnel. En effet, s'il était rationnel, alors $\sqrt{q} = \dfrac{q\sqrt{q}}{q}$ serait rationnel car quotient de deux rationnels.
Mais $n = p^2 = (q\sqrt{q})^2$, de sorte que $p = q\sqrt{q}$.
Et donc $\sqrt{q} = \dfrac{p}{q}$ est rationnel, ce qui contredit notre hypothèse de départ.
Ainsi, $\sqrt{q}$ est un entier. Et donc $n = \sqrt{q}^6 \in \{k^6,\ k \in \mathbf{N}\}$.
Et donc nous venons de prouver que $\mathscr{D} \cap \mathcal{T} = \{k^6,\ k \in \mathbf{N}\}$.

> **Irrationalité**
> Vous avez probablement déjà rencontré une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. On prouve de manière similaire que si $\sqrt{n}$ n'est pas entier, alors il est irrationnel.

5.d. On a $\mathbb{1}_{\mathscr{D}\cup\mathcal{T}} = \mathbb{1}_{\mathscr{D}} + \mathbb{1}_{\mathcal{T}} - \mathbb{1}_{\mathscr{D}\cap\mathcal{T}}$.
En effet, si $k \in \mathbf{N}$, on a quatre cas de figure :

- soit $k \in \mathscr{D} \cap \mathcal{T}$ et alors $\mathbb{1}_{\mathscr{D}}(k) + \mathbb{1}_{\mathcal{T}}(k) - \mathbb{1}_{\mathscr{D}\cap\mathcal{T}}(k) = 1 + 1 - 1 = 1 = \mathbb{1}_{\mathscr{D}\cup\mathcal{T}}(k)$.
- soit $k \in \mathscr{D}$ et $k \notin \mathcal{T}$ et alors $\mathbb{1}_{\mathscr{D}}(k) + \mathbb{1}_{\mathcal{T}}(k) - \mathbb{1}_{\mathscr{D}\cap\mathcal{T}}(k) = 1 + 0 - 0 = 1 = \mathbb{1}_{\mathscr{D}\cup\mathcal{T}}(k)$.
- soit $k \in \mathcal{T}$ et $k \notin \mathscr{D}$ et alors $\mathbb{1}_{\mathscr{D}}(k) + \mathbb{1}_{\mathcal{T}}(k) - \mathbb{1}_{\mathscr{D}\cap\mathcal{T}}(k) = 0 + 1 - 0 = 1 = \mathbb{1}_{\mathscr{D}\cup\mathcal{T}}(k)$.
- soit enfin $k \notin \mathscr{D} \cup \mathcal{T}$ et alors $\mathbb{1}_{\mathscr{D}}(k) + \mathbb{1}_{\mathcal{T}}(k) - \mathbb{1}_{\mathscr{D}\cap\mathcal{T}}(k) = 0 + 0 - 0 = 0 = \mathbb{1}_{\mathscr{D}\cup\mathcal{T}}(k)$.

> **Remarque**
> Cette relation n'est pas sans rappeler les formules
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
> et
> $$\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B) - \operatorname{Card}(A \cap B)$$

Donc pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$h_n(\mathscr{D}\cup\mathcal{T}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{1}_{\mathscr{D}\cup\mathcal{T}}(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{1}_{\mathscr{D}}(k)}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{T}}(k)}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{1}_{\mathscr{D}\cap\mathcal{T}}(k)}{k} = h_n(\mathscr{D}) + h_n(\mathcal{T}) - h_n(\mathscr{D}\cap\mathcal{T}).$$

Or, comme on a prouvé que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(\mathscr{D}) = \zeta(2)$, on peut prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(\mathcal{T}) = \zeta(3)$.
Et en utilisant le fait que $\mathscr{D} \cap \mathcal{T} = \{k^6,\ k \in \mathbf{N}^*\}$, on prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(\mathscr{D} \cap \mathcal{T}) = \zeta(6)$.
Il vient donc enfin

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} h_n(\mathscr{D} \cup \mathcal{T}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{\mathscr{D}\cup\mathcal{T}}(k)}{k} = \zeta(2) + \zeta(3) - \zeta(6).}$$

> **Pour la culture**
> La valeur de $\zeta(n)$ est connue lorsque n est un entier pair, par exemple $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.
> En revanche, on sait beaucoup moins de choses lorsque n est un entier impair. On sait que $\zeta(3)$ est irrationnel, et on ne sait à peu près rien de $\zeta(5), \zeta(7), \dots$

6.a. La fonction $t \mapsto -\dfrac{1}{2t-1}$ est croissante sur $[n, n+1]$ et donc pour tout $t \in [n, n+1]$, on a

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-1} \leqslant \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2t-1} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2(n+1)-1}.$$

Et donc par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \leqslant \frac{2}{(2n-1)^2}.$$

> **Astuce**
> On intègre des constantes, il n'est donc pas nécessaire de faire apparaître des primitives :
> $$\int_a^b \lambda\, dt = \lambda(b-a).$$

6.b. Pour $k \geqslant 1$, on a $u_k = \dfrac{1}{2k-1} - \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{2t-1}\, dt$.
Et donc

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \int_k^{k+1} \frac{1}{2t-1}\, dt = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{1}{2k-1} - \int_1^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} \frac{1}{2t-1}\, dt.$$

Mais $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \dfrac{n+3}{2} \right\rfloor$ et donc $\displaystyle\int_1^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} \frac{1}{2t-1}\, dt \int_1^{\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor} \frac{1}{2t-1}\, dt.$

> **Partie entière**
> Pour tout réel x, on a
> $$\lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor x + 1 \rfloor.$$

Donc il suffit de prouver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{1}{2k-1} = h_n(\mathcal{I})$.
Mais par définition,

$$h_n(\mathcal{I}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{I}}(k)}{k} = \sum_{1 \leqslant 2k-1 \leqslant n} \frac{1}{2k-1}.$$

Or, $2k-1 \leqslant n \Leftrightarrow k \leqslant \frac{n+1}{2}$.

Mais k est un entier et donc $k \leqslant \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow k \leqslant \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

Et ainsi, $h_n(\mathcal{I}) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{1}{2k-1}$. Au final, on a donc bien

$$\boxed{h_n(\mathcal{I}) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k + \int_1^{\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor} \frac{1}{2t-1}\, dt.}$$

Partie entière

Rappelons que par définition, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

6.c. La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est concave sur $\mathbf{R}_+^*$, et donc sa courbe représentative est située sous ses tangentes.
En particulier, la tangente au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y = x-1$.
Et donc pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $\ln(t) \leqslant t-1$.
Par conséquent, il vient

$$\ln\left(\frac{1}{n}\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right) - 1 \leqslant \frac{1}{n}\left(2\frac{n+3}{2} - 1\right) - 1 \leqslant 1 + \frac{2}{n} - 1 \leqslant \boxed{\frac{2}{n}}.$$

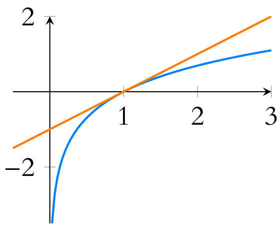


Figure 1– La fonction ln et sa tangente en 1.

Partie entière

Rappelons que pour tout réel x, on a

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

6.d. La série de terme général $\frac{2}{(2n-1)^2}$ converge car $\frac{2}{(2n-1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.
Et donc, grâce à l'encadrement obtenu à la question 6.a, par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge également.}}$

D'après la question 6.b,

$$\begin{aligned}
h_n(\mathcal{I}) - \ln\left(\sqrt{n}\right) &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k + \int_1^{\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor} \frac{1}{2t-1}\, dt - \ln\left(\sqrt{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k + \left[\frac{1}{2}\ln(2t-1)\right]_1^{\lfloor \frac{n+3}{2} \rfloor} - \ln\left(\sqrt{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k + \frac{1}{2}\ln\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right) - \frac{1}{2}\ln(n) \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} u_k + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{n}\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right)\right).
\end{aligned}$$

Or, le théorème des gendarmes, appliqué à l'encadrement de la question 6.c prouve que

$$\ln\left(\frac{1}{n}\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et puisque $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, en passant à la limite, on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(h_n(\mathcal{I}) - \ln\left(\sqrt{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \delta.}$$

6.e. Nous avons prouvé à la question 6.a que $u_k \leqslant \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$.
Et donc pour $N \geqslant n+1$, il vient

$$\sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} - \frac{1}{2N+1}.$$

Somme télescopique.

Et donc en faisant tendre N vers $+\infty$, il vient alors

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2n-1}.}$$

Limite

Notons que le passage à la limite est justifié car nous savons que les deux membres de l'inégalité admettent une limite.

6.f. Puisque $\delta = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$, on a donc

$$\delta - (h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})) = \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor +1}^{+\infty} u_k - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{n}\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right)\right).$$

Et donc à l'aide des encadrements précédemment établis :

$$0 \leqslant \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor +1}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{1}{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} \text{ et } 0 \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right)\right) \leqslant \frac{2}{n}$$

il vient

$$-\frac{1}{2}\frac{2}{n} \leqslant \delta - (h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})) \leqslant \frac{1}{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}.$$

Mais $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \geqslant \frac{n+1}{2} - 1 \geqslant \frac{n-1}{2}$ et donc par passage à l'inverse

$$\frac{1}{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} \leqslant \frac{1}{n-1-1} = \frac{1}{n-2}.$$

> **Rappel**
> Pour tout x, on a
> $x < \lfloor x \rfloor + 1 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor > x - 1.$

On a donc bien prouvé que

$$\boxed{-\frac{1}{n} \leqslant \delta - (h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})) \leqslant \frac{1}{n-2}.}$$

6.g.i. Pour `eps = 0.2`, la boucle `while` va s'exécuter tant que

$$\frac{1}{n-2} > 0.2 \Leftrightarrow n-2 < \underbrace{\frac{1}{0.2}}_{=5} \Leftrightarrow n < 7.$$

Mais puisqu'au départ $n = 3$, et que n augmente de 2 en 2, `s` ne va contenir que deux valeurs successives : sa valeur de départ qui est $h_3(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{3})$ et la valeur $h_5(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{5})$.

6.g.ii. Notons qu'à la ligne 3, le concepteur du programme a choisi d'écrire `log(3)/2` plutôt que `log(sqrt(3))`, ce qui calcule bien entendu la même valeur.
Restons dans le même esprit : pour passer de $h_{n-2}(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n-2})$ à $h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})$, il suffit d'ajouter $\frac{1}{n} + \ln(\sqrt{n-2})$ et de retirer $\ln(\sqrt{n})$. Soit encore d'ajouter $\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n}{n-2}\right)$.
Nous pouvons donc compléter le code de la manière suivante

```
6 s = s+1/n - log(n/(n-2))/2
```

6.g.iii. Les encadrements de la question 6.f prouvent que

$$-\frac{1}{n-2} \leqslant \delta - (h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{n-2} \Leftrightarrow |\delta - (h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})| \leqslant \frac{1}{n-2}.$$

Et donc si n est tel que $\frac{1}{n-2} \leqslant \varepsilon$, alors $|\delta - (h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})| \leqslant \varepsilon$, de sorte que $h_n(\mathcal{I}) - \ln(\sqrt{n})$ est une valeur approchée de δ à ε près.

Partie III. Séries de Riemann alternées.

7.a.i. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right) &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} x_i \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right) \\
&= \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n-1} x_i \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x_i \sum_{k=i}^{n-1} \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} x_i \left(\frac{1}{i^\beta} - \frac{1}{n^\beta}\right)$$

Somme télescopique.

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{i^\beta} - \frac{1}{n^\beta}\sum_{i=1}^{n-1} x_i.$$

Et donc

$$\frac{1}{n^\beta}\sum_{i=1}^{n-1} x_i + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{i^\beta}.$$

En ajoutant $\frac{x_n}{n^\beta}$ de chaque côté, on obtient donc

$$\boxed{\frac{1}{n^\beta}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{=s_n} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i^\beta}.}$$

7.a.ii. On a $\left|\frac{s_n}{n^\beta}\right| \leqslant M\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$ et puisque $\beta > \alpha$, $\frac{s_n}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'autre part, $|s_k| \leqslant Mk^\alpha$ et donc

$$\left|s_k\left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right)\right| \leqslant M\left(\frac{k^\alpha}{k^\beta} - \frac{k^\alpha}{(k+1)^\beta}\right) \leqslant M\frac{1}{k^{\beta-\alpha}}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^\beta}\right)$$

Mais à l'aide d'un développement limité, on obtient

$$1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^\beta} = 1 - \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-\beta} = 1 - \left(1 - \frac{\beta}{k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{\beta}{k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\beta}{k}.$$

Ainsi, $M\frac{1}{k^{\beta-\alpha}}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^\beta}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{M\beta}{k^{\beta-\alpha+1}}$.

Et puisque $\beta - \alpha + 1 > 1$, la série de terme général $M\frac{1}{k^{\beta-\alpha}}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^\beta}\right)$ converge.

Et donc, la série de terme général $s_k\left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right)$ converge absolument et donc converge.

Par conséquent, $\sum_{k=1}^{n-1} s_k\left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta}\right)$ admet une limite finie lorsque $n \to +\infty$.

On en déduit donc que $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k^\beta}$ admet également une limite finie lorsque $n \to +\infty$, c'est-à-dire que $\boxed{\text{la série de terme général } \frac{x_k}{k^\beta} \text{ converge.}}$

7.b. Posons $x_n = (-1)^n$, de sorte que $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
Alors, puisque (s_n) est bornée, on a $|s_n| \leqslant 1 \leqslant 1n^0$.
Et donc en prenant $\alpha = 0$ et $\beta = x$ dans le résultat de la question précédente, on obtient la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

8.a. On a $e^{tS_n} = e^{t\sum_{i=1}^n X_i} = \prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}$.
Or, les X_i étant indépendantes, les e^{tX_i} le sont aussi et donc[3]

$$E\left(e^{tS_n}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{tX_i}\right).$$

[3] Les e^{tX_i} sont des variables à support fini, donc ont une espérance.

Mais, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, par le théorème de transfert,

$$E\left(e^{tX_i}\right) = e^t P(X_i = 1) + e^{-t} P(X_i = -1) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Et donc $\boxed{E\left(e^{tS_n}\right) = \left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n.}$

8.b. Rappelons que pour tout $u \in \mathbf{R}$, $e^u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$.

Et donc

$$e^t + e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n!} t^n.$$

Mais $1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ de sorte que $\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} = \dfrac{1}{2} 2 \displaystyle\sum_{n \text{ pair}} \frac{t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$.

D'autre part, on a également

$$e^{t^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}.$$

Mais pour $k \in \mathbf{N}$, on a $(2k)! \geqslant 2^k k!$. Prouvons-le par une récurrence rapide : pour $k = 1$ et $k = 2$, c'est une égalité.
Supposons que $2^k k! \leqslant (2k)!$. Alors

$$2^{k+1}(k+1)! = 2 \times (k+1) 2^k k! \leqslant 2 \times (k+1) \times (2k)! \leqslant (2k+1)(2k+2)(2k)! = (2(k+1))!.$$

Donc pour tout $k \in \mathbf{N}$, $2^k k! \leqslant (2k)!$ et donc $\dfrac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \dfrac{t^{2k}}{2^k k!}$.

Ainsi, il vient

$$\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = e^{t^2/2}.$$

8.c. Notons que nous ne pouvons pas directement appliquer l'inégalité de Markov à la variable S_n, car elle n'est pas positive.
En revanche, la variable e^{tS_n} est positive, et $[S_n > s] = \left[e^{tS_n} > e^{ts}\right]$. Et donc

$$P(S_n > s) = P\left(e^{tS_n} > e^{ts}\right) \leqslant \frac{E\left(e^{tS_n}\right)}{e^{ts}} \leqslant \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n \frac{1}{e^{ts}} \leqslant \frac{e^{nt^2/2}}{e^{ts}} = \boxed{\exp\left(n\frac{t^2}{2} - ts\right).}$$

8.d. L'inégalité que nous venons d'établir est valable pour tout $t \in \mathbf{R}^+$.
Posons donc $f(t) = \exp\left(n\dfrac{t^2}{2} - ts\right)$. Par croissance de l'exponentielle, f possède les mêmes variations que $t \mapsto n\dfrac{t^2}{2} - ts$. Or, celle-ci possède un minimum[4] en $t = \dfrac{s}{n}$.

$$f'(t) = (nt - s)\exp\left(n\frac{t^2}{2} - ts\right).$$

Donc f admet un minimum en $t = \dfrac{s}{n}$ et ce minimum vaut

$$f\left(\frac{s}{n}\right) = \exp\left(n\frac{s^2}{2n^2} - s\frac{s}{n}\right) = \exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right).$$

Et donc en appliquant l'inégalité précédente pour $t = \dfrac{s}{n}$, il vient

$$P(S_n > s) \leqslant \exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right).$$

D'autre part, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, X_i et $-X_i$ ont même loi. Donc S_n et $-S_n$ ont également même loi.
Ainsi, $P(S_n < -s) = P(-S_n > s) \leqslant \exp\left(-\dfrac{s^2}{2n}\right)$. Et donc

$$\boxed{P(|S_n| > s) = P(S_n > s) + P(S_n < -s) \leqslant 2\exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right).}$$

[4] Il s'agit d'une formule vue au lycée qui donne l'abscisse du sommet de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Pour la culture
Cette inégalité est appelée inégalité de Chernoff.

9.a. Puisque S_k est une variable aléatoire et que la fonction valeur absolue est continue, $|S_k|$ est également une variable aléatoire.
Et donc, par définition d'une variable aléatoire, $[|S_k| \leqslant k^\alpha]$ est un élément de $\mathscr{A}$.
Donc l'événement contraire, $[|S_k| > k^\alpha] \in \mathscr{A}$.

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty}[|S_k| > k^\alpha] \in \mathscr{A}$.

Et enfin, $\boxed{\mathscr{C}_\alpha = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty}[|S_k| > k^\alpha] \in \mathscr{A}.}$

> **Rappels**
> Une tribu est stable par passage au complémentaire, par union dénombrable et par intersection dénombrable.

9.b. D'après la question 8.d, on a

$$0 \leqslant P(|S_n| > n^\alpha) \leqslant 2\exp\left(-\frac{n^{2\alpha}}{2n}\right) = 2\exp\left(-\frac{n^{2\alpha-1}}{2}\right).$$

Mais $e^n \exp\left(-\frac{n^{2\alpha-1}}{2}\right) = \exp\left(n - \frac{n^{2\alpha-1}}{2}\right)$.

Et puisque $\alpha > \frac{1}{2}$, $n - \frac{n^{2\alpha-1}}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n^{2\alpha-1}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Et donc $e^n \exp\left(-\frac{n^{2\alpha-1}}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ de sorte que $\exp\left(-\frac{n^{2\alpha-1}}{2}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}(e^{-n})$.

Or, la série de terme général e^{-n} est une série géométrique[5] convergente, et donc la série de terme général $\exp\left(-\frac{n^{2\alpha-1}}{2}\right)$ converge également.

On en déduit, par majoration, que $\boxed{\text{la série de terme général } P(|S_n| > n^\alpha) \text{ converge.}}$

[5] De raison $e^{-1} \in]0,1[$.

9.c. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $N \geqslant n$. Alors

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{N}[|S_k| > k^\alpha]\right) \leqslant \sum_{k=n}^{N} P(|S_k| > k^\alpha) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} P(|S_k| > k^\alpha).$$

Par le théorème de la limite monotone on a donc

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty}[|S_n| > n^\alpha]\right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} P(|S_k| > k^\alpha).$$

> **Rappel**
> Pour toute suite (A_k) d'événements,
> $$P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right).$$

Mais ce majorant est le reste d'une série convergente, de sorte que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} P(|S_n| > k^\alpha) = 0$.

Donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty}[|S_k| > k^\alpha]\right) = 0$.

Enfin, par le théorème de la limite monotone,

$$\boxed{P(\mathscr{C}_\alpha) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty}[|S_k| > k^\alpha]\right) = 0.}$$

> **Rappel**
> Pour toute suite décroissante (A_k) d'événements,
> $$P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{N\to+\infty} P(A_N).$$

10.a. Pour aborder cette question, il nous va falloir comprendre un peu plus finement ce qu'est l'événement $\mathscr{C}_\alpha$.

L'événement $\displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty}[|S_k| > k^\alpha]$ est l'événement «l'un des $[|S_k| > k^\alpha]$, $k \geqslant n$ est réalisé».

Et donc $\mathscr{C}_\alpha$ est l'événement «pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un $k \geqslant n$ tel que $[|S_k| > k^\alpha]$ soit réalisé».

Donc en passant au contraire, si $\omega \in \overline{\mathscr{C}_\alpha}$, cela signifie qu'il existe un $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $k \geqslant n_0$, $[|S_k(\omega)| \leqslant k^\alpha]$.

Soit donc $\omega \in \overline{\mathscr{C}_\alpha}$. Alors, à partir d'un certain rang n_0, $|S_k| \leqslant k^\alpha$.

Notons $M = \displaystyle\max_{1\leqslant k\leqslant n_0-1}\frac{|S_k(\omega)|}{k^\alpha}$, qui existe bien puisqu'il s'agit du maximum d'un ensemble fini, qui admet donc un plus grand élément.

Alors pour tout $k \in [\![1, n_0 - 1]\!]$, $|S_k| \leqslant Mk^\alpha$.

> **Remarque**
> On pourrait encore reformuler ceci est disant que $\mathscr{C}_\alpha$ est l'événement «il existe une infinité de k tels que $|S_k| > k^\alpha$.»
> Son contraire est alors «il n'existe qu'un nombre fini de k tels que $|S_k| > k^\alpha$.»

Et donc pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $|S_k| \leqslant (M+1)k^\alpha$.
En effet, si $k \leqslant n_0 - 1$, alors $|S_k| \leqslant Mk^\alpha \leqslant (M+1)k^\alpha$. Et si $k \geqslant n_0$, alors $|S_k| \leqslant k^\alpha \leqslant (M+1)k^\alpha$.

Donc, en se rappelant que $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, le résultat de la question 7.a s'applique, avec $\beta = 1 > \alpha$: la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{X_k(\omega)}{k}$ converge.

Et donc $\omega \in \mathscr{C}$.
Autrement dit, nous venons de prouver que $\boxed{\overline{\mathscr{C}_\alpha} \subset \mathscr{C}.}$

10.b. Ce qui précède est en particulier vrai pour $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, de sorte que

$$P(\overline{\mathscr{C}_\alpha}) \leqslant P(\mathscr{C}) \leqslant 1.$$

Et d'après la question 9.c, $P(\overline{\mathscr{C}_\alpha}) = 1 - P(\mathscr{C}_\alpha) = 1$.
Donc nécessairement $\boxed{P(\mathscr{C}) = 1.}$

10.c. Montrons que $E(\varepsilon) \subset \overline{\mathscr{C}}$, où plutôt[6] que $\mathscr{C} \subset \overline{E(\varepsilon)}$.

[6] Ce qui est équivalent.

Notons à cet effet que $\overline{E(\varepsilon)} = \bigcup_{N=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{n=N}^{+\infty}[|K-K_n| \leqslant \varepsilon]\right)$.

Mais si $\omega \in \mathscr{C}$, alors la série de terme général $\frac{X_k(\omega)}{k}$ converge, de sorte que la suite de ses sommes partielles converge vers $K(\omega)$: $\lim_{n\to+\infty} K_n(\omega) = K(\omega)$.
Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|K_n(\omega) - K(\omega)| \leqslant \varepsilon$.

Et en particulier, l'événement $\bigcap_{n=n_0}^{+\infty}[|K_n - K| \leqslant \varepsilon]$ est réalisé.

Autrement dit, $\omega \in \bigcap_{n=n_0}^{+\infty}[|K_n - K| \leqslant \varepsilon]$.

Et donc $\omega \in \bigcup_{N=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{n=N}^{+\infty}[|K_n-K| \leqslant \varepsilon]\right) = \overline{E(\varepsilon)}$.

Nous avons donc bien prouvé que $\mathscr{C} \subset \overline{E(\varepsilon)}$ et donc $E(\varepsilon) \subset \overline{C}$.
Par croissance de la probabilité, on a alors $P(E(\varepsilon)) \leqslant P(\overline{C})$, et puisque $P(\mathscr{C}) = 1$, $P(\overline{C}) = 0$, et donc $\boxed{P(E(\varepsilon) = 0).}$

Par le théorème de la limite monotone, on a

$$0 = P(E(\varepsilon)) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=N}^{+\infty}|K-K_n| > \varepsilon\right).$$

Or, pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$0 \leqslant P(|K-K_N| > \varepsilon) \leqslant P\left(\bigcup_{n=N}^{+\infty}|K-K_n| > \varepsilon\right)$$

de sorte que par le théorème des gendarmes, $\lim_{N\to+\infty} P(|K-K_N| > \varepsilon) = 0$.

Ainsi, $\boxed{K_n \xrightarrow{P} K.}$

CV en proba/loi
Le résultat admis dans l'énoncé n'est pas spécifique à ce cas particulier, on a toujours

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X.$$

En revanche la réciproque est fausse.

11.a. Puisque $E(B_k) = \frac{1}{2}$, par linéarité de l'espérance,

$$E(H_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{E(B_k)}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Mais la série de terme général $\frac{1}{k}$ est divergente, et puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, la suite de ses sommes partielles tend donc vers $+\infty$: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(H_n) = +\infty.}$

⚠ Attention !
Les sommes partielles d'une série divergente ne tendent pas toujours vers $+\infty$ (par exemple c'est faux pour la série de terme général $(-1)^n$), c'est vrai ici car il s'agit d'une série à termes positifs.

Les B_k étant indépendants, on a donc

$$V(H_n) = \sum_{k=1}^{n} V\left(\frac{B_k}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{V(B_k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\zeta(2) = \boxed{\frac{\pi^2}{24}}.$$

11.b. Soit $r > 0$ fixé. Alors, pour n suffisamment grand, on a $E(H_n) > r$.
Et alors $[H_n \leqslant r] \subset [|H_n - E(H_n)| \geqslant E(H_n) - r]$.
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée[7] à H_n, on a alors

$$P(H_n \leqslant r) \leqslant P(|H_n - E(H_n)| \geqslant E(H_n) - r) \leqslant \frac{V(H_n)}{(E(H_n) - r)^2}.$$

Mais puisque $V(H_n)$ admet une limite finie, elle est bornée, et puisque $\dfrac{1}{(E(H_n) - r)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V(H_n)}{(E(H_n) - r)^2} = 0$.
Et donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(H_n \leqslant r) = 0.}$

Remarque *: ceci prouve que (H_n) ne converge pas en loi car sinon $P(H_n \leqslant r)$ devrait converger vers la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Or la fonction nulle n'est pas une fonction de répartition.*
Notons que le raisonnement se généralise aisément à toute suite (X_n) de variables aléatoires telle que $E(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $V(X_n)$ est bornée.

11.c.i. Le code déjà présent permet de simuler H_n, et donc il faut ajouter $-h_n(\mathcal{I})$.
Autrement dit, il faut être capable de calculer $\mathbb{1}_{\mathcal{I}(k)}$.
Pour cela, nous proposons d'utiliser le fait suivant : $1 - (-1)^k = 2$ si k est impair et 0 sinon.
Autrement dit, $\mathbb{1}_{\mathcal{I}}(k) = \dfrac{1 - (-1)^k}{2}$.
Et donc on peut compléter le programme de la manière suivante :

```
y(i,1) = y(i,1) + (grand(1,1,'bin',1,0.5) + ((-1)^k - 1)/2)/k ;
```

11.c.ii. Les graphiques ont par exemple pu être obtenus avec `histplot(10,simul(n,10000))`, qui trace un histogramme à 10 bâtons à partir de 10 000 simulations de $H_n - h_n(\mathcal{I})$.

11.c.iii. Le fait que ces trois histogrammes soient très similaires semble indiquer que la répartition des valeurs prises par $H_n - h_n(\mathcal{I})$ reste sensiblement la même pour de grandes valeurs de n. Et donc que les fonctions de répartition des $H_n - h_n(\mathcal{I})$ ne semblent que peu dépendre de la valeur de n, ce qui indique une convergence en loi.

12.a. Utilisons, comme précédemment le fait que $\mathbb{1}_{\mathcal{I}}(k) = \dfrac{1 - (-1)^k}{2}$. Ceci permet d'écrire

$$h_n(\mathcal{I}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{I}}(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - (-1)^k}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathcal{I}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = \boxed{\frac{K_n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}.}$$

12.b. Nous savons[8] que $K_n \xrightarrow{\mathscr{L}} K$, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, qui est est bien une série convergente d'après 7.b.
Mais en voyant cette suite de réels comme une suite de variables aléatoires certaines, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} \xrightarrow{P} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.
Et donc par le lemme de Slutsky, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathcal{I}) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{K}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.
Mais pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, B'_i a même loi que X_i, et les B'_i sont indépendantes car les X_i le sont.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, les vecteurs aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ et $(B'_1, \dots, B'_n)$ ont même loi.
Si l'on applique alors la fonction continue $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k}$, on obtient alors que H_n

[7] Ce qui est légitime puisque H_n admet une variance.

[8] C'est le résultat de 10.c.

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{B'_k}{k}$ ont même loi.

Et donc $H_n - h_n(\mathcal{I})$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathcal{I})$ ont même loi.

Par conséquent ,

$$\boxed{H_n - h_n(\mathcal{I}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{K}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.}$$

Détails

La convergence en loi ne regarde que les lois de variables en jeu, donc si pour tout n, X_n a même loi que Y_n, et que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, alors $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Remarque *: il n'est en fait pas trop difficile de prouver que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.
Ceci est à mettre en parallèle avec le développement limité de $\ln(1+x)$ *:*

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n).$$

Ce développement limité s'obtient à l'aide de la formule de Taylor-Young appliquée à $x \mapsto \ln(1+x)$.
Si l'on applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n *à la même fonction entre* 0 *et* 1, *puis que l'on fait tendre* n *vers* $+\infty$, *on constate que le reste intégral tend vers* 0 *et donc que*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\ln(1+1) = -\ln(2).$$

EXTRAITS COMMENTÉS DU RAPPORT DU JURY

Le poids des questions de `Scilab` était assez élevé puisqu'il représentait 14% des points de barème.

✎ Le rapport stipule un peu plus loin qu'il fallait avoir 60% du total des points pour avoir 20. Et donc un rapide calcul nous indique que les questions de `Scilab` rapportaient environ 4/20. Si l'on considère qu'il faut maximum une demi-heure pour traiter intégralement ces questions, c'est plutôt bien payé !

La recherche d'une solution à une question ne doit pas dépasser quatre à cinq minutes. Au-delà de ce délai, en cas d'échec, le candidat doit admettre le résultat de cette question (si la réponse figure dans l'énoncé), passer à la question suivante sans éprouver un sentiment de déstabilisation ou de découragement. Autrement dit, le jury recommande aux futurs candidats de faire preuve d'une grande ténacité.

✎ Tout est dit : on ne sèche pas un quart d'heure sur une question pour laquelle on n'a aucune piste. Bien entendu, la rédaction complète de la réponse à une question peut prendre davantage de temps, mais même là, on conseille de ne pas trop dépasser les 10 minutes, surtout en cas de calculs dont vous ne voyez pas la fin.

Les opérations élémentaires et les notions de base sont de plus en plus mal maîtrisées : addition et multiplication sont régulièrement confondues (on passe de $2x = y$ à $x = y - 2$; on confond diviser par $2n$ et diviser par n^2, etc.), propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, utilisation de l'indépendance (invoquée pour l'espérance d'une somme ou pour le théorème de Slutsky mais pas pour la convolution ou la somme de lois normales !!).

✎ Ce commentaire est plutôt pessimiste, et concerne probablement les copies de candidats qui n'ont pas le niveau pour se présenter aux parisiennes.
En revanche, cela signifie que si vous soignez vos calculs, vous avez déjà une chance de sortir du lot, notamment sur la première partie, qui est souvent la plus calculatoire. Cette année, 30% du barème total était attribué à cette première partie, ce qui signifie qu'il était possible d'avoir la moyenne ou presque uniquement en traitant cette partie.

Le jury recommande aux futurs candidats de prendre le temps de lire l'ensemble du sujet, non seulement pour s'en imprégner, mais aussi pour pointer les questions qui paraissent faciles à résoudre, lesquelles ne se situent pas nécessairement dans la première partie du sujet.

8.c — Une part non négligeable de candidats applique l'inégalité de Markov à la variable S_n qui est centrée. Ils en déduisent donc que $P(S_n > s) \leqslant 0$...

✎ Rappelons que la positivité est une hypothèse **indispensable** pour appliquer Markov.

Maths II 2017

Sujet : Autour de la loi de Cauchy : médiane et moyenne empirique. **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, variables à densité, convergence des variables aléatoires, estimation ponctuelle et par intervalle, `Scilab`

Commentaires : un sujet intéressant, qui aborde une grande partie du programme de probabilités. Demande de l'aisance en calcul, mais ni plus ni moins que d'autres sujets de Maths II.

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$;
- on note θ un paramètre réel.

Partie I. Une démonstration probabiliste de la formule de Stirling.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit h_n la fonction définie par : $\forall x \in [0,1],\ h_n(x) = ((1-x)\,e^x)^n$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 h_n(x)\,dx$.

1. a. À l'aide du changement de variable $u = n(1-x)$, montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ I_n = \dfrac{e^n}{n^{n+1}} \displaystyle\int_0^n u^n e^{-u}\,du$.

   b. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $x + \ln(1-x) \leqslant -\dfrac{x^2}{2}$.

   c. En se référant à une densité de la loi normale centrée réduite, en déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

2. On note h_n^* la restriction à l'intervalle $]0,1[$ de la fonction h_n.

   On pose pour tout $x \in]0,1[$, $h_n^*(x) = \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2} H(x)\right)$ et $g(x) = (1-x)\ln(1-x) + x - \dfrac{x^2}{2}$.

   a. Montrer que H est prolongeable par continuité en 0. On note encore H la fonction ainsi prolongée.

   b. Montrer que la fonction g est convexe et strictement positive sur $]0,1[$.

   c. En déduire que la fonction H réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ sur $[1,+\infty[$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite convergente de limite nulle telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\sqrt{n} = +\infty$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 < u_n < 1$.

   a. Donner un exemple d'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

   b. Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ v_n = H(u_n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

   c. Établir pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'encadrement : $I_n \geqslant \displaystyle\int_0^{u_n} h_n(x)\,dx \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{nv_n}} \displaystyle\int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} \exp\left(-\dfrac{y^2}{2}\right) dy$.

   d. Déduire des questions 1.c et 3.c un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

   a. Rappeler la loi suivie par la variable aléatoire S_n et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant n) = \dfrac{1}{2}$.

   b. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $U_n = \dfrac{T_{n+1}}{\sqrt{n}}$. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilités vers la constante 0.

   c. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} P([S_{n+1} \leqslant n]) = \dfrac{1}{2}$.

5. Montrer que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (*formule de Stirling*).

Partie II. Quelques propriétés de la loi de Cauchy.

6. **On rappelle** que la fonction Arctan est la fonction réciproque de la restriction à l'intervalle ouvert $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tan, qu'elle est de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur $\mathbf{R}$ et admet pour dérivée la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et qu'elle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

a. Montrer que la fonction $\operatorname{Arctan}(x)$ est impaire.

b. Justifier l'existence d'un développement limité à l'ordre 3 de la fonction Arctan en 0 et le déterminer.

c. Établir pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, l'encadrement : $0 \leqslant \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x$.

d. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a : $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

7. a. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\pi} \times \dfrac{1}{1+(x-\theta)^2}$ est une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$.

Dans toute la suite du problème, on note X une variable aléatoire à valeurs réelles, de densité f_X telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_X(x) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+(x-\theta)^2}.$$

On dit que X *suit une loi de Cauchy de paramètre* θ et on note : $X \hookrightarrow \mathscr{C}_\theta$.

b. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

c. Pour $\theta = 0$, tracer la courbe représentative de f_X dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

8. a. On note F_X la fonction de répartition de X. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, calculer $F_X(x)$.

b. Montrer que l'équation $F_X(x) = \dfrac{1}{2}$, d'inconnue x, admet une unique solution que l'on déterminera. Cette solution est la *médiane théorique de X*.

Partie III. La loi de la moyenne empirique.

9. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbf{R}$ soit $\varphi_{n,x}$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi_{n,x}(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+(x-nt)^2)}.$$

On admet l'existence d'un unique quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de réels, indépendants de t pour lesquels on a :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi_{n,x}(t) = \frac{\alpha t + \beta}{1+t^2} + \frac{\gamma t + \delta}{1+(x-nt)^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose : $\sigma_{n,x} = \left(x^2+(n+1)^2\right)\left(x^2+(n-1)^2\right)$.

On admet sans démonstration que : $\alpha = \dfrac{2nx}{\sigma_{n,x}}$, $\beta = \dfrac{1+x^2-n^2}{\sigma_{n,x}}$, $\gamma = -\dfrac{2n^3x}{\sigma_{n,x}}$, $\delta = \dfrac{n^2(3x^2+n^2-1)}{\sigma_{n,x}}$.

a. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t)\,dt$.

b. À l'aide d'une primitive de la fonction $\psi_{n,x} : t \mapsto \dfrac{2t}{1+t^2} - \dfrac{2n(nt-x)}{1+(x-nt)^2}$, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n,x}(t)\,dt = 0$.

c. Établir la relation : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t)\,dt = \frac{(n+1)\pi}{x^2+(n+1)^2}$.

10. On pose $Y = X - \theta$. Pour n entier de $\mathbf{N}^*$, soit $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Y.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$ et $\overline{Y_n} = \dfrac{S_n}{n}$ (*moyenne empirique de l'échantillon* $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$).

a. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y. Quelle est la loi de Y ?

b. Quelle est la fonction de répartition de S_2 ? En déduire la loi de $\overline{Y_2}$.

c. Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la loi de la variable aléatoire $\overline{Y_n}$.

d. La loi faible des grands nombres s'applique-t-elle à la suite $\left(\overline{Y_n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$? Pourquoi ?

11. Soit $(N, n) \in (\mathbf{N}^*)^2$. On veut simuler N réalisations de la moyenne empirique $\overline{Y_n}$.
On suppose que l'on connaît une fonction `Scilab` `cauchy` telle que la commande `A = cauchy(N,n)` retourne une matrice $A \in \mathscr{M}_{N,n}(\mathbf{R})$, réalisation d'une famille $(Y_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{C}_0$.

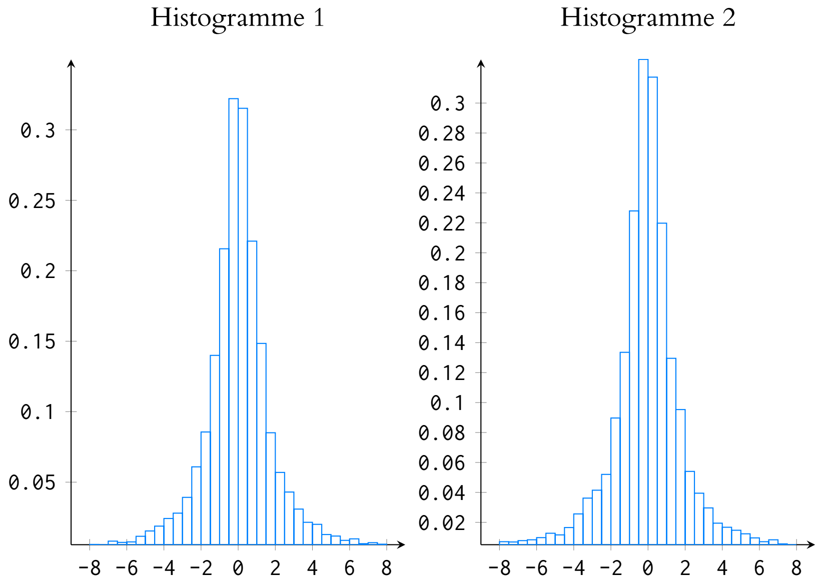
Soit M une matrice de $\mathscr{M}_{N,n}(\mathbf{R})$ avec $(N, n) \in (\mathbf{N}^*)^2$. *On rappelle que dans le langage* `Scilab` :

- la commande `sum(M)` retourne une matrice de $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbf{R})$ contenant la somme de tous les éléments de M :
- la commande `sum(M,'r')` retourne un vecteur ligne de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ contenant les sommes des éléments de M, calculés colonne par colonne :
- la commande `sum(M,'c')` retourne un vecteur colonne de $\mathscr{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ contenant les sommes des éléments de M, calculées ligne par ligne :

- la commande `linspace(a,b,m)` retourne un vecteur ligne de m valeurs régulièrement espacées entre a et b, et l'on obtient le même vecteur avec la commande `(a :`ℓ` : b)` en prenant $\ell = \dfrac{b-a}{m-1}$;
- la commande `histplot(y,data)` permet de représenter les éléments du vecteur `data` sous la forme d'un histogramme : les classes de l'histogramme sont définies par le vecteur strictement croissant `y` : si ce vecteur contient m éléments `y(1),y(2),...,y(m)` tels que `y(1)<y(2)<...<y(m)`, alors la première classe de l'histogramme est l'intervalle `[y(1),y(2)]` et les autres classes sont les intervalles `]y(i),y(i+1)]` pour $2 \leqslant i \leqslant m-1$.

a. Compléter le programme suivant afin que la matrice `MoyEmp` contienne 12000 réalisations de la moyenne empirique $\overline{Y_{200}}$.

```
N = 12000 ;n=200 ;
A = cauchy(N,n) ;
MoyEmp = .........
x= (-8  : 0.5  : 8)
histplot(x,MoyEmp) \\ histogramme 1
histplot(x,A( :,1)) \\ histogramme 2
```



b. Les histogrammes 1 et 2 ont été obtenus à l'aide de ce programme. Expliquer en quoi ce couple d'histogrammes illustre le résultat de la question 10.c.

Partie IV. La loi de la médiane empirique.

Dans les questions 13, 14 et 15, on suppose que le paramètre θ est inconnu.

On rappelle que $X \hookrightarrow \mathscr{C}_\theta$. Pour n entier de $\mathbf{N}^*$, on note $(X_1, X_2, \dots, X_{2n+1})$ un $(2n+1)$–échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.

On admet l'existence de $(2n+1)$ fonctions $g_1, g_2, \dots, g_{2n+1}$ continues sur $\mathbf{R}^{2n+1}$, à valeurs réelles, telles que les variables aléatoires réelles $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2, \dots, \widehat{X}_{2n+1}$ définies par : $\forall k \in [\![1, 2n+1]\!]$, $\widehat{X}_k = g_k(X_1, X_2, \dots, X_{2n+1})$ soient des variables aléatoires à densité et que pour tout $\omega \in \Omega$, les réels $\widehat{X}_1(\omega), \widehat{X}_2(\omega), \dots, \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$ soient un réarrangement par ordre croissant de $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_{2n+1}(\omega)$: $\forall \omega \in \Omega$, $\widehat{X}_1(\omega) \leqslant \widehat{X}_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$.

En particulier, la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}(\omega)$ est la *médiane empirique de l'échantillon* $(X_1, X_2, \dots, X_{2n+1})$.

12. Pour tout $h \in \mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on note Z la variable aléatoire discrète définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \operatorname{Card}\{i \in [\![1, 2n+1]\!] : x < X_i(\omega) \leqslant x+h\}.$$

On note A et B les deux événements suivants : $A = \left[x < \widehat{X}_{n+1} \leqslant x+h\right]$ et $B = A \cap [Z = 1]$.

a. Établir la relation : $P(B) = (n+1)\dbinom{2n+1}{n}(F_X(x))^n\,(F_X(x+h) - F_X(x))\,(1 - F_X(x+h))^n$.

b. On suppose que le réel x est fixé. Montrer qu'il existe un réel K indépendant de h pour lequel on a

$$0 \leqslant P(A) - P(B) \leqslant K\,(F_X(x+h) - F_X(x))^2.$$

c. Montrer que $\widehat{X}_{n+1}$ admet une densité $f_{\widehat{X}_{n+1}}$ donnée par

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) = (n+1)\binom{2n+1}{n}(F_X(x))^n\,(1 - F_X(x))^n\, f_X(x).$$

13. **a.** Établir l'équivalence suivante : $x f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} (n+1)\dbinom{2n+1}{n}\dfrac{1}{\pi^{n+1}} \times \dfrac{1}{x^{n+1}}$.

b. En déduire l'existence de l'espérance $E\left(\widehat{X}_{n+1}\right)$ de la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$.

c. Justifier que $\widehat{X}_{n+1}$ est un estimateur du paramètre θ. Calculer $E\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right)$. Conclure.

d. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur n, la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$ admet-elle une variance ?

14. On note $F_{\widehat{X}_{n+1}}$ la fonction de répartition de $\widehat{X}_{n+1}$. Soit ε un réel strictement positif.

a. Établir la relation : $\forall t \in \mathbf{R},\ f_{\widehat{X}_{n+1}}(2\theta - t) = f_{\widehat{X}_{n+1}}(t)$. En déduire que $P\left(\left[\left|\widehat{X}_{n+1}-\theta\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 2F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta-\varepsilon)$.

b. Montrer que la suite d'estimateurs $\left(\widehat{X}_{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers θ.

c. La suite $\left(\widehat{X}_{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge-t-elle en loi vers la variable certaine θ ?

15. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose : $W_{n+1} = \dfrac{2\sqrt{2n+1}}{\pi}\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right)$.

a. On note $f_{W_{n+1}}$ la densité continue sur $\mathbf{R}$ de W_{n+1}. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_{W_{n+1}}(x) = \frac{n+1}{2\sqrt{2n+1}}\binom{2n+1}{n}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}}\right)\right)^2\right]^n \times \left(1+\frac{\pi^2x^2}{4(2n+1)}\right)^{-1}.$$

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{W_{n+1}}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

On admet que ce résultat implique la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(W_{n+1})_{n\geqslant 2}$ vers une variable aléatoire T qui suit la loi normale centrée réduite.

c. On note Φ la fonction de répartition de T. Soit α un réel vérifiant $0<\alpha<1$; on pose : $t_\alpha = \Phi^{-1}\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Déterminer un intervalle de confiance asymptotique pour θ, centré sur $\widehat{X}_{n+1}$, au niveau de confiance $1-\alpha$.

16. Dans le langage `Scilab` , la fonction `gsort` permet de trier les éléments d'une matrice réelle A :

- la commande `gsort(A,'r')` renvoie une copie de A triée colonne par colonne, par ordre décroissant (chaque colonne est triée indépendamment des autres) ;
- la commande `gsort(A,'c')` renvoie une copie de A triée ligne par ligne, par ordre décroissant (chaque ligne est triée indépendamment des autres).

On suppose que $\theta = 0$ et on considère p réalisations ($p \geqslant 10^4$) du $(2n+1)$-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1})$.
Recopier et compléter le code suivant afin que son exécution retourne un vecteur `MedianeEmp` de p réalisations de la médiane empirique $\widehat{X}_{n+1}$ puis un vecteur `W` de p réalisations de W_{n+1}.

```
A = cauchy(p,2*n+1)
S = gsort .........
MedianeEmp = ........
W = ......
```

MATHS II 2017 : CORRIGÉ

Partie I. Une démonstration probabiliste de la formule de Stirling.

1.a. Procédons au changement de variable indiqué, qui est légitime car affine. Lorsque $x \to 0$, alors $u \to n$ et lorsque $x \to 1$, alors $u \to 0$. On a alors $x = 1 - \frac{u}{n}$ et donc $dx = -\frac{du}{n}$. Ainsi,

$$I_n = \int_n^0 \left(\frac{u}{n}e^{1-\frac{u}{n}}\right)^n \left(-\frac{1}{n}\right) du = \int_0^n \frac{u^n}{n^{n+1}} e^{n-u}\, du = \boxed{\frac{e^n}{n^{n+1}} \int_0^n u^n e^{-u}\, du.}$$

1.b. S'il serait possible de répondre à la question en étudiant le signe[1] de la fonction $x \mapsto x + \ln(1-x) + \frac{x^2}{2}$, notons qu'on a reconnu que $-x - \frac{x^2}{2}$ est le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$ et donc il s'agit de déterminer la «position» de $\ln(1-x)$ par rapport à son développement limité. C'est précisément ce à quoi sert la formule de Taylor avec reste intégral.
Soit donc $\varphi : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $\varphi(x) = \ln(1-x)$. Alors φ est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[0,1]$, avec

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{1-x},\ \varphi''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2},\ \varphi^{(3)}(x) = \frac{-2}{(1-x)^3}.$$

Et donc, par la formule de Taylor, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} = \varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)x - \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 = \int_0^x \varphi^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}\, dt.$$

Mais, pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi^{(3)}(t)(x-t)^2 \leqslant 0$ et donc, par croissance de l'intégrale, $\int_0^x \varphi^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}\, dt \leqslant 0$.
On en déduit que

$$\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{\ln(1-x) + x \leqslant -\frac{x^2}{2}.}$$

[1] Par exemple en dressant son tableau de variation.

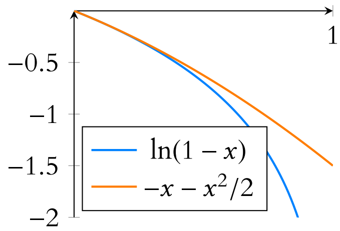


FIGURE 1– La fonction $\ln(1-x)$ et son développement limité en 0.

1.c. Puisque h_n est positive sur $[0,1]$, par croissance de l'intégrale, $\boxed{I_n \geqslant 0.}$
D'autre part, d'après la question précédente, pour tout $x \in [0,1]$,

$$x + \ln(1-x) \leqslant -\frac{x^2}{2} \Rightarrow nx + n\ln(1-x) \leqslant -n\frac{x^2}{2}$$

et donc par passage à l'exponentielle[2],

$$h_n(x) = e^{nx+n\ln(1-x)} \leqslant e^{-nx^2/2}.$$

[2] Qui préserve le sens des inégalités car l'exponentielle est croissante.

On en déduit donc que $I_n \leqslant \int_0^1 e^{-nx^2/2}\, dx$.
Le changement de variable $t = \sqrt{n}x$ nous donne alors

$$\int_0^1 e^{nx^2/2}\, dx = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Or, la densité d'une loi normale centrée réduite est $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$, et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}.$$

Et alors, par parité de $t \mapsto e^{-t^2/2}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Remarque
Le changement de variable était plus ou moins imposé par l'énoncé qui demandait de se référer à une loi normale **centrée réduite**, mais il aurait été possible de répondre à la question en faisant appel à une loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)$, car sa densité permet également de faire apparaître le terme en $e^{-nx^2/2}$.

Ainsi, on a bien

$$I_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt \leqslant \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

2. Puisqu'on doit avoir $h_n^*(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2} H(x)\right)$, alors $H(x) = -\frac{2}{nx^2}\ln(h_n^*(x)) = -\frac{2}{x^2}(x + \ln(1-x))$.

> **Remarque**
> Notons que H ne dépend pas de n, ce qui n'était pas évident sur la définition donnée dans l'énoncé.

2.a. Lorsque $x \to 0^+$, $x + \ln(1-x) = x - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.
Et donc $H(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} 1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$.
Et donc $\boxed{H \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } H(0) = 1.}$

2.b. La fonction g est deux fois dérivable sur $]0, 1[$, et sa dérivée est

$$g'(x) = \frac{1-x}{x-1} - \ln(1-x) + 1 - x = -\ln(1-x) - x.$$

Et donc sa dérivée seconde est

$$g''(x) = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} \geqslant 0.$$

Ainsi, $\boxed{g \text{ est convexe sur }]0, 1[.}$

D'autre part, en utilisant la question 1.b, il vient $g'(x) \geqslant \frac{x^2}{2} > 0$.
Et donc g est strictement croissante sur $]0, 1[$. Mais $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$, et on en déduit donc que $\boxed{g \text{ est strictement positive sur }]0, 1[.}$

2.c. L'expression donnée plus haut de H prouve que celle-ci est dérivable sur $]0, 1[$ car quotient de fonctions dérivables, et

$$\begin{aligned} H'(x) &= -2\frac{\left(1 - \frac{1}{1-x}\right)x^2 - 2x\left(x + \ln(1-x)\right)}{x^4} = -2\frac{-x^2 - 2x\ln(1-x) - \frac{x^2}{1-x}}{x^4} \\ &= \frac{2}{(1-x)x^3}\left(2(1-x)\ln(1-x) - 2x + x^2\right) = \frac{4}{(1-x)x^3} g(x) > 0. \end{aligned}$$

> **Ouvert/fermé**
> Puisque H est continue sur $[0, 1[$, le fait que sa dérivée soit positive strictement sur $]0, 1[$ (ouvert en 0) garantit sa stricte croissance sur $[0, 1[$ (fermé en 0).

Ainsi, H est strictement croissante sur $[0, 1[$.
Puisque H est continue[3] sur $[0, 1[$, que $H(0) = 1$ et que $\lim\limits_{x\to 1^-} H(x) = +\infty$, par le théorème de la bijection, $\boxed{H \text{ réalise une bijection strictement croissante de } [0, 1[\text{ sur } [1, +\infty[.}$

[3] Elle trivialement continue sur $]0, 1[$, et a été prolongée par continuité en 0, donc est continue en 0.

3.a. Posons $u_n = \frac{1}{(n+1)^{1/3}}$.
Alors $\lim\limits_{n\to +\infty} u_n = 0$, et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 < u_n < 1$.
De plus, lorsque $n \to +\infty$, $\sqrt{n}u_n \underset{n\to +\infty}{\sim} \frac{n^{1/2}}{n^{1/3}} = n^{1/6} \underset{n\to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ définie par } u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \text{ convient.}}$

3.b. Puisque $u_n \underset{n\to +\infty}{\longrightarrow} 0$, par continuité de la fonction H,

$$\lim_{n\to +\infty} v_n = \lim_{n\to +\infty} H(u_n) = H(0) = \boxed{1.}$$

> **Rédaction** ✎
> N'oublions pas que pour composer des limites par une fonction, il est indispensable que cette fonction soit continue. Et donc **il faut mentionner cette continuité.**

3.c. La fonction h_n étant positive sur $[u_n, 1]$, on a

$$I_n = \int_0^{u_n} h_n(x)\, dx + \underbrace{\int_{u_n}^1 h_n(x)\, dx}_{\geqslant 0} \geqslant \int_0^{u_n} h_n(x)\, dx.$$

Dans cette dernière intégrale, procédons au changement de variable affine $y = x\sqrt{nv_n}$. Il vient alors

$$\int_0^{u_n} h_n(x)\, dx = \int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} h_n\left(\frac{y}{\sqrt{nv_n}}\right) \frac{dy}{\sqrt{nv_n}}.$$

Or, pour $y \in]0, u_n\sqrt{nv_n}]$, on a, par définition de H,

$$h_n\left(\frac{y}{\sqrt{nv_n}}\right) = \exp\left(-\frac{ny^2}{2nv_n}H\left(\frac{y}{\sqrt{nv_n}}\right)\right) = \exp\left(-\frac{y^2}{2}\frac{H\left(\frac{y}{\sqrt{nv_n}}\right)}{H(u_n)}\right).$$

Mais, toujours pour $y \in]0, u_n\sqrt{nv_n}]$, $\dfrac{y}{\sqrt{nv_n}} \leqslant u_n$, et donc, par croissance de H, $\dfrac{H\left(\frac{y}{\sqrt{nv_n}}\right)}{H(u_n)} \leqslant 1$.
On en déduit donc que

$$\exp\left(-\frac{y^2}{2}\frac{H\left(\frac{y}{\sqrt{nv_n}}\right)}{H(u_n)}\right) \geqslant \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

de sorte que, par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{I_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{nv_n}}\int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy.}$$

3.d. Lorsque $n \to +\infty$, $\sqrt{nv_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.
D'autre part, on a alors

$$u_n\sqrt{nv_n} = \underbrace{u_n\sqrt{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}\ \underbrace{\sqrt{v_n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Et donc $\displaystyle\int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
Par conséquent, $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{nv_n}}\int_0^{\sqrt{nv_n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
En combinant les inégalités des questions 1.c et 3.c, on a donc

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{nv_n}}\int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} \leqslant \frac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} \leqslant 1.$$

Et donc, par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = 1$, de sorte que $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$

Intégrale de Gauss
La valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy$ a été calculée à la question 1.c

4.a. Puisque la loi $\mathcal{E}(1)$ est également la loi $\gamma(1)$, par indépendance des T_i et par stabilité des lois gamma, $\boxed{S_n \hookrightarrow \gamma(n).}$
D'autre part, les T_i sont indépendantes, identiquement distribuées, possèdent une espérance égale à 1 et une variance égale à 1.
Notons alors $\overline{S_n^*}$ la variable centrée réduite associée à S_n, c'est-à-dire $\overline{S_n^*} = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.
Par le théorème central limite, $\overline{S_n^*} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où X suit une loi normale centrée réduite.
En particulier, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant n) = \lim_{n\to+\infty} P(S_n - n \leqslant 0) = \lim_{n\to+\infty} P(\overline{S_n^*} \leqslant 0) = P(X \leqslant 0) = \Phi(0) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

4.b. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$P(|U_n| \geqslant \varepsilon) = P(U_n \geqslant \varepsilon) = P(T_{n+1} \geqslant \sqrt{n}\varepsilon).$$

Mais par l'inégalité de Markov, qui s'applique car T_{n+1} est une variable aléatoire positive possédant une espérance,

$$P(T_{n+1} \geqslant \varepsilon\sqrt{n}) \leqslant \frac{E(T_{n+1})}{\varepsilon\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Markov
N'oublions pas que l'inégalité de Markov ne s'applique que pour des variables aléatoires positives, et donc qu'il faut vérifier (et mentionner) la positivité avant d'utiliser l'inégalité.

Ceci prouve bien que $\boxed{U_n \xrightarrow{P} 0.}$

4.c. Puisque $\overline{S_n^*} \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ et que $\dfrac{T_{n+1}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} 0$, par le théorème de Slutsky, $\overline{S_n^*} + \dfrac{T_{n+1}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{L}} X + 0 = X$.
Et donc

$$P\left(S_{n+1} \leqslant n\right) = P(S_{n+1} - n \leqslant 0) = P\left(\frac{S_{n+1}-n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) = P\left(\overline{S_n^*} + \frac{T_{n+1}}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P(X \leqslant 0) = \boxed{\frac{1}{2}.}$$

5. En combinant les résultats des questions 1.a et 3.d, il vient

$$I_n = \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_0^n u^n e^{-u}\,du \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Et donc $\displaystyle\int_0^n u^n e^{-u}\,du \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\frac{n^{n+1}}{e^n}$.
D'autre part, nous savons que S_{n+1} suit une loi $\gamma(n+1)$, donc une densité de S_{n+1} est la fonction $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n!}x^n e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ de sorte que

$$P(S_{n+1} \leqslant n) = \int_0^n \frac{1}{n!}x^n e^{-x}\,dx.$$

Mais d'après 4.c, cette probabilité tend vers $\frac{1}{2}$, et donc $\displaystyle\int_0^n \frac{1}{n!}x^n e^{-x}\,dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$.
On en déduit donc que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\int_0^n x^n e^{-x}\,dx \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\frac{n^{n+1}}{e^n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.}$$

Rappel
On a $\Gamma(n+1) = n!$

Partie II. Quelques propriétés de la loi de Cauchy.

6.a. Dur de dire quelle réponse est attendue ici : on peut dire que l'imparité de l'arctangente est du cours, ou encore qu'il est connu que la bijection réciproque d'une fonction impaire est impaire.
Mais puisque l'énoncé semble attendre une preuve, redémontrons le résultat du cours.
Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$ et $\tan(\text{Arctan}(-x)) = -x$.
Or, la fonction tan est impaire[4], et donc $-x = \tan(-\text{Arctan}(x)) = \tan(\text{Arctan}(-x))$.
Puisque $-\text{Arctan}(x)$ et $\text{Arctan}(-x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, par bijectivité[5] de Arctan sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\text{Arctan}(-x) = \text{Arctan}(x)$: $\boxed{\text{la fonction Arctan est impaire.}}$

[4] Car quotient de sin, qui est impaire, par cos qui est paire.
[5] On n'utilise en fait ici que l'injectivité.

6.b. La fonction Arctan est de classe $\mathscr{C}^3$ puisque sa dérivée est $\mathscr{C}^2$. Donc par la formule de Taylor-Young, elle admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0.
Or, on a

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2},\ \text{Arctan}''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},\ \text{Arctan}^{(3)}(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x(1+x^2)}{(1+x^2)^3}.$$

Et donc[6], le développement limité d'ordre 3 de Arctan au voisinage de 0 est

$$\text{Arctan}(x) = \text{Arctan}(0) + \text{Arctan}'(0)x + \text{Arctan}''(0)\frac{x^2}{2} + \text{Arctan}^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
$$= x - \frac{2}{6}x^3 + o(x^3) = \boxed{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).}$$

[6] Toujours d'après la formule de Taylor-Young.

6.c. La dérivée seconde de Arctan(x) est négative sur $\mathbf{R}_+$, donc Arctan est concave sur $\mathbf{R}_+$. Par conséquent, elle est située en dessous de ses tangentes.
Mais la tangente de Arctan(x) en 0 est la droite d'équation $y = x$ et donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\boxed{\text{Arctan}(x) \leqslant x.}$
D'autre part, Arctan est croissante[7] sur $\mathbf{R}$. Or, $\text{Arctan}(0) = 0$, et donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\boxed{0 \leqslant \text{Arctan}(x).}$

Tangente
Rappelons que l'équation de la tangente en 0 se lit sur le développement limité : c'est le développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0.

[7] Car sa dérivée est positive, mais aussi directement car c'est la bijection réciproque d'une fonction croissante.

6.d. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $g(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors g est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car somme de fonctions dérivables, et

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Donc g est constante sur $\mathbf{R}_+^*$. De plus, $g(1) = 2\operatorname{Arctan}(1) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\boxed{\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

Fonction constante

Le fait que g soit constante car de dérivée nulle est valable car $\mathbf{R}_+^*$ est un **intervalle**. Par exemple, si on définit g de la même manière sur $\mathbf{R}^*$, alors sa dérivée est toujours nulle, mais elle n'est pas constante sur $\mathbf{R}^*$, qui n'est pas un intervalle. En revanche, elle est bien constante sur les deux intervalles $\mathbf{R}_-^*$ et $\mathbf{R}_+^*$.

7.a. Il est évident que $x \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}$ est continue et positive sur $\mathbf{R}$.
De plus, pour $A < B$, on a

$$\int_A^B \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}\,dx = \left[\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(x-\theta)\right]_A^B = \frac{\operatorname{Arctan}(B-\theta)}{\pi} - \frac{\operatorname{Arctan}(A-\theta)}{\pi}$$
$$\underset{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2\pi} + \frac{\pi}{2\pi} = 1.$$

Et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}\,dx$ converge et vaut 1.

Ainsi, $\boxed{x \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2} \text{ est bien une densité de probabilités.}}$

7.b. Par définition, X admet une espérance si et seulement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ converge.

Or, au voisinage de $+\infty$, $\frac{x}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\pi}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\pi x}$.

Et puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\pi x}$ diverge[8], par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} x f_X(x)\,dx$.

Et donc $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

[8] C'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$.

Remarque

On prouverait de même que l'intégrale de $x f_X(x)$ diverge aussi au voisinage de $-\infty$, mais ceci n'est pas nécessaire : puisqu'elle diverge au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ diverge, indépendamment de ce qu'il se passe en $-\infty$.

7.c. Contrairement à ce que demande la question, nous n'utilisons pas un repère orthonormé, dans lequel la courbe serait toute «écrasée» et peu lisible.

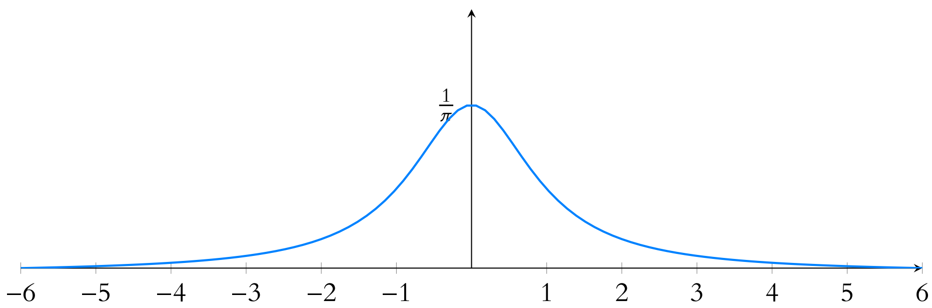


FIGURE 2 – La courbe représentative de f.

Méthode

Lorsqu'on demande de représenter une fonction f, il n'est pas besoin de faire un dessin parfait, ni d'essayer de calculer 10 valeurs de f pour placer correctement la courbe.
Le plus important est d'avoir une allure correcte, et de faire apparaître autant que possible les informations dont on dispose : les variations, les limites éventuelles, la parité/imparité, les valeurs qui auraient été calculées précédemment, la concavité, éventuellement une tangente si son équation est facile à obtenir.
Ici f est paire, de limite nulle en $+\infty$, décroissante sur $\mathbf{R}_+$ et vaut $1/\pi$ en 0. Toutes ces informations sont attendues sur la courbe.

8.a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$.
Mais pour $A < x$,

$$\int_A^x f_X(t)\,dt = \left[\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(t-\theta)\right]_A^x = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(x-\theta) - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(A-\theta) \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{\operatorname{Arctan}(x-\theta)}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ F_X(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(x-\theta)}{\pi} + \frac{1}{2}.}$$

8.b. Reprenons le résultat de la question précédente,

$$F_X(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\operatorname{Arctan}(x-\theta)}{\pi}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\operatorname{Arctan}(x-\theta)=0\Leftrightarrow x-\theta=0\Leftrightarrow x=\theta.$$

Ainsi, $\boxed{F_X(x)=\frac{1}{2}\text{ possède une unique solution qui est }\theta.}$

Partie III. La loi de la moyenne empirique.

9.a. La fonction $\varphi_{n,x}$ est continue sur $\mathbf{R}$, donc les éventuels problèmes de convergence de l'intégrale sont en $\pm\infty$.
Or, aussi bien au voisinage de $+\infty$ qu'au voisinage de $-\infty$, on a

$$\varphi_{n,x}(t)\underset{t\to\pm\infty}{\sim}\frac{1}{n^2t^4}.$$

Or, $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dt}{n^2t^4}$ et $\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{n^2t^4}$ sont des intégrales convergentes, donc par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\int_{-\infty}^{-1}\varphi_{n,x}(t)\,dt$ et $\int_{1}^{+\infty}\varphi_{n,x}(t)\,dt$ convergent.

Puisque $\int_{-1}^{1}\varphi_{n,x}(t)\,dt$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, elle converge,

et donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{n,x}(t)\,dt\text{ converge.}}$

Remarque

Nous venons de voir que $\varphi_{n,x}$ possède le même équivalent en $+\infty$ qu'en $-\infty$, mais ce n'est pas pour autant qu'il s'agit d'une fonction paire : il est impératif de donner des équivalents en $+\infty$ **et** en $-\infty$ pour étudier la nature de l'intégrale.

9.b. Une primitive de $t\mapsto\frac{2t}{1+t^2}$ est $t\mapsto\ln(1+t^2)$.
Une primitive de $t\mapsto\frac{2n(nt-x)}{1+(x-nt)^2}$ est $t\mapsto\ln(1+(x-nt)^2)$.
Par conséquent, pour $A<B$,

$$\begin{aligned}\int_A^B\psi_{n,x}(t)\,dt&=\left[\ln(1+t^2)-\ln(1+(x-nt)^2)\right]_A^B\\&=\ln\left(\frac{1+B^2}{1+(x-nB)^2}\right)-\ln\left(\frac{1+A^2}{1+(x-nA)^2}\right).\end{aligned}$$

Or, lorsque $A\to-\infty$, $\frac{1+A^2}{1+(x-nA)^2}\underset{A\to-\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$, et donc

$$\lim_{A\to-\infty}\ln\left(\frac{1+A^2}{1+(x-nA)^2}\right)=\ln\left(\frac{1}{n^2}\right)=-2\ln(n).$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{B}\psi_{n,x}(t)\,dt=\ln\left(\frac{1+B^2}{1+(x-nB)^2}\right)-2\ln(n)$.

De même, lorsque $B\to+\infty$, $\ln\left(\frac{1+B^2}{1+(x-nB)^2}\right)\underset{B\to+\infty}{\longrightarrow}-2\ln(n)$ et donc $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{n,x}(t)\,dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{n,x}(t)\,dt=-2\ln(n)+2\ln(n)=\boxed{0.}$$

9.c. Utilisons les valeurs de $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ données par l'énoncé :

$$\begin{aligned}\varphi_{n,x}(t)&=\frac{1}{\sigma_{n,x}}\left(\frac{2nxt}{1+t^2}+\frac{1+x^2-n^2}{1+t^2}-\frac{2n^3xt}{1+(x-nt)^2}+\frac{3n^2x^2+n^4-n^2}{1+(x-nt)^2}\right)\\&=\frac{1}{\sigma_{n,x}}\left(nx\left(\frac{2t}{1+t^2}-\frac{2n^2t-2nx}{1+(x-nt)^2}\right)+\frac{1+x^2-n^2}{1+t^2}+\frac{n^2x^2+n^4-n^2}{1+(x-nt)^2}\right)\\&=\frac{1}{\sigma_{n,x}}\left(nx\psi_{n,x}(t)+\frac{1+x^2-n^2}{1+t^2}+\frac{n^2x^2+n^4-n^2}{1+(x-nt)^2}\right).\end{aligned}$$

On a utilisé

$$3n^2x^2=2n^2x^2+n^2x^2.$$

Par conséquent, il vient[9]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{n,x}(t)\,dt=\frac{1}{\sigma_{n,x}}\left(nx\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{n,x}(t)\,dt}_{=0}+(1+x^2-n^2)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}+(n^2x^2+n^4-n^2)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+(x-nt)^2}\right).$$

[9] Il est facile de vérifier que toutes ces intégrales convergent.

Mais
$$\int_A^B \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan}(t)]_A^B = \operatorname{Arctan}(B) - \operatorname{Arctan}(A) \underset{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}{\longrightarrow} \pi.$$
De même,
$$\int_A^B \frac{dt}{1+(x-nt)^2} = \left[\frac{1}{n}\operatorname{Arctan}(nt-x)\right]_A^B \underset{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}{\longrightarrow} \frac{\pi}{n}.$$
Et donc
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t)\,dt &= \frac{1}{\sigma_{n,x}}\left(\left(1+x^2-n^2\right)\pi + n(x^2+n^2-1)\pi\right)\\ &= \frac{1+x^2-n^2+nx^2+n^3-n}{(x^2+(n+1)^2)(x^2+(n-1)^2)}\pi.\end{aligned}$$
Or, on a
$$\begin{aligned}(n+1)(x^2+(n-1)^2) &= (n+1)(x^2+n^2-2n+1)\\ &= nx^2+n^3-2n^2+n+x^2+n^2-2n+1\\ &= n^3+nx^2+x^2-n^2-n+1.\end{aligned}$$

Détails
Cette factorisation de $1+x^2-n^2+\dots$ ne sort pas de nulle part : au vu du résultat donné dans l'énoncé et de la valeur de l'intégrale obtenue précédemment, il fallait qu'elle soit vraie !

Et donc
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t)\,dt = \frac{(n+1)(x^2+(n-1)^2)}{(x^2+(n+1)^2)(x^2+(n-1)^2)}\pi = \boxed{\frac{(n+1)\pi}{x^2+(n+1)^2}}.$$

10.a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors
$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(X-\theta \leqslant x) = P(X \leqslant x+\theta) = \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{\pi} + \frac{1}{2}.$$
On reconnaît alors $\boxed{\text{la loi de Cauchy de paramètre } 0.}$

10.b. Puisque Y_1 et Y_2 sont indépendantes, et que leurs densités sont bornées[10], une densité de S_2 est donnée par la formule du produit de convolution :

[10] Par $\frac{1}{\pi}$.

$$f_{S_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(t)f_{Y_2}(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-t)^2}\,dt = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{1,x}(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\frac{1}{x^2+4}.$$
Ainsi, pour $x \in \mathbf{R}$, on a
$$P(S_2 \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_{S_2}(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{t^2+4}\,dt.$$
Mais, pour $A \leqslant x$,
$$\begin{aligned}\int_A^x \frac{2}{\pi}\frac{1}{t^2+4} &= \frac{1}{2\pi}\int_A^x \frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\,dt\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)\right]_A^x = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{A}{2}\right)\right)\\ &\underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On a divisé numérateur et dénominateur par 4.

Et alors, $P\left(\overline{Y_2} \leqslant x\right) = P(S_2 \leqslant 2x) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(x)}{\pi} + \dfrac{1}{2}$.
On en déduit que $\boxed{\overline{Y_2} \text{ suit la loi de Cauchy de paramètre } 0.}$

Remarque
Nous sommes ici passés par la fonction de répartition car l'énoncé le demandait, mais une fois une densité de S_2 connue, il était aisé d'obtenir une densité de $\overline{Y_2}$ par transformation affine. Et alors on aurait reconnu la densité de la loi $\mathscr{C}_0$.

10.c. Au vu des résultats précédents, il semble légitime de supposer que $\overline{Y_n}$ suit la loi $\mathscr{C}_0$.
Montrons-le par récurrence sur n.
La récurrence est largement initialisée puisque nous savons déjà que $\overline{Y_1}$ et $\overline{Y_2}$ suivent la loi $\mathscr{C}_0$.

Supposons donc que $\overline{Y_n}$ suit la loi $\mathscr{C}_0$.
Alors, par transformation affine, une densité de $S_n = n\overline{Y_n}$ est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{n\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}.$$

De plus, d'après le lemme des coalitions, S_n et Y_{n+1} sont indépendantes, et donc une densité de S_{n+1} est donnée par

$$f_{S_{n+1}(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(t)f_{Y_{n+1}}(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{n}\right)^2}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-t)^2}\,dt.$$

Procédons au changement de variable[11] $u = \dfrac{t}{n}$, de sorte que

[11] Affine.

$$f_{S_{n+1}}(x) = \frac{1}{n\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\frac{1}{1+(x-nu)^2}n\,du = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{n,x}(u)\,du = \frac{1}{\pi}\frac{n+1}{x^2+(n+1)^2}.$$

Alors, par transformation affine, une densité de $\overline{Y_{n+1}} = \dfrac{S_{n+1}}{n+1}$ est

$$x \mapsto (n+1)f_{S_{n+1}}((n+1)x) = \frac{1}{\pi}\frac{(n+1)^2}{((n+1)x)^2+(n+1)^2} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Et donc $\overline{Y_{n+1}} \hookrightarrow \mathscr{C}_0$.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\boxed{\overline{Y_n} \hookrightarrow \mathscr{C}_0.}$

10.d. Les Y_i n'admettent pas d'espérance[12], donc la loi faible des grands nombres ne s'applique pas à $(\overline{Y_n})_{n\geqslant 1}$.

[12] Et donc pas de variance.

11.a. La matrice A est une matrice à 12000 lignes et 200 colonnes. Si l'on calcule la moyenne de chacune des lignes, on obtient 12000 simulations de $\overline{Y_{200}}$.

```
N = 12000 ;n=200 ;
A = cauchy(N,n) ;
MoyEmp = sum(A,'c')/200
```

11.b. Le premier histogramme donne approximativement la répartition des valeurs prises par $\overline{Y_{200}}$.
Le deuxième histogramme donne la répartition des valeurs prises par Y_1, puisque la première colonne de A contient 12 000 simulations de Y_1.
Ces deux histogrammes sont très proches, et donc ceci semble bien confirmer le fait que Y_1 et $\overline{Y_{200}}$ suivent toutes deux la même loi, qui est donc la loi $\mathscr{C}_0$ puisque $Y_1 \hookrightarrow \mathscr{C}_0$.

Hasard
Pour obtenir la «vraie» répartition des valeurs prises par $\overline{Y_{200}}$, il faudrait tracer sa fonction de répartition. Ici, nous nous basons sur un échantillon (de 12 000 simulations), et donc il y a une part de hasard dans le résultat : il se pourrait que nous ayons simulé un «mauvais» échantillon et que l'histogramme obtenu ne reflète en rien les valeurs prises par $\overline{Y_{200}}$. La grande taille de l'échantillon rend ceci assez peu probable.

Remarque : notons que le sujet aurait également pu nous demander d'écrire la fonction cauchy en utilisant la méthode d'inversion vue en TP.
En effet, nous connaissons la fonction de répartition de X est $F_X(x) = \frac{1}{2} + \dfrac{\operatorname{Arctan}(x)}{\pi}$.
Et donc sa bijection réciproque est $F_X^{-1} : y \mapsto \tan\left(\pi\left(y-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.
Et donc si U suit la loi uniforme sur $]0,1[$ (qui se simule en `Scilab` à l'aide de `rand`), $F_X^{-1}(U)$ suit la loi de Cauchy de paramètre 0.

Partie IV. La loi de la médiane empirique.

12.a. L'événement B est réalisé si et seulement l'une des variables $X_1,\dots,X_{2n+1}$ prend une valeur dans $]x, x+h]$, que n prennent une valeur inférieure ou égale à x et que les n dernières prennent une valeur supérieure strictement à $x+h$.
Or, il y a $\dbinom{2n+1}{n}$ manières de choisir les variables inférieures à x, et pour chacune d'entre elles, la probabilité qu'elle soit inférieure à x vaut $F_X(x)$.
Une fois choisies ces n variables, il y a $n+1$ manières de choisir la variable prenant ses valeurs dans $]x, x+h]$, ce qui se produit avec probabilité $F_X(x+h) - F_X(x)$.

Enfin, la probabilité que chacune des n autres variables prenne une valeur supérieure à $x+h$ est $(1-F_X(x+h))^n$.
Ainsi, par indépendance des X_i,

$$\boxed{P(B) = (n+1)\binom{2n+1}{n}(F_X(x))^n\,(F_X(x+h)-F_X(x))\,(1-F_X(x+h))^n\,.}$$

Dénombrement
Notons que, comme souvent en dénombrement, il y a plusieurs moyens d'arriver au résultat. Il était par exemple possible de choisir d'abord une variable parmi les $2n+1$ (celle qui prend sa valeur entre x et $x+h$), puis d'en choisir n parmi les $2n$ restantes.
On obtenait alors $(2n+1)\binom{2n}{n}$ au lieu de $(n+1)\binom{2n+1}{n}$.
Fort heureusement, ces deux nombres sont égaux, et donc le résultat ne dépend pas de la méthode choisie !

Plus rigoureusement : la démonstration ci-dessus me satisfait totalement, et devrait satisfaire n'importe quel correcteur, même si elle n'est pas totalement rigoureuse.
Essayons d'en donner une preuve un peu plus formalisée, que le lecteur déjà convaincu pourra passer.
Quant au lecteur en quête de rigueur, il pourra essayer de comprendre cette preuve... et se convaincre qu'il vaut finalement mieux adopter la rédaction ci-dessus !

Notons I l'ensemble défini par

$$I = \left\{(A,B,C)\in\mathscr{P}(\llbracket 1,2n+1\rrbracket)^3 \,/\, A\cap B = B\cap C = A\cap C = \emptyset, \mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(C) = n\right\}.$$

Autrement dit, un élément (A,B,C) de I est une partition de $\llbracket 1,2n+1\rrbracket$ en trois sous-ensembles deux à deux disjoints, A et C contenant n éléments chacun et B contenant donc le dernier élément de $\llbracket 1,2n+1\rrbracket$.
L'idée est que A doit correspondre au numéros des variables $X_1,\dots,X_{2n+1}$ inférieure à x, le seul élément de B est le numéro de la variable comprise entre x et $x+h$ et les éléments de C sont les numéros des variables plus grandes que $x+h$.
Alors

$$B = \bigcup_{(A,B,C)\in I}\left(\bigcap_{i\in A}[X_i\leqslant x]\cap\bigcap_{j\in B}[x<X_j\leqslant x+h]\cap\bigcap_{\ell\in C}[X_\ell > x+h]\right),$$

où l'union est disjointe (i.e. les événements de l'union sont deux à deux incompatibles).
Or, pour $(A,B,C)\in I$ fixé, par indépendance de $X_1,\dots,X_{2n+1}$, on a

$$\begin{aligned}P\left(\bigcap_{i\in A}[X_i\leqslant x]\cap\bigcap_{j\in B}[x<X_j\leqslant x+h]\cap\bigcap_{\ell\in C}[X_\ell > x+h]\right) &= \prod_{i\in A}P(X_i\leqslant x)\times P(x<X_j<x+h)\times\prod_{\ell\in C}P(X_\ell>x+h)\\ &= (F_X(x))^n\,(F_X(x+h)-F_X(x))\,(1-F_X(x+h))^n\,.\end{aligned}$$

Et donc, d'après l'incompatibilité mentionnée plus haut,

$$P(B) = \sum_{(A,B,C)\in I}(F_X(x))^n\,(F_X(x+h)-F_X(x))\,(1-F_X(x+h))^n = \mathrm{Card}(I)\,(F_X(x))^n\,(F_X(x+h)-F_X(x))\,(1-F_X(x+h))^n\,.$$

Il ne nous reste donc qu'à déterminer le cardinal de I.
Mais, choisir un élément de I, c'est choisir les n éléments de A : il y a $\binom{2n+1}{n}$ manières de le faire.
Puis une fois les éléments de A choisis, il faut choisir, parmi les $n+1$ éléments restants, celui qui ira dans B : il y a $n+1$ choix possibles.
Et alors automatiquement, les n éléments restants forment C.
Et donc $\mathrm{Card}(I) = (n+1)\binom{2n+1}{n}$, de sorte que

$$\boxed{P(B) = (n+1)\binom{2n+1}{n}(F_X(x))^n\,(F_X(x+h)-F_X(x))\,(1-F_X(x+h))^n\,.}$$

12.b. Puisque $B\subset A$, $P(B)\leqslant P(A)$ et donc $\boxed{P(A)-P(B)\geqslant 0.}$
D'autre part, par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[Z=0],[Z=1],[Z\geqslant 2]\}$, on a

$$P(A) = \underbrace{P(A\cap[Z=0])}_{=0} + P(A\cap[Z=1]) + P(A\cap[Z=2]) = P(B) + P(A\cap[Z=2]).$$

Détails
Les événements A et $[Z=0]$ sont incompatible car on ne peut avoir à la fois la $\widetilde{X_{n+1}}$ qui prend une valeur dans $]x,x+h]$ et aucune des X_i qui prend ses valeurs dans le même intervalle.

Et donc $P(A)-P(B)=P(A\cap[Z\geqslant 2])\leqslant P(Z\geqslant 2)$. Mais, il est aisé de calculer $P(Z\geqslant 2)$: il y a $\binom{2n+1}{2}=n(2n+1)$ manières de choisir 2 variables parmi $X_1,X_2,\dots,X_{2n+1}$, et pour chacune de ces variables, la probabilité qu'elle prenne une valeur comprise entre x et $x+h$ est $F_X(x+h)-F_X(x)$.
Ainsi, $P(Z\geqslant 2)=n(2n+1)\left(F_X(x+h)-F_X(x)\right)^2$.
Et donc, en posant $K=n(2n+1)$, on a bien

$$\boxed{0\leqslant P(A)-P(B)\leqslant K\left(F_X(x+h)-F_X(x)\right)^2.}$$

12.c. Notons $F_{\widehat{X}_{n+1}}$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$.
Alors $P(A)=P(x<\widehat{X}_{n+1}\leqslant x+h)=F_{\widehat{X}_{n+1}}(x+h)-F_{\widehat{X}_{n+1}}(x)$.
Et donc, en divisant l'inégalité de la question 12.b par $|h|>0$, il vient

$$0\leqslant\left|\frac{F_{\widehat{X}_{n+1}}(x+h)-F_{\widehat{X}_{n+1}}(h)}{h}-\frac{P(B)}{h}\right|\leqslant\left|K\frac{F_X(x+h)-F_X(x)}{h}\left(F_X(x+h)-F_X(h)\right)\right|.$$

Or, lorsque $h\to 0$, $\dfrac{F_X(x+h)-F_X(h)}{h}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}F'_X(x)=f_X(x)$.
Mais d'autre part, F_X étant continue, $\lim\limits_{h\to 0}F_X(x+h)-F_X(x)=0$ et donc

$$\lim_{h\to 0}K\frac{F_X(x+h)-F_X(x)}{h}\left(F_X(x+h)-F_X(h)\right)=0.$$

Rappel
F_X est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ tout entier, et
$$F'_X=f_X.$$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{F_{\widehat{X}_{n+1}}(x+h)-F_{\widehat{X}_{n+1}}(h)}{h}-\frac{P(B)}{h}=0.$$

Mais d'après la question 12.a,

$$\frac{P(B)}{h}=(n+1)\binom{2n+1}{n}(F_X(x))^n\,\frac{F_X(x+h)-F_X(x)}{h}\,(1-F_X(x))^n\underset{h\to 0}{\longrightarrow}(n+1)\binom{2n+1}{n}(F_X(x))^n\,(1-F_X(x))^n\,f_X(x).$$

On en déduit donc que

$$\lim_{h\to 0}\frac{F_{\widehat{X}_{n+1}}(x+h)-F_{\widehat{X}_{n+1}}(h)}{h}=(n+1)\binom{2n+1}{n}(F_X(x))^n\,(1-F_X(x))^n\,f_X(x).$$

Ceci prouve que $F_{\widehat{X}_{n+1}}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, et que sa dérivée est $x\mapsto(n+1)\binom{2n+1}{n}(F_X(x))^n\,(1-F_X(x))^n\,f_X(x)$.
Cette dérivée est continue car F_X et f_X sont continues, et donc $F_{\widehat{X}_{n+1}}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, ce qui prouve que $\boxed{\widehat{X}_{n+1}\text{ est une variable à densité.}}$
L'une de ses densités en est alors donnée par

$$\boxed{f_{\widehat{X}_{n+1}}:x\mapsto(n+1)\binom{2n+1}{n}(F_X(x))^n\,(1-F_X(x))^n\,f_X(x).}$$

13.a. Au voisinage de $+\infty$, $f_X(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{x^2}$ et $F_X(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}1$.
D'autre part, pour $x>\theta$,

$$\begin{aligned}1-F_X(x)&=\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{Arctan}(x-\theta)}{\pi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x-\theta}\right)\right)\\&=\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x-\theta}\right)\\&\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\pi}\frac{1}{x-\theta}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\pi}\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

C'est le résultat de la question 6.d.

Équivalent
On a $\operatorname{Arctan}(u)\underset{u\to 0}{\sim}u$, ce qui s'obtient à l'aide du développement limité d'ordre 1 de l'arctangente en 0.

Et donc $(1-F_X(x))^n\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\pi^n}\dfrac{1}{x^n}$.
Par produit d'équivalents, on obtient donc

$$xf_{\widehat{X}_{n+1}}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x(n+1)\binom{2n+1}{n}\frac{1}{\pi^n}\frac{1}{x^n}\frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2}=\boxed{(n+1)\binom{2n+1}{n}\frac{1}{\pi^{n+1}}\frac{1}{x^{n+1}}.}$$

13.b. La fonction $x \mapsto x f_{\widehat{X}_{n+1}}(x)$ est continue sur $\mathbf{R}$.

Au voisinage de $+\infty$, l'équivalent de la question précédente prouve que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x f_{\widehat{X}_{n+1}}(x)\,dx$ converge, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente.

Afin d'étudier $f_{\widehat{X}_{n+1}}(x)$ au voisinage de $-\infty$, remarquons que $f_X(2\theta - x) = f_X(x)$.

Alors en procédant au changement de variable $u = 2\theta - t$, il vient pour $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f_X(2\theta - t)\,dt = \int_{2\theta - x}^{+\infty} f_X(u)\,du \\ &= P(X \geqslant 2\theta - x) = 1 - F_X(2\theta - x) \underset{x \to -\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\frac{1}{-x}. \end{aligned}$$

D'autre part, $1 - F_X(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc

$$x f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} (n+1)\binom{2n+1}{n}\frac{1}{\pi^{n+1}}\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}.$$

Puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^{n+1}}$ converge, par critère de comparaison pour les fonctions de signe constant[13], $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} x f_{\widehat{X}_{n+1}}(x)\,dx$ converge.

Et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\widehat{X}_{n+1}}(x)\,dx$ converge, de sorte que $\boxed{\widehat{X}_{n+1} \text{ admet une espérance.}}$

13.c. La variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$ est égale à[14] $g_{n+1}(X_1, X_2, \dots, X_{2n+1})$, où g_{n+1} ne dépend pas de θ : c'est donc $\boxed{\text{un estimateur de } \theta.}$

Par transformation affine, une densité de $\widehat{X}_{n+1} - \theta$ est

$$\begin{aligned} h_{n+1} : x \mapsto f_{\widehat{X}_{n+1}}(x+\theta) &= (n+1)\binom{2n+1}{n}\left(F_X(x+\theta)\right)^n\left(1 - F_X(x+\theta)\right)^n f_X(x+\theta) \\ &= (n+1)\binom{2n+1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{\pi}\right)^n\left(\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{\pi}\right)^n \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Cette densité est alors paire, et donc $x \mapsto x h_{n+1}(x)$ est impaire.

Par conséquent[15],

$$E(\widehat{X}_{n+1} - \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x h_{n+1}(x)\,dx = 0.$$

Ainsi, $E(\widehat{X}_{n+1}) = \theta$, et donc $\boxed{\widehat{X}_{n+1} \text{ est un estimateur sans biais de } \theta.}$

13.d. Nous savons que $\widehat{X}_{n+1}$ admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2.

D'après le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\widehat{X}_{n+1}}(x)\,dx$ converge.

Mais, au voisinage de $\pm\infty$, $x^2 f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} (n+1)\binom{2n+1}{n}\frac{1}{\pi^{n+1}}\frac{1}{x^n}$.

Et donc, par comparaison à une intégrale de Riemann, $\widehat{X}_{n+1}$ admet une variance si et seulement si $\boxed{n \geqslant 2.}$

14.a. Nous avons déjà dit[16] que $f_X(2\theta - t) = f_X(t)$ et que donc $F_X(x) = 1 - F_X(2\theta - x)$.

Donc il vient

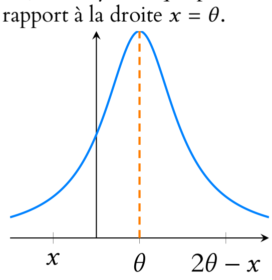
$$\begin{aligned} f_{\widehat{X}_{n+1}}(2\theta - x) &= (n+1)\binom{2n+1}{n}\left(F_X(2\theta - x)\right)^n\left(1 - F_X(2\theta - x)\right)^n f_X(2\theta - x) \\ &= (n+1)\binom{2n+1}{n}\left(1 - F_X(x)\right)^n\left(1 - (1 - F_X(x))\right)^n f_X(x) \\ &= (n+1)\binom{2n+1}{n}\left(F_X(x)\right)^n\left(1 - F_X(x)\right)^n f_X(x) = \boxed{f_{\widehat{X}_{n+1}}(x).} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$P\left(\left|\widehat{X}_{n+1} - \theta\right| \geqslant \varepsilon\right) = P\left(\widehat{X}_{n+1} - \theta \geqslant \varepsilon\right) + P\left(\widehat{X}_{n+1} - \theta \leqslant -\varepsilon\right)$$

Graphiquement

Ceci signifie que la courbe de f_X est symétrique par rapport à la droite $x = \theta$.



[13] $\dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}$ est négatif sur $\mathbf{R}_-$.

[14] Avec les notations du début de la partie IV.

[15] On sait déjà que l'intégrale converge, hypothèse indispensable pour utiliser l'imparité.

[16] À la question 13.b.

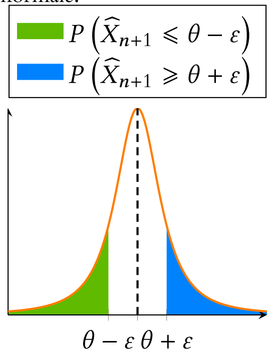
$$= P\left(\widehat{X}_{n+1} \geqslant \theta + \varepsilon\right) + P\left(\widehat{X}_{n+1} \leqslant \theta - \varepsilon\right)$$
$$= \int_{\theta+\varepsilon}^{+\infty} f_{\widehat{X}_{n+1}}(t)\,dt + F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - \varepsilon).$$

Mais, dans l'intégrale, procédons au changement de variable $u = 2\theta - t$. Il vient alors

$$\begin{aligned}\int_{\theta+\varepsilon}^{+\infty} f_{\widehat{X}_{n+1}}(t)\,dt &= \int_{\theta+\varepsilon}^{+\infty} f_{\widehat{X}_{n+1}}(2\theta - t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\theta-\varepsilon} f_{\widehat{X}_{n+1}}(u)\,du \\ &= F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - \varepsilon).\end{aligned}$$

Graphiquement

Cette relation s'intérprète graphiquement en termes d'aires. On pourra notamment comparer avec ce que l'on connait pour une loi normale.



Et donc

$$\boxed{P\left(\left|\widehat{X}_{n+1} - \theta\right| \geqslant \varepsilon\right) = 2F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - \varepsilon).}$$

14.b. Au vu du résultat de la question précédente, il va nous falloir prouver que $F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Rappelons donc que $F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - \varepsilon) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\theta-\varepsilon} (n+1)\binom{2n+1}{n}(F_X(x))^n(1 - F_X(x))^n f_X(x)\,dx$.

Commençons par déterminer un équivalent de $\displaystyle\binom{2n+1}{n}$.

Par définition, on a $\displaystyle\binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}$.

En utilisant la formule de Stirling prouvée dans la partie I, il vient donc

$$\binom{2n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n+1)^{2n+1}e^{-2n-1}\sqrt{2\pi(2n+1)}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(n+1)^{n+1}e^{-n-1}\sqrt{2\pi(n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n+1)^{2n+1}}{n^n(n+1)^{n+1}}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Or, $(2n+1)^{2n+1} = (2n)^{2n+1}\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2n+1}$ avec

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n+1} = e^{(2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = e^{(2n+1)\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{1+\frac{1}{2n}+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e.$$

Et donc $(2n+1)^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{2n+1}n^{2n+1} \times e$.

Le même type de calculs prouve que $(n+1)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e \times n^{n+1}$.

Et donc

$$\binom{2n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+1}n^{2n+1}e}{n^n n^{n+1}e}\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Une rapide[17] étude de la fonction $t \mapsto t(1-t)$ prouve que pour tout $t \in [0,1]$, $t(1-t) \leqslant \dfrac{1}{4}$, avec égalité si et seulement si $t = \dfrac{1}{2}$.

En particulier pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F_X(x)(1 - F_X(x)) \leqslant \dfrac{1}{4}$, avec égalité si et seulement si $F_X(x) = \dfrac{1}{2}$, soit si et seulement si $x = \theta$.

Comme la fonction $x \mapsto F_X(x)(1 - F_X(x))$ est croissante sur $]-\infty, \theta - \varepsilon[$, elle y est alors majorée par $A = F_X(\theta - \varepsilon)(1 - F_X(\theta - \varepsilon)) < \dfrac{1}{4}$.

Et donc il vient

$$0 \leqslant F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - \varepsilon) \leqslant (n+1)\binom{2n+1}{n}A^n f_X(x)\,dx = A^n(n+1)\binom{2n+1}{n}F_X(\theta - \varepsilon).$$

Mais en utilisant les équivalents précédemment trouvés, il vient

$$A^n(n+1)\binom{2n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+1}n}{\sqrt{\pi n}}A^n = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(4A)^n\sqrt{n}.$$

[17] Et classique !

Or, $0 < A < \dfrac{1}{4}$ et donc $0 < 4A < 1$, de sorte que, par croissances comparées,

$$\sqrt{n}(4A)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta-\varepsilon) = 0$.
D'après la majoration de la question précédente, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\widehat{X}_{n+1}-\theta\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$:

$\boxed{\left(\widehat{X}_{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge en probabilité vers } \theta.}$

Plus généralement
Le même raisonnement prouve qu'une suite de variables aléatoires qui converge en probabilités vers une constante converge en loi vers cette même constante.
Un résultat classique (mais hors programme) affirme qu'une suite de variables aléatoires converge en probabilité vers une constante **si et seulement si** elle converge en loi vers cette constante.

14.c. Il est sûrement possible de prouver cette convergence en revenant à la définition de la convergence en loi et en utilisant le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\widehat{X}_{n+1}-\theta\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

Soyons plus astucieux, et utilisons le théorème de Slutsky : on a $0 \xrightarrow{\mathscr{L}} 0$ et $\widehat{X}_{n+1} \xrightarrow{P} \theta$, où θ est une constante.
Alors $0 + \widehat{X}_{n+1} \xrightarrow{\mathscr{L}} 0 + \theta$: $\left(\widehat{X}_{n+1}\right)_n$ converge en loi vers θ.

15.a. À la question 13.c, nous avons déjà donné une densité h_{n+1} de $\widehat{X}_{n+1}-\theta$.
Par transformation affine, une densité de $W_{n+1} = \dfrac{2\sqrt{2n+1}}{\pi}\left(\widehat{X}_{n+1}-\theta\right)$ est donc

$$\begin{aligned}
f_{W_{n+1}}(x) &= \frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}} h_{n+1}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)\\
&= \frac{n+1}{2\sqrt{2n+1}}\binom{2n+1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)}{\pi}\right)^n\left(\frac{1}{2}-\frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)}{\pi}\right)^n \frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)^2}\\
&= \boxed{\frac{n+1}{2\sqrt{2n+1}}\binom{2n+1}{n}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)\right)^2\right]^n\left(1+\frac{\pi^2x^2}{4(2n+1)}\right)^{-1}}.
\end{aligned}$$

Détails
$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

15.b. Commençons par remarquer que

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)\right)^2\right]^n &= \frac{1}{4^n}\left[1-\frac{4}{\pi^2}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)\right)^2\right]^n\\
&= \frac{1}{4^n}\exp\left(n\ln\left(1-\frac{4}{\pi^2}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)\right)^2\right)\right).
\end{aligned}$$

Mais $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$\begin{aligned}
n\ln\left(1-\frac{4}{\pi^2}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)\right)^2\right) &\underset{n\to+\infty}{\sim} -n\frac{4}{\pi^2}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)\right)^2\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{4n}{\pi^2}\frac{\pi^2}{4(2n+1)}x^2\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

Rappel
Il a été prouvé plus tôt que
$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to0}{\sim} x.$$

Enfin, par continuité de l'exponentielle,

$$\left[1-\frac{4}{\pi^2}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}x\right)\right)^2\right]^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

D'autre part, nous connaissons déjà des équivalents des autres termes, donc

$$f_{W_{n+1}}(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2\sqrt{2n}}\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{\pi n}}\frac{1}{4^n}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}.$$

Remarque
Le résultat admis dans l'énoncé, qui s'appelle le lemme de Scheffé, nous dit que pour des variables à densité, il est possible de prouver la convergence en loi en étudiant la convergence de la suite des densités plutôt que celle de la suite des fonctions de répartitions (qui est la définition de la convergence en loi).

15.c. Puisque W_{n+1} converge en loi vers T,

$$\lim_{n\to+\infty} P(-t_\alpha \leqslant W_{n+1} \leqslant t_\alpha) = P(-t_\alpha \leqslant T \leqslant t_\alpha) = \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = \Phi(t_\alpha) - (1 - \Phi(t_\alpha)) = 1 - \alpha.$$

Mais d'autre part,

$$\begin{aligned} P(-t_\alpha \leqslant W_{n+1} \leqslant t_\alpha) &= P\left(-t_\alpha \leqslant \frac{2\sqrt{2n+1}}{\pi}\left(\widehat{X}_{n+1} - \theta\right) \leqslant t_\alpha\right) \\ &= P\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}t_\alpha \leqslant \theta - \widehat{X}_{n+1} \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}t_\alpha\right) \\ &= P\left(\widehat{X}_{n+1} - \frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}t_\alpha \leqslant \theta \leqslant \widehat{X}_{n+1} + \frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}t_\alpha\right). \end{aligned}$$

Ainsi, nous venons de prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\widehat{X}_{n+1} - \frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}t_\alpha \leqslant \theta \leqslant \widehat{X}_{n+1} + \frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}t_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

et donc $\boxed{\left[\widehat{X}_{n+1} - \frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}t_\alpha, \widehat{X}_{n+1} + \frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}t_\alpha\right]}$ est un intervalle de confiance asymptotique pour θ, au niveau de confiance $1 - \alpha$.
Remarquons que le milieu de cet intervalle est bien $\widehat{X}_{n+1}$.

16. Chaque ligne de A correspond à une réalisation du $(2n+1)$-échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_{2n+1})$. Si on trie cette matrice ligne par ligne, alors, à chaque fois, la $n+1$-ème colonne contiendra une réalisation de $\widehat{X}_{n+1}$.

```
A = cauchy(p,2*n+1) ;
S = gsort(A,'c') ;
MedianeEmp = S( :,n+1) ;
W = MedianeEmp * 2*sqrt(2*n+1)/%pi ;
```

Maths II 2016

Sujet : Copules et simulation de couples de variables aléatoires **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : variables à densité, couples de variables aléatoires, calcul différentiel d'ordre 2, `Scilab`

Commentaires : un sujet moins probabiliste qu'à l'accoutumée, mais qui met en œuvre un grand nombre de techniques d'analyse à une et plusieurs variables.

La simulation de vecteurs aléatoires dont les composantes ne sont pas indépendantes intervient dans l'évaluation de risques cumulés dans des domaines tels que l'assurance, la finance, la médecine ou l'écologie.
On résume les liaisons entre les composantes à l'aide de fonctions de plusieurs variables appelées copules.
L'objet du problème consiste à présenter cette notion de copule dans le cadre de la simulation d'un vecteur aléatoire à deux composantes.
On suppose que toutes les variables aléatoires et tous les vecteurs aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On rappelle que la loi d'un vecteur aléatoire (X, Y) à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ est caractérisée par la fonction $F_{(X,Y)}$ définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $F_{(X,Y)}(x, y) = P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y])$. On dit que $F_{(X,Y)}$ est la *fonction de répartition conjointe* de X et Y.

Partie I. Simulation d'une variable aléatoire à densité.

1. a. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

   b. Soit V une variable aléatoire telle que $V(\Omega) = [0, \pi/2[$ suivant la loi uniforme sur $[0, \pi/2[$.
   On pose $X = \tan^2(V)$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité.

   c. En déduire que la fonction $f \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

2. a. Compléter le code `Scilab` de la fonction `simulX` suivante de sorte que son application à l'entier N ($N \geqslant 2$) fournisse une matrice colonne contenant N simulations indépendantes de la variable aléatoire X.

```
function x = simulX(N)
  u = rand(...,...) ;
  x = ones(u) ; // matrice de meme format que u
  for i = 1 :N
    x(i,1) = ......
  end ;
endfunction
```

   b. Après avoir affecté une valeur entière supérieure ou égale à 2 à la variable N, on exécute les commandes suivantes :

```
x = simulX(N) ;
y = 0 ;
for i = 1 :N if x(i,1)>1 then y = y+1 ; end ; end ;
q = y/N ;
```

   Trouver la loi d'une variable aléatoire dont la valeur de y est, en fin de boucle, une simulation.
   De quel nombre peut-on s'attendre que q soit proche lorsque la valeur affectée à N est grande et pourquoi ?

3. Soit X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition est notée F_X.
   Soit p un réel de $]0, 1[$. On pose : $K_p = \{x \in \mathbf{R};\ F_X(x) = p\}$ et $J_p = \{x \in \mathbf{R} :\ F_X(x) < p\}$.

   a. Justifier que les deux ensembles J_p et K_p ne sont pas vides et montrer que si $a \in J_p$ et $b \in K_p$, on a nécessairement : $a < b$.

   b. On pose : $G_X(p) = \inf(K_p)$. Justifier l'existence de $G_X(p)$ et établir l'égalité : $F_X(G_X(p)) = p$.

   c. En déduire pour tout x réel, l'équivalence : $x < G_X(p) \iff F_X(x) < p$.

   d. Soit U une variable aléatoire telle que $U(\Omega) =]0, 1[$ et qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que la variable aléatoire $G_X(U)$ suit la même loi que X.

   e. On suppose que X admet pour densité la fonction f définie dans la question 1.c) et que p n'est plus fixé. Déterminer la fonction $G_X : p \mapsto G_X(p)$ définie sur $]0, 1[$.

Partie II. Fonction de répartition conjointe de deux variables aléatoires de lois uniformes.

4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires et F la fonction de répartition conjointe de X et Y. Soit $x \in \mathbf{R}$.
   a. Montrer que la fonction $y \mapsto F(x, y)$ est croissante sur $\mathbf{R}$.
   b. Établir l'égalité : $[X \leqslant x] = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} ([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant n])$.
   c. Montrer que $F(x, y)$ tend vers $P([X \leqslant x])$ lorsque y tend vers $+\infty$.
   d. Quelle est la limite de $F(x, y)$ lorsque y tend vers $-\infty$?
   e. Soient a, a', b, b' des réels vérifiant : $a \leqslant a$ et $b \leqslant b'$. On pose : $A = [a < X \leqslant a']$ et $B = [b < Y \leqslant b']$.
      i. Exprimer la probabilité $P(A \cap B)$ en fonction de $P([X \leqslant a] \cap B)$ et $P([X \leqslant a'] \cap B)$.
      ii. Établir l'égalité : $P(A \cap B) = F(a', b') - F(a', b) - F(a, b') + F(a, b)$.

Dans les questions 5 et 6, on note U et V deux variables aléatoires suivant chacune la loi uniforme sur $[0, 1]$ et $F_{(U,V)}$ leur fonction de répartition conjointe.
On note C la restriction de $F_{(U,V)}$ à $[0, 1]^2$: $\forall (u, v) \in [0, 1]^2$, $C(u, v) = P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v])$.
Pour tout couple $(u, v) \in [0, 1]^2$, on pose : $C_+(u, v) = \min\{u, v\}$ et $C_-(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$.
Pour $(u, v) \in [0, 1]^2$, on note $\overline{[U > u] \cup [V > v]}$ l'événement contraire de l'événement $[U > u] \cup [V > v]$.
On rappelle que si deux vecteurs aléatoires (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) ont même loi et si g est une fonction continue sur $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, alors les variables aléatoires $g(X_1, Y_1)$ et $g(X_2, Y_2)$ ont même loi.

5. a. Comparer pour tout $(u, v) \in [0, 1]^2$, les trois événements : $\overline{[U > u] \cup [V > v]}$, $[U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]$ et $[U \leqslant u]$.
   b. Justifier pour tout $(u, v) \in [0, 1]^2$, la double inégalité : $u + v - 1 \leqslant C(u, v) \leqslant u$.
   c. En déduire l'encadrement suivant : $\forall (u, v) \in [0, 1]^2$, $C_-(u, v) \leqslant C(u, v) \leqslant C_+(u, v)$.
6. a. Calculer $F_{(U,U)}(x, y)$ selon les valeurs du couple (x, y) de $\mathbf{R}^2$.
   b. Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé, une ligne de niveau pour la fonction de deux variables $F_{(U,U)}$, correspondant à une valeur de la fonction strictement comprise entre 0 et 1.
   Hachurer sur la même figure, l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ pour lesquels $F_{(U,U)}(x, y) = x$.
   c. Montrer que C est égale à C_+ si et seulement si les variables aléatoires U et V sont égales presque sûrement.
   d. Calculer la fonction de répartition conjointe $F_{(U,1-U)}$ et donner une condition nécessaire et suffisante portant sur U et V pour que C soit égale à C_-.

Partie III. Copules

On appelle *copule* toute fonction Φ définie sur $[0, 1]^2$, à valeurs réelles, vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\forall u \in [0, 1]$, $\Phi(u, 0) = \Phi(0, u) = 0$;
- $\forall u \in [0, 1]$, $\Phi(u, 1) = \Phi(1, u) = u$;
- $\forall (u, u', v, v') \in [0, 1]^4$, $u \leqslant u'$ et $v \leqslant v' \Longrightarrow \Phi(u', v') - \Phi(u', v) - \Phi(u, v') + \Phi(u, v) \geqslant 0$.

On appelle *copule à densité* toute copule Φ dont la restriction à l'ouvert $]0, 1[^2$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, 1[^2$.

7. *Exemples.* On reprend le contexte et les notations du préambule des questions 5 et 6.
   a. Vérifier que C est une copule. Dans la suite (Partie IV), on l'appelle la *copule associée au couple* (U, V).
   b. En déduire que C_+, C_- ainsi que la fonction Π définie sur $[0, 1]^2$ par $\Pi(u, v) = uv$ sont des copules.
8. Soit Φ une copule à densité et $(a, b) \in]0, 1[^2$.
   Pour tout couple (h, k) de réels non nuls tels que $(a + h, b + k) \in]0, 1[^2$, on pose :
$$G(h, k) = \frac{1}{hk} \left(\Phi(a + h, b + k) - \Phi(a + h, b) - \Phi(a, b + k) + \Phi(a, b)\right).$$
   a. Soit h un réel non nul tel que $a + h \in]0, 1[$.
   Justifier que $G(h, k)$ admet une limite $H(h)$ lorsque k tend vers 0 et exprimer $H(h)$ à l'aide de la dérivée partielle $\partial_2(\Phi)$ de Φ par rapport à sa seconde variable.
   b. On note $\partial^2_{1,2}(\Phi)$ la dérivée partielle seconde croisée de Φ sur $]0, 1[^2$ et on rappelle que $\partial^2_{1,2}(\Phi) = \partial^2_{2,1}(\Phi)$.
   Trouver la limite de $H(h)$ lorsque h tend vers 0 et en déduire que $\partial^2_{1,2}\Phi(a, b) \geqslant 0$.
9. Soit φ une fonction définie sur $[0, 1]^2$, à valeurs réelles, continue sur $[0, 1]^2$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, 1[^2$.
   Pour tout $(u, u', v, v') \in [0, 1]^4$, on pose : $\Psi(u, u', v, v') = \varphi(u', v') - \varphi(u', v) - \varphi(u, v') + \varphi(u, v)$.
   a. Pour tout $(u, u', v, v') \in]0, 1[^4$, justifier l'égalité : $\Psi(u, u', v, v') = \displaystyle\int_v^{v'} \left(\int_u^{u'} \partial^2_{1,2}(\varphi)(x, y)\, dx\right) dy.$

b. Soit u et u' des réels tels que : $0 \leqslant u \leqslant u' \leqslant 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3n} + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) u \\ u'_n = \dfrac{2}{3n} + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) u' \end{cases}$

Vérifier pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ les inégalités strictes suivantes : $0 < u_n < u'_n < 1$.

c. On pose : $\begin{cases} T_0 = \{(u,u',v,v') \in \mathbf{R}^4 ;\ 0 < u < u' < 1 ;\ 0 < v < v' < 1\} \\ T = \{(u,u',v,v') \in \mathbf{R}^4 ;\ 0 \leqslant u \leqslant u' \leqslant 1 ;\ 0 \leqslant v \leqslant v' \leqslant 1\} \end{cases}$

On suppose que la fonction Ψ est positive ou nulle sur T_0. Montrer que Ψ est positive ou nulle sur T.

d. En déduire que, pour que la fonction φ soit une copule, *il suffit* qu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- $\forall u \in [0,1],\ \varphi(u,0) = \varphi(0,u) = 0$;
- $\forall u \in [0,1],\ \varphi(u,1) = \varphi(1,u) = u$;
- $\forall (x,y) \in]0,1[^2,\ \partial^2_{1,2}(\varphi)(x,y) \geqslant 0$.

Partie IV. Familles de copules et simulation.

10. Soit M la fonction définie sur $[0,1]^2$ par : $\forall (u,v) \in [0,1]^2,\ M(u,v) = uv(u+v-uv)$.

a. Montrer que la fonction $S : (u,v) \mapsto u + v - 2uv$ admet sur $[0,1]^2$ un minimum global c et un maximum global d et les calculer.

b. Montrer que M est une copule à densité.

c. Soit $\theta \in \mathbf{R}$ et M_θ la fonction définie sur $[0,1]^2$ par : $\forall (u,v) \in [0,1]^2,\ M_\theta(u,v) = (1-\theta)uv + \theta M(u,v)$.
Pour quelles valeurs de θ la fonction M_θ est-elle une copule ?

11. Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et U_0, V_0, U_1, V_1 quatre variables aléatoires suivant chacune la loi uniforme sur $[0,1]$.
On suppose que $(U_0,V_0), (U_1,V_1)$ et N sont mutuellement indépendants, autrement dit, on suppose que pour tout $(u_0, v_0, u_1, v_1, x) \in \mathbf{R}^5$, on a :

$$P([U_0 \leqslant u_0] \cap [V_0 \leqslant v_0] \cap [U_1 \leqslant u_1] \cap [V_1 \leqslant v_1] \cap [N \leqslant x]) = F_{(U_0,V_0)}(u_0,v_0) F_{(U_1,V_1)}(u_1,v_1) P([N \leqslant x]).$$

a. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $U_N(\omega) = \begin{cases} U_0(\omega) & \text{si } N(\omega) = 0 \\ U_1(\omega) & \text{si } N(\omega) = 1 \end{cases}$ et $V_N(\omega) = \begin{cases} V_0(\omega) & \text{si } N(\omega) = 0 \\ V_1(\omega) & \text{si } N(\omega) = 1 \end{cases}$.

Montrer que U_N et V_N sont des variables aléatoires et suivent chacune la loi uniforme sur $[0,1]$.

b. Exprimer la copule associée au couple (U_N, V_N) à l'aide des copules associées aux deux couples (U_0,V_0) et (U_1,V_1).

12. Soit $p \in]0,1[$ et C_p la fonction définie sur $[0,1]^2$ par : $\forall (u,v) \in [0,1]^2,\ C_p(u,v) = puv + (1-p)\min\{u,v\}$.

a. Montrer que C_p est une copule.

b. Proposer une méthode de simulation d'un couple aléatoire (U,V) auquel est associée la copule C_p et donner le code `Scilab` d'une fonction `simulc` réalisant cette simulation pour toute valeur donnée de p.
Cette fonction aura pour seul argument le paramètre p et retournera le couple (u,v).

13. Soit X et Y deux variables aléatoires à densité, de fonctions de répartition respectives F_X et F_Y.

Pour tout $p \in]0,1[$, on pose : $\begin{cases} G_X(p) = \inf(\{x \in \mathbf{R} ;\ F_X(x) = p\}) \\ G_Y(p) = \inf(\{x \in \mathbf{R} ;\ F_Y(x) = p\}) \end{cases}$.

Soit C la fonction définie sur $[0,1]^2$ par : $C(u,v) = \begin{cases} F_{(X,Y)}(G_X(u), G_Y(v)) & \text{si } (u,v) \in]0,1[^2 \\ 0 & \text{si } uv = 0 \\ u & \text{si } v = 1 \\ v & \text{si } u = 1 \end{cases}$.

Montrer que C est une copule. En déduire un procédé de simulation du couple (X,Y) à partir de la simulation (u,v) d'un couple (U,V) auquel la copule C est associée.

Maths II 2016 : Corrigé

Partie I. Simulation d'une variable aléatoire à densité

1.a. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ est continue et positive sur $]0;+\infty[$, donc les éventuels problèmes de convergence sont au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Au voisinage de 0, on a $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann convergente. Par critère de comparaison pour les intégrales des fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ converge également.

Au voisinage de $+\infty$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}x} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$. Mais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ converge également.

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \text{ converge.}}$

Arctangente

L'emploi de la fonction arctangente est justifié car V prend ses valeurs dans $[0,\pi/2[$, et que $\forall x \in]-\pi/2,\pi/2[$,

$$\operatorname{Arctan}(\tan(x)) = x,$$

relation qui n'est plus vérifiée si x n'est pas dans $]-\pi/2,\pi/2[$.
De plus, le sens des inégalités est préservé car la fonction arctangente est croissante.

1.b. Notons que X prend ses valeurs dans $[0;+\infty[$, de sorte que pour $x<0$, $P(X\leqslant x)=0$.
Soit donc $x \geqslant 0$. Alors

$$P(X\leqslant x) = P(\tan^2 V \leqslant x) = P(\tan V \leqslant \sqrt{x}) = P\left(V \leqslant \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})\right).$$

Mais la fonction de répartition de V est $F_V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \dfrac{2}{\pi}t & \text{si } 0\leqslant t\leqslant \pi/2 \\ 1 & \text{si } t>\pi/2 \end{cases}$ de sorte que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) & \text{si } x\geqslant 0 \end{cases}$$

Il est aisé de voir que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
De plus, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} F_X(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} F_X(x) = F_X(0)$, donc F_X est continue en 0 et donc est continue sur $\mathbf{R}$.
Ainsi, F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf[1] en 0 : X est une variable aléatoire à densité.

[1] Peut-être.

1.c. Une densité de X est toute fonction qui coïncide avec F_X' là où celle-ci est définie, c'est-à-dire sur $\mathbf{R}^*$.

On peut par exemple prendre $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\leqslant 0 \\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2} = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x>0 \end{cases}$

On reconnaît alors la fonction f de l'énoncé, qui est donc bien une densité de probabilité.

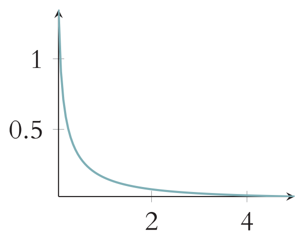


Figure 1– La densité f.

2.a. Il s'agit d'utiliser les résultats de la question précédente : le carré de la tangente d'une loi uniforme sur $[0,\pi/2[$ est une variable aléatoire de même loi que X.
Notons que `rand` ne permet que de simuler une loi uniforme sur $[0,1]$. Mais les propriétés des lois uniformes nous disent que si l'on multiplie par $\dfrac{\pi}{2}$ une variable suivant la loi $\mathscr{U}([0,1[)$, alors on obtient une variable suivant la loi $\mathscr{U}([0,\pi/2[)$.

```
function x = simulX(N)
  u = rand(N,1) ;
  x = ones(u) ; // matrice de meme format que u
  for i= 1 :N
    x(i,1) = (tan(u(i,1)* %pi/2))^2 ;
  end ;
endfunction
```

rand()

Notons que l'utilisation de `rand()` faite ici n'est pas totalement standard : le programme attendait deux paramètres.
Si `m` et `n` sont deux entiers positifs, alors `rand(m,n)` retourne une matrice de taille $m\times n$ dont les entrées sont des simulations (indépendantes) d'une loi uniforme sur $[0,1]$.

Remarque : la fonction Scilab `tan` n'est pas officiellement au programme, mais il est aisé de deviner son existence. Sinon, on peut la remplacer par `sin/cos`.

2.b. La première ligne sert à simuler N réalisations de X.
Puis, pour chacune de ces simulations, si elle est supérieure à 1 (ce qui se produit avec probabilité $P(X > 1)$), on ajoute 1 à `y`.
Donc si l'on note $p = P(X > 1) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\pi\sqrt{x}(1+x)}$, et si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(N,p)$, alors `y` est une simulation de Y.
Notons $X_1, \dots, X_N$ les N simulations de x, et soit $Y_i = \mathbb{1}_{[X_i>1]}$.
Alors `q` contient une simulation de $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$, où les Y_i suivent la même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
Mais par la loi faible des grands nombres, qui s'applique car les Y_i sont indépendantes (car les X_i le sont) et qui possèdent une variance[2], on a $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i \xrightarrow[N\to+\infty]{P} p$.
On peut donc s'attendre à ce qu'en fin de boucle, `q` soit proche de

$$p = P(X > 1) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - \frac{2}{\pi}\text{Arctan}(1) = 1 - \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

[2] Une variable de Bernoulli possède toujours une variance, et une variable indicatrice suit une loi de Bernoulli.

3.a. Puisque X est une variable à densité, F_X est continue sur $\mathbf{R}$, avec $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x \in \mathbf{R}$ tel que $F_X(x) = p$. Et donc $\boxed{K_p \text{ n'est pas vide.}}$
De même, il existe $y \in \mathbf{R}$ tel que $F_X(x) = \frac{p}{2} < p$ et donc $\boxed{J_p \text{ est non vide.}}$
De plus, F_X est croissante[3] et donc si $a \in J_p \Leftrightarrow F_X(a) < p$ et $b \in K_p \Leftrightarrow F_X(b) = p$, nécessairement $\boxed{a < b.}$

[3] Comme toute fonction de répartition.

3.b. Puisque J_p est non vide, il existe $a_0 \in J_p$. Et d'après la question précédente, pour tout $b \in K_p$, $a_0 < b$: a_0 est un minorant de K_p.
Mais tout ensemble non vide et minoré de $\mathbf{R}$ admet une borne inférieure : $\boxed{G_X(p) \text{ existe.}}$
Si $b \in K_p$, alors[4] $G_X(p) \leqslant b$, et par croissance de F_X, $F_X(G_X(p)) \leqslant F_X(b) = p$.
Supposons que $F_X(G_X(p)) < p$, et soit y tel que $F_X(G_X(p)) < y < p$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in]G_X(p), b[$ tel que $F_X(x) = y$. Alors $x \in J_p$, et donc x est un minorant de K_p, strictement supérieur à $G_X(p)$.
Or, par définition de la borne inférieure, $G_X(p)$ est le plus grand des minorants de K_p, d'où une contradiction.
On en déduit donc que $F_X(G_X(p)) \geqslant p$ et donc $\boxed{F_X(G_X(p)) = p.}$

[4] Par définition, la borne inférieure de K_p est un minorant de K_p et donc plus petite que tout élément de K_p.

Inf/min
Nous venons de montrer que la borne inférieure de K_p est un élément de K_p : c'est donc le **minimum** de K_p (minimum dont l'existence n'était jusque là pas acquise).

3.c. Si $x < G_X(p)$, alors, par croissance de F_X, on a $F_X(x) \leqslant F_X(G_X(p)) = p$.
Or $G_X(p)$ étant le plus petit élément de K_p, on ne peut donc avoir à la fois $x < G_X(p)$ et $x \in K_p \Leftrightarrow F_X(x) = p$. Ainsi, $F_X(x) < p$.
Inversement, si $F_X(x) < p$, alors $x \in J_p$. Et puisque $G_X(p) \in K_p$, par la question 3.a on a donc $x < G_X(p)$.
Ainsi, $\boxed{x < G_X(p) \Longleftrightarrow F_X(x) < p.}$

3.d. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors, par la question précédente,

$$P(G_X(U) \leqslant x) = 1 - P(G_X(U) > x) = 1 - P(F_X(x) < U) = P(U \leqslant F_X(x)).$$

Mais $F_X(x)$ est un élément de $[0,1]$, de sorte que $P(U \leqslant F_X(x)) = F_X(x)$.
Les variables aléatoires X et $G_X(U)$ ont donc la même fonction de répartition : $\boxed{\text{elles suivent la même loi.}}$

3.e. Pour $x < 0$, on a $F_X(x) = 0 < p$ et donc $x \notin K_p$.
Pour $x \geqslant 0$, on a $F_X(x) = p \Leftrightarrow \frac{2}{\pi}\text{Arctan}(\sqrt{x}) = p \Leftrightarrow x = \tan^2\left(\frac{\pi}{2}p\right)$.
Donc K_p contient un unique élément : $\tan^2\left(\frac{\pi}{2}p\right)$.
Puisque $G_X(p) \in K_p$, on a donc nécessairement $\boxed{G_X(p) = \tan^2\left(\frac{\pi}{2}p\right).}$

Remarque
Notons que ce résultat est cohérent avec la question 3.d et la manière dont nous avons simulé la loi de X à la question 2.a.

Remarque : ce que nous venons de faire dans cette question 3 est une généralisation de la méthode d'inversion vue en TP. Sur l'exemple de la question 3.e, nous retrouvons en particulier la méthode d'inversion dans le cas où la fonction de répartition de X réalise une bijection d'un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ sur $]0,1[$: on a alors $G_X(p) = F_X^{-1}(p)$.

Partie II. Fonction de répartition conjointe de deux variables aléatoires de lois uniformes.

4.a. Soient $y \leqslant y'$. Alors on a $[Y \leqslant y] \subset [Y \leqslant y']$ et donc

$$[X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y] \subset [X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y'].$$

Par croissance de P, on a donc

$$P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) \leqslant P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y']) \Leftrightarrow F(x,y) \leqslant F(x,y').$$

Ainsi, à x fixé, $\boxed{\text{la fonction } y \mapsto F(x,y) \text{ est croissante.}}$

> **Remarque**
> On montrerait de même que pour y fixé, la fonction
> $$x \mapsto F(x, y)$$
> est croissante.

4.b. On a

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} ([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant n]) = [X \leqslant x] \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} [Y \leqslant n]\right).$$

Mais $\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} [Y \leqslant n] = \Omega$, de sorte que

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} ([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant n]) = [X \leqslant x] \cap \Omega = \boxed{[X \leqslant x].}$$

4.c. La fonction $y \mapsto F(x,y)$ est croissante et majorée[5], donc, par le théorème de la limite monotone, elle admet une limite en $+\infty$.
La suite d'événements $([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant n])_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante[6], donc par le théorème de la limite monotone[7],

$$P([X \leqslant x]) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} [X \leqslant x] \cap [Y \leqslant n]\right) = \lim_{n\to+\infty} P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant n]) = \lim_{n\to+\infty} F(x,n).$$

Et alors, $\lim_{y\to+\infty} F(x,y) = \lim_{n\to+\infty} F(x,n) = \boxed{P([X \leqslant x]).}$.

[5] Par 1 car $F(x, y)$ est une probabilité.

[6] Pour l'inclusion.

[7] Le théorème de la limite monotone relatif aux probabilités, qui n'est pas le même que celui que nous venons d'utiliser, qui lui était relatif aux fonctions.

> **Remarque**
> On ne peut se contenter de montrer que $\lim_{n\to+\infty} F(x, n)$ existe, il est important d'avoir préalablement prouvé l'existence de $\lim_{y\to+\infty} F(x, y)$.
> Par exemple, si $f(x) = \cos(\pi x)$, alors la suite $(f(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est constante, donc converge, alors que la fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$.

4.d. De même, $y \mapsto F(x,y)$ est croissante et minorée[8] donc elle admet une limite en $-\infty$.
La suite d'événements $([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant -n])_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, et

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} [X \leqslant x] \cap [Y \leqslant -n] = [X \leqslant x] \cap \underbrace{\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}} [Y \leqslant -n]\right)}_{=\emptyset} = \emptyset.$$

Et donc

$$0 = P(\emptyset) = \lim_{n\to+\infty} P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant -n]) = \lim_{n\to+\infty} F(x,-n).$$

On en déduit donc que $\lim_{y\to-\infty} F(x,y) = \lim_{n\to+\infty} F(x,-n) = \boxed{0.}$

[8] Par 0.

4.e.i. On a $[X \leqslant a] \subset [X \leqslant a']$ et $A = [X \leqslant a'] \setminus [X \leqslant a]$.
Soit encore $[X \leqslant a'] = [X \leqslant a] \cup A$, et cette union est disjointe : $[X \leqslant a] \cap A = \emptyset$.
On en déduit que $[X \leqslant a'] \cap B = ([X \leqslant a] \cap B) \cup (A \cap B)$, cette union étant disjointe.
Et alors

$$P([X \leqslant a'] \cap B) = P([X \leqslant a] \cap B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \boxed{P([X \leqslant a'] \cap B) - P([X \leqslant a] \cap B).}$$

> **Union disjointe**
> Rappelons qu'en règle générale, la probabilité de l'union $A \cup B$ est
> $$P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
> Elle n'est égale à $P(A) + P(B)$ qu'à la condition que A et B soient (presque sûrement) disjoints (incompatibles).

4.e.ii. Sur le même principe, on prouve que

$$P([X \leqslant a] \cap B) = P([X \leqslant a] \cap [Y \leqslant b']) - P([X \leqslant a] \cap [Y \leqslant b]).$$
$$P([X \leqslant a'] \cap B) = P([X \leqslant a'] \cap [Y \leqslant b']) - P([X \leqslant a'] \cap [Y \leqslant b]).$$

Et donc

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P([X \leqslant a'] \cap [Y \leqslant b']) - P([X \leqslant a'] \cap [Y \leqslant b]) - \Big(P([X \leqslant a] \cap [Y \leqslant b']) - P([X \leqslant a] \cap [Y \leqslant b])\Big) \\ &= \boxed{F(a',b') - F(a',b) - F(a,b') + F(a,b).} \end{aligned}$$

5.a. On a

$$\boxed{\overline{[U > u] \cup [V > v]} = \overline{[U > u]} \cap \overline{[V > v]} = [U \leqslant u] \cap [V \leqslant v] \subset [U \leqslant u].}$$

Contraires
Rappelons que

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

C'est du bon sens : le contraire de «l'un des événements A ou B est réalisé» est «ni A ni B ne sont réalisés».

5.b. Par croissance de la probabilité, on a

$$C(u, v) = P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]) \leqslant P([U \leqslant u]) = u.$$

D'autre part, $C(u, v) = P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]) = 1 - P([U > u] \cup [V > v])$. Or, on a

$$P([U > u]\cup[V > v]) \leqslant P([U > u])+P([V > v]) \leqslant 1-P([U \leqslant u])+1-P([V \leqslant v]) \leqslant 2-u-v.$$

Et donc

$$C(u, v) \geqslant 1 - (2 - u - v) = u + v - 1.$$

On a donc bien $\boxed{u + v - 1 \leqslant C(u, v) \leqslant u.}$

5.c. De même, on a $[U \leqslant u] \cap [V \leqslant v] \subset [V \leqslant v]$ et donc

$$C(u, v) = P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]) \leqslant P([V \leqslant v]) = v.$$

Et donc $\begin{cases} C(u,v) \leqslant u \\ C(u,v) \leqslant v \end{cases} \Rightarrow C(u, v) \leqslant \min\{u, v\} = C_+(u, v).$

D'autre part[9], on a $\begin{cases} u+v-1 \leqslant C(u,v) \\ 0 \leqslant C(u,v) \end{cases} \Rightarrow \max\{u + v - 1, 0\} \leqslant C(u, v).$

[9] Une probabilité est toujours positive.

Ainsi, $\boxed{C_-(u, v) \leqslant C(u, v) \leqslant C_+(u, v).}$

6.a. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. On a alors

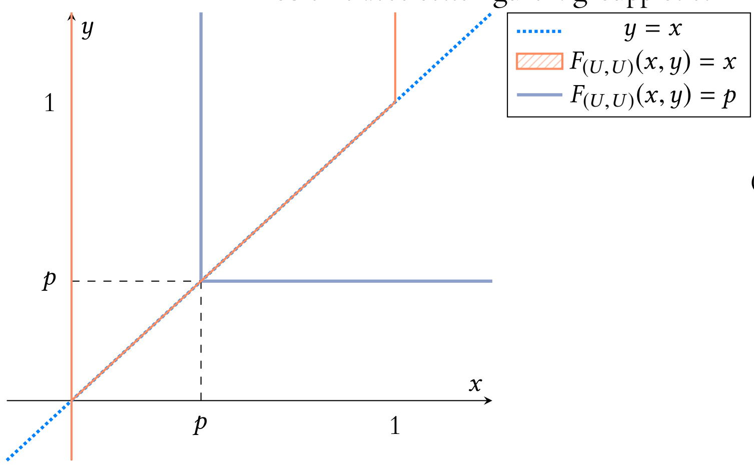
$$F_{(U,U)}(x, y) = P([U \leqslant x]\cap[U \leqslant y]) = P([U \leqslant \min(x, y)]) = \begin{cases} 0 & \text{si } \min\{x, y\} < 0 \\ \min\{x, y\} & \text{si } 0 \leqslant \min\{x, y\} \leqslant 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

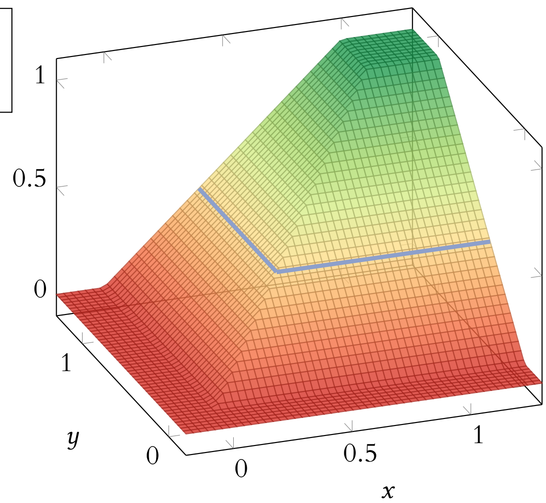
En particulier, pour $(x, y) \in [0, 1]^2$, on a $F_{(U,U)}(x, y) = \boxed{C_+(x, y).}$

6.b. Rappelons que la ligne de niveau $p \in]0, 1[$ de $F_{(U,U)}$ est l'ensemble des points (x, y) de $\mathbf{R}^2$ pour lesquels $F_{(U,U)}(x, y) = p$.
Pour un point situé sous la droite d'équation $x = y$ (la première bissectrice), $\min\{x, y\}$ est l'ordonnée y, alors que pour un point situé au dessus de la bissectrice, il s'agit de l'abscisse x.
Donc un point est sur la courbe de niveau p de $F_{(U,U)}$ si et seulement si il est situé sous la bissectrice et d'ordonnée égale à p, ou s'il est situé au dessus de la bissectrice et d'abscisse égale à p.

Remarque
Si $x < 0$ ou $y < 0$, alors $F_{(U,U)}(x, y) = 0$, donc nous ne nous intéressons qu'aux couples à coordonnées positives.

Problème avec cette figure : groupplot et fill





De même, on a $F_{(U,U)}(x, y) = x$ si $(x, y) \in [0, 1]^2$ et $\min(x, y) = x$ (donc si (x, y) est au-dessus de la première bissectrice), si $x = 0$ et $y < 0$, ou encore si $x = 1$ et $y \geqslant 1$.

6.c. Supposons que U et V soient égales presque sûrement, c'est-à-dire que $P([U = V]) = 1$.
Notons alors $A = [U = V]$ et $\overline{A} = [U \neq V]$, de sorte que $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements.
Pour $(u, v) \in [0,1]^2$, on a, par la formule des probabilités totales,

$$P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]) = P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v] \cap A) + P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v] \cap \overline{A}).$$

Mais $[U \leqslant u] \cap [V \leqslant v] \cap \overline{A} \subset \overline{A}$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0$, de sorte que $P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v] \cap \overline{A}) = 0$.
Et donc

$$\begin{aligned} P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]) &= P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v] \cap A) \\ &= P([U \leqslant u] \cap [U \leqslant v] \cap A) \\ &= P([U \leqslant \min\{u, v\}] \cap A). \end{aligned}$$

Si A est réalisé, alors $U = V$.

Mais de même, on a

$$P([U \leqslant \min\{u, v\}]) = P([U \leqslant \min\{u, v\}] \cap A) + \underbrace{P([U \leqslant \min\{u, v\}] \cap \overline{A})}_{=0} = P([U \leqslant \min\{u, v\}] \cap A)$$

de sorte que $P([U \leqslant \min\{u, v\}] \cap A) = P([U \leqslant \min\{u, v\}]) = \min\{u, v\}$.
Ainsi, $C(u, v) = P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]) = \min\{u, v\} = \boxed{C_+(u, v).}$

Inversement, supposons que $C(u, v) = C_+(u, v) = \min\{u, v\}$, et prouvons que U et V sont presque sûrement égales, c'est-à-dire que $P([U \neq V]) = 0$.
Puisque U et V suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$, on a, pour tout $v \in \mathbf{R}$ et tout $u < 0$,

$$P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]) \leqslant P(U \leqslant u) \leqslant P(U \leqslant 0) = 0.$$

Et de même, pour $v < 0$ et pour tout $u \in \mathbf{R}$, $P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]) = 0$.
Pour $u \geqslant 1$, on a $P([U \leqslant u]) = 1$ et donc pour tout $v \in \mathbf{R}$,

$$P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]) = P([U \leqslant 1] \cap [V \leqslant v]) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \leqslant 0 \\ v & \text{si } v \leqslant 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et si $(u, v) \in [0, 1]^2$, alors, par définition de C,

$$C(u, v) = P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]).$$

Ainsi, les couples (U, V) et (U, U) ont la même fonction de répartition conjointe, donc la même loi.
La fonction $g : (x, y) \mapsto x - y$ est continue sur $\mathbf{R}^2$, de sorte que, en utilisant le résultat rappelé au début de la question 5, $U - U$ et $U - V$ ont la même loi.
Or, $U - U = 0$ vérifie $P(0 = 0) = 1$, de sorte qu'on a également

$$P(U - V = 0) = 1 \Leftrightarrow P(U = V) = 1.$$

Donc $\boxed{U \text{ et } V \text{ sont presque sûrement égales.}}$

Remarque
Nous venons de prouver que si U et V suivent des lois uniformes sur $[0, 1]$, alors la fonction de répartition conjointe du couple (U, V) est uniquement déterminé par sa restriction à $[0, 1]^2$.

Danger
Dire que deux variables aléatoires ont la même loi ne signifie pas qu'elles sont égales, mais qu'elles ont la même fonction de répartition.

Deuxième méthode : donnons une autre preuve du fait que $P(U = V) = 1$, plus délicate, mais ne nécessitant pas le résultat rappelé au début de la question 5. Notons que $[U \neq V] = [U > V] \cup [U < V]$, et donc il suffit de prouver que ces deux événements sont de probabilité nulle.
Pour $a \in]0, 1]$ on a, d'après 4.e.ii,

$$P([0 < U \leqslant a] \cap [a < V \leqslant 1]) = C_+(1, a) - C_+(1, 0) - C_+(a, a) + C_+(0, a) = a - 0 - a + 0 = 0.$$

Comme de plus, U est une variable à densité, $P(U = 0)$ et donc

$$P([0 \leqslant U \leqslant a] \cap [a < V \leqslant 1]) = P([0 < U \leqslant a] \cap [a < V \leqslant 1]) = 0.$$

Remarquons que

$$[V > U] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{p=1}^{2^n - 1} \left[0 \leqslant U \leqslant \frac{p}{2^n} \right] \cap \left[\frac{p}{2^n} < V \leqslant 1 \right] \right).$$

Explication
Si x et y sont deux réels tels que $x < y$, alors il existe entre x et y un rationnel de la forme $\frac{p}{2^n}$.
Si on veut construire explicitement un tel réel, on peut prendre n suffisamment grand pour que $y - x > \frac{1}{2^n}$ et $p = \lfloor 2^n x \rfloor + 1$.

Par le théorème de la limite monotone, on a alors

$$P([V>U]) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{N}\bigcup_{p=1}^{2^n-1}\left[0\leqslant U\leqslant \frac{p}{2^n}\right]\cap\left[\frac{p}{2^n}<V\leqslant 1\right]\right).$$

Mais[10], on a

$$0\leqslant P\left(\bigcup_{n=1}^{N}\bigcup_{p=1}^{2^n-1}\left[0\leqslant U\leqslant \frac{p}{2^n}\right]\cap\left[\frac{p}{2^n}<V\leqslant 1\right]\right)\leqslant \sum_{n=1}^{N}\sum_{p=1}^{2^n-1} P\left(\left[0\leqslant U\leqslant \frac{p}{2^n}\right]\cap\left[\frac{p}{2^n}<V\leqslant 1\right]\right)=0.$$

[10] La probabilité d'une union est toujours inférieure ou égale à la somme des probabilités.

Ainsi, $P([V>U])=0$, et on prouverait de même que $P([U<V])=0$, de sorte que $P([U\neq V])=0$ et donc $\boxed{U \text{ et } V \text{ sont presque sûrement égales.}}$

6.d. Soient $(x,y)\in\mathbf{R}^2$. Alors

$$F_{(U,1-U)}(x,y)=P([U\leqslant x]\cap[1-U\leqslant y])=P([U\leqslant x]\cap[U\geqslant 1-y]).$$

Si $1-y>x \Leftrightarrow x+y-1<0$, alors $[U\leqslant x]\cap[U\geqslant 1-y]=\emptyset$ et donc $F_{(U,1-U)}(x,y)=0$.
Sinon, on a

$$F_{(U,1-U)}(x,y)=P(1-y\leqslant U\leqslant x)=\begin{cases} x+y-1 & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ et } y\leqslant 1\\ x & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ et } y\geqslant 1\\ y & \text{si } x\geqslant 1 \text{ et } y\leqslant 1\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$$

En particulier, pour $(x,y)\in[0,1]^2$, on a

$$F_{(U,1-U)}(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } x+y-1<0\\ x+y-1 & \text{sinon}\end{cases}=\max\{x+y-1,0\}=C_-(x,y).$$

Comme à la question 6.c, il est aisé de prouver que si V et $1-U$ sont presque sûrement égales, alors $C(u,v)=C_-(u,v)$.

Et comme à la question 6.c, les variables aléatoires U et V suivant des lois uniformes sur $[0,1]$, les fonctions de répartition conjointes de $(U,1-U)$ et (U,V) sont caractérisées par les copules associées. Ces copules étant les mêmes, égales à C_-, les vecteurs $(U,1-U)$ et (U,V) ont même loi.
Alors, la fonction $g:(x,y)\mapsto x+y$ étant continue sur $\mathbf{R}^2$, $U+(1-U)$ et $U+V$ ont même loi.
En particulier, on a donc $P(U+V=1)=1 \Leftrightarrow P(V=1-U)=1$.
Donc $\boxed{C=C_- \text{ si et seulement si } V=1-U \text{ presque sûrement.}}$

Partie III. Copules.

7. *Exemples*

7.a. Soit $u\in[0,1]$. Alors

$$0\leqslant C(u,0)=P([U\leqslant u]\cap[V\leqslant 0])\leqslant P(V\leqslant 0)=0 \text{ et donc } C(u,0)=0.$$

De même, on montre que $C(0,u)=0$.
Puisque V suit la loi uniforme sur $[0,1]$, on a $V(\Omega)=[0,1]$ et donc $[V\leqslant 1]=\Omega$. Et donc

$$C(u,1)=P([U\leqslant u]\cap[V\leqslant 1])=P([U\leqslant u])=u.$$

Subtilité
Si l'on voulait être totalement exact, il faudrait dire que V est presque sûrement à valeurs dans $[0,1]$: une variable suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ peut éventuellement prendre des valeurs hors de cet intervalle, mais avec probabilité nulle. Afin de ne pas ajouter de subtilités techniques, nous supposons donc que $[V\leqslant 1]=\Omega$, plutôt que $P([V\leqslant 1])=1$.

De même, $C(1,u)=u$.
Enfin, si $u\leqslant u'$ et $v\leqslant v'$, alors d'après la question 4.e.ii, on a

$$C(u',v')-C(u',v)-C(u,v')+C(u,v)=P([u<U\leqslant u']\cap[v<V\leqslant v'])\geqslant 0.$$

Donc $\boxed{C \text{ est une copule.}}$

7.b. Nous avons montré à la question 6 que C_+ et C_- coïncident sur $[0,1]^2$ avec les fonctions de répartition conjointes des couples (U,U) et $(U,1-U)$. D'après 7.a, ce sont dont des copules.
Enfin, si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, on a, pour tout $(u,v)\in[0,1]^2$:

$$F_{(U,V)}(u,v)=P([U\leqslant u]\cap[V\leqslant v])=P([U\leqslant u])P([V\leqslant v])=uv=\Pi(u,v).$$

Donc, toujours d'après la question 7.a, : $\boxed{\Pi \text{ est une copule.}}$

8.a. On a

$$G(h,k)=\frac{1}{h}\left(\frac{\Phi(a+h,b+k)-\Phi(a+h,b)}{k}-\frac{\Phi(a,b+k)-\Phi(a,b)}{k}\right).$$

Mais les fonctions $f_1 : t\mapsto \Phi(a+h,t)$ et $f_2 : t\mapsto\Phi(a,t)$ sont dérivables sur $]0,1[$, de dérivées respectives égales à $f_1' : t\mapsto \partial_2(\Phi)(a+h,t)$ et $f_2' : t\mapsto\partial_2(\Phi)(a,t)$.
Et donc

Rappel
Rappelons que **par définition**, $\partial_2\Phi(x,y)$ est la dérivée en $t=y$ de la fonction $t\mapsto\Phi(x,t)$.

$$\lim_{k\to 0}\frac{\Phi(a+h,b+k)-\Phi(a+h,b)}{k}=f_1'(b)=\partial_2(\Phi)(a+h,b)\text{ et }\lim_{k\to0}\frac{\Phi(a,b+k)-\Phi(a,b)}{k}=f_2'(b)=\partial_2(\Phi)(a,b).$$

Ainsi, on a $\boxed{\lim\limits_{k\to0}G(h,k)=\dfrac{\partial_2(\Phi)(a+h,b)-\partial_2(\Phi)(a,b)}{h}.}$

8.b. De même, que précédemment, puisque Φ est $\mathscr{C}^2$, ses dérivées partielles premières admettent des dérivées partielles. En particulier, $g : t\mapsto\partial_2\Phi(t,b)$ est dérivable, de dérivée égale à $g'(t)=\partial^2_{2,1}(\Phi)(t,b)$.
Et donc $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\partial_2(a+h,b)-\partial_2(a,b)}{h}=g'(a)=\partial^2_{2,1}(\Phi)(a,b)=\partial^2_{1,2}(\Phi)(a,b)$.
On a donc $\boxed{\lim\limits_{h\to0}H(h)=\partial^2_{1,2}(\Phi)(a,b).}$

Pour tous (h,k) **positifs**[11] vérifiant $(a+h,b+k)\in]0,1[^2$, on a, par définition d'une copule, $G(h,k)\geqslant 0$.
Donc en passant à la limite lorsque $k\to0^+$: pour tout h positif tel que $a+h\in]0,1[$, on a $\dfrac{\partial_2(\Phi)(a+h,b)-\partial_2(\Phi)(a,b)}{h}\geqslant 0$.
Puis, en passant de nouveau à la limite lorsque $h\to0^+$, il vient $\boxed{\partial^2_{1,2}(\Phi)(a,b)\geqslant 0.}$

[11] Il est important de prendre h et k positifs afin d'avoir $a\leqslant a+h$ et $b\leqslant b+k$ et d'utiliser ainsi le troisième point de la définition d'une copule.

9.a. Par définition de $\partial^2_{2,1}(\varphi)$, pour $y\in]0,1[$ fixé, la fonction $x\mapsto\partial^2_{2,1}(\varphi)(x,y)$ est la dérivée de $x\mapsto\partial_2(\varphi)(x,y)$.
Autrement dit, une primitive de $x\mapsto\partial^2_{2,1}(\varphi)(x,y)$ est $x\mapsto\partial_2(\varphi)(x,y)$, de sorte que

$$\int_u^{u'}\partial^2_{2,1}(\varphi)(x,y)\,dx=[\partial_2(\varphi)(x,y)]_u^{u'}=\partial_2(\varphi)(u',y)-\partial_2(\varphi)(u,y).$$

De même, à x fixé, une primitive de $t\mapsto\partial_2(\varphi)(x,t)$ est $t\mapsto\varphi(x,t)$. Et donc

$$\begin{aligned}\int_v^{v'}\left(\int_u^{u'}\partial^2_{1,2}(\varphi)(x,y)\,dx\right)dy&=\int_v^{v'}(\partial_2(\varphi)(u',y)-\partial_2(\varphi)(u,y))\,dy\\&=\int_v^{v'}\partial_2(\varphi)(u',y)\,dy-\int_v^{v'}\partial_2(\varphi)(u,y)\,dy\\&=[\varphi(u',y)]_v^{v'}-[\varphi(u,y)]_v^{v'}\\&=\varphi(u',v')-\varphi(u',v)-\varphi(u,v')+\varphi(u,v)\\&=\boxed{\Psi(u,u',v,v').}\end{aligned}$$

9.b. Par hypothèse, $u\geqslant0$, donc[12] on a $u_n\geqslant\dfrac{1}{3n}>0$.
De même, puisque $u'\leqslant 1$, il vient $u_n'\leqslant\dfrac{2}{3n}+\left(1-\dfrac1n\right)=1-\dfrac{1}{3n}<1$.
Enfin, $u_n'-u_n=\dfrac{1}{3n}+\left(1-\dfrac1n\right)\underbrace{(u'-u)}_{\geqslant0}\geqslant\dfrac{1}{3n}>0$. Donc $\boxed{u_n<u_n'.}$

[12] Notons que $1-\frac1n\geqslant0$.

9.c. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $(u,u',v,v') \in T$ tel que $\Psi(u,u',v,v') = a < 0$.
Notons que Ψ étant positive ou nulle sur T_0, nécessairement $(u,u',v,v') \in T \setminus T_0$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons alors, comme dans la question précédente :

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{3n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)u \\ u'_n = \frac{2}{3n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)u' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_n = \frac{1}{3n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)v \\ v'_n = \frac{2}{3n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)v' \end{cases}$$

Le résultat prouvé à la question 9.b montre que $(u_n,u'_n,v_n,v'_n) \in T_0$ et donc $\Psi(u_n,u'_n,v_n,v'_n) \geqslant 0$.
De plus, on a

$$\begin{aligned}
\|(u_n,u'_n,v_n,v'_n)-(u,u',v,v')\|^2 &= \left\|\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{n}u, \frac{2}{3n}+\frac{1}{n}u', \frac{1}{3n}+\frac{1}{n}v, \frac{2}{3n}+\frac{1}{n}v'\right)\right\|^2 \\
&= \left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{n}u\right)^2 + \left(\frac{2}{3n}+\frac{1}{n}u'\right)^2 + \left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{n}v\right)^2 + \left(\frac{2}{3n}+\frac{1}{n}v'\right)^2 \\
&\leqslant \left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{3n}+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{3n}+\frac{1}{n}\right)^2 \\
&\leqslant \frac{16}{9n^2} + \frac{25}{9n^2} + \frac{16}{9n^2} + \frac{25}{9n^2} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Et donc $\|(u_n,u'_n,v_n,v'_n)-(u,u',v,v')\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Puisque φ est continue sur $[0,1]^2$, la fonction $f_1 : (u,u',v,v') \mapsto \varphi(u',v')$ est continue sur T.
En effet, soit $(u_0,u'_0,v_0,v'_0) \in T$ et soit $\varepsilon > 0$.
φ étant continue, il existe $\eta > 0$ tel que $\|(u'_0,v'_0)-(u,v)\| \leqslant \eta \Rightarrow |\varphi(u'_0,v'_0)-\varphi(u,v)| \leqslant \varepsilon$.
Or, si $(u,u',v,v') \in T$ est tel que $\|(u_0,u'_0,v_0,v'_0)-(u,u',v,v')\| \leqslant \eta$, alors on a

$$\begin{aligned}
\|(u'_0,v'_0)-(u',v')\| &= \sqrt{(u'_0-u')^2+(v'_0-v_0)^2} \\
&\leqslant \sqrt{(u_0-u)^2+(u'_0-u')^2+(v_0-v)^2+(v'_0-v_0)^2} \\
&= \|(u_0,u'_0,v_0,v'_0)-(u,u',v,v')\| \leqslant \eta
\end{aligned}$$

et donc $|f_1(u_0,u'_0,v_0,v'_0)-f_1(u,u',v,v')| = |\varphi(u',v')-\varphi(u,v)| \leqslant \varepsilon$.
Ceci achève de prouver que f_1 est continue sur en (u_0,u'_0,v_0,v'_0) et donc sur T.
On prouverait de même que les fonctions qui à (u,u',v,v') associent respectivement $\varphi(u,v')$, $\varphi(u',v)$ et $\varphi(u,v)$ sont également continues sur T.
Et alors Ψ est continue sur T car somme de fonctions continues.

Soit donc à présent $\varepsilon = -\frac{a}{2} > 0$. Par continuité de Ψ, il existe $\eta > 0$ tel que si $\|(x,y,z,t)-(u,u',v,v')\| \leqslant \eta$, alors $|\Psi(x,y,z,t)-\Psi(u,u',v,v')| \leqslant \varepsilon$.
En particulier, pour n assez grand, on a $\|(u_n,u'_n,v_n,v'_n)-(u,u',v,v')\| \leqslant \eta$ et donc

$$|\Psi(u_n,u'_n,v_n,v'_n)-\Psi(u,u',v,v')| \leqslant \varepsilon = -\frac{a}{2}.$$

En particulier, il vient

$$\Psi(u_n,u'_n,v_n,v'_n)-\Phi(u,u',v,v') \leqslant -\frac{a}{2} \Leftrightarrow \Psi(u_n,u'_n,v_n,v'_n) \leqslant -\frac{a}{2}+a \leqslant \frac{a}{2} < 0.$$

Ceci contredit le fait que $\Psi(u_n,u'_n,v_n,v'_n) \geqslant 0$.
Donc notre hypothèse de départ est fausse : $\boxed{\forall (u,u',v,v') \in T,\ \Psi(u,u',v,v') \geqslant 0.}$

Autrement dit
On dispose donc d'une suite $(u_n, u'_n, v_n, v'_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ d'éléments de $\mathbf{R}^4$ qui «tend vers» (u, u', v, v').

Rédaction
Si nous détaillons tout ici, «sentir» que Ψ était continue sur T car φ l'était sur $[0,1]^2$ était probablement largement suffisant pour obtenir la majorité des points.

Analogie
Notons que T est un fermé, et que T_0 est le plus grand ouvert inclus dans T (c'est T privé de son «bord»).
Nous venons de prouver que si la fonction Ψ est positive sur T_0, elle est aussi positive sur son bord.
Un analogue très simple en dimension 1 serait le suivant : si φ est une fonction continue sur $[a,b]$ et positive sur $]a,b[$, alors elle est positive sur $[a,b]$ tout entier.

9.d. Si φ vérifie les trois propriétés de l'énoncé, alors elle vérifie automatiquement les deux premiers points de la définition d'une copule.
Montrons que le troisième point est également vrai.
Soit $(u,u',v,v') \in T_0$. Alors, d'après 9.a,

$$\Psi(u,u',v,v') = \int_v^{v'} \left(\int_u^{u'} \partial^2_{1,2}(\varphi)(x,y)\,dx \right) dy.$$

Par hypothèse, pour $y \in [v, v']$ fixé et pour tout $x \in [u, u']$, on a $\partial^2_{1,2}(\varphi)(x, y) \geqslant 0$. Puisque $u \leqslant u'$, par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\forall y \in [v, v'],\ \int_u^{u'} \partial^2_{1,2}(\varphi)(x, y)\, dx \geqslant 0.$$

Et de nouveau par croissance de l'intégrale, puisque $v \leqslant v'$, il vient

$$\Psi(u, u', v, v') = \int_v^{v'} \left(\int_u^{u'} \partial^2_{1,2}(\varphi)(x, y)\, dx \right) dy \geqslant 0.$$

Ainsi, Ψ est positive ou nulle sur T_0, et donc par la question 9.c, elle l'est également sur T. Autrement dit, pour tout $(u, u', v, v') \in [0, 1]^4$ tels que $u \leqslant u'$ et $v \leqslant v'$, on a

$$\varphi(u', v) - \varphi(u, v') - \varphi(u', v) + \varphi(u, v) \geqslant 0.$$

Et donc $\boxed{\varphi \text{ est bien une copule.}}$

CNS

Notons que nous disposons à présent d'une condition nécessaire et suffisante pour prouver qu'une fonction φ continue sur $[0, 1]^1$ et $\mathscr{C}^2$ sur $]0, 1[^2$ est une copule à densité. En effet, nous avions prouvé en 8.b que $\partial^2_{1,2}(\varphi)(x, y) \geqslant 0$ était une condition nécessaire, nous venons de prouver qu'elle est suffisante (si les deux premiers points de la définition de copule sont vérifiés).

Partie IV. Familles de copules et simulation.

10.a. L'ensemble $[0, 1]^2$ est un fermé de $\mathbf{R}^2$ car produit de deux fermés de $\mathbf{R}$, et il est borné car si $(x, y) \in [0, 1]^2$, alors $|x| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant 1$.
La fonction S est continue sur $[0, 1]^2$ car polynomiale. Mais une fonction continue sur un fermé borné admet nécessairement un maximum (global) d et un minimum (global) c.
Sur l'ouvert $]0, 1[^2$, la fonction S est $\mathscr{C}^1$ (car polynomiale) et

$$\partial_1 S(u, v) = 1 - 2v,\ \partial_2 S(u, v) = 1 - 2u.$$

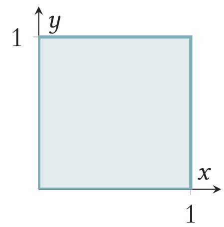
Un couple $(u, v) \in]0, 1[^2$ est un point critique de S si et seulement si

$$\begin{cases} 1 - 2u = 0 \\ 1 - 2v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = \frac{1}{2}.$$

On a alors $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.
Étudions S sur «le bord» de $[0, 1]^2$, c'est-à-dire $[0, 1]^2 \setminus]0, 1[^2$.
Si $u = 0$, alors $S(0, v) = v$ qui admet pour minimum 0 pour $v = 0$ et pour maximum 1 lorsque $v = 1$.
De même si $v = 0$.
Pour $u = 1$, $S(1, v) = 1 + v - 2v = 1 - v$ qui admet pour maximum 0 et pour minimum 1.
De même pour $v = 1$.

En dessin

Un petit dessin vaut mieux qu'un grand discours : $[0, 1]^2$ est un carré, $]0, 1[^2$ est l'intérieur de ce carré, et donc son bord est formé des 4 côtés du carré : c'est l'ensemble des points dont l'une des deux coordonnées vaut 0 ou 1.



On en déduit que $\boxed{c = 0 \text{ et } d = 1.}$ Notons au passage que le point critique trouvé sur $]0, 1[^2$ n'est ni un maximum global, ni un minimum global[13].

[13] Et nous pourrions prouver en utilisant la hessienne qu'il ne s'agit même pas d'un extremum local.

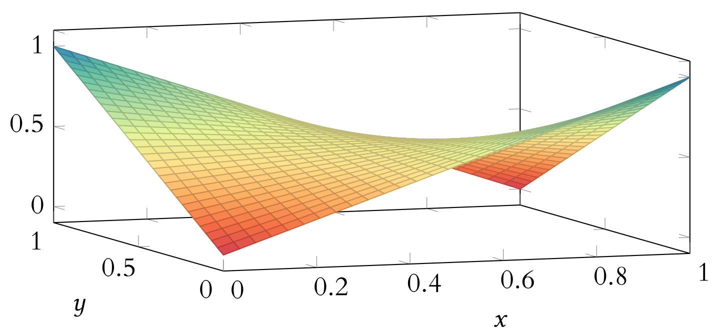


FIGURE 2 – La fonction S. Le point selle est bien visible au centre.

Extrema

Notons que la figure permet de retrouver les deux points où c est atteint, et de même pour d.

10.b. Puisque M est polynomiale, elle est continue sur $[0, 1]^2$ et $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $]0, 1[^2$.
Soit $u \in [0, 1]$. Alors $M(u, 0) = M(0, u) = 0$.

De plus, $M(1,u) = u(1+u-u) = u$ et de même $M(u,1) = u$.
On a $\partial_1(M)(u,v) = v(u+v-uv) + uv(1-v)$ et donc

$$\partial_{1,2}^2(M)(u,v) = u+v-uv+v(1-u)+u(1-v)-uv = u+v-uv+v-uv+u-uv-uv = 2S(u,v).$$

En particulier, pour tout $(u,v) \in]0,1[^2$, d'après 10.a, $\partial_{1,2}^2(M)(u,v) \geqslant 0$.

Et donc, d'après le résultat de la question 9.d, $\boxed{M \text{ est une copule à densité.}}$

10.c. Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, et tout $u \in [0,1]$, on a

$$M_\theta(u,0) = (1-\theta)\times 0 + \theta \underbrace{M(u,0)}_{=0} = 0$$

et de même $M_\theta(0,u) = 0$.
Sous les mêmes hypothèses, on a également,

$$M_\theta(u,1) = (1-\theta)u + \theta \underbrace{M(u,1)}_{=u} = u$$

et $M_\theta(1,u) = u$. Enfin, M_θ est polynomiale, donc continue sur $[0,1]^2$ et $\mathscr{C}^2$ sur $]0,1[^2$, donc c'est une copule si et seulement si[14] $\forall (u,v) \in]0,1[^2$, $\partial_{1,2}^2(M_\theta)(u,v) \geqslant 0$.
Or, $\partial_{1,2}^2(M_\theta)(u,v) = (1-\theta) + 2\theta S(u,v)$.
Il est clair que si $\theta \in [0,1]$, alors $\theta \geqslant 0$ et $1-\theta \geqslant 0$, de sorte que

$$\forall (u,v) \in]0,1[^2,\ 0 \leqslant \partial_{1,2}^2(M_\theta)(u,v).$$

Donc dans ce cas, M_θ est une copule à densité.
Si $\theta \leqslant 0$, alors sur $[0,1]^2$, $\partial_{1,2}^2(M_\theta)(u,v)$ admet pour minimum $1-\theta+2\theta = 1+\theta$.
Et donc M_θ est une copule si et seulement si $1+\theta \geqslant 0 \Leftrightarrow \theta \in [-1,0]$.
Enfin, pour $\theta > 1$, le minimum de $\partial_{1,2}^2(M_\theta)(u,v)$ sur $[0,1]^2$ est $1-\theta$, qui est strictement négatif.
Et donc M_θ n'est pas une copule.

Ainsi, $\boxed{M_\theta \text{ est une copule si et seulement si } -1 \leqslant \theta \leqslant 1.}$

[14] Voir l'encadré de la question 9.d.

Détails
A priori, $\partial_{2,1}^2 M_\theta$ n'a besoin d'être positive que sur $]0,1[^2$. Mais puisqu'elle est continue sur $[0,1]^2$, le même type d'argument de continuité qu'à la question 9.c montre qu'elle est positive sur $]0,1[^2$ si et seulement si elle l'est sur $[0,1]^2$.

11.a. Montrons que U_N est une variable aléatoire. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $[U_N \leqslant x] \in \mathscr{A}$.
Or, d'après la définition de U_N, on a

$$[U_N \leqslant x] = ([N=0]\cap[U_0 \leqslant x]) \cup ([N=1]\cap[U_1 \leqslant x]).$$

Mais U_0, U_1 et N sont des variables aléatoires, de sorte que $[N=0], [N=1], [U_0 \leqslant x]$ et $[U_1 \leqslant x]$ sont des éléments de $\mathscr{A}$.
Une tribu étant stable par unions et intersections finies, on en déduit que $[U_N \leqslant x] \in \mathscr{A}$.
Ainsi, $\boxed{U_N \text{ est une variable aléatoire, et il en est de même de } V_N.}$

Pour $x \in \mathbf{R}$, d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[N=0],[N=1]\}$, on a :

$$\begin{aligned}
F_{U_N}(x) =& P([U_N \leqslant x]) = P([U_N \leqslant x]\cap[N=0]) + P([U_N \leqslant x]\cap[N=1])\\
=& P([U_0 \leqslant x]\cap[N=0]) + P([U_1 \leqslant x]\cap[N=1])\\
=& P([U_0 \leqslant x])P([N=0]) + P([U_1 \leqslant x])P([N=1])\\
=& (1-p)P([U_0 \leqslant x]) + pP([U_1 \leqslant x])\\
=& (1-p)P(U_0 \leqslant x) + pP(U_0 \leqslant x)\\
=& P(U_0 \leqslant x).
\end{aligned}$$

U_0 et U_1 ont même loi.

Et donc : $\boxed{U_N \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1]).}$
On prouve de même que V_N suit la loi $\mathscr{U}([0,1])$.

11.b. Soient $(x,y) \in [0,1]^2$. Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[N=0],[N=1]\}$, on a

$$P([U_N \leqslant x]\cap[V_N \leqslant y]) = P([U_N \leqslant x]\cap[V_N \leqslant y]\cap[N=0]) + P([U_N \leqslant x]\cap[V_N \leqslant y]\cap[N=1])$$

$$=P([U_0 \leqslant x] \cap [V_0 \leqslant y] \cap [N = 0]) + P([U_1 \leqslant x] \cap [V_1 \leqslant y] \cap [N = 1])$$
$$=P([U_0 \leqslant x] \cap [V_0 \leqslant y])P(N = 0) + P([U_1 \leqslant x] \cap [V_1 \leqslant y])P(N = 1)$$

Indépendance.

$$=\boxed{(1-p)P([U_0 \leqslant x] \cap [V_0 \leqslant y]) + pP([U_1 \leqslant x] \cap [V_1 \leqslant y]).}$$

12.a. Soient (U, V) deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}([0, 1])$ et soit N une variable aléatoire indépendante de (U, V) suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Alors $(u, v) \mapsto uv$ est la copule associée au couple (U, V) et $(u, v) \mapsto \min\{u, v\}$ est la copule associée au couple (U, U).

Et donc, si on pose $U_N = U$ et $V_N = \begin{cases} U & \text{si } N = 0 \\ V & \text{si } N = 1 \end{cases}$ alors, d'après le résultat de la question précédente[15], la copule associée à (U_N, V_N) est $(u, v) \mapsto (1-p)\min\{u, v\} + puv = C_p(u, v)$.
En particulier, $\boxed{C_p \text{ est une copule.}}$

[15] Qui s'applique car les couples (U, V) et (U, U) sont indépendants de N.

12.b. Il s'agit d'appliquer la méthode décrite en 12.a :

```
function [a,b] = simulc(p)
        N = rand() ;
        u = rand() ;
        v = rand() ;
        if N < p then
                a = u ;
                b = v ;
        else
                a = u ;
                b = u ;
        end
endfunction
```

13. Posons $U = F_X(X)$. Alors, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$P(U < x) = P(F_X(X) < x) = P(X < G_X(x)) = P(X \leqslant G_X(x)) = F_X(G_X(x)) = x.$$

Notons que $x \mapsto P(U < x)$ n'est pas tout à fait la fonction de répartition de U, mais on a alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$x = P(U < x) \leqslant P(U \leqslant x) \leqslant P\left(U < x + \frac{1}{n}\right) = x + \frac{1}{n}$$

de sorte qu'en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient, par le théorème des gendarmes, il vient $P(U \leqslant x) = x$.
En particulier, $P(U \leqslant 0) = 0$ et donc, par croissance de F_U, $P(U \leqslant x) = 0$ si $x < 0$.
De même, on a $P(U \leqslant 1) = 1$ et donc $P(U \leqslant x) = 1$ si $x \geqslant 1$.
Ainsi, U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, et il en est de même de V.
On a alors, pour $(u, v) \in]0, 1[^2$,

$$\begin{aligned} P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]) &= P([U < u] \cap [V < v]) \\ &= P([X < G_X(u)] \cap [Y < G_Y(v)]) \\ &= P([X \leqslant G_X(u)] \cap [Y \leqslant G_Y(v)]) \\ &= F_{(X,Y)}(G_X(x), G_Y(y)) \end{aligned}$$

U et V sont à densité.

X et Y sont à densité.

Si $u = 0$, alors $[U \leqslant u] \cap [V \leqslant v] \subset [U \leqslant u]$ et donc $P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]) = 0$.
Et de même si, $v = 0$, alors $P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]) = 0$.
Si $u = 1$, alors $P([U \leqslant u] \cap [V \leqslant v]) = P(V \leqslant v) = v$, et de même si $v = 1$.
Ainsi, la copule associée au couple (U, V) est donc C, $\boxed{\text{qui est par conséquent une copule.}}$

Si (U, V) est un couple dont la copule est C, alors nous savons que $G_X(U)$ a même loi que X et que $G_Y(V)$ a même loi que Y, et de plus, pour $F_X(x) \in]0, 1[$ (resp. $F_Y(y) \in]0, 1[$), on a

$$P([G_X(U) \leqslant x] \cap [G_Y(V) \leqslant y]) = P([U \leqslant F_X(x)] \cap [V \leqslant F_Y(y)]) = C(F_X(x), F_Y(y)) = F_{(X,Y)}(G_X(F_X(x)), G_Y(F_Y(y))) = F_{(X,Y)}(x, y).$$

Et doncLes passages du large au strict sont douteux, mais faisons comme si c'était OK.é
$(G_X(U), G_Y(V))$ a même loi que (X, Y).
Ainsi, pour simuler une réalisation (x, y) de (X, Y) à partir d'une simulation (u, v) de (U, V), il suffit de poser $x = G_X(u)$ et $y = G_Y(v)$.

MATHS II 2015

Sujet : Espérances corrigées — **Moyen**

Abordable en première année : ✓ — **Intérêt** : ★☆☆

Thèmes du programme abordés : variables à densité, variables aléatoires discrètes, analyse réelle, fonctions convexes, probabilités discrètes, `Scilab`.

Commentaires : la première partie est abordable, bien que monotone. La seconde partie est bien plus analytique que probabiliste. La dernière partie est, à l'exception de la question 10, très calculatoire et la récurrence de la question 13 est véritablement difficile.

Dans tout le problème :

- On note $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.
- Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur le même espace $(\Omega, \mathscr{A})$ qui est, sauf mention contraire, muni de la probabilité P.
- On note S_X la fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, telle que : $\forall x \in \mathbf{R},\ S_X(x) = P([X > x])$.

Dans le cadre de l'évaluation des risques encourus par des établissements financiers, il est nécessaire de retrancher à la valeur moyenne attendue des investissements (espérance mathématique "pure") un terme correctif d'autant plus important que le risque est plus grand.

L'objet du problème est de déterminer grâce à une "fonction de distorsion", une "espérance corrigée" qui prend en compte cette notion de risque et qui possède les propriétés requises pour une évaluation cohérente de risques financiers, en particulier, une propriété de sous-additivité nécessaire pour valoriser équitablement les avantages éventuels de la diversification.

Partie I. Probabilité de surpassement et espérance

1. On suppose uniquement dans cette question que X suit la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$).
   a. Vérifier l'égalité : $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx$.
   b. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition F de X et interpréter $E(X)$ en terme d'aire grâce à la formule précédente.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $h(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.
   a. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,dx$.
   b. Déterminer deux réels c et d vérifiant pour tout réel $x \geqslant 0$, la relation : $h(x) = \dfrac{c}{x+1} + \dfrac{d}{x+2}$.
   En déduire une primitive de h sur $\mathbf{R}_+$.
   c. Montrer que la fonction $f_0 : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\ln 2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est une densité de probabilité.
3. On suppose dans cette question que X admet pour densité la fonction f_0 définie à la question 2.c.
   a. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
   b. Pour tout x réel, calculer $S_X(x)$ et en trouver un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$.
   c. Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx$.
4. a. Justifier la monotonie de la fonction S_X et trouver la limite de $S_X(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   b. Montrer que la fonction S_X est continue à droite. À quelle condition est-elle continue en 0 ?
5. Dans cette question, on suppose que X admet une densité f nulle sur $]-\infty, 0]$, continue sur $]0, +\infty[$ mais non nécessairement en 0.
   a. Montrer que la fonction S_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
   b. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} x f(x)\,dx$.
   c. Établir pour tout réel $A \geqslant 0$, l'égalité : $\displaystyle\int_0^{A} S_X(x)\,dx = A S_X(A) + \int_0^{A} x f(x)\,dx$.

d. En déduire que si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx$ est convergente, alors X admet une espérance.

e. Montrer que si X admet une espérance, alors on a pour tout réel $A \geqslant 0$: $\displaystyle\int_A^{+\infty} x f(x)\,dx \geqslant A S_X(A)$.

f. Déduire des résultats précédents que X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx$ est convergente, et que dans ce cas, on a : $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx \qquad [1]$.

6. Dans cette question, on suppose que X est discrète et à valeurs dans $\mathbf{N}$.

a. Établir pour tout entier naturel n, l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_X(k) = (n+1)P([X \geqslant n+1]) + \sum_{k=0}^{n} kP([X=k])$.

b. En déduire que si la série de terme général $S_X(n)$ est convergente, alors X admet une espérance.

c. Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $S_X(n)$ est convergente, et que dans ce cas, on a : $E(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_X(n)$.

d. On suppose que X admet une espérance.

i. Exprimer pour tout $N \in \mathbf{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{N} S_X(x)\,dx$ à l'aide d'une somme partielle de la série de terme général $S_X(n)$.

ii. En déduire que $E(X) = \displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} S_X(x)\,dx$.

Ainsi, la relation [1] reste applicable dans le cas des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ *; on admet qu'elle reste applicable à toute variable aléatoire pour laquelle l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx$ *est convergente.*

Partie II. Fonctions de distorsion et espérances corrigées : un exemple

On appelle *fonction de distorsion* toute fonction g définie, continue et croissante sur l'intervalle $[0,1]$ qui vérifie les trois propriétés supplémentaires suivantes : $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ et g est concave sur $]0,1[$.

Pour toute fonction de distorsion g, on dit que X admet une *espérance corrigée par* g, si la fonction composée $g \circ S_X$ admet une intégrale convergente sur $[0,+\infty[$.

Cette intégrale, notée $E_g(X)$, est appelée espérance de X corrigée par g. Ainsi : $E_g(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g\left(S_X(x)\right)\,dx$.

7. *Exemple.* Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite dont la dérivée, notée φ, est telle que : $\forall\, t \in \mathbf{R},\ \varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$.

a. Justifier que Φ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0,1[$. On note Ψ la bijection réciproque de Φ.

Soit $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et w_α la fonction définie sur $[0,1]$ telle que : $w_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \Phi\left(\Psi(x) - \Psi(\alpha)\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

b. Montrer que la fonction w_α est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

c. On note w'_α la dérivée de w_α. Établir pour tout $x \in]0,1[$, la relation : $w'_\alpha(x) = \exp\left(\Psi(\alpha)\Psi(x) - \dfrac{(\Psi(\alpha))^2}{2}\right)$.

d. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction w_α au point d'abscisse α.

e. Vérifier que w_α est une fonction de distorsion.

8. On considère à nouveau la fonction de distorsion w_α définie dans la question 7.
Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suit une loi normale d'écart-type égal à 1, dont l'espérance est notée μ, et soit X une variable aléatoire qui suit la même loi que $\exp(Y)$.

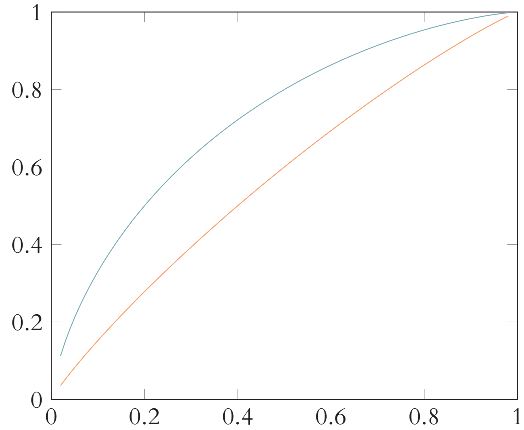
a. Justifier l'existence de l'espérance de X et la calculer.

b. Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $w_\alpha(S_X(x)) = P([X\, e^{-\Psi(\alpha)} > x])$.

c. En déduire l'existence et la valeur de $E_{w_\alpha}(X)$.

9. Pour faire tracer par `Scilab` la courbe représentative de w_α, on utilise la fonction `cdfnor` qui permet de calculer les valeurs de la fonction de répartition de variables aléatoires de loi normale.
Si une variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite et si x et p sont deux réels reliés par l'égalité $P([Z \leqslant x]) = p$, alors :
• p est calculable en `Scilab` par `cdfnor('PQ',x,0,1);`
• x est calculable en `Scilab` par `cdfnor('X',0,1,p,1-p)`.
Le graphique ci-dessous a été obtenu en affectant successivement à la variable `alpha` les valeurs 0.2 et 0.4, et en exécutant les cinq instructions codées comme suit, la quatrième étant incomplète.

```
1 qa=cdfnor('X',0,1,alpha,1-alpha)
2 p=[0.02 :0.01 :0.98]
3 q=cdfnor('X',zeros(p),ones(p),p,1-p)-qa*ones(p)
4 wa=cdfnor('PQ', ?, ?, ?)
5 plot(p,wa)
```



a. Quelles sont les valeurs affectées aux variables p et q par les instructions (2) et (3) (on en précisera le format matriciel) ?
b. Compléter la quatrième ligne de code.
c. À laquelle des deux courbes correspond la valeur $\alpha = 0.2$ (on justifiera mathématiquement la réponse) ?
d. Comment trouver les tangentes aux deux courbes en $(0,0)$ et $(1,1)$?
e. Que deviendrait la courbe représentative de w_α si on faisait tendre α vers 0 ?

Partie III. Sous-additivité des espérances corrigées

Les notations et le contexte de cette partie sont identiques à ceux des parties I et II.
Dans cette partie, on note g une fonction de distorsion arbitraire et on suppose l'existence de $E_g(X)$.
Soit B un réel positif et soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ telle que $P([Y \in [0,B]]) = 1$.
L'objectif de cette partie consiste à établir l'inégalité : $E_g(X+Y) \leqslant E_g(X) + E_g(Y)$ [2].

10. a. Soit x un réel fixé de $[0,1]$. Justifier pour tout entier $n \geqslant 1$, l'inégalité :

$$g\left(x\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)\frac{1}{n}\right) \geqslant x\, g\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)\, g\left(\frac{1}{n}\right).$$

b. En déduire que $g(x) \geqslant x$.
c. Soit a, b et ε trois réels tels que : $0 < a < b < b+\varepsilon < 1$.

Justifier l'existence d'un réel $\lambda \in [0,1]$ vérifiant les deux égalités : $\begin{cases} \lambda\, a + (1-\lambda)(b+\varepsilon) & = b \\ (1-\lambda)\, a + \lambda\,(b+\varepsilon) & = a+\varepsilon \end{cases}$

En déduire l'inégalité : $g(b+\varepsilon) - g(a+\varepsilon) \leqslant g(b) - g(a)$.

11. a. Montrer que $E(X)$ existe et que $E(X) \leqslant E_g(X)$.
b. Montrer que si X est une variable aléatoire certaine, on a $E_g(X) = E(X)$.
c. Soit $r > 0$ et $s \geqslant 0$. Montrer que $E_g(rX+s)$ existe et que : $E_g(rX+s) = rE_g(X) + s$.
d. Soit T et W deux variables aléatoires telles que $P([0 \leqslant T \leqslant W]) = 1$.
Sous réserve d'existence, comparer $E_g(T)$ et $E_g(W)$.

12. Justifier l'existence de $E_g(Y)$ et de $E_g(X+Y)$; établir les inégalités : $E_g(Y) \leqslant B$ et $E_g(X+Y) \leqslant E_g(X) + B$.

13. On se propose de montrer par récurrence sur l'entier n que l'inégalité [2] est vraie pour toute variable aléatoire U telle que $P([U \in [\![0,n]\!]]) = 1$.
Soit n un entier naturel donné. On suppose que quelle que soit la probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$, l'inégalité [2] est vraie pour toute fonction de distorsion g, pour toute variable aléatoire X possédant une espérance corrigée par g et pour toute variable aléatoire U telle que $P([U \in [\![0,n]\!]]) = 1$.
a. Déduire de la question 12 que la propriété ci-dessus est vérifiée pour $n = 0$.
b. On suppose la propriété ci-dessus vérifiée pour un entier naturel n donné.
Soit Z une variable aléatoire telle que $P([Z \in [\![0,n+1]\!]]) = 1$ et $p = P([Z > 0]) > 0$.
On pose $P^* = P_{[Z>0]}$ (probabilité conditionnelle sachant $[Z > 0]$). Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$S_X^*(x) = P^*([X > x]),\ S_Z^*(x) = P^*([Z > x] \text{ et } S_{X+Z}^*(x) = P^*([X+Z > x]).$$

i. Établir l'égalité : $S_{X+Z}(x) = (1-p)\,P_{[Z=0]}([X > x]) + p\,S^*_{X+Z}(x)$.

ii. Exprimer $S_X(x)$ et $S_Z(x)$ en fonction de p, $P_{[Z=0]}([X > x])$, $S^*_X(x)$ et $S^*_Z(x)$.

iii. En utilisant le résultat de la question 10.c), déduire des relations précédentes l'inégalité :

$$g\left(S_{X+Z}(x)\right) - g\left(S_X(x)\right) - g\left(S_Z(x)\right) \leqslant g\left(pS^*_{X+Z}(x)\right) - g\left(pS^*_X(x)\right) - g\left(pS^*_Z(x)\right) .$$

c. Justifier que la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{g(px)}{g(p)}$ est une fonction de distorsion et établir l'inégalité :

$$\int_0^{+\infty} h\left(S^*_{X+Z}(x)\right)\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} h\left(S^*_X(x)\right)\,dx + \int_0^{+\infty} h\left(S^*_Z(x)\right)\,dx\,.$$

d. En déduire l'inégalité : $E_g(X+Z) \leqslant E_g(X) + E_g(Z)$. Conclure.

14. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $\omega \in \Omega$, on pose : $Y_n(\omega) = \dfrac{1}{n}\lfloor n\,Y(\omega)\rfloor$, ou $\lfloor u\rfloor$ désigne la partie entière de u.

a. Justifier l'existence de $E_g(Y_n)$ et $E_g(X+Y_n)$; établir l'inégalité : $E_g(X+Y_n) \leqslant E_g(X) + E_g(Y_n)$.

b. Pour $x > 0$, comparer les événements $[\,Y_n > x]$ et $[\,Y > x]$, et montrer que $E_g(Y_n) \leqslant E_g(Y)$.

c. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g\left(S_{X+Y}(x)\right)\,dx = \int_0^{+\infty} g\left(S_{X+Y}\left(x+\frac{1}{n}\right)\right)\,dx \leqslant E_g(X+Y_n)\,.$$

d. En déduire l'inégalité [2].

MATHS II 2015 : CORRIGÉ

Partie I : Probabilité de surpassement et espérance

1.a. Nous savons que si X suit une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$, alors pour tout $x > 0$,

$$S_X(x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}.$$

Ainsi pour $A > 0$,

$$\int_0^A S_X(x)dx = \int_0^A e^{-\lambda x}dx = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^A = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda}.$$

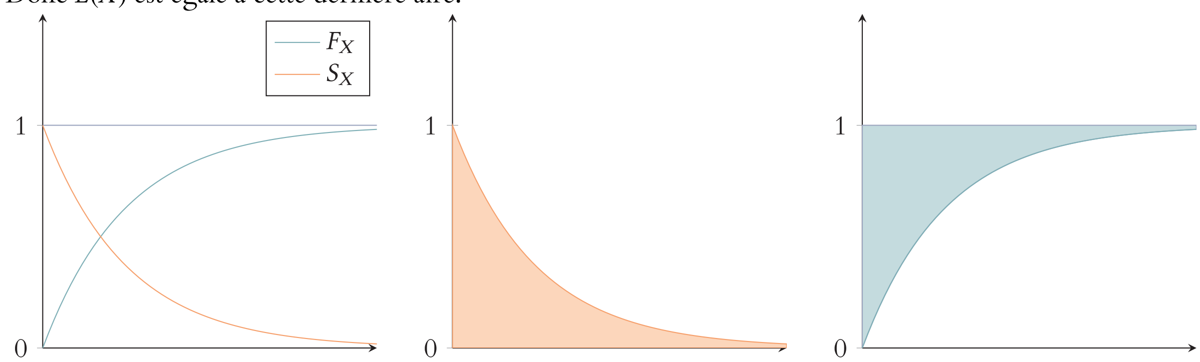
Et donc

$$\int_0^{+\infty} S_X(x)dx = \frac{1}{\lambda} = \boxed{E(X).}$$

Symétrie

$S_X = 1 - F_X$, donc la courbe représentative de S_X est obtenue à partir de celle de F_X par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

1.b. Remarquons que $S_X = 1 - F_X$. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$, qui est l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de S_X est également l'aire entre la droite d'équation $y = 1$ et la courbe représentative de F_X.
Donc $E(X)$ est égale à cette dernière aire.



Lien entre S_X et F_X. L'intégrale de S_X. $E(X)$ est l'aire colorée.

2.a. La fonction h est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a $h(x) \sim \frac{1}{x^2}$.
Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge (intégrale de Riemann), par critère de comparaison pour les fonctions positives, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\,dx$, et donc de $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,dx$.

2.b. Supposons que deux tels réels c et d existent. Alors pour tout $x \geqslant 0$,

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2} \Rightarrow 1 = c(x+2) + d(x+1) = (c+d)x + (2c+d).$$

Deux fonctions polynomiales coïncident sur $\mathbf{R}_+$ si et seulement si elles ont les mêmes coefficients, donc nécessairement $\begin{cases} c+d=0 \\ 2c+d=1 \end{cases}$. Après résolution, on obtient $\boxed{c = 1, d = -1.}$

Remarque

En vérité, ce résultat n'est pas très surprenant, on a déjà fait ce calcul à plusieurs reprises :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

On en déduit qu'une primitive de $h(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$ est

$$H : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x+2) = \boxed{\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right).}$$

2.c. La fonction f_0 est positive sur $\mathbf{R}$, et continue sauf éventuellement[1] en 0.
De plus, pour $A > 0$, on a

$$\int_0^A f_0(x)\,dx = \frac{1}{\ln(2)}\int_0^A h(x)\,dx = \frac{1}{\ln(2)}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right]_0^A = \frac{1}{\ln 2}\left(\ln\left(\frac{A+1}{A+2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

[1] Ne cherchons pas à savoir si elle est ou non continue en 0 : on a le droit à un nombre fini de points de discontinuité.

Lorsque $A \to +\infty$, alors $\dfrac{A+1}{A+2} \to 1$ et donc $\ln\left(\dfrac{A+1}{A+2}\right) \to 0$. On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f_0(x)\,dx = -\frac{1}{\ln(2)}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 1.$$

Ainsi, $\boxed{f_0 \text{ est une densité de probabilité.}}$

3.a. X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_0(x)\,dx$ converge absolument.
Or, au voisinage de $+\infty$, $x f_0(x) \sim \frac{1}{\ln(2)}\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x\ln(2)}$.
Mais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, et donc par critère de comparaison pour les fonctions positives, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} x f_0(x)\,dx$. Par conséquent, $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

3.b. Par définition, on a $S_X(x) = P(X > x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f_0(t)\,dt$.
Mais le même calcul que celui effectué à la question 2.c prouve que

$$S_X(x) = \int_x^{+\infty} f_0(t)\,dt = -\frac{1}{\ln(2)}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \boxed{\frac{1}{\ln(2)}\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right).}$$

Au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{x+2}{x+1} \to 1$, donc $\frac{x+2}{x-1} - 1 \to 0$

$$S_X(x) = \frac{1}{\ln(2)}\ln\left(1 + \left(\frac{x+2}{x+1} - 1\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(2)}\left(\frac{x+2}{x+1} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{x\ln(2)}}.$$

3.c. Nous savons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, et donc par critère de comparaison pour les fonctions positives, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} S_X(x)\,dx$, et donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx \text{ diverge.}}$

4.a. Par définition de S_X, on a $S_X = 1 - F_X$.
Or, comme toute fonction de répartition, F_X est croissante de limite égale à 1 en $+\infty$, donc S_X est décroissante sur $\mathbf{R}$, de limite nulle en $+\infty$.

4.b. Nous savons que F_X, comme toute fonction de répartition, est continue à droite en tout point. Donc[2] $S_X = 1 - F_X$ est également continue à droite en tout point.
S_X est continue en 0 si et seulement si elle y est continue à gauche. Or, pour $x < 0$, on a $S_X(x) = 1$ car X est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.
Donc S_X est continue à gauche en 0 si et seulement

$$S_X(0) = \lim_{x\to 0^-} S_X(x) = 1$$

Or, $S_X(0) = P(X > 0)$, et donc S_X est continue à gauche si et seulement si $P(X > 0) = 1$.
Mais $1 = P(X \geqslant 0) = P(X = 0) + P(X > 0)$, et donc
$\boxed{S_X \text{ est continue à gauche si et seulement si } P(X = 0) = 0.}$

5.a. Si X admet une densité, alors F_X est continue, et donc $S_X = 1 - F_X$ est également continue. De plus, pour $x \geqslant 0$, on a

$$S_X(x) = 1 - F_X(x) = 1 - \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = 1 - \int_0^x f(t)\,dt.$$

Pour utiliser le théorème fondamental de l'analyse, écrivons plutôt

$$fS_X(x) = 1 - \int_0^1 f(t)\,dt - \int_1^x f(t)\,dt.$$

Alors, f étant continue sur $\mathbf{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ est une primitive de f (qui s'annule en 1). En particulier, elle est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
Et donc S_X est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et $S_X'(x) = -f(x)$. Cette dérivée est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ par hypothèse, et donc $\boxed{S_X \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbf{R}_+^*.}$

Équivalents

Si l'on cherche un équivalent de u avec u qui tend vers 1, on se ramène systématiquement à l'équivalent que l'on connaît bien en 0 en écrivant

$$\ln(u) = \ln(1 + (u-1))$$

avec $u - 1 \to 0$.

[2] Par somme de fonctions continues à droite.

Intuition

Une discontinuité en x dans la fonction de répartition correspond à $P(X = x) \neq 0$. Penser par exemple à ce qu'il se passe pour une variable discrète : les points de discontinuité apparaissent précisément aux réels x tels que $P(X = x) \neq 0$.

Subtitité

f n'est pas nécessairement continue en 0, donc le théorème assurant que

$$x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$$

est une primitive de f ne s'applique pas tel que : il nécessite f continue en 0.

5.b. Pour $x \in]0,1]$, on a $0 \leqslant xf(x) \leqslant f(x)$.
Or f est une densité, de sorte que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, et donc il en est de même de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$. Par critère de comparaison pour les fonctions positives[3], il en est de même de $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$.

[3] Rappelons que pour utiliser des majorations/minorations pour prouver des convergences, il est important d'avoir affaire à des fonctions positives.

5.c. Soit $\varepsilon \in]0,A]$. Alors sur le segment $[\varepsilon, A]$, les fonctions $u = S_X$ et $v = x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$: on peut donc procéder à une intégration par parties.

$$\int_\varepsilon^A S_X(x)dx = [xS_X(x)]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A xS_X'(x)dx = AS_X(A) - \varepsilon S_X(\varepsilon) + \int_\varepsilon^A xf(x)dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} AS_X(A) + \int_0^A xf(x)dx.$$

En effet, la fonction S_X est continue en 0, de sorte que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon S_X(\varepsilon) = 0 \times S_X(0) = 0$. Par conséquent, $\displaystyle\int_0^A S_X(x)dx$ converge et

$$\boxed{\int_0^A S_X(x)dx = AS_X(A) + \int_0^A xf(x)dx.}$$

5.d. Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx$ converge, alors, la fonction S_X étant à valeurs positives, pour tout $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A S(x)\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx$. Et alors

$$\forall A > 0,\ \int_0^A xf(x)\,dx = \int_0^A S_X(x)\,dx - AS_X(A) \leqslant \int_0^A S_X(x)\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx.$$

Puisque $x \mapsto xf(x)$ est positive sur $\mathbf{R}_+$, la fonction $A \mapsto \displaystyle\int_0^A xf(x)\,dx$ est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, et nous venons de prouver qu'elle est majorée. Par conséquent, elle admet une limite finie en $+\infty$, et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ converge (et donc converge absolument car il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive). On en déduit que $\boxed{X \text{ admet une espérance.}}$

5.e. Soit $A \geqslant 0$. Alors pour tout $x \in [A, +\infty[$, $xf(x) \geqslant Af(x)$, et alors par croissance de l'intégrale,

$$\int_A^{+\infty} xf(x)\,dx \geqslant \int_A^{+\infty} Af(x)\,dx = A\int_A^{+\infty} f(x)\,dx = AP(X > A) = AS_X(A).$$

Convergence
L'intégrale de gauche converge bien car X admet une espérance, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$

converge.

5.f. Si X admet une espérance, alors $\displaystyle\int_A^{+\infty} xf(x)\,dx \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car il s'agit du reste d'une intégrale convergente. Et alors par le théorème des gendarmes, $AS_X(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit, grâce à l'égalité de la question 5.c que $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx$ converge et

$$\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A S_X(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} AS_X(A) + \lim_{A\to+\infty}\int_0^A xf(x)\,dx = 0 + \int_0^{+\infty} xf(x)\,dx = E(X).$$

Inversement, si $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx$ converge, alors par 5.d, X admet une espérance, et donc nous venons de prouver[4] que

$$\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx = E(X).$$

[4] En effet, ne faisons pas de nouveaux calculs, nous venons à l'instant de prouver que si $E(X)$ existe, elle est nécessairement égale à l'intégrale de S_X.

Par conséquent, X admet une espérance **si et seulement si** $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx$ converge et alors

$$\boxed{\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx = E(X).}$$

6.a. Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on a

$$S_X(k) = P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(X=i) = \sum_{i=k+1}^{n} P(X=i) + \sum_{i=n+1}^{+\infty} P(X=i) = \sum_{i=k+1}^{n} P(X=i) + P(X \geqslant n+1).$$

Alors il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} S_X(k) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k+1}^{n} P(X=i) + P(X \geqslant n+1)\right)\\ &= (n+1)P(X \geqslant n+1) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n} P(X=i)\\ &= (n+1)P(X \geqslant n+1) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} P(X=i)\\ &= (n+1)P(X \geqslant n+1) + \sum_{i=1}^{n} iP(X=i)\\ &= \boxed{(n+1)P(X \geqslant n+1) + \sum_{i=0}^{n} iP(X=i).}\end{aligned}$$

Interversion de Σ
$i \geqslant k+1 \Leftrightarrow k \leqslant i-1$

Précision
Le terme correspondant à $i=0$ est nul.

6.b. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a, d'après la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \leqslant \sum_{k=0}^{n} S_X(k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k).$$

Ainsi, la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} kP(X=k)$ est croissante[5] et majorée, donc elle converge.
Par conséquent, la série de terme général $kP(X=k)$ converge, et étant à termes positifs, elle converge absolument. Donc $\boxed{X \text{ admet une espérance.}}$

[5] Car suite des sommes partielles d'une série à termes positifs.

6.c. Pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$0 \leqslant (n+1)P(X \geqslant n+1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1)P(X=k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k).$$

Or si X admet une espérance, la série de terme général $kP(X=k)$ converge, de sorte que la suite de ses restes tend vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k) = 0.$$

Et alors par le théorème des gendarmes, $(n+1)P(X \geqslant n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} S_X(k) = \lim_{n\to+\infty} (n+1)P(X \geqslant n+1) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = 0 + \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k) = E(X).$$

Inversement, si $\sum_k S_X(k)$ converge, alors X admet une espérance, et donc nous venons de prouver que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k) = E(X).$$

Ainsi, $\sum_k S_X(k)$ converge si et seulement si X admet une espérance et alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k) = E(X).}$$

6.d.i. Soit $x \in [0, N[$. Alors X étant à valeurs entières, en notant $k = \lfloor x \rfloor$, on a

$$S_X(x) = P(X > x) = P(X > k) = S_X(k).$$

Donc la fonction S_X vérifie $S_X(x) = S_X(\lfloor x \rfloor)$. Ou encore :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall x \in [k, k+1[, S_X(x) = S_X(k).$$

Ainsi, il vient

$$\int_0^N S_X(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} S_X(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} S_X(k)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} S_X(k) = \sum_{k=0}^{N-1} S_X(k).$$

Notons que ce résultat est encore valable pour $N = 0$.

Détail Il n'y a aucun entier dans $]k, x[$, donc X ne peut pas prendre de valeurs dans cet intervalle.

6.d.ii. D'après ce qui précède, pour $A \geqslant 1$, on a

$$\int_0^A S_X(x)dx = \int_0^{\lfloor A \rfloor} S_X(x)dx + \int_{\lfloor A \rfloor}^A S_X(x)dx = \int_0^{\lfloor A \rfloor} S_X(x)dx + \int_{\lfloor A \rfloor}^A S_X(\lfloor A \rfloor)dx = \sum_{k=0}^{\lfloor A \rfloor - 1} S_X(k) + (A - \lfloor A \rfloor) S_X(\lfloor A \rfloor).$$

Mais $0 \leqslant A - \lfloor A \rfloor \leqslant 1$, et $\lim\limits_{A \to +\infty} S_X(\lfloor A \rfloor) = 0$. On en déduit que

$$\lim_{A \to +\infty} (A - \lfloor A \rfloor) S_X(\lfloor A \rfloor) = 0.$$

Limite La série de terme général $S_X(k)$ converge, et donc son terme général tend vers 0.

Alors, en passant à la limite, il vient

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A S_X(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor A \rfloor - 1} S_X(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k) = \boxed{E(X).}$$

Partie II : Fonctions de distorsion et espérances corrigées : un exemple.

7. *Exemple*

7.a. Φ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ car sa dérivée φ y est strictement positive. De plus, Φ est continue et $\lim\limits_{t \to -\infty} \Phi(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) = 1$, donc par le théorème de la bijection, Φ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans $]0, 1[$.

Limites Ces limites ne sont pas spécifiques à Φ : ce sont celles de toute fonction de répartition !

7.b. w_α est continue sur $]0, 1[$ car composée de fonctions continues[6].
De plus, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \Psi(x) - \Psi(\alpha) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} \Phi(t) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} w_\alpha(x) = 0 = w_\alpha(0)$, de sorte que w_α est continue en 0.
De même, $\lim\limits_{x \to 1^-} \Psi(x) - \Psi(\alpha) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 1^-} w_\alpha(x) = 1 = w_\alpha(1)$. Ainsi w_α est continue en 1.
Par conséquent $\boxed{w_\alpha \text{ est continue sur } [0, 1].}$ Enfin, Ψ est dérivable sur $]0, 1[$ car il s'agit de la bijection réciproque d'une fonction dont la dérivée ne s'annule jamais. Par composition de fonctions dérivables, $\boxed{w_\alpha \text{ est dérivable sur }]0, 1[.}$

[6] La bijection réciproque d'une fonction continue est continue, donc Ψ est continue.

7.c. D'après la formule de dérivation des fonctions composées,

$$\forall x \in]0, 1[, w'_\alpha(x) = \Psi'(x)\Phi'(\Psi(x) - \Psi(\alpha)) = \frac{1}{\varphi(\Psi(x))}\varphi(\Psi(x) - \Psi(\alpha)) = e^{\Psi(x)^2/2} e^{-(\Psi(x) - \Psi(\alpha))^2/2} = \boxed{e^{\Psi(\alpha)\Psi(x) - \frac{\Psi(\alpha)^2}{2}}.}$$

7.d. L'équation de la tangente à la courbe représentative de w_α au point d'abscisse α est

$$y = w'_\alpha(\alpha)(x - \alpha) + w_\alpha(\alpha) = e^{\frac{\Psi(\alpha)^2}{2}}(x - \alpha) + \Phi(0) = e^{\frac{\Psi(\alpha)^2}{2}}(x - \alpha) + \frac{1}{2}.$$

7.e. Nous avons déjà vérifié que w_α est continue sur $[0, 1]$, et nous avons trivialement $w_\alpha(0) = 0$ et $w_\alpha(1) = 1$.
Par positivité de l'exponentielle, on a évidemment $w'_\alpha(x) > 0$ pour $x \in]0, 1[$, et donc w_α est strictement croissante sur $]0, 1[$. Étant continue, elle est alors croissante sur $[0, 1]$.
Puisque Ψ est la bijection réciproque d'une fonction strictement croissante, elle est strictement croissante. Or, $\Psi(\alpha) < 0$, de sorte que $x \mapsto \Psi(x)\Psi(\alpha) - \dfrac{\Psi(\alpha)^2}{2}$ est décroissante.

Par croissance de l'exponentielle, w'_α est décroissante sur $]0,1[$. On en déduit donc que w_α est concave sur $]0,1[$.

Ceci signifie que $\forall (x,y) \in]0,1[^2, \forall \lambda \in [0,1], w_\alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda w_\alpha(x) + (1-\lambda)w_\alpha(y)$.

Par continuité de w_α, en fixant λ et en faisant tendre x vers 0, cette relation est toujours vérifiée pour $x = 0$ et $y \in]0,1[$. Sur le même principe, on vérifie en fait qu'elle reste valable pour tous $(x,y) \in [0,1]^2$ et tout $\lambda \in [0,1]$. Et donc[7] w_α est bien concave sur $[0,1]$.

En conclusion, $\boxed{w_\alpha \text{ est bien une fonction de distorsion.}}$

Concavité

On sait caractériser la convexité/concavité d'une fonction f grâce au signe de f', sur un intervalle où f est $\mathscr{C}^1$. Malheureusement, ici on ne peut l'affirmer que sur $]0,1[$, et pas sur $[0,1]$.

[7] La même preuve prouverait en fait que si f est convexe/concave sur $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$, alors elle est convexe/concave sur $[a,b]$.

8.a. D'après le théorème de transfert, X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2}}\,dt$ converge (absolument, mais il s'agit d'une fonction à valeurs positives).

Or, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$e^t e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2}} = e^{t-\frac{t^2}{2}+\mu t-\frac{\mu^2}{2}} = e^{-\frac{(t-(\mu+1))^2}{2}+\mu+\frac{1}{2}}.$$

Procédons alors au changement de variable $u = t-(\mu+1)$, qui réalise une bijection $\mathscr{C}^1$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2}}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-(\mu+1))^2}{2}} e^{\mu+\frac{1}{2}}\,dt \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{\mu+\frac{1}{2}}\,du$$

sont de même nature. Or, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{\mu+\frac{1}{2}}\,du = e^{\mu+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ converge[8] et vaut $e^{\mu+\frac{1}{2}}$. Donc X admet une espérance et

$$\boxed{E(X) = e^{\mu+\frac{1}{2}}.}$$

[8] On reconnaît l'intégrale de la densité d'une loi normale centrée réduite ! Donc elle converge et vaut 1.

8.b. Par définition de X, pour tout réel $x > 0$, on a, par croissance du logarithme,

$$S_X(x) = P(X > x) = P(e^Y > x) = P(Y > \ln(x))$$

Mais $Y - \mu$ suit une loi normale centrée réduite, donc pour tout réel y, on a

$$P(Y > y) = P(Y-\mu > y-\mu) = 1 - P(Y-\mu \leqslant y-\mu) = 1 - \Phi(y-\mu).$$

Donc $P(X > x) = 1 - \Phi(\ln x - \mu) = \Phi(\mu - \ln x)$. Et alors

$$w_\alpha(S_X(x)) = \Phi\left(\Psi(\Phi(\mu - \ln(x))) - \Psi(\alpha)\right) = \Phi(\mu - \ln x - \Psi(\alpha)).$$

D'autre part, on a

$$P(Xe^{-\Psi(\alpha)} > x) = P\left(X > xe^{\Psi(\alpha)}\right) = P(Y > \ln(x)+\Psi(\alpha)) = 1-\Phi(\ln(x)+\Psi(\alpha)-\mu) = \Phi(\mu-\ln x-\Psi(\alpha)).$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall x > 0, w_\alpha(S_X(x)) = P\left(Xe^{-\Psi(\alpha)} > x\right).}$$

Lois normales

Puisque si on centre et réduit une loi normale, on obtient encore une loi normale, la fonction de répartition de toute loi normale peut s'exprimer en fonction de Φ.

8.c. Par définition de l'espérance corrigée, sous réserve de convergence,

$$E_{w_\alpha}(X) = \int_0^{+\infty} w_\alpha(S_X(x))\,dx = \int_0^{+\infty} P(Xe^{-\Psi(\alpha)} > x)\,dx = \int_0^{+\infty} P(X > e^{\Psi(\alpha)}x)\,dx = \int_0^{+\infty} S_X(e^{\Psi(\alpha)}x)\,dx.$$

Procédons au changement de variable $u = xe^{\Psi(\alpha)}$, qui réalise une bijection $\mathscr{C}^1$ de $[0,+\infty[$ sur lui-même. Alors les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(e^{\Psi(\alpha)}x)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(u)e^{-\Psi(\alpha)}\,du$ sont de même nature, et en cas de convergence sont égales.

Mais X admet une espérance d'après la question 8.a, de sorte que par la question 5.f, la seconde intégrale converge et vaut $e^{-\Psi(\alpha)}E(X)$. Ainsi, $E_{w_\alpha}(X)$ existe et vaut

$$\boxed{E_{w_\alpha}(X) = e^{-\Psi(\alpha)}E(X) = e^{-\Psi(\alpha)}e^{\mu+\frac{1}{2}}.}$$

Notons que puisque $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, alors $\Psi(\alpha) \leqslant 0$ et donc $e^{-\Psi(\alpha)} > 1$. Ceci est bien cohérent avec le résultat (à venir) de la question 11.a.

9.a. p et q sont deux vecteurs lignes à 97 colonnes.
p contient alors les $0.02 + 0.01 \times k, k \in [\![0, 96]\!]$.
Et q contient les $\Psi(0.02 + 0.01 \times k) - \Psi(\alpha), k \in [\![0, 96]\!]$.

9.b. La ligne (4) peut être complétée en `wa = cdfnor("PQ",q,0,1)`

9.c. Si $\alpha < \alpha'$ sont deux réels de $]0,1[$, alors par stricte croissance de Ψ, on a $\Psi(\alpha) < \Psi(\alpha')$. Et donc

$$\forall x \in]0,1[, \Psi(x) - \Psi(\alpha') < \Psi(x) - \Psi(\alpha)$$

ce qui, par stricte croissance de Φ, implique que $w_{\alpha'}(x) < w_\alpha(x)$.
Par conséquent, la courbe du dessus correspond à $\alpha = 0.2$.

9.d. Commençons par donner une méthode pour tracer *approximativement* ces tangentes avec `Scilab`.
En remplaçant la ligne (2) par `p = [0.01 :0.01 :0.99]`, nous pouvons ajouter deux points à chacune des courbes, ceux d'abscisses respectives 0.01 et 0.99.
Ensuite, en traçant la droite passant par le point d'abscisse 0.01 et $(0,0)$, on obtient une corde[9] de w_α, qui doit être une bonne approximation de la tangente en $(0,0)$ (rappelons que le coefficient directeur de la tangente est la limite du taux d'accroissement). On procède de même avec le point d'abscisse 0.99 et le point $(1,1)$.
Toutefois, ceci ne nous garantit pas une précision suffisante... La précision peut tout de même être améliorée en réduisant le pas, par exemple en passant de 0.01 à 0.005, voire moins.

Donnons à présent une justification mathématique.
• En $(0,0)$: d'après l'inégalité des pentes (la fonction w_α est concave sur $[0,1]$), on a, pour tout $x \in]0,1[$,

$$\frac{w_\alpha(x) - w_\alpha(0)}{x} \geqslant \frac{w_\alpha(x) - w_\alpha(x/2)}{x/2} < 0.$$

Mais w_α étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$, on a (par décroissance et positivité de w'_α)

$$\forall x \in]0,1[, w_\alpha(x) - w_\alpha(x/2) = \int_{x/2}^{x} w'_\alpha(t)dt \geqslant w'_\alpha(x) \times \frac{x}{2}.$$

Et alors

$$\frac{w_\alpha(x) - w_\alpha(0)}{x} \geqslant w'_\alpha(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

On en déduit que le taux d'accroissement de w_α en 0 tend vers $+\infty$, et donc w_α n'est pas dérivable en 0 et sa courbe représentative admet une tangente verticale au point de coordonnées $(0,0)$.
• En $(1,1)$ la fonction w_α est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. De plus, sur $[1-h,1[$, sa dérivée est majorée par $w'_\alpha(1-h)$ car w'_α est décroissante. Donc par le théorème des accroissements finis, on a

$$\forall h \in]0,1[, |w_\alpha(1-h) - w_\alpha(1)| \leqslant w'_\alpha(1-h)h.$$

Soit encore

$$\forall h \in]0,1[, \left|\frac{w_\alpha(1-h) - w_\alpha(1)}{h}\right| \leqslant w'_\alpha(1-h) \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Donc w_α est dérivable en 1, de dérivée égale à 0. La tangente de w_α en $(1,1)$ est alors la droite d'équation $\boxed{y = 1.}$

9.e. Lorsque $\alpha \to 0$, $\Psi(\alpha) \to -\infty$. Et alors pour $x \in]0,1[$, $w_\alpha(x) = \Phi(\Psi(x) - \Psi(\alpha)) \to 1$.
Ainsi, la courbe représentative de w_α «se rapproche» lorsque $\alpha \to 0$ de la courbe représentative de $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Partie III : Sous-additivité des espérances corrigées
Sans plus d'hypothèses sur les variables aléatoires X, Y, etc, de cette partie, nous ne savons pas si la fonction $g \circ S_X$ est continue (sauf éventuellement en un nombre fini de points) sur $]0,+\infty[$, et nous ne sommes donc pas certains que les théorèmes d'intégration que nous connaissons (qui nécessitent des fonctions continues) s'appliquent. Nous passerons tout cela sous silence et ferons comme si de rien n'était (ce qui est légitime, mais dépasse largement le programme d'ECS).

Rappel
Si l'on applique une fonction prédéfinie dans `Scilab` à un vecteur, il sort un vecteur de même taille, et la fonction a été appliquée à chaque composante du vecteur d'origine.

[9] Rappelons qu'une corde est le segment qui joint deux points de la courbe.

10.a. Il s'agit de la définition de la concavité : g est concave sur $[0,1]$ si et seulement si pour tous $a,b\in[0,1]^2$ et tout $\lambda\in[0,1]$,

$$g(\lambda a+(1-\lambda)b)\geqslant \lambda g(a)(1-\lambda)g(b).$$

En prenant $a=1-\frac{1}{n}, b=\frac{1}{n}$ et $\lambda=x$, on obtient

$$\boxed{g\left(x\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)\frac{1}{n}\right)\geqslant xg\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)g\left(\frac{1}{n}\right).}$$

À savoir

Cette définition ne s'invente pas, il faut absolument la connaître, et pas se contenter de savoir caractériser la convexité/concavité avec les dérivées.

10.b. Par définition d'une fonction de distorsion, g est continue sur $[0,1]$.
Donc $\lim\limits_{n\to\infty} g\left(1-\frac{1}{n}\right)=g(1)=1$. Et de même, $\lim\limits_{n\to+\infty} g\left(\frac{1}{n}\right)=g(0)=0$.
Enfin, on a

$$\lim_{n\to+\infty} g\left(x\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)\frac{1}{n}\right)=g(x).$$

Donc en passant à la limite dans l'inégalité de la question précédente, il vient $\boxed{g(x)\geqslant x.}$

Remarque

La question précédente n'est pas nécessaire pour obtenir ce résultat : g étant concave, sa courbe est située au dessus de chacune de ses cordes. En particulier, la corde reliant les points de $\mathscr{C}_g$ d'abscisses 0 et 1 est la droite d'équation $y=x$ (car $g(0)=0$ et $g(1)=1$). Et donc pour tout $x\in[0,1]$, $g(x)\geqslant x$.

10.c. Posons $\lambda=\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+b-a}$. Alors il est évident que $\lambda\in[0,1]$ car $b-a\geqslant 0$ et $\varepsilon>0$.
De plus, on a alors

$$\lambda a+(1-\lambda)(b-\varepsilon)=\frac{a\varepsilon}{\varepsilon+b-a}+(b-a)\frac{\varepsilon+b-a}{(b+\varepsilon)}=\frac{b^2-ab+b\varepsilon}{\varepsilon+b-a}=b\frac{\varepsilon+b-a}{\varepsilon+b-a}=b.$$

Et de même, on a

$$(1-\lambda)a+\lambda(b+\varepsilon)=a\frac{b-a}{\varepsilon+b-a}+\frac{\varepsilon(b+\varepsilon)}{\varepsilon+b-a}=\frac{ab-a^2+\varepsilon b+\varepsilon^2}{\varepsilon+b-a}=(a+\varepsilon)\frac{\varepsilon+b-a}{\varepsilon+b-a}=a+\varepsilon.$$

Donc il existe bien un réel $\lambda\in[0,1]$ vérifiant les deux conditions requises.
En appliquant deux fois la définition de la concavité de g telle que rappelée dans la question 10.a, il vient

$$g(b)\geqslant \lambda g(a)+(1-\lambda)g(b+\varepsilon) \text{ et } g(a+\varepsilon)\geqslant(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b+\varepsilon).$$

En ajoutant ces deux inégalités, on obtient

$$g(b)+g(a+\varepsilon)\geqslant g(a)+g(b+\varepsilon)$$

soit encore

$$\boxed{g(b+\varepsilon)-g(a+\varepsilon)\leqslant g(b)-g(a).}$$

Rédaction ✎

La question demande de prouver qu'un tel réel existe, pas qu'il est unique. On peut (comme ici) résoudre le système au brouillon, et se contenter d'exhiber une solution en prouvant que c'en est bien une (c'est-à-dire qu'elle vérifie les conditions demandée).

11.a. Pour $x\in\mathbf{R}$, d'après la question 10.b, on a $0\leqslant S_X(x)\leqslant g(S_X(x))$.
Or puisque nous avons fait l'hypothèse que $E_g(X)$ existe, c'est donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx$ converge. Alors par critère de comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$ converge et

$$\int_0^{+\infty} S_X(x)dx\leqslant\int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx.$$

Mais par la question 5.f, X admet alors une espérance et

$$\boxed{E(X)=\int_0^{+\infty} S_X(x)dx\leqslant\int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx=E_g(X).}$$

11.b. Si X est la variable aléatoire certaine égale à $a\geqslant 0$, alors

$$S_X(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<a\\ 0 & \text{si } x\geqslant a\end{cases}$$

Et alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$ converge et

$$E_g(X)=\int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx=\int_0^{a} g(S_X(x))dx=\int_0^{a} 1dx=a=E(X).$$

11.c. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$S_{rX+s}(x) = P(rX+s > x) = P\left(X > \frac{x-s}{r}\right) = S_X\left(\frac{x-s}{r}\right).$$

Le changement de variable $u = \frac{x-s}{r}$ réalise une bijection $\mathscr{C}^1$ de $[0;+\infty[$ sur $[-\frac{s}{r},+\infty[$ avec $r\,du = dx$. Ainsi, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} g\left(S_X\left(\frac{x-s}{r}\right)\right) dx$ et $r\displaystyle\int_{-\frac{s}{r}}^{+\infty} g(S_X(u))\,du$ sont de même nature.

Mais puisque $E_g(X)$ existe par hypothèse, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(S_X(x))\,dx$ converge.

De plus, la fonction S_X est constante égale à 1 sur $[-\frac{s}{r},0[$, de même que la fonction $g\circ S_X$. Donc $\displaystyle\int_{-\frac{s}{r}}^{0} g(S_X(u))\,du$ converge et vaut $\frac{s}{r}$. Ceci prouve que $\displaystyle\int_{-\frac{s}{r}}^{+\infty} g(S_X(x))\,dx$ converge et alors

$$\begin{aligned}E_g(rX+s) &= \int_0^{+\infty} g(S_{rX+s}(x))\,dx = \int_0^{+\infty} g\left(S_X\left(\frac{x-s}{r}\right)\right) dx\\ &= r\int_{-\frac{s}{r}}^{+\infty} g(S_X(u))\,du = r\left(-\frac{s}{r} + \int_0^{+\infty} g(S_X(u))du\right) = rE_g(X)+s.\end{aligned}$$

Détails

$S_X(x) = 1$ si $x < 0$ car, par hypothèse, X est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.
Et alors $g(S_X(x)) = 1$ car $g(1) = 1$.

11.d. Si $P(0 \leqslant T \leqslant W) = 1$, alors pour tout x réel, on a $P(T \geqslant x) \leqslant P(W \geqslant x)$.
En effet, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[0 \leqslant T \leqslant W], \overline{[0 \leqslant T \leqslant W]}\}$, on obtient

$$P(T > x) = P([T > x] \cap [0 \leqslant T \leqslant W]) + P([T > x] \cap \overline{[0 \leqslant T \leqslant W]}).$$

Or, $P([T > x] \cap \overline{[0 \leqslant T \leqslant W]}) \leqslant P(\overline{[0 \leqslant T \leqslant W]}) = 0$ et $[T > x] \cap [0 \leqslant T \leqslant W] \subset [W > x]$ donc $P([T > x] \cap [0 \leqslant T \leqslant W]) \geqslant P(W > x)$.
Et alors par croissance de g, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(S_T(x)) \leqslant g(S_W(x))$.
Ainsi, si $E_g(T)$ et $E_g(W)$ existent, il vient (par croissance de l'intégrale)

$$E_g(T) = \int_0^{+\infty} g(S_T(x))\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} g(S_W(x))\,dx = E_g(W).$$

Presque sûrement

Toutes ces propriétés avec des égalités/inégalités valables presque sûrement sont très intuitives, mais souvent un peu délicates à montrer.
Ce genre de subtilité ne peut apparaître que dans des épreuves de parisiennes où une bonne rédaction plutôt qu'un «il est évident que» ne peut que faire gagner des points.
Si ce genre de raisonnements revient trop souvent, on peut se contenter de le faire une fois, ce qui suffit à montrer qu'on a compris le principe.

12. Par hypothèse, Y est presque sûrement inférieure à B.
Et donc[10] pour $x \geqslant B$, $S_X(x) = P(X > x) = 0$.

Ainsi, si f désigne la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,B] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

alors pour tout $x > 0$, $\quad 0 \leqslant S_X(x) \leqslant f(x)$. Et donc par croissance de g,

$$\forall x > 0,\ 0 \leqslant g(S_X(x)) \leqslant g(f(x)).$$

Mais $g(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,B] \\ 0 & \text{si } x > B\end{cases}$. Il est alors évident que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(f(x))\,dx = B$.

Par domination, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(S_X(x))\,dx$ existe et de plus

$$E_g(X) = \int_0^{+\infty} g(S_X(x))\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} g(f(x))\,dx = B.$$

Si $X+Y > x$, alors $X > x-Y \geqslant x-B$. Donc $[X+Y > x] \subset [X > x-B]$, et par croissance[11] de P, il vient alors $0 \leqslant S_{X+Y}(x) \leqslant S_X(x-B)$. Et donc $\forall x \in \mathbf{R}, 0 \leqslant g(S_{X+Y}(x)) \leqslant g(S_X(x-B))$.
Par définition, $E_g(X+Y)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(S_{X+Y}(x))\,dx$ converge.
Mais en procédant au changement de variable $u = x - B$, qui réalise une bijection $\mathscr{C}^1$

[10] Pour être tout à fait rigoureux, il aurait fallu, comme à la question 11.d, utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[0 \leqslant Y \leqslant B], \overline{[0 \leqslant Y \leqslant B]}\}$, mais nous ne le ferons pas afin de ne pas alourdir la rédaction et admettrons directement ce résultat.

[11] Ici croissance signifie que si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$.

de $]0,+\infty[$ sur $]-B,+\infty[$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(S_X(x-B))\,dx$ et $\displaystyle\int_{-B}^{+\infty} g(S_X(u))\,du$ sont de même nature, et en cas de convergence sont égales. Or

$$\int_{-B}^{+\infty} g(S_X(u))du = \int_{-B}^{0} g(S_X(u))du + \int_{0}^{+\infty} g(S_X(u))du = \int_{-B}^{0} 1du + E_g(X) = E_g(X)+B.$$

Précision
Pour $u \leqslant 0$, $S_X(u) = 1$ car X est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(S_X(x-B))\,dx$ converge et vaut $E_g(X)+B$. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(S_{X+Y}(x))\,dx$ converge et

$$E_g(X+Y) = \int_0^{+\infty} g(S_{X+Y}(x))\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} g(S_X(x-B))\,dx = \boxed{E_g(X)+B.}$$

13.a. Pour $n=0$, on a $E(Y)=0$ car Y est presque sûrement constante, égale à 0. Donc, d'après 11.b, $E_g(Y)=0$. Et alors nous avons prouvé à la question 12 que

$$E_g(X+Y) \leqslant E_g(X)+0 = E_g(X)+E_g(Y).$$

13.b.i. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[Z=0],[Z>0]\}$. Alors pour tout $x>0$,

s.c.e
Il s'agit en fait d'un système quasi-complet d'événements car Z prend peut-être des valeurs négatives. Mais alors c'est avec probabilité nulle.

$$S_{X+Z}(x) = P(X+Z>x) = P(X+Z>x|Z=0)P(Z=0)+P(X+Z>x|Z>0)P(Z>0) =$$
$$(1-p)P(X>x|Z=0)+pP_{[Z>0]}(X+Z>x) = (1-p)P_{[Z=0]}(X>x)+pS^*_{X+Z}(x).$$

13.b.ii. Toujours avec la formule des probabilités totales appliquée avec le même système complet d'événements, on obtient :

$$S_X(x) = P(X>x|Z=0)P(Z=0)+P(X>x|Z>0)P(Z>0) = (1-p)P_{[Z=0]}(X>x)+pS^*_X(x).$$

$$S_Z(x) = \underbrace{P(Z>x|Z=0)}_{=0}P(Z=0)+P(Z>x|Z>0)P(Z>0) = pS^*_Z(x).$$

13.b.iii. Notons que par la question précédente, $g(S_Z(x)) = g(pS^*_Z(x))$, et donc il s'agit de prouver que

$$g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) \leqslant g(pS^*_{X+Z}(x)) - g(pS^*_X(x)).$$

Précision
En effet,
$$(1-p)P_{[Z=0]}(X>x) \geqslant 0.$$

Soit $b = pS^*_{X+Z}(x) \in]0,1]$. D'après la question 13.b.i, on a $b \leqslant S_{X+Z}(x)$.
Si $pS^*_{X+Z}(x) = b = S_{X+Z}(x)$, alors, comme $pS^*_X(x) \leqslant S_X(x)$, par croissance de g, $g(pS^*_X(x)) \leqslant g(S_X(x))$ et donc

$$g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) = g(S^*_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) \leqslant g(pS^*_{X+Z}(x)) - g(pS^*_X(x)).$$

Si $b < S_{X+Z}(x)$, soit alors $\varepsilon = (1-p)P_{[Z=0]}(X>x)$, de telle sorte que $b+\varepsilon = S_{X+Z}(x)$.
Posons $a = pS^*_X(x)$. Alors $a+\varepsilon = pS^*_X(x)+(1-p)P_{[Z=0]}(X>x) = S_X(x)$ (d'après la question 13.b.ii. Le résultat de la question 10.c nous permet alors d'affirmer que

$$g(b+\varepsilon)-g(a+\varepsilon) \leqslant g(b)-g(a) \Leftrightarrow g(S_{X+Y}(x)) - g(S_X(x)) \leqslant g(pS^*_{X+Y}(x)) - g(pS^*_X(x)).$$

En retranchant $g(S_Z(x)) = g(pS^*_Z(x))$ aux deux membres, on obtient

$$\boxed{g(S_{X+Y}(x)) - g(S_X(x)) - g(S_Z(x)) \leqslant g(pS^*_{X+Y}(x)) - g(pS^*_X(x)) - g(pS^*_Z(x)).}$$

13.c. Il est évident que h est continue et croissante sur $[0,1]$ car g l'est.
De plus, $h(0) = \frac{g(0)}{g(p)} = 0$ et $h(1) = \frac{g(p)}{g(p)} = 1$.
Enfin, pour $(a,b) \in [0,1]^2$ et $\lambda \in [0,1]$, on a $pa \in [0,1]$ et $pb \in [0,1]$, de sorte que par concavité de g,

$$g(\lambda pa + (1-\lambda)pb) \geqslant \lambda g(pa) + (1-\lambda)g(pb)$$

ce qui après division par $g(p)$ nous donne

$$h(\lambda a + (1-\lambda)b) = \frac{g(p(\lambda a + (1-\lambda b)))}{g(p)} \geqslant \lambda\frac{g(pa)}{g(p)} + (1-\lambda)\frac{g(pb)}{g(p)} = \lambda h(a) + (1-\lambda)h(b).$$

Ainsi la fonction h est concave sur $[0,1]$. Par conséquent, $\boxed{h \text{ est une fonction de distorsion.}}$

Pour la probabilité P^*, la variable Z est presque sûrement à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$. En effet, par définition,

$$P^*(Z \in [\![1, n+1]\!]) = \frac{P(Z \in [\![1, n+1]\!] \cap [Z > 0])}{P(Z > 0)}$$

Mais

$$\begin{aligned} P(Z > 0) &= P([Z > 0] \cap [Z \in [\![0, n+1]\!]]) + \underbrace{P([Z > 0] \cap [Z \notin [\![0, n+1]\!]])}_{=0} \\ &= P([Z > 0] \cap [Z \in [\![1, n+1]\!]]) = P([Z > 0] \cap [Z \in [\![1, n+1]\!]]). \end{aligned}$$

Ainsi $P^*(Z \in [\![1, n+1]\!]) = \dfrac{P(Z > 0)}{P(Z > 0)} = 1$.

Alors $Z - 1$ est presque sûrement (toujours pour la probabilité P^*) à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
Notons E_h^* l'espérance corrigée (lorsqu'elle existe) pour la probabilité P^*. Autrement dit, pour toute variable aléatoire V pour laquelle l'intégrale suivante converge,

$$E_h^*(V) = \int_0^{+\infty} h(S_V^*(x))\,dx.$$

Alors par hypothèse de récurrence, $E_h^*(X + (Z-1)) \leqslant E_h^*(X) + E_h^*(Z-1)$.
Mais nous avons prouvé à la question 11.c que $E_h^*(Z-1) = E_h^*(Z) - 1$, et de même $E_h^*(X + Z - 1) = E_h^*(X+Z) - 1$.
Donc $E_h^*(X+Z) \leqslant E_h^*(X) + E_h^*(Z)$. Soit encore

$$\boxed{\int_0^{+\infty} h(S_{X+Z}^*(x))\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} h(S_X^*(x))\,dx + \int_0^{+\infty} h(S_Z^*(x))\,dx.}$$

> **Récurrence**
> L'hypothèse de récurrence est très claire (bien que difficile !) : on suppose que le résultat est vrai **pour toute probabilité** P **sur** $(\Omega, \mathscr{A})$. En particulier, il est vrai pour la probabilité P^*.

13.d. Le résultat de la question précédente est équivalent (après multiplication par $g(p)$) à :

$$\int_0^{+\infty} \left(g(pS_{X+Z}^*(x)) - g(pS_X^*(x)) - g(pS_Z^*(x))\right) dx \leqslant 0.$$

D'après la question 12, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} g(S_{X+Z}(x))\,dx, \int_0^{+\infty} g(S_X(x))\,dx \text{ et } \int_0^{+\infty} g(S_Z(x))\,dx$$

convergent, de sorte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) - g(S_Z(x)))\,dx$ converge.
Alors en intégrant l'inégalité de la question 13.b.iii, il vient

$$\int_0^{+\infty} (g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) - g(S_Z(x)))\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} \left(g(pS_{X+Z}^*(x)) - g(pS_X^*(x)) - g(pS_Z^*(x))\right) dx \leqslant 0.$$

Et donc

$$\int_0^{+\infty} g(S_{X+Z}(x))dx \leqslant \int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx + \int_0^{+\infty} g(S_Z(x))dx$$

ce qui nous donne bien

$$\boxed{E_g(X+Z) \leqslant E_g(X) + E_g(Z).}$$

Ainsi, l'hypothèse de récurrence est bien vérifiée au rang $n+1$.
Par le principe de récurrence, pour tout entier n, pour toute probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et toute variable aléatoire U telle que $P(U \in [\![0, n]\!]) = 1$, on a

$$\boxed{E_g(X+U) \leqslant E_g(X) + E_g(U).}$$

14.a. Pour tout $\omega \in \Omega$, $0 \leqslant \lfloor nY(\omega) \rfloor \leqslant nY(\omega)$ et donc $0 \leqslant Y_n(\omega) \leqslant Y(\omega)$.
En particulier, $P(Y_n \in [0, B]) \geqslant P(Y \in [0, B]) = 1$ et donc[12] $P(Y_n \in [0, B]) = 1$.
D'après le résultat de la question 12, $E_g(Y_n)$ existe, de même que $E_g(X + Y_n)$.
La variable nY_n est à valeurs entières, et prend presque sûrement ses valeurs dans $[\![0, \lfloor nB \rfloor]\!]$.

[12] Une probabilité est toujours inférieure ou égale à 1.

Il est alors possible d'appliquer le résultat de la question 13 aux variables nX (qui admet une espérance corrigée d'après 11.c) et nY_n. On a alors

$$E_g(nX+nY_n) \leqslant E_g(nX)+E_g(nY_n).$$

Mais, toujours par la question 11.c, $E_g(nX+nY_n) = nE_g(X+Y_n), E_g(nX) = nE_g(X)$ et $E_g(nY_n) = nE_g(Y_n)$. Donc $\boxed{E_g(X+Y_n) \leqslant E_g(X)+E_g(Y_n).}$

14.b. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $Y_n(\omega) > x$. Puisque $Y_n(\omega) \leqslant Y(\omega)$, nécessairement $Y(\omega) > x$. Autrement dit, on a l'inclusion d'événements $[Y_n > x] \subset [Y > x]$.

Par conséquent, pour $x > 0$, $S_{Y_n}(x) = P(Y_n > x) \leqslant P(Y > x) = S_Y(x)$.
Par croissance de g, il vient $\forall x > 0, g(S_{Y_n}(x)) \leqslant g(S_Y(x))$ et par croissance de l'intégrale,

$$E_g(Y_n) = \int_0^{+\infty} g(S_{Y_n}(x))dx \leqslant \int_0^{+\infty} g(S_Y(x))dx = E_g(Y).$$

14.c. Le changement de variable $u = x+\frac{1}{n}$ réalise une bijection $\mathscr{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]\frac{1}{n},+\infty[$, et donc les intégrales $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g(S_{X+Y}(u))\,du$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g\left(S_{X+Y}\left(x+\frac{1}{n}\right)\right) dx$ sont toutes deux convergentes (car la première l'est par la question 14.a) et sont égales.

Par définition de la partie entière, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\lfloor nY(\omega)\rfloor \leqslant nY(\omega) < \lfloor nY(\omega)\rfloor + 1.$$

Soit $\forall \omega \in \Omega, 0 \leqslant Y(\omega) - Y_n(\omega) < \frac{1}{n}$.
Soit donc $x > 0$ et $\omega \in \Omega$ tels que $X+Y > x+\frac{1}{n}$. Alors

$$(X+Y_n)(\omega) = (X+Y)(\omega) - (Y-Y_n)(\omega) > x + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = x.$$

Autrement dit, on a l'inclusion d'événements

$$\left[X+Y > x+\frac{1}{n}\right] \subset [X+Y_n > x].$$

Et donc en passant aux probabilités :

$$0 \leqslant S_{X+Y}\left(x+\frac{1}{n}\right) \leqslant S_{X+Y_n}(x).$$

Comme dans les questions précédentes, par croissance de g, puis par croissance de l'intégrale (les intégrales en question existent), il vient

$$\int_0^{+\infty} g\left(S_{X+Y}\left(x+\frac{1}{n}\right)\right) dx \leqslant \int_0^{+\infty} g(S_{X+Y_n}(x))dx = \boxed{E_g(X+Y_n).}$$

14.d. En utilisant successivement les résultats des questions 14.c, 14.a et 14.b, il vient

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g(S_{X+Y}(x))\,dx \leqslant E_g(X+Y_n) \leqslant E_g(X)+E_g(Y_n) \leqslant E_g(X)+E_g(Y).$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient alors

$$\int_0^{+\infty} g(S_{X+Y}(x))dx \leqslant E_g(X)+E_g(Y).$$

Soit encore $\boxed{E_g(X+Y) \leqslant E_g(X)+E_g(Y).}$

Méthode
Pas besoin d'être astucieux pour penser à ce changement de variable : la forme du résultat attendu **doit** vous y faire penser immédiatement.

Complément
Les espérances corrigées présentées dans ce sujet sont appelées **risques de Wang**, et sont utilisées dans le monde de l'assurance et de la finance.
En particulier, la fonction de distorsion w_α est utilisée et l'espérance corrigée associée est appelée **Wang transform**.
À propos des risques évoqués en début de sujet, Arthur Charpentier écrit dans **Approches statistiques du risque** : «Il peut s'agir d'un risque de marché (changement de la valeur d'un titre), de crédit (risque de ne pas satisfaire ses engagements suite à un défaut), opérationel (défaillance d'un processus interne, ou externe), voire de modèle (supposer les rendements Gaussiens alors qu'ils ne le sont pas).»

Maths II 2014

Sujet : Rang stochastique d'un vecteur aléatoire **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : variables aléatoires discrètes, couples de variables discrètes, espérance conditionnelle, diagonalisation, projecteurs orthogonaux

Commentaires : le faire de mélanger ainsi de l'algèbre linéaire et des probabilités peut être déroutant, mais le sujet est intéressant en le sens qu'il fait appel à de nombreux thèmes du programme.

Dans tout le problème, k désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Notations algébriques

• Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices colonnes à n lignes à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels. On identifie les ensembles $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ et $\mathbf{R}$ en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ à son unique coefficient.

• La base canonique de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ est notée $\mathscr{C}_k = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ et l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ est muni de sa structure euclidienne usuelle pour laquelle la base $\mathscr{C}_k$ est orthonormale. On note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ et $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ la norme du vecteur u.

• Pour tout matrice colonne d de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de composantes $d_1, d_2, \ldots, d_n$, on note $\operatorname{Diag}(d)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par

$$\operatorname{Diag}(d) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}.$$

• La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$ et I_k désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$.

Notations probabilistes

• Toutes les variables aléatoires et tous les vecteurs aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

• On dit qu'un vecteur aléatoire discret $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ admet une espérance lorsque chacune de ses composantes en admet une.

On note Y la matrice colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ de composantes $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ et $\mathscr{E}(Y)$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ dont les composantes sont les espérances $E(Y_1), E(Y_2), \ldots, E(Y_k)$.

Lorsque chacune des composantes $Y_i (i \in [\![1,k]\!])$ admet une variance, on appelle matrice de variance-covariance de Y, notée $\mathscr{V}(Y)$, la matrice symétrique de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les variances de $V(Y_i)$ et les coefficients non diagonaux les covariances $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$ avec $i \neq j$.

En résumé, sous réserve d'existence :

$$\mathscr{E}(Y) = \begin{pmatrix} E(Y_1) \\ E(Y_2) \\ \vdots \\ E(Y_k) \end{pmatrix} \text{ et } \mathscr{V}(Y) = \begin{pmatrix} V(Y_1) & \operatorname{Cov}(Y_1,Y_2) & \ldots & \operatorname{Cov}(Y_1,Y_k) \\ \operatorname{Cov}(Y_2,Y_1) & V(Y_2) & \ldots & \operatorname{Cov}(Y_2,Y_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}(Y_k,Y_1) & \operatorname{Cov}(Y_k,Y_2) & \ldots & V(Y_k) \end{pmatrix}.$$

• Dans tout le problème, on note $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^k p_i = 1$ et pour tout $i \in [\![1,k]\!], p_i \geqslant 0$.

L'objet du problème est l'étude des propriétés des matrices de variance-covariance en liaison avec la loi des vecteurs aléatoires correspondants.

Partie I : Lois généralisées de Bernoulli

Dans cette partie, on note u la matrice colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$ un matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ et $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^k a_i$. On pose $M = a\,{}^tu$.

a. Calculer la matrice M et préciser son rang.

b. Calculer la matrice Ma et en déduire une valeur propre de M.

c. Montrer que $M^2 = \alpha M$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de M ?

d. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq 0$.

e. Pour quelles valeurs de α la matrice $I_k - M$ est-elle inversible ?

f. On suppose que $\alpha = 1$. Montrer que M est la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^k$ d'un projecteur dont on précisera l'image et le noyau. Dans quel cas ce projecteur est-il orthogonal ?

On dit qu'un vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ suit la *loi généralisée de Bernoulli de paramètre* p, notée $\mathscr{B}_k(p)$, si on a

$$\forall i \in [\![1,k]\!], P([X = e_i]) = p_i, \text{ avec } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix}.$$

2. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ un vecteur aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}_k(p)$.
   a. Pour $i \in [\![1,k]\!]$, comparer les événements $[X = e_i]$ et $[X_i = 1]$. En déduire que chaque variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i et écrire la matrice $\mathscr{E}(X)$.
   b. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X_1 + X_2$?
   c. Montrer que $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -p_1 p_2$?
   d. Écrire la matrice $\mathscr{V}(X)$.
3. Soit $M(p)$ la matrice de $\mathscr{M}_k(\mathbf{R})$ définie par $M(p) = p\,{}^t u$.
   a. Vérifier l'égalité : $\mathscr{V}(X) = (I_k - M(p))\mathrm{Diag}(p)$.
   b. Montrer que si $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont différents de 0, le rang de $\mathscr{V}(X)$ est égal à $k-1$.
   c. Soit σ une permutation de $[\![1,k]\!]$ et p_σ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ de composantes $p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, \dots, p_{\sigma(k)}$. Montrer que $\mathscr{V}(X)$ est semblable à $(I_k - p_\sigma {}^t u)\mathrm{Diag}(p_\sigma)$.
   d. Exprimer le rang de $\mathscr{V}(X)$ en fonction du nombre d'éléments i de $[\![1,k]\!]$ pour lesquels on a $p_i \neq 0$.

Partie II. Tirages avec remise dans une population stratifiée

Dans cette partie, on suppose que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, on a $p_i > 0$ et que $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont les proportions d'individus appartenant aux diverses catégories d'une population statistique scindée en k catégories distinctes.

Pour modéliser une suite illimitée de tirages équiprobables avec remise effectués dans cette population, on utilise des variables aléatoires $X_i^{(n)}$ définies par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall i \in [\![1,k]\!], X_i^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu extrait au } n\text{-ème tirage appartient à la } i\text{-ème catégorie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On suppose que les vecteurs aléatoires $(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_k^{(n)}), (n \in \mathbf{N}^*)$ suivent chacun la loi $\mathscr{B}_k(p)$ (partie I) et sont mutuellement indépendants.

Cette indépendance mutuelle signifie que pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour toutes fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ définies sur $\mathbf{R}^k$ à valeurs réelles, les variables aléatoires $\varphi_1(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_k^{(1)}), \varphi_2(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, X_k^{(2)}), \dots, \varphi_n(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_k^{(n)})$ sont indépendantes.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $X^{(n)}$ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ de composantes $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_k^{(n)}$ et $S^{(n)}$ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ de composantes $S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, \dots, S_k^{(n)}$, où pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $S_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} X_i^{(j)}$.

4. a. Préciser l'ensemble N_n des matrices colonne de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ pour lesquelles on a $P([S^{(n)} = s]) > 0$.
   b. Déterminer les lois respectives des deux variables aléatoires $S_1^{(n)}$ et $S_1^{(n)} + S_2^{(n)}$. Sont-elles indépendantes ?
   c. Montrer que $\mathscr{V}(S^{(n)}) = n\mathscr{V}(X^{(1)})$.
5. Soit H un élément de $\mathscr{A}$ vérifiant $0 < P(H) < 1$, $\overline{H}$ l'événement contraire de H et W une variable aléatoire discrète admettant une variance.
   a. Justifier l'existence de $E(W^2|H)$, espérance de W^2 pour la probabilité conditionnelle P_H.
   b. On pose $V(W|H) = E(W^2|H) - E(W|H)^2$ (variance de W pour la probabilité conditionnelle P_H). En utilisant le système complet d'événements $(H, \overline{H})$ et la formule de l'espérance totale pour W et W^2, établir l'inégalité : $V(W) \geqslant P(H)V(W|H)$.
6. Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, on note T_i le temps d'attente du premier tirage d'un individu de la i-ème catégorie et on note T la matrice colonne de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ de composantes $T_1, T_2, \dots, T_k$.

a. Soit $i \in [\![1,k]\!]$. Justifier que la probabilité que T_i soit infini est nulle. Quelle est la loi de T_i ?

b. On pose $H_k = \bigcap_{i=1}^{k-1}[T_i = i]$. Calculer $P(H_k)$. Préciser la loi conditionnelle de $T_k - (k-1)$ sachant H_k.
En déduire $E(T_k|H_k)$ et $V(T_k|H_k)$.

c. En exploitant le résultat de la question 5.b, établir pour tout vecteur $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ de $\mathbf{R}^k$, l'inégalité

$$V\left(\sum_{i=1}^{k} v_i T_i\right) \geqslant \frac{v_k^2(1-p_k)}{p_k^2} \times \prod_{i=1}^{k-1} p_i.$$

d. Montrer plus généralement que pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, on a :

$$V\left(\sum_{i=1}^{k} v_i T_i\right) \geqslant \frac{v_j^2(1-p_j)}{p_j^2} \times \prod_{\substack{i\in[\![1,k]\!]\\ i\neq j}} p_i.$$

Partie III. Support et rang stochastiques d'un vecteur aléatoire

Dans toute cette partie, $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ désigne un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbf{R}^k$, dont chaque composante admet une espérance et une variance. On rappelle que Y est la matrice colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ de composantes $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$.

7. On appelle *support vectoriel* de Y, tout sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ tel que $P([Y - \mathscr{E}(Y) \in F]) = 1$. On note $\mathscr{S}(Y)$ l'ensemble des supports vectoriels de Y.

   a. Justifier l'existence d'un plus petit élément de l'ensemble des dimensions des éléments de $\mathscr{S}(Y)$.
   Ce plus petit élément est appelé le *rang stochastique* de Y et noté $R_s(Y)$.

   b. Dans quel cas le rang stochastique $R_s(Y)$ est-il nul ?

   c. Montrer que l'intersection de deux supports vectoriels F_1 et F_2 de Y est un support vectoriel de Y.

   d. En déduire l'existence d'un unique élément F de $\mathscr{S}(Y)$ tel que la dimension de F soit égale à $R_s(Y)$.
   L'espace vectoriel F est appelé le *support stochastique* de Y

8. Soit u une matrice colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ de composantes $u_1, u_2, \dots, u_k$.

   a. Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{k} u_i Y_i$ admet une variance, égale à ${}^t u \mathscr{V}(Y) u$.

   b. Établir l'existence d'un unique vecteur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ de $\mathbf{R}^k$ tel que $\mathscr{V}(Y)$ soit semblable à la matrice $\mathrm{Diag}(\lambda)$ et pour lequel $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k \geqslant 0$.

   c. On pose $\|Y - \mathscr{E}(Y)\|^2 = \sum_{i=1}^{k}(Y_i - E(Y_i))^2$. Montrer que $E(\|Y - \mathscr{E}(Y)\|^2) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$.

9. Soit $q \in [\![1,k]\!]$, F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ de dimension q et $(f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(q)})$ une base orthonormale de F.

   a. Soit $\omega \in \Omega$. Justifier l'existence de $Q_F(\omega) = \inf\{\|Y(\omega) - \mathscr{E}(Y) - x\|^2, x \in F\}$ et montrer que

$$\|Y(\omega) - \mathscr{E}(Y)\|^2 = Q_F(\omega) + \sum_{j=1}^{q} \langle Y(\omega) - \mathscr{E}(Y), f^{(j)} \rangle^2.$$

   b. À l'aide de la question 8, établir l'égalité $E(Q_F) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i - \sum_{j=1}^{q} {}^t f^{(j)} \mathscr{V}(Y) f^{(j)}$.

   c. Que devient l'égalité précédente lorsque $F = \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$?

10. a. Montrer que pour tout matrice colonne f de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ vérifiant $\|f\| = 1$, on a : ${}^t f \mathscr{V}(Y) f \leqslant \lambda_1$.

   b. En déduire la borne inférieure de $E(Q_F)$ lorsque F décrit l'ensemble des droites vectorielles de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$.

   c. Dans cette question, on suppose que $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ suit la loi $\mathscr{B}_k(p)$, où pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, on a $p_i = \frac{1}{k}$.
   Calculer les valeurs propres de $\mathscr{V}(Y)$ et la borne inférieure de $E(Q_F)$ pour l'ensemble des droites vectorielles F de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$, puis préciser pour quelle(s) droite(s) cette borne est atteinte.

11. On suppose que le rang r de $\mathscr{V}(Y)$ est non nul. On note F_0 la somme des sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles de $\mathscr{V}(Y)$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ tel que $F \subset F_0$ et $F \neq F_0$.

   a. Calculer $E(Q_{F_0})$ et en déduire que F_0 est un support vectoriel de Y.

   b. Justifier l'existence d'un vecteur $f^{(r)}$ de F_0, orthogonal à F et de norme 1.

c. Montrer que ${}^t f^{(r)} \mathcal{V}(Y) f^{(r)} > 0$ et en déduire que $E(Q_F) \neq 0$.

d. Montrer que le rang stochastique $R_s(Y)$ de Y est égal à r.

12. Dans cette question, on reprend les définitions et notations de la question 6.

a. À l'aide de la question 6.d, montrer que le rang stochastique $R_s(T)$ de T est égal à k.

b. Montrer que pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$E(T_1 T_2 | [T_1 = i] \cap [T_2 > i]) = i\left(i + \frac{1}{p_2}\right).$$

c. Établir la relation : $E(T_1 T_2) = \dfrac{1}{p_1 p_2} - \dfrac{1}{p_1 + p_2}$.

d. On note $\Pi = (\pi_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ définie par

$$\pi_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1 - p_i}{p_i^2} & \text{si } i = j \\ -\dfrac{1}{p_i + p_j} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Montrer que la matrice Π est inversible.

MATHS II 2014 : CORRIGÉ

Partie I : Lois généralisées de Bernoulli

1.a. Par définition, on a

$$M = a\,{}^t u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k & a_k & \dots & a_k \end{pmatrix}.$$

On remarque qu'alors toutes les colonnes de M sont égales, donc le rang de M est inférieur ou égal à 1. Puisque a est non nul, M n'est pas la matrice nulle et donc $\mathrm{rg}(M) \geqslant 1$.
On en déduit que $\boxed{\mathrm{rg}(M) = 1.}$

Attention
Toutes les colonnes sont égales, mais cela ne suffit pas à garantir que le rang vaut 1 : elles pourraient toutes être nulles.

1.b. On a ${}^t ua = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i = \sum_{i=1}^{k} a_i = \alpha$ et donc $Ma = a\,{}^t ua = \alpha a$.

Puisque a est non nul, cela signifie que $\sum_{i=1}^{k} a_i$ est une valeur propre de M, et que a est un vecteur propre associé.

1.c. Nous venons de prouver que $Ma = \alpha a$ et donc

$$M^2 = (a\,{}^t u)^2 = Ma\,{}^t u = \alpha a\,{}^t u = \boxed{\alpha M.}$$

Par conséquent, $X^2 - \alpha X$ est un polynôme annulateur de M, et donc les seules valeurs propres de M sont parmi[1] 0 et α.

[1] Rappelons qu'il s'agit là des valeurs propres **possibles**, rien ne garantit pour l'instant que 0 et α sont bien deux valeurs propres de M.

1.d. Si $\alpha \neq 0$, alors M possède deux valeurs propres : 0 avec $\dim E_0(M) = k - \mathrm{rg}(M) = k-1$ et α, avec $\dim E_\alpha(M) \geqslant 1$.
Mais comme la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut au plus k, on a nécessairement $\dim E_\alpha(M) = 1$. Et alors $\dim E_\alpha(M) + \dim E_0(M) = k$ donc M est diagonalisable.
Inversement, si M est diagonalisable, alors la somme des dimensions des sous-espaces propres de M vaut k. Puisque $\dim E_0(M) = k-1$, M possède nécessairement une valeur propre non nulle. Par la question précédente, cette valeur propre ne peut qu'être α et donc $\alpha \neq 0$.

Rappel
0 est valeur propre de M car $\mathrm{rg}(M) < k$.

1.e. $I_k - M$ est inversible si et seulement si $M - I_k$ est inversible, c'est-à-dire si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M. C'est le cas si et seulement si $\boxed{\alpha \neq 1.}$

1.f. Par la question 1.c, on a $M^2 = M$. Si on note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^k$ dont la matrice dans la base canonique est M, alors $f^2 = f$, et donc f est un projecteur de $\mathbf{R}^k$.
On a alors $\mathrm{Im}(f)$ de dimension 1 (car M est de rang 1) et ${}^t a \in \mathrm{Im}\, f$ (car la première colonne de M, qui correspond à $f(e_1)$ vaut a. Donc $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}({}^t a)$.
On a alors $\dim \mathrm{Ker}\, f = k-1$. Or, on a, pour tout $i \in [\![2,k]\!]$, $f(e_i) = f(e_1)$ et donc $f(e_1 - e_i) = 0$, de sorte que $e_1 - e_i \in \mathrm{Ker}\, f$.
Or les $k-1$ vecteur $e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_k$ forment une famille libre, et donc $\dim \mathrm{Vect}(e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_k) = k - 1 = \dim \mathrm{Ker}\, f$.
On en déduit que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_k)$.
Ce projecteur est un projecteur orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique. Mais comme la base $\mathscr{C}$ est orthonormée, f est symétrique si et seulement si $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$ est symétrique.

2.a. Il est clair qu'on a $[X = e_i] \subset [X_i = 1]$, et donc $P([X_i = 1]) \geqslant P([X = e_i]) = p_i$.

D'autre part, $\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} [X = e_j] \subset [X_i = 0]$. Comme ces événements sont deux à deux incompatibles, il vient

$$P(X_i = 0) \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} P(X = e_j) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} p_j = 1 - p_i.$$

Rappel
On a
$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

Enfin, on doit avoir $P(X_i = 0) + P(X_i = 1) \leqslant 1$. On en déduit que

$$P(X_i = 1) = p_i \text{ et } P(X_i = 0) = 1 - p_i.$$

Par conséquent, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i.
Il vient alors

$$\mathscr{E}(X) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} = p.$$

2.b. Nous savons que $[X = e_1] \cup [X = e_2] \subset [X_1 + X_2 = 1]$ et donc $P(X_1 + X_2 = 1) \geqslant p_1 + p_2$.
De même, on a $\bigcup_{j=3}^{k} [X = e_j] \subset [X_1 + X_2 = 0]$ et donc

$$P(X_1 + X_2 = 0) \geqslant \sum_{j=3}^{k} P(X = e_j) = 1 - (p_1 + p_2).$$

Nécessairement, on a alors $P(X_1 + X_2 = 1) = p_1 + p_2$ et $P(X_1 + X_2 = 0) = 1 - (p_1 + p_2)$.
On en déduit que $\boxed{X_1 + X_2 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p_1 + p_2.}$

2.c. On a

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$$

soit encore

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}((p_1 + p_2)(1 - p_1 - p_2) - (1 - p_1)p_1 - p_2(1 - p_2)) = -p_1 p_2.$$

2.d. On prouverait de même que pour tous $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$, $i \neq j$, $X_i + X_j$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_i + p_j$ et donc $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -p_i p_j$. Alors

$$\mathscr{V}(X) = \begin{pmatrix} (1-p_1)p_1 & -p_2p_1 & \dots & -p_1p_k \\ -p_1p_2 & (1-p_2)p_2 & \dots & -p_2p_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_1p_k & -p_2p_k & \dots & (1-p_k)p_k \end{pmatrix}.$$

3.a. Nous savons que

$$M(p) = \begin{pmatrix} p_1 & p_1 & \dots & p_1 \\ p_2 & p_2 & \dots & p_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_k & p_k & \dots & p_k \end{pmatrix} \text{ et donc } I_k - M(p) = \begin{pmatrix} 1-p_1 & -p_1 & \dots & -p_1 \\ -p_2 & 1-p_2 & \dots & -p_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_k & -p_k & \dots & 1-p_k \end{pmatrix}.$$

On en déduit[2] que

$$(I_k - M(p))\mathrm{Diag}(p) = \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_2p_1 & \dots & -p_1p_k \\ -p_1p_2 & p_2(1-p_2) & \dots & -p_2p_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_1p_k & -p_2p_k & \dots & (1-p_k)p_k \end{pmatrix} = \mathscr{V}(X).$$

3.b. Si les p_i sont tous non nuls, alors $\mathrm{Diag}(p)$ est une matrice inversible car diagonale à coefficients diagonaux non nuls. Or, multiplier à droite par une matrice inversible ne change pas le rang.
De plus, il a été vu à la question 1 que[3] 1 est valeur propre de $M(p)$, et que le sous-espace propre associé est de dimension 1. On en déduit donc que $I_k - M(p)$ est[4] de rang $k - 1$.
Et donc

$$\boxed{\mathrm{rg}((I_k - M(p))\mathrm{Diag}(p)) = k - 1.}$$

3.c. Rappelons qu'une permutation de $[\![1, k]\!]$ est une bijection de $[\![1, k]\!]$ sur lui-même. Puisque $\mathscr{C}_k = (e_1, \dots, e_k)$ est une base, il en est de même de $\mathscr{C}'_k = (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)})$.
Notons f (resp. g) l'endomorphisme de $\mathbf{R}^k$ dont la matrice dans la base canonique est $\mathrm{Diag}(p)$ (resp. $M(p)$).
Puisque $f(e_i) = p_i e_i$, on a $f(e_{\sigma(i)}) = p_{\sigma(i)} e_{\sigma(i)}$, et donc la matrice de f dans la base $\mathscr{C}'_k$ est

Presque sûrement
On ne peut pas vraiment dire si X_i prend d'autres valeurs que 0 et 1, mais nous sommes certains que si c'est le cas, c'est nécessairement avec probabilité nulle.
Toutefois cela n'a aucune incidence sur la loi : la loi est caractérisée par la fonction de répartition, qui ne «voit» pas les x tels que $P(X = x) = 0$. Tout ce qu'elle voit, c'est qu'il y a deux «sauts» dans la fonction de répartition, en $x = 0$ et en $x = 1$, caractéristique d'une loi de Bernoulli.

Énoncé
L'énoncé n'est pas totalement clair dans cette question, mais il semblerait qu'il faille encore considérer que X suit la loi $\mathscr{B}_k(p)$.

[2] Mulitplier une matrice M par $\mathrm{Diag}(p)$, c'est multiplier la i-ème colonne de M par p_i.

Rang
Le plus simple est sûrement de réfléchir en termes d'endomorphismes : multiplier à droite par une matrice inversible revient à composer par un isomorphisme, qui préserve les dimensions, et donc celle de l'image, qui est le rang.

[3] Ici on est dans le cas $\alpha = 1$

[4] On a l'habitude de manipuler $M(p) - I_k$, mais $I_k - M(p)$ a évidemment le même rang.

Précision
Cette famille contient les mêmes vecteurs que $\mathscr{C}_k$, on a juste changé l'ordre des vecteurs.

$\mathrm{Diag}(p_\sigma)$.
De même, on a, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$,

$$g(e_i) = \sum_{j=1}^{k} p_j e_j \text{ et donc } g(e_{\sigma(i)}) = \sum_{j=1}^{k} p_j e_j = \sum_{\ell=1}^{k} p_{\sigma(\ell)} e_{\sigma(\ell)}.$$

Ainsi, la matrice de g dans la base $\mathscr{C}'_k$ est la matrice $M(p_\sigma) = p^\sigma\,{}^t u$.
Et donc la matrice de $(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^k} - g) \circ f$ dans la base $\mathscr{C}'_k$ est $(I_k - p_\sigma\,{}^t u)\mathrm{Diag}(p_\sigma)$.
Puisque la matrice de la même application dans la base $\mathscr{C}_k$ est $\mathscr{V}(X)$, on en déduit que

$$\boxed{\mathscr{V}(X) \text{ et } (I_k - p_\sigma\,{}^t u)\mathrm{Diag}(p_\sigma) \text{ sont semblables.}}$$

Bijection
Puisque σ est une permutation de $[\![1,k]\!]$, tout j admet un unique antécédent ℓ dans $[\![1,k]\!]$. Autrement dit, lorsque ℓ parcourt $[\![1,k]\!]$, $\sigma(\ell)$ parcourt également $[\![1,k]\!]$.

3.d. Notons r le nombre d'indices $i \in [\![1,k]\!]$ tels que $p_i \neq 0$. Soit σ une permutation de $[\![1,k]\!]$ telle que $\forall i \in [\![1,k-r]\!]$, $p_i \neq 0$ et pour tout $i \in [\![k-r,k]\!]$, $p_i = 0$.
Alors $\mathscr{V}(X)$ est semblable à $(I_k - p_\sigma\,{}^t u)\mathrm{Diag}(p_\sigma)$.
Pour calculer le rang de $(I_k - p_\sigma\,{}^t u)\mathrm{Diag}(p_\sigma)$, notons f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^k$ dont la matrice dans la base canonique est $p_\sigma\,{}^t u$.
Nous avons montré à la question 1.e que f est un projecteur d'image $\mathrm{Vect}((p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(k)}))$.
Et donc

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^k} - f) = E_1(f) = \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(k)})).$$

Détail
Une telle permutation n'est pas unique : tout ce qu'on a fait est de réordonner les p_i de manière à ce que les premiers soient non nuls et les r derniers soient nuls.

On a donc, pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$, $(I_k - p_\sigma\,{}^t u)\mathrm{Diag}(p_\sigma)x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Diag}(p_\sigma)x \in \mathrm{Vect}(p_\sigma)$.

Projecteur
Pour un projecteur, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 (qui est l'ensemble des vecteurs invariants) est égal à l'image.

Mais $\mathrm{Diag}(p_\sigma)x = \begin{pmatrix} p_{\sigma(1)}x_1 \\ p_{\sigma(2)}x_2 \\ \vdots \\ p_{\sigma(k)}x_k \end{pmatrix}$, est dans $\mathrm{Vect}(p_\sigma)$ si et seulement si $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k-r}$.

Rappel
Les r derniers coefficients de p_σ sont nuls, donc on n'a pas de contrainte sur ces coefficients.

Ainsi, l'ensemble des vecteurs $x \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ tels que $(I_k - p_\sigma\,{}^t u)\mathrm{Diag}(p_\sigma)x = 0$ est de dimension $r+1$, et une base en est donnée par $(e_1 + e_2 + \cdots + e_{k-r}, e_{k-r+1}, \dots, e_k)$.
Par le théorème du rang, le rang de $(I_k - p_\sigma\,{}^t u)\mathrm{Diag}(p_\sigma)$ est alors $k - (r+1) = k - r - 1$.
On en déduit donc que

$$\boxed{\mathrm{rg}(\mathscr{V}(X)) = k - r - 1.}$$

Dimension
En termes de degrés de liberté : les coefficients $x_{k-r+1}, \dots, x_k$ peuvent prendre n'importe quelle valeur. De même pour le coefficient x_1, mais alors les valeurs de $x_2, \dots, x_{k-r}$ sont automatiquement fixées, égales à x_1. On a donc $r+1$ degrés de liberté.

Partie II : Tirages avec remise dans une population stratifiée.

4.a. Commençons par remarquer que $S^{(n)}$ est un vecteur colonne qui représente le nombre d'individus de chaque catégorie obtenus à l'issue du n-ième tirage.
Et puisqu'à l'issue du n-ième tirage, on a nécessairement choisi n personnes, N_n est l'ensemble des vecteurs dont la somme des composantes vaut n, et dont chacune des composantes est un entier positif. Ainsi,

$$N_n = \left\{ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix}, (n_1, \dots, n_k) \in \mathbf{N}^k, n_1 + \cdots + n_k = n \right\}.$$

4.b. $S_1^{(n)}$ représente le nombre de personnes de la catégorie 1 que l'on obtient au cours de n tirages avec remise. Puisqu'à chaque tirage on obtient une personne de la catégorie 1 avec probabilité p_1, on en déduit que $S_1^{(n)} \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_1)$.
De même, $S_1^{(n)} + S_2^{(n)}$ représente le nombre de personnes appartenant à l'une des deux premières catégories. À chaque tirage, une personne est dans l'une de ces deux catégories avec probabilité $p_1 + p_2$, donc $S_1^{(n)} + S_2^{(n)}$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_1 + p_2)$.
Plus formellement, on peut remarquer que

$$S_1^{(n)} + S_2^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} (X_1^{(j)} + X_2^{(j)})$$

Précisément
On sait que les $X_1^{(j)}$ suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p_1, et elles sont mutuellement indépendantes d'après l'énoncé : il suffit de prendre pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_k) = x_1.$$

que chacune des $X_1^{(j)}+X_2^{(j)}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p_1+p_2 (question 2.b.) et que ces variables sont mutuellement indépendantes. Et donc une somme de Bernoulli indépendantes de même paramètre est binomiale.
Enfin, $S_1^{(n)}$ et $S_1^{(n)}+S_2^{(n)}$ ne sont pas indépendantes car

$$\mathrm{Cov}(S_1^{(n)},S_1^n+S_2^{(n)})=V(S_1^{(n)})+\mathrm{Cov}(S_1^{(n)},S_2^{(n)})=V(S_1^{(n)})+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\mathrm{Cov}(X_1^{(i)},X_2^{(j)}).$$

Bilinéarité dela covariance.

Or, pour $i\neq j$, $X_1^{(i)}$ et $X_2^{(j)}$ sont indépendantes, et donc $\mathrm{Cov}(X_1^{(i)},X_2^{(j)})=0$. Donc

$$\mathrm{Cov}(S_1^{(n)},S_1^{(n)}+S_2^{(n)})=V(S_1^{(n)})+\sum_{i=1}^n\mathrm{Cov}(X_1^{(i)},X_2^{(i)})=n(1-p_1)p_1-np_1p_2.$$

Si $k\geqslant 3$, alors $1-p_1\neq p_2$ car $p_3>0$ et $\sum_{i=1}^k p_i=1$. Par conséquent, $\mathrm{Cov}(S_1^{(n)},S_1^{(n)}+S_2^{(n)})\neq 0$ et donc $\boxed{S_1^{(n)} \text{ et } S_1^{(n)}+S_2^{(n)} \text{ ne sont pas indépendantes.}}$
Si $k=2$, alors $S_1^{(n)}+S_2^{(n)}$ est la variable constante égale à n, et donc est indépendante de toute autre variable. En particulier de $S_1^{(n)}$.

Danger !
Si $k=2$, la covariance est nulle, mais ceci ne saurait suffire à conclure à l'indépendance !

4.c. À la question précédente, nous avons fait le calcul de $\mathrm{Cov}(S_1^{(n)},S_2^{(n)})$ et observé que cette covariance valait $-np_1p_2=n\mathrm{Cov}(X_1^{(1)},X_2^{(1)})$.
Le même calcul prouverait que $\mathrm{Cov}(S_i^{(n)},S_j^{(n)})=-np_ip_j$ pour $i\neq j$.
Et enfin, $V(S_1^{(n)})=n(1-p_1)p_1=nV(X_1^{(1)})$ et de même $V(S_i^{(n)})=np_i(1-p_i)=nV(X_i^{(1)})$.
On en déduit donc que $\boxed{\mathscr{V}(S^{(n)})=n\mathscr{V}(X^{(1)}).}$

Soyons malins !
Le théorème de l'espérance totale nous assure que si $E(X)$ existe, alors toutes les $E(X|H)$ existent, et en plus la série que vous savez converge et sa somme vaut $E(X)$.
Donc lorsqu'on sait que $E(X)$ existe, il n'y a pas grand chose à dire pour prouver l'existence des espérances conditionnelles !

5.a. Notons qu'on pourrait prouver directement l'existence de cette espérance conditionnelle en revenant à la définition de l'espérance conditionnelle. Mais nous referions alors une preuve qui est contenue dans celle de la formule de l'espérance totale.
Considérons plutôt le système complet d'événements $\{H,\overline{H}\}$. Nous savons que W^2 admet une espérance, et donc, par la formule de l'espérance totale, $E(W^2|H)$ existe.

5.b. Par la formule de l'espérance totale, appliquée à la variable aléatoire W^2, on a

$$E(W^2)=E(W^2|H)P(H)+E(W^2|\overline{H})P(\overline{H}).$$

De même, on a

$$E(W)=E(W|H)P(H)+E(W|\overline{H})P(\overline{H}).$$

On en déduit par la formule de Huygens que

$$\begin{aligned}
V(W)=&E(W^2)-E(W)^2\\
=&E(W^2|H)P(H)+E(W^2|\overline{H})P(\overline{H})-\left(E(W|H)P(H)+E(W|\overline{H})P(\overline{H})\right)^2\\
=&V(W|H)P(H)+E(W|H)^2P(H)+V(W|\overline{H})P(\overline{H})+E(W|\overline{H})^2P(\overline{H})-E(W|H)^2P(H)^2\\
&-2E(W|H)E(W|\overline{H})P(H)P(\overline{H})-E(W|\overline{H})^2P(\overline{H})^2\\
=&V(W|H)P(H)+V(W|\overline{H})P(\overline{H})+E(W|H)P(H)\left(E(W|H)-E(W|H)P(H)-2E(W|\overline{H})P(\overline{H})\right)+E(W|\overline{H})^2P(\overline{H})(1-P(\overline{H}))\\
=&V(W|H)P(H)+V(W|\overline{H})P(\overline{H})+E(W|H)P(H)P(\overline{H})\left(E(W|H)-2E(W|\overline{H})\right)+E(W|\overline{H})^2P(H)P(\overline{H})\\
=&V(W|H)P(H)+V(W|\overline{H})P(\overline{H})+P(H)P(\overline{H})\left(E(W|H)^2-2E(W|H)E(W|\overline{H})+E(W|\overline{H})^2\right)\\
=&V(W|H)P(H)+V(W|\overline{H})P(\overline{H})+P(H)P(\overline{H})\left(E(W|H)-E(W|\overline{H})\right)^2.
\end{aligned}$$

Mais $V(W|\overline{H})\geqslant 0$ car il s'agit de la variance pour la probabilité $P_{\overline{H}}$ et qu'une variance est toujours positive. On en déduit que

$$\boxed{V(W)\geqslant V(W|H)P(H).}$$

6.a. Pour $n \in \mathbf{N}$, $[T_i > n]$ est l'événement «lors des n premiers tirages, on a obtenu un individu n'appartenant pas à la i-ème catégorie. Et donc $P(T_i > n) = (1-p_i)^n$.
Par le théorème de la limite monotone,

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}[T_i > n]\right) = \lim_{\ell \to +\infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{\ell}[T_i > n]\right) = \lim_{\ell \to +\infty} P(T_i > \ell) = \lim_{\ell \to +\infty} (1-p_i)^{\ell} = 0.$$

Or, l'événement $\bigcap_{n=1}^{+\infty}[T_i > n]$ est précisément l'événement «le temps d'attente est infini». On en déduit que la probabilité que ce temps d'attente soit infini est nulle.
De plus, les tirages étant effectués avec remise, ils sont indépendants, et par conséquent,
$\boxed{X_i \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p_i.}$

Décroissance
La suite d'événements $([T_i > n])_n$ est décroissante et donc
$$\bigcap_{n=1}^{\ell}[T_i > n] = [T_i > \ell].$$

6.b. Pour $i \in \mathbf{N}^*$, notons $Y^{(i)}$ la variable aléatoire égale au numéro de la catégorie à laquelle appartient l'individu tiré au i-ème tirage. Alors on sait[5] que

$$\forall i \in \mathbf{N}^*, \forall j \in [\![1,k]\!], P(Y^{(i)} = j) = p_j.$$

De plus, on peut réécrire l'événement H_k de la manière suivante :

$$H_k = \bigcap_{i=1}^{k-1}[Y^{(i)} = i],$$

et alors, par indépendance des $Y^{(i)}$, il vient

$$P(H_k) = \prod_{i=1}^{k-1} P(Y^{(i)} = i) = \prod_{i=1}^{k-1} p_i.$$

Intuitivement, si H_k est réalisé, alors les $k-1$ premiers tirages n'ont pas permis d'obtenir un individu de la k-ème catégorie. Et donc, si l'on compte les tirages à partir du k-ième[6], le temps d'attente du premier individu de k-ème catégorie suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p_k)$.
Autrement dit, $T_k - (k-1)$ suit[7] une loi géométrique $\mathscr{G}(p_k)$.
Prouvons ce résultat formellement : soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$P_{H_k}(T_k - (k-1) = n) = P_{H_k}(T_k = k-1+n) = \frac{P([T_k = k+n-1] \cap H_k)}{P(H_k)}.$$

Or, l'événement $[T_k = k+n-1] \cap H_k$ peut s'écrire

$$[T_k = k+n-1] \cap H_k = \bigcap_{i=1}^{k-1}[Y^{(i)} = i] \cap \bigcap_{i=k}^{k+n-2}[Y^{(i)} \neq k] \cap [Y^{(k+n-1)} = k].$$

Par indépendance des tirages, on a donc

$$P([T_k = k+n-1] \cap H_k) = \prod_{i=1}^{k-1} p_i \times (1-p_k)^{n-1} p_k = P(H_k)(1-p_k)^{n-1}p_k.$$

On en déduit donc que

$$P_{H_k}(T_k - (k-1) = n) = (1-p_k)^{n-1}p_k.$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre k, et donc la loi de $T_k - (k-1)$ conditionnellement à l'événement H_k est une loi géométrique de paramètre p_k.
On a alors[8]

$$E(T_k|H_k) = E(T_k-(k-1)|H_k)+(k-1) = \frac{1}{p_k}+k-1 \text{ et } V(T_k|H_k) = V(T_k-(k-1)|H_k) = \frac{1-p_k}{p_k^2}.$$

Mémoire
Cette propriété ressemble à l'absence de mémoire des lois géométriques : si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors
$$P_{[X>n]}(X = k+n) = P(X = k)$$

6.c. Appliquons le résultat de la question 5.b à l'événement H_k :

$$V\left(\sum_{i=1}^{k} v_i T_i\right) \geqslant V\left(\sum_{i=1}^{k} v_i T_i \middle| H_k\right) P(H_k) = V\left(\sum_{i=1}^{k} v_i T_i \middle| H_k\right) \times \prod_{i=1}^{k-1} p_i.$$

[5] C'est dans l'énoncé.

[6] C'est précisément ce que fait $T_k - (k-1)$.

[7] Pour la probabilité conditionnelle P_{H_k}.

[8] Les propriétés de l'espérance et de la variance restent valables pour l'espérance et la variance conditionnelle, qui sont l'espérance et la variance pour la probabilité P_{H_k}.

Mais si H_k est réalisé, alors $[T_1 = 1], \dots, [T_{k-1} = k-1]$. Et donc

$$V\left(\sum_{i=1}^{k} v_i T_i \middle| H_k\right) = V\left(\sum_{i=1}^{k-1} i v_i + v_k T_k \middle| H_k\right) = V(v_k T_k | H_k) = v_k^2 V(T_k|H_k) = v_k^2 \frac{1-p_k}{p_k^2}.$$

Explication

Si b est une constante,

$$V(X+b) = V(x).$$

On en déduit que

$$\boxed{V\left(\sum_{i=1}^{k} v_i T_i\right) \geqslant \frac{v_k^2(1-p_k)}{p_k^2} \times \prod_{i=1}^{k-1} p_i.}$$

6.d. Pour $j \in [\![1, k]\!]$ fixé, on peut refaire le même raisonnement en remplaçant H_k par l'événement

$$H_j = \prod_{i=1}^{j-1} [T_i = i] \cap \bigcap_{i=j+1}^{k} [T_i = i-1].$$

Alors la probabilité de H_j est $\prod\limits_{\substack{i \in [\![1,k]\!] \\ i \neq j}} p_i$ et la loi conditionnelle de $T_j - (k-1)$ sachant H_j est une loi géométrique de paramètre p_j, de sorte que $V(T_j|H_j) = \frac{1-p_j}{p_j^2}$.
Enfin, toujours à l'aide de la question 5.b, on arriverait à

$$\boxed{V\left(\sum_{i=1}^{k} v_i T_i\right) \geqslant \frac{v_j^2(1-p_j)}{p_j^2} \times \prod_{\substack{i \in [\![1,k]\!] \\ i \neq j}} p_i.}$$

Partie III : Support et rang stochastiques d'un vecteur aléatoire.

7.a. Commençons par noter que l'ensemble des supports vectoriels de Y est non vide car $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ est nécessairement un support vectoriel de Y.
Donc l'ensemble des dimensions des supports vectoriels est non vide. Puisque c'est une partie[9] de $\mathbf{N}$, cet ensemble admet nécessairement un plus petit élément.

[9] Une dimension est entière !

7.b. Puisque le seul sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ de dimension nulle est $\{0\}$, $R_s(Y) = 0$ si et seulement si $\{0\}$ est un support vectoriel de Y.
Autrement dit, le rang stochastique de Y est nul si et seulement si

$$P(Y - \mathcal{E}(Y) = 0) = 1 \Leftrightarrow P(Y = \mathcal{E}(Y)) = 1.$$

C'est le cas si et seulement si Y est (presque sûrement) constante, et donc si et seulement si chacune des Y_i est (presque sûrement) constante.

7.c. Soient F_1 et F_2 deux supports vectoriels de Y. Alors

$$P(Y - \mathcal{E}(Y) \in F_1) = P(Y - \mathcal{E}(Y) \in F_2) = 1.$$

Alors, par définition de l'intersection de deux ensembles, on a

$$[Y - \mathcal{E}(Y) \in F_1] \cap [Y - \mathcal{E}(Y) \in F_2] = [Y - \mathcal{E}(Y) \in F_1 \cap F_2].$$

Événements certains

La même prouve prouverait en fait que si$P(A) = P(B) = 1$, alors

$$P(A \cap B) = 1.$$

Et donc, par la formule du crible,

$$1 = P([Y-\mathcal{E}(Y) \in F_1] \cup [Y-\mathcal{E}(Y) \in F_2]) = \underbrace{P([Y - \mathcal{E}(Y) \in F_1])}_{=1} + \underbrace{P([Y - \mathcal{E}(Y) \in F_2])}_{=1} - P([Y-\mathcal{E}(Y) \in F_1 \cap F_2]).$$

On en déduit que $P(Y-\mathcal{E}(Y) \in F_1 \cap F_2 = 1)$. Et donc $\boxed{F_1 \cap F_2 \text{ est un support vectoriel de } Y.}$

7.d. Soient F_1, F_2 deux supports vectoriels de Y, de dimension $R_s(Y)$. Alors $F_1 \cap F_2$ est encore un support vectoriel de Y, de dimension inférieure ou égale à $\dim F_1 = R_s(Y)$. Et donc, par définition de $R_s(Y)$, $F_1 \cap F_2$ est de dimension $R_s(Y)$. Mais puisqu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de F_1, on a alors $F_1 \cap F_2 = F_1$, et donc $F_1 \subset F_2$.
Par symétrie, on a également $F_2 \subset F_1$, et donc $F_1 = F_2$.
On en déduit qu'il existe un unique élément F de $\mathcal{S}(Y)$ de dimension $R_s(Y)$.

Inclusions

Plus généralement, si A et B sont deux ensembles, alors

$$A \cap B = A \Leftrightarrow B \subset A.$$

8.a. Puisque chacun des Y_i admet une variance, Y admet une variance. De plus,

$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{k} u_i Y_i\right) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{k} u_i Y_i, \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} u_i u_j \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j).$$

D'autre part, puisque $\mathcal{V}(Y)$ est la matrice dont le coefficient (i,j) est $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$, on a

$$\begin{aligned} {}^t u \mathcal{V}(Y) u &= \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_k \end{pmatrix} \mathcal{V}(Y) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{k} u_j \mathrm{Cov}(Y_1, Y_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{k} u_j \mathrm{Cov}(Y_k, Y_j) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} u_i u_j \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j). \end{aligned}$$

Classique

En fait, ${}^t u \mathcal{V}(Y) u$ n'est autre que $q(u)$, où q est la forme quadratique associée à la matrice symétrique $\mathcal{V}(Y)$.

On en déduit que

$$\boxed{V\left(\sum_{i=1}^{k} u_i Y_i\right) = {}^t u \mathcal{V}(Y) u.}$$

8.b. $\mathcal{V}(Y)$ est une matrice symétrique réelle, donc elle est diagonalisable.
Notons $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$ ses valeurs propres, comptées autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé, et ordonnées par ordre décroissant.

Supposons par l'absurde que $\lambda_k < 0$, et soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $\mathcal{V}(Y)$ associé à la valeur propre λ_k.
Alors ${}^t u \mathcal{V}(Y) u = {}^t u \lambda_k u = \lambda_k \|u\|^2 < 0$ Mais d'autre part, par la question précédente,

$${}^t u \mathcal{V}(Y) u = V\left(\sum_{i=1}^{k} v_i Y_i\right) \geqslant 0.$$

Notations

Ici, comme indiqué dans l'énoncé, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$. Et puisque u est un vecteur propre, il est non nul, et donc de norme non nulle.

On en déduit une contradiction, et donc $\lambda_k \geqslant 0$.
Donc déjà, si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, alors $\mathcal{V}(Y)$ est semblable à $\mathrm{Diag}(\lambda)$.
Inversement, si $\mathcal{V}(Y)$ est semblable à $\mathrm{Diag}(\mu)$, avec $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$, $\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_k$, alors nécessairement les μ_i sont les valeurs propres de $\mathcal{V}(Y)$, et si elle sont ordonnées par ordre décroissant, nécessairement $\mu_i = \lambda_i$.
Ainsi, il existe un unique vecteur $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ tel que $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k \geqslant 0$ et tel que $\mathcal{V}(Y)$ soit semblable à $\mathrm{Diag}(\lambda)$.

Plus rapide

On a en fait redémontré un résultat connu : si A est une matrice symétrique telle que q_A ne prend que des valeurs positives, alors toutes les valeurs propres de A sont strictement positives. Ici la positivité de la forme quadratique était garantie par la question précédente : une variance est toujours positive.

8.c. Par linéarité de l'espérance, il vient

$$E\left(\|Y - \mathcal{E}(Y)\|^2\right) = \sum_{i=1}^{k} E((Y - E(Y_i))^2) = \sum_{i=1}^{k} V(Y_i).$$

On reconnaît alors l'expression de $\mathrm{tr}(\mathcal{V}(Y))$.
Or deux matrices semblables ont même trace, et donc

$$\mathrm{tr}(\mathcal{V}(Y)) = \mathrm{tr}(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i.$$

On a donc $\boxed{E(\|Y - \mathcal{E}(Y)\|^2) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i.}$

Rappel

La borne inférieure d'une famille de nombres positifs existe toujours. C'est un minimum lorsque cette borne inférieure est atteinte.

9.a. Le théorème de projection orthogonale assure non seulement l'existence de cette borne inférieure, mais en plus affirme qu'il s'agit d'un minimum, atteint en un unique x qui est le projeté orthogonal de $Y(\omega) - \mathcal{E}(Y)$ sur F. Ce projeté $p_F(Y(\omega) - \mathcal{E}(Y))$ vaut :

$$p_F(Y(\omega) - \mathcal{E}(Y)) = \sum_{j=1}^{q} \langle Y(\omega) - \mathcal{E}(Y), f^{(j)} \rangle f^{(j)}.$$

Précaution

Cette formule est valable uniquement car on travaille en base orthonormée.

On a alors, par le théorème de Pythagore,

$$\|Y(\omega)-\mathscr{E}(Y)\|^2 = \underbrace{\|Y(\omega)-\mathscr{E}(Y)-p_F(Y-\mathscr{E}(Y))\|^2}_{=Q_F(\omega)} + \|p_F(Y(\omega)-\mathscr{E}(Y))\|^2.$$

Enfin, puisqu'on travaille dans une base orthonormée, nous connaissons l'expression de la norme en fonction des coordonnées, et il vient

$$\|p_F(Y(\omega)-\mathscr{E}(Y))\|^2 = \sum_{j=1}^{q} \langle Y(\omega)-\mathscr{E}(Y), f^{(j)}\rangle^2.$$

On a donc

$$\boxed{\|Y(\omega)-\mathscr{E}(Y)\|^2 = Q_F(\omega) + \sum_{j=1}^{q}\langle Y(\omega)-\mathscr{E}(Y), f^{(j)}\rangle^2.}$$

Rappel
Si $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F, alors $x-p_F(x)\in F^{\perp}$.

Remarque
À ω fixé, on travaille dans $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$, et non plus avec des variables aléatoires.

9.b. D'une part, on sait déjà que $E(\|Y-\mathscr{E}(Y)\|^2) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i$.

On en déduit donc que

$$E(Q_F) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i - E\left(\sum_{j=1}^{q}\langle Y-\mathscr{E}(Y), f^{(j)}\rangle^2\right) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i - \sum_{j=1}^{q} E\left(\langle Y-\mathscr{E}(Y), f^{(j)}\rangle^2\right).$$

Pour $j\in[\![1,q]\!]$, notons $f^{(j)} = \begin{pmatrix} f_1^{(j)}\\ \vdots \\ f_k^{(j)}\end{pmatrix}$. Alors nous savons que pour tout $\omega\in\Omega$,

Coordonnées
Ainsi, les $f_i^{(j)}$ sont les coordonnées de $f^{(j)}$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$.

$$\langle Y(\omega)-\mathscr{E}(Y), f^{(j)}\rangle^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} f_i^{(j)}(Y_i(\omega)-E(Y_i))\right)^2.$$

Expression du produit scalaire en base orthonormée (la base canonique de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique).

Et donc

$$\begin{aligned} E\left(\langle Y-\mathscr{E}(Y), f^{(j)}\rangle^2\right) &= E\left[\sum_{i=1}^{k} f_i^{(j)}(Y_i-E(Y_i))\right]^2 \\ &= V\left(\sum_{i=1}^{k} f_i^{(j)}(Y_i-E(Y_i))\right) + E\left[\sum_{i=1}^{k} f_i^{(j)}(Y_i-E(Y_i))\right]^2 \\ &= V\left(\sum_{i=1}^{k} f_i^{(j)}(Y_i-E(Y_i))\right) = V\left(\sum_{i=1}^{k} f_i^{(j)}Y_i\right). \end{aligned}$$

Formule de Huygens appliquée au calcul d'un moment d'ordre 2.

D'autre part, on a prouvé à la question 8.a que

$${}^t f^{(j)}\mathscr{V}(Y)f^{(j)} = V\left(\sum_{i=1}^{k} f_i^{(j)}Y_i\right).$$

On a donc bien, pour tout $j\in[\![1,q]\!]$, $E\left(\langle Y-\mathscr{E}(Y), f^{(j)}\rangle^2\right) = {}^t f^{(j)}\mathscr{V}(Y)f^{(j)}$, et ainsi

$$\boxed{E(Q_F) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i - \sum_{j=1}^{q} {}^t f^{(j)}\mathscr{V}(Y)f^{(j)}.}$$

9.c. Si $F=\mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$, alors pour tout vecteur $x\in\mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$, $p_F(x)=x$. Et donc Q_F est l'application constante égale à 0, de sorte que $E(Q_F)=0$, et donc pour tout base orthonormée $f^{(1)},\dots,f^{(k)}$ de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$, on a

$$\sum_{j=1}^{k} {}^t f^{(j)}\mathscr{V}(Y)f^{(j)} = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i.$$

Remarque
Ce résultat est immédiat si on prend une base orthonormée de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de $\mathscr{V}(Y)$. Pour d'autres bases, ce résultat est moins évident, mais peut se prouver uniquement à l'aide de techniques d'algèbre linéaire.

10.a. Soit f une matrice colonne de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$, et soit $f^{(1)},\dots,f^{(k)}$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres[10] de $\mathcal{V}(Y)$.

Notons alors $f=\sum_{i=1}^{k} f_i f^{(i)}$. Le vecteur f vérifie $\|f\|=1$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{k} f_i^2=1$.

D'autre part, on a

$$ {}^t f\mathcal{V}(Y)f=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k}\lambda_1 f_i^2 \leqslant \lambda_1. $$

[10] Une telle base existe car $\mathcal{V}(Y)$ est symétrique.

10.b. Soit F une droite vectorielle de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$, et soit f une base orthonormée de F. Alors par la question 9.b,

$$ E(Q_F)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i-{}^t f\mathcal{V}(Y)f \geqslant \sum_{i=1}^{k}\lambda_i-\lambda_1=\sum_{i=2}^{k}\lambda_i. $$

Ainsi, $\sum_{i=2}^{k}\lambda_i$ est un minorant de $E(Q_F)$.

De plus, si $F=\mathrm{Vect}(f)$ est une droite incluse dans[11] $E_{\lambda_1}(\mathcal{V}(Y))$, alors l'inégalité obtenue à la question précédente est alors une égalité, et donc

$$ E(Q_F)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i-\lambda_1=\sum_{i=2}^{k}\lambda_i. $$

Par conséquent, $\sum_{i=2}^{k}\lambda_i$ est le plus grand des minorants des $E(Q_F)$, et donc est égal à la borne inférieure[12] des $E(Q_F)$ lorsque F parcourt l'ensemble des droites vectorielles de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$.

[11] Autrement dit, il s'agit d'une droite engendrée par un vecteur propre de $\mathcal{V}(Y)$ associé à la valeur propre λ_1.

[12] Ici, la borne inférieure est même un minimum puisque nous venons de trouver un F pour lequel cette borne est atteinte.

10.c. Ici, $\mathrm{Diag}(p)=\frac{1}{k}I_k$, et donc le résultat de la question 3.a nous indique que

$$ \mathcal{V}(Y)=\frac{1}{k}(I_k-M(p)). $$

Or, $M(p)$ est une matrice de projecteur, donc de valeurs propres 0 et 1, avec
$\dim E_0(M(p))=k-1$ et $\dim E_1(M(p))=1$.
On en déduit que les valeurs propres de $I_k-M(p)$ sont 0 et 1, avec

$$ \dim E_0(I_k-M(p))=\dim E_1(M(p))=1 \text{ et } \dim E_1(I_k-M(p))=\dim E_0(M(p))=k-1. $$

Et alors les valeurs propres de $\mathcal{V}(Y)$ sont $\frac{1}{k}$ et 0, avec

$$ \dim E_{1/k}(\mathcal{V}(Y))=\dim E_1(I_k-M(p))=k-1 \text{ et } \dim E_0(\mathcal{V}(Y))=\dim E_0(I_k-M(p))=1. $$

Valeurs propres

Multiplier une matrice par un scalaire λ, c'est multiplier les valeurs propres par λ et garder les mêmes sous-espaces propres.

Ainsi, $\lambda_1=\cdots=\lambda_{k-1}=\frac{1}{k}$ et $\lambda_k=0$.
D'après la question précédente, la borne inférieure de $E(Q_F)$ est égale à

$$ \sum_{i=2}^{k}\lambda_i=\sum_{i=2}^{k-1}\frac{1}{k}=\boxed{\frac{k-1}{k}}. $$

Et cette borne est atteinte[13] pour toute droite engendrée par un vecteur propre de $\mathcal{V}(Y)$ associé à la valeur propre $\frac{1}{k}$.
Mais nous venons de dire que le sous-espace propre de $\mathcal{V}(Y)$ associé à la valeur propre $\frac{1}{k}$ est le sous-espace propre de $M(p)$ associé à la valeur 0. Il a été prouvé à la question 1.f que ce sous-espace propre est $\mathrm{Vect}(e_1-e_2,e_1-e_3,\dots,e_1-e_k)=\mathrm{Vect}(u)^{\perp}$.

[13] Inversement, si $F=\mathrm{Vect}(f)$ n'est pas engendrée par un vecteur propre pour la valeur propre $1/k$, alors on montre que

$$ {}^t\mathcal{V}(Y)f>\lambda_1 $$

et donc $E(Q_F)$ est strictement supérieur à $\frac{k-1}{k}$.

11.a. Si le rang de $\mathcal{V}(Y)$ est égal à r, alors F_0 est de dimension r car

$$ \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})=\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Spec}(\mathcal{V}(Y))}E_\lambda(\mathcal{V}(Y))=E_0(\mathcal{V}(Y))\oplus F_0. $$

Reprenons les notations de la question 9, et soit $f^{(1)},\dots,f^{(r)}$ une base orthonormée de F_0, formée de vecteurs propres de $\mathcal{V}(Y)$ associés aux valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_r$. D'après la question 9.b, on a

$$ E(Q_{F_0})=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i-\sum_{j=1}^{r}{}^t f^{(j)}\mathcal{V}(Y)f^{(j)}=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i-\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\|f^{(j)}\|^2=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i-\sum_{j=1}^{r}\lambda_j=0. $$

Précision

Une telle base est obtenue par concaténation de bases orthonormées des sous-espaces propres de $\mathcal{V}(Y)$ associés aux valeurs propres non nulles de $\mathcal{V}(Y)$.

Mais Q_{F_0} est une variable aléatoire positive par définition. Elle est donc d'espérance nulle si et seulement si $P(Q_{F_0} = 0) = 1$.
Mais par définition de Q_{F_0}, on a $Q_{F_0}(\omega) = 0 \Leftrightarrow Y(\omega) - \mathscr{E}(Y) \in F_0$.
On en déduit que $P(Y - \mathscr{E}(Y) \in F_0) = 1$, et donc F_0 est un support vectoriel de Y.

> **Détail**
> On peut prouver ceci en raisonnant par l'absurde : notons
> $$Q_{F_0}(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}_+$$
> et supposons qu'il existe i_0 tel que $x_{i_0} > 0$ et
> $$P(Q_{F_0} = x_{i_0}) > 0.$$
> Alors
> $$E(Q_{F_0}) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i P(Q_{F_0} = x_i) \geqslant x_{i_0} P(Q_{F_0} = x_{i_0}) > 0.$$

11.b. Soit $F_1 = \{x \in F_0 : \forall y \in F, \langle x, y\rangle = 0\}$. Autrement dit, soit F_1 le supplémentaire orthogonal de F dans l'espace euclidien[14] F_0. Alors F_1 est de dimension $\dim F_0 - \dim F \geqslant 1$ car $F \neq F_0$. Par conséquent, il existe un vecteur x non nul dans F_1, et alors $\frac{x}{\|x\|}$ est un vecteur de F_0, de norme 1, et orthogonal à F.

[14] Autrement dit, on oublie ici que l'on travaille dans l'espace euclidien $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$, pour ne garder que F_0.

11.c. Soit $g^{(1)}, \ldots, g^{(k)}$ une base orthonormée de F_0 telle que $g^{(i)}$ soit un vecteur propre de $\mathscr{V}(Y)$ associé à la valeur propre λ_i.

Soient alors $f_1, \ldots, f_r$ tels que $f^{(r)} = \sum_{i=1}^{r} f_i g^{(i)}$. Alors

$$ {}^t f^{(r)} \mathscr{V}(Y) f^{(r)} = \sum_{i=1}^{r} f_i^2 \lambda_i \geqslant \lambda_r \underbrace{\sum_{i=1}^{r} f_i^2}_{=1 \text{ car } \|f^{(r)}\|=1} > 0.$$

Soit $f^{(1)}, \ldots, f^{(r)}$ une base orthonormée de F_0, telle que $f^{(1)}, \ldots, f^{(q)}$ soit une base orthonormée de F ($q = \dim F < r$).
Alors

$$0 = E(Q_{F_0}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i - \sum_{j=1}^{r} {}^t f^{(j)} \mathscr{V}(Y) f^{(j)} = E(Q_F) - \sum_{j=q+1}^{r} f^{(r)} \mathscr{V}(Y) f^{(r)}.$$

Mais pour tout $j \in [\![q+1, r]\!]$, ${}^t f^{(j)} \mathscr{V}(Y) f^{(j)} \geqslant 0$ (par la question 8.a) et ${}^t f^{(r)} \mathscr{V}(Y) f^{(r)} > 0$.
On en déduit que

$$\sum_{j=q+1}^{r} {}^t f^{(j)} \mathscr{V}(Y) f^{(j)} > 0 \text{ et donc } E(Q_F) = \sum_{j=q+1}^{r} {}^t f^{(j)} \mathscr{V}(Y) f^{(j)} > 0.$$

11.d. Puisque $E(Q_F) \neq 0$ et que Q_F est une variable aléatoire positive, Q_F n'est pas (presque sûrement) nulle. Et donc $P(Q_F = 0) < 1$. Or $[Q_F = 0] = [Y - \mathscr{E}(Y) \in F]$. On en déduit que $P(Y - \mathscr{E}(Y) \in F) > 0$, et donc F n'est pas un support vectoriel de Y.
Supposons que $R_s(Y) < r$. Alors il existe $G \in \mathscr{S}(Y)$ avec $\dim G < r$.
Et par la question 7.c, $F = G \cap F_0$ est un support vectoriel de Y, inclus dans F_0, et de dimension strictement inférieure à r (et donc strictement inclus dans F_0.)
Mais à la question précédente, nous venons de prouver qu'il était impossible de trouver un tel support vectoriel., d'où une contradiction.
On en déduit que $\boxed{R_s(Y) = r.}$

> **Et même...**
> Ceci prouve également que le support stochastique de Y est égal à F_0.

12.a. Nous venons de prouver que le rang stochastique $R_s(T)$ est égal au rang de $\mathscr{V}(T)$.
Mais le rang de $\mathscr{V}(T)$ est égal au nombre de ses valeurs propres non nulles, comptées autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé.

> **Précision**
> Le résultat de la question précédente s'applique car $\mathscr{V}(T)$ n'est pas la matrice nulle, puisque les $V(T_i)$ sont non nuls.

Supposons donc que $\text{rg}(\mathscr{V}(T)) < k$, et soit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$ un vecteur propre de $\mathscr{V}(Y)$ associé à la valeur propre 0.

Alors par la question 8.a, $V\left(\sum_{i=1}^{k} v_i T_i\right) = {}^t v \mathscr{V}(T) v = 0$.

Ceci est en contradiction avec le résultat de la question 6.d, car si j est tel que[15] $v_j \neq 0$,

$$V\left(\sum_{i=1}^{k} v_i T_i\right) \geqslant \frac{v_j^2(1-p_j)}{p_j^2} \times \prod_{\substack{i \in [\![1,k]\!] \\ i \neq j}} p_j > 0.$$

[15] Un tel j existe car v est non nul.

On en déduit que $\text{rg}(\mathscr{V}(T)) = k$ et donc $\boxed{R_s(T) = k.}$

12.b. Par le théorème de transfert appliqué à la probabilité conditionnelle $P_{[T_1 = i] \cap [T_2 > i]}$, on a

$$E(T_1 T_2 | [T_1 = i] \cap [T_2 > i]) = \sum_{(j,\ell) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*} j\ell P([T_1 = j] \cap [T_2 = \ell] | [T_1 = i] \cap [T_2 > i]).$$

Mais, on a

$$P([T_1=j]\cap[T_2=\ell]|[T_1=i]\cap[T_2>i])=\begin{cases}0 & \text{si } j\neq i \text{ ou } \ell\leqslant i\\ \frac{P([T_1=i]\cap[T_2=\ell])}{P([T_1=i]\cap[T_2>i])} & \text{sinon}\end{cases}$$

Or, en reprenant les notations[16] de la question 6, on a

$$[T_1=i]\cap[T_2>i]=\bigcap_{j=1}^{i-1}[X^{(j)}\notin\{1,2\}]\cap[X^{(i)}=1]$$

de sorte que par indépendance des tirages,

$$P([T_1=i]\cap[T_2>i])=(1-p_1-p_2)^{i-1}p_1.$$

De même, on a, pour $\ell>i$,

$$[T_1=i]\cap[T_2=\ell]=\bigcap_{j=1}^{i-1}[X^{(j)}\notin\{1,2\}]\cap[X^{(i)}=1]\cap\bigcap_{j=i+1}^{\ell-1}[X^{(j)}\neq 2]\cap[X^{(\ell)}=2].$$

On en déduit que

$$P([T_1=i]\cap[T_2=\ell])=(1-p_1-p_2)^{i-1}\times p_1\times(1-p_2)^{\ell-i-1}p_2.$$

Il vient enfin, pour $i=j$ et $\ell>i$,

$$P([T_1=j]\cap[T_2=\ell]|[T_1=i]\cap[T_2>i])=(1-p_2)^{\ell-i-1}p_2.$$

Il vient alors

$$E(T_1T_2|[T_1=i]\cap[T_2>i])=ip_2\sum_{\ell=i+1}^{+\infty}\ell(1-p_2)^{\ell-i-1}.$$

Reste à calculer la somme de cette série :

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=i+1}^{+\infty}\ell(1-p_2)^{\ell-i-1}&=\sum_{j=0}^{+\infty}(j+i+1)(1-p_2)^j\\&=(i+1)\sum_{j=0}^{+\infty}(1-p_2)^j+(1-p_2)\sum_{j=0}^{+\infty}j(1-p_2)^{j-1}\\&=(i+1)\frac{1}{p_2}+\frac{1-p_2}{p_2^2}=\frac{i}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}\end{aligned}$$

Enfin, il vient

$$E(T_1T_2|[T_1=i]\cap[T_2>i])=ip_2\left(\frac{i}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}\right)=\boxed{i\left(i+\frac{1}{p_2}\right).}$$

12.c. Un système complet d'événements est

$$\{[T_1=i]\cap[T_2>i],i\in\mathbf{N}^*\}\cup\{[T_2=j]\cap[T_1>j],j\in\mathbf{N}^*\}$$

De plus, par symétrie, on peut montrer que $E(T_1T_2|[T_1>j]\cap[T_2=j])=j\left(j+\frac{1}{p_1}\right)$.
On a calculé à la question précédente la probabilité

$$P([T_1=i]\cap[T_2>i]=(1-p_1-p_2)^{i-1}p_1$$

et de même, $P([T_1>j]\cap[T_2=j])=(1-p_1-p_2)^{j-1}p_2$.
Par la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'événements précédemment évoqué, on a

$$E(T_1T_2)=\sum_{i=1}^{+\infty}E(T_1T_2|[T_1=i]\cap[T_2>i])P([T_1=i]\cap[T_2>i])+\sum_{j=1}^{+\infty}E(T_1T_2|[T_1>j]\cap[T_2=j])P([T_1>j]\cap[T_1=j])$$

[16] $X^{(j)}$ désigne le numéro de la catégorie à laquelle appartient l'individu obtenu au j-ème tirage.

Convergence
Il serait facile de prouver à la main la convergence de cette série, mais elle est automatique car T_1 et T_2 admettent une variance, donc T_1T_2 admet une espérance, et donc $E(T_1T_2|H)$ existe pour tout événement H.

Chgt d'indice
$j=\ell-i-1$

Explication
On a soit $T_1<T_2$, soit $T_1>T_2$.
Ce s.c.e n'est autre que le s.c.e associé au couple (T_1,T_2), où l'on remarque qu'on ne peut avoir $T_1=T_2$.

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} i\left(i+\frac{1}{p_2}\right)(1-p_1-p_2)^{i-1}p_1 + \sum_{j=1}^{+\infty} j\left(j+\frac{1}{p_1}\right)(1-p_1-p_2)^{j-1}p_2$$

Calculons la première de ces sommes, la seconde s'en déduira en échangeant les rôles de p_1 et p_2. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(i+\frac{1}{p_2}\right)(1-p_1-p_2)^{i-1} &= \frac{1}{p_2}\sum_{i=1}^{+\infty} i(1-p_1-p_2)^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} i^2(1-p_1-p_2)^{i-1}\\
&= \frac{1}{p_2(p_1+p_2)^2} + \sum_{i=1}^{+\infty} i(i-1)(1-p_1-p_2)^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} i(1-p_1-p_2)^{i-1}\\
&= \frac{1}{p_2(p_1+p_2)^2} + \frac{2(1-p_1-p_2)}{(p_1+p_2)^3} + \frac{1}{(p_1+p_2)^2}\\
&= \frac{1}{(p_1+p_2)^2}\frac{p_2+1}{p_2} + \frac{2(1-p_1-p_2)}{(p_1+p_2)^3}
\end{aligned}$$

Il vient enfin,

$$\begin{aligned}
E(T_1T_2) &= \frac{p_1}{(p_1+p_2)^2}\frac{p_2+1}{p_2} + p_1\frac{2(1-p_1-p_2)}{(p_1+p_2)^3} + \frac{p_2}{(p_1+p_2)^2}\frac{p_1+1}{p_1} + p_2\frac{2(1-p_1-p_2)}{(p_1+p_2)^3}\\
&= \frac{p_1^2p_2 + p_2^2p_1 + p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2(1-p_1-p_2)}{p_1p_2(p_1+p_2)^2}\\
&= \frac{p_1^2p_2 + p_2^2p_1 + p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 - 2p_1^2p_2 - 2p_1p_2^2}{p_1p_2(p_1+p_2)^2}\\
&= \frac{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 - p_1^2p_2 - p_1p_2^2}{p_1p_2(p_1+p_2)^2}\\
&= \frac{p_1^2 + 2p_1p_2 + p_2^2}{p_1p_2(p_1+p_2)^2} - \frac{p_1^2p_2 + p_2^2p_1}{p_1p_2(p_1+p_2)^2}\\
&= \frac{1}{p_1p_2} - \frac{p_1+p_2}{(p_1+p_2)^2} = \boxed{\frac{1}{p_1p_2} - \frac{1}{p_1+p_2}.}
\end{aligned}$$

12.d. Par la formule de Huygens, on a

$$\mathrm{Cov}(T_1,T_2) = E(T_1T_2) - E(T_1)E(T_2) = \frac{1}{p_1p_2} - \frac{1}{p_1+p_2} - \frac{1}{p_1}\frac{1}{p_2} = -\frac{1}{p_1+p_2}.$$

Par symétrie, on prouverait de la même manière que pour $i \neq j$,

$$\mathrm{Cov}(T_i,T_j) = -\frac{1}{p_i+p_j}.$$

Et donc la matrice de variance-covariance de T est précisément la matrice Π. Or, il a été montré à la question 12.a que cette matrice est de rang k, et donc $\boxed{\text{elle est inversible.}}$

Maths II 2013

Sujet : Lois de Poisson mélangées **Facile**

Abordable en première année : ✓ (questions 1 à 5) **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : variables aléatoires discrètes et à densité, estimation par intervalle de confiance, séries.

Commentaires : quelques questions sont assez difficiles (12 et 13 notamment), mais l'ensemble est bien guidé, avec une première partie très abordable

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et sont à valeurs réelles.

L'objectif du problème est d'introduire une famille de lois de probabilités discrètes, dites lois de Poisson mélangées, qui jouent un rôle important en mathématiques de l'assurance, car elles permettent de modéliser le nombre d'apparitions d'événements aléatoires provenant de sources hétérogènes.

Partie I : polynômes factoriels ascendants et lois binomiales négatives.

Pour tout réel x et tout entier naturel n, on pose

$$x^{\langle n\rangle} = \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x+k-1) & \text{si } n \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

On associe aux fonctions polynomiales $x \mapsto x^{\langle n\rangle}$, les polynômes $X^{\langle n\rangle}$, $(n \in \mathbf{N})$ de $\mathbf{R}[X]$, dits polynômes factoriels ascendants.

1. a. Vérifier les égalités $X^2 = X^{\langle 2\rangle} - X^{\langle 1\rangle}$ et $X^3 = X^{\langle 3\rangle} - 3X^{\langle 2\rangle} + X^{\langle 1\rangle}$.
   b. Exprimer X^4 comme combinaison linéaire des polynômes $X^{\langle 4\rangle}, X^{\langle 3\rangle}, X^{\langle 2\rangle}$ et $X^{\langle 1\rangle}$.
   c. Justifier plus généralement que les polynômes X^n, $n \in \mathbf{N}$ de la base canonique de $\mathbf{R}[X]$ sont tous des combinaisons linéaires de polynômes factoriels ascendants.
2. Soit (r, s) un couple de réels et n un entier naturel non nul.
   a. Exprimer $r^{\langle n+1\rangle}$ en fonction de $r^{\langle n\rangle}$.
   b. En déduire pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la relation
   $$(r+s+n)r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle} = r^{\langle k+1\rangle}s^{\langle n-k\rangle} + r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k+1\rangle}.$$
   c. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
   $$(r+s)^{\langle n\rangle} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle}.$$
3. Dans cette question, r est un réel strictement positif et x est un réel fixé de $]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose
   $$u_n = \frac{r^{\langle n+1\rangle}x^{n+1}}{n!(1-x)^{r+1}} \text{ et } R_n = \frac{r^{\langle n+1\rangle}}{n!}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}}\,dt.$$
   a. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
   b. En déduire l'existence d'un entier naturel N tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait $u_{N+n} \leqslant u_N\left(\dfrac{1+x}{2}\right)^n$.
   c. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   d. À l'aide d'une formule de Taylor que l'on citera avec ses hypothèses, justifier pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'égalité
   $$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^{n}\frac{r^{\langle k\rangle}}{k!}x^k + R_n.$$
   e. Montrer que pour tout $t \in [0, x]$, on a $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$. En déduire pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'inégalité $R_n \leqslant u_n$.

f. Déduire des résultats précédents que la série de terme général $\frac{r^{\langle n\rangle}}{n!}x^n$ est convergente, et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{r^{\langle n\rangle}}{n!}x^n = \frac{1}{(1-x)^r}.$$

4. Vérifier que pour tout couple (r,p) de réels tels que $r>0$ et $0<p<1$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^{\langle k\rangle}}{k!}p^r(1-p)^k = 1.$$

Dans toute la suite du problème, on dit qu'une variable aléatoire X définie sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et à valeurs dans $\mathbf{N}$ suit la loi binomiale négative de paramètres r $(r>0)$ et p $(0<p<1)$, si pour tout entier naturel k, on a

$$P(X=k) = \frac{r^{\langle k\rangle}}{k!}p^r(1-p)^k.$$

Cette loi est notée $BN(r,p)$.

5. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $BN(r,p)$.

a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Montrer que la variable aléatoire X_n définie par $X_n = \prod_{k=1}^{n}(X-k+1)$ admet une espérance égale à $r^{\langle n\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n$.

b. En déduire que X admet des moments de tous ordres. Calculer l'espérance et la variance de X

6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois $BN(r,p)$ et $BN(s,p)$, respectivement. On pose $Z = X+Y$. Montrer que Z suit la loi $BN(r+s,p)$.

Partie II : inégalités stochastiques

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$. On dit que X est stochastiquement inférieure à Y lorsque pour tout réel x, on a $P(X\geqslant x)\leqslant P(Y\geqslant x)$.

7. Montrer que si les deux variables aléatoires X et Y vérifient pour tout $\omega\in\Omega$ l'inégalité $X(\omega)\leqslant Y(\omega)$, alors X est stochastiquement inférieure à Y.

8. On suppose que X suit la loi normale d'espérance égale à -1 et de variance égale à 1 et que Y suit la loi normale d'espérance égale à 1 et de variance égale à 1, et que X et Y sont indépendantes.

a. Exprimer $P([X\geqslant 0]\cap[Y<0])$ à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

b. Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y.

c. A-t-on pour tout $\omega\in\Omega$, l'inégalité $X(\omega)\leqslant Y(\omega)$?

9. On suppose que X et Y sont discrètes et à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y si et seulement si, pour tout $k\in\mathbf{N}$, on a $P(X\leqslant k)\geqslant P(Y\leqslant k)$.

10. Soient θ et λ deux réels vérifiant $0<\theta<\lambda$, et soit X et Z deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi de Poisson de paramètre θ et la loi de Poisson de paramètre $\lambda-\theta$.

a. Rappeler la loi de $X+Z$ en citant précisément le résultat de cours utilisé.

b. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y.

11. Pour tout $k\in\mathbf{N}$ et pour tout réel $t>0$, on pose $F(t,k) = \sum_{j=0}^{k}\frac{t^j}{j!}e^{-t}$.

a. Écrire en `Scilab` une fonction `suite(t,k)` qui permet de calculer $F(t,k)$.

b. Établir pour tout $k\in\mathbf{N}$ et pour tout réel $\beta\in]0,1[$, l'existence d'un unique réel strictement positif $M(\beta,k)$ vérifiant l'égalité suivante : $F(M(\beta,k),k)=\beta$.

12. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{N}$ de fonction de répartition G. On note V et W les deux applications de Ω dans $[0,1]$ définies par

$$\forall\omega\in\Omega,\begin{cases}V(\omega)=G(X(\omega)-1)\\ W(\omega)=G(X(\omega))\end{cases}$$

Soit α un réel vérifiant $0<\alpha<1$.

a. Justifier l'existence de $L_\alpha=\min\{k\in\mathbf{N} : G(k)\geqslant\alpha\}$, et comparer les réels $\alpha, G(L_\alpha-1)$ et $G(L_\alpha)$.

b. Montrer que $[W<\alpha]$ et $[V\geqslant\alpha]$ sont des événements. Qu'en déduit-on pour les applications V et W ?

c. Exprimer $P(W<\alpha)$ et $P(V\geqslant\alpha)$ à l'aide de G et L_α.

d. Soit U une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme sur le segment $[0,1]$. Montrer que V est stochastiquement inférieure à U et que U est stochastiquement inférieure à W.

13. Pour n entier supérieur ou égal à 2, soit $(X_1,\dots,X_n)$ un n-échantillon i.i.d. (indépendant, identiquement distribué) de la loi de Poisson de paramètre inconnu $\theta>0$. On pose pour tout $n\geqslant 2$: $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$.

Les notations F et M sont celles de la question 11.

a. Proposer un estimateur sans biais de θ.

b. Soit α un réel tel que $0<\alpha<1$. À l'aide de la question 12, établir les deux inégalités suivantes :

$$P\left(\left[F(n\theta,S_n)<\frac{\alpha}{2}\right]\right)\leqslant\frac{\alpha}{2}\text{ et }P\left(\left[F(n\theta,S_n-1)\geqslant 1-\frac{\alpha}{2}\right]\right)\leqslant\frac{\alpha}{2}.$$

c. On pose $J(X_1,\dots,X_n)=\dfrac{1}{n}M\left(\dfrac{\alpha}{2},S_n\right)$ et $I(X_1,\dots,X_n)=\begin{cases}\frac{1}{n}M\left(1-\frac{\alpha}{2},S_n-1\right) & \text{si } S_n\geqslant 1\\ 0 & \text{si } S_n=0\end{cases}$

Déduire des questions précédentes que $I(X_1,X_2,\dots,X_n)$ et $J(X_1,X_2,\dots,X_n)$ sont les bornes d'un intervalle de confiance de risque inférieur ou égal à α pour le paramètre inconnu θ.

Partie III : Lois de Poisson mélangées

Dans cette partie, T est une variable aléatoire à densité dont une densité f est nulle sur $\mathbf{R}_-$ et continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

14. Justifier, pour tout $n\in\mathbf{N}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}f(t)\,dt$.

15. On pose, $\forall n\in\mathbf{N}$, $z_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}f(t)\,dt$ et $v_n=\sum_{k=0}^{n}z_k$.

a. Soit A un réel strictement positif et X_A une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre A. Établir pour tout $n\in\mathbf{N}$, l'encadrement suivant :

$$0\leqslant 1-v_n\leqslant P(X_A>n)+\int_A^{+\infty}f(t)\,dt.$$

b. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}z_n$ est convergente, et que $\sum_{n=0}^{+\infty}z_n=1$.

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}$ suit la loi de Poisson mélangée associée à la densité f, notée $\mathscr{P}_f$, si pour tout entier naturel n, on a $P(X=n)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{n!}e^{-t}f(t)\,dt$.

16. La notation exp désigne la fonction exponentielle. Soit r une réel strictement positif et p un réel vérifiant $0<p<1$. On suppose dans cette question qu'une densité f de T est donnée par

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(r)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^r t^{r-1}\exp\left(-\frac{pt}{1-p}\right) & \text{si } t>0\\ 0 & \text{si } t\leqslant 0\end{cases}$$

a. Montrer que f est une densité.

b. Déterminer la loi suivie par $\frac{p}{1-p}T$. En déduire l'espérance et la variance de T.

c. Montrer que $\mathscr{P}_f$ est la loi binomiale négative $BN(r,p)$.

17. Soit (r,p) et (s,q) deux couples de réels vérifiant $0<r<s$ et $0<q<p<1$. On note Y,Z et W trois variables aléatoires qui suivent les loi $BN(r,p),BN(s,p)$ et $BN(s,q)$ respectivement.

a. Montrer que Y est stochastiquement inférieure à Z.

b. À l'aide de la question 16, en déduire que Y est stochastiquement inférieure à W.

MATHS II 2013 : CORRIGÉ

Partie I : polynômes factoriels ascendants et lois binomiales négatives.

1.a. On a

$$X^{\langle 1\rangle}=X,\ X^{\langle 2\rangle}=(X+1)X=X^2+X \text{ et } X^{\langle 3\rangle}=(X+2)(X+1)X=X^3+3X^2+2X.$$

Donc

$$\boxed{X^2=X^{\langle 2\rangle}-X^{\langle 1\rangle} \text{ et } X^3=X^{\langle 3\rangle}-3X^{\langle 2\rangle}+X^{\langle 1\rangle}.}$$

1.b. Notons que

$$X^{\langle 4\rangle}=(X+3)X^{\langle 3\rangle}=(X+3)(X^3+3X^2+2X)=X^4+6X^3+11X^2+6X$$

de sorte que

$$\begin{aligned} X^4 &= X^{\langle 4\rangle}-6X^3-11X^2-6X\\ &= X^{\langle 4\rangle}-6(X^{\langle 3\rangle}-3X^{\langle 2\rangle}+X^{\langle 1\rangle})-11(X^{\langle 2\rangle}-X^{\langle 1\rangle})-6X^{\langle 1\rangle}\\ &= \boxed{X^{\langle 4\rangle}-6X^{\langle 3\rangle}+7X^{\langle 2\rangle}-X^{\langle 1\rangle}.}\end{aligned}$$

1.c. $X^{\langle i\rangle}$ est un polynôme de degré exactement i (car produit de i termes de degré 1). Et donc les $X^{\langle i\rangle}$, $0\leqslant i\leqslant n$ forment une famille échelonnée de $\mathbf{R}_n[X]$: c'est donc une famille libre de $\mathbf{R}_n[X]$, de cardinal $n+1=\dim \mathbf{R}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
En particulier, $\boxed{X^n \text{ s'écrit comme combinaison linéaire des } X^{\langle i\rangle}.}$

Mieux
Puisque nous avons une base, nous pouvons même dire que X^n s'écrit **de manière unique** comme combinaison linéaire des $X^{\langle i\rangle}$, $i\leqslant n$.

2.a. On a $\boxed{r^{\langle n+1\rangle}=(r+n)r^{\langle n\rangle}.}$

2.b. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} r^{\langle k+1\rangle}s^{\langle n-k\rangle}+r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k+1\rangle} &=(r+k)r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle}+(s+n-k)r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle}\\ &=(r+k+s+n-k)r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle}\\ &=\boxed{(r+s+n)r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle}.}\end{aligned}$$

2.c. Pour $n=0$, on a

$$(r+s)^{\langle 0\rangle}=1=r^{\langle 0\rangle}s^{\langle 0\rangle}=\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}r^{\langle k\rangle}s^{\langle 0-k\rangle}.$$

Supposons qu'on ait

$$(r+s)^{\langle n\rangle}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle}.$$

Alors

$$\begin{aligned}(r+s)^{\langle n+1\rangle} &=(r+s+n)(r+s)^{\langle n\rangle}\\ &=(r+s+n)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle}\\ &=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(r+s+n)r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle}\\ &=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(r^{\langle k+1\rangle}s^{\langle n-k\rangle}+r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k+1\rangle}\right)\\ &=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^{\langle k+1\rangle}s^{\langle n+1-(k+1)\rangle}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^{\langle k\rangle}s^{\langle n+1-k\rangle}\\ &=r^{\langle n+1\rangle}s^{\langle 0\rangle}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}r^{\langle i\rangle}s^{\langle n+1-i\rangle}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}r^{\langle k\rangle}s^{\langle n+1-k\rangle}+r^{\langle 0\rangle}s^{\langle n+1\rangle}\\ &=r^{\langle n+1\rangle}s^{\langle 0\rangle}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)r^{\langle k\rangle}s^{\langle n+1-k\rangle}+r^{\langle 0\rangle}s^{\langle n+1\rangle}\end{aligned}$$

Formule de 2.b.

Chgt d'indice
Dans la première somme, après avoir isolé le dernier terme, on pose $i=k-1$.

$$=r^{\langle n+1\rangle}s^{\langle 0\rangle}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}r^{\langle k\rangle}s^{\langle n+1-k\rangle}+r^{\langle 0\rangle}s^{\langle n+1\rangle}$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}r^{\langle k\rangle}s^{\langle n+1-k\rangle}$$

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}.$$

Ainsi, la formule est vraie au rang $n+1$, et par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n\in\mathbf{N}, (r+s)^{\langle n\rangle}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^{\langle k\rangle}s^{\langle n-k\rangle}.}$$

3.a. Par définition de u_n, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{r^{\langle n+2\rangle}x^{n+2}}{(n+1)!(1-x)^{r+1}}\frac{n!(1-x)^{r+1}}{r^{\langle n+1\rangle}x^{n+1}}=\frac{(r+n+1)x}{(n+1)}.$$

Lorsque $n\to\infty$, alors $r+n+1\sim n$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=x.}$$

3.b. Puisque $x\in]0,1[$, on a $0<x<\frac{1+x}{2}$, et donc par définition de la convergence d'une suite, il existe $N\in\mathbf{N}$ tel que pour $n\geqslant N$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-x\right|\leqslant\frac{1+x}{2}-x\Longrightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}-x\leqslant\frac{1+x}{2}-x\Longrightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{1+x}{2}\Longrightarrow u_{n+1}\leqslant\frac{1+x}{2}u_n,$$

la dernière implication venant du fait que $u_n\geqslant 0$.
Mais alors, pour $n\geqslant 0$, on a

$$u_{N+n}\leqslant\frac{1+x}{2}u_{N+(n-1)}\leqslant\left(\frac{1+x}{2}\right)^2u_{N+(n-2)}\leqslant\cdots\boxed{\leqslant\left(\frac{1+x}{2}\right)^n u_N.}$$

Détails

Il s'agit ici de la définition de la convergence d'une suite, avec

$$\varepsilon=\frac{1+x}{2}>0.$$

3.c. Puisque $0<x<1$, alors $0<\frac{1+x}{2}<1$, et donc

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+x}{2}\right)^n=0.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty}u_{N+n}=0$ par le théorème des gendarmes[1], et donc

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}u_n=0.}$$

[1] (u_n) est une suite à termes positifs.

Limite

$(u_{n+N})_n$ est une suite dont les termes sont ceux de la suite $(u_n)_n$, ils sont juste décalés (on parle de suite extraite). Ces deux suites, lorsqu'elles convergent, ont nécessairement la même limite.

3.d. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $f:x\mapsto\frac{1}{(1-x)^r}$, qui est de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ (et donc $\mathscr{C}^{n+1}$ pour tout n) sur $[0,1[$:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}+\int_0^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

Or, on a

$$f'(x)=\frac{r}{(1-x)^{r+1}},\ f''(x)=\frac{r(r+1)}{(1-x)^{r+2}}$$

et une récurrence rapide prouve que

$$\forall k\in\mathbf{N},\forall x\in[0,1[, f^{(k)}(x)=\frac{r^{\langle k\rangle}}{(1-x)^{r+k}}$$

de sorte que $f^{(k)}(0)=r^{\langle k\rangle}$. La formule de Taylor s'écrit alors

$$\frac{1}{(1-x)^r}=\sum_{k=0}^{n}\frac{r^{\langle k\rangle}}{k!}x^k+\int_0^x\frac{r^{\langle n+1\rangle}}{n!}\left(\frac{x-t}{1-x}\right)^n\frac{1}{(1-t)^{r+1}}\,dt=\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{r^{\langle k\rangle}}{k!}x^k+R_n.}$$

3.e. Pour tout $t \in [0, x]$, on a $x - t \geqslant 0$ et $1 - t \geqslant 1 - x \geqslant 0$, de sorte que $\dfrac{x-t}{1-t} \geqslant 0$.
De plus, $\dfrac{x-t}{x} = 1 - \dfrac{t}{x} \leqslant 1 - t$ de sorte que $\dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.
On en déduit que pour tout $t \in [0, x]$ on a

$$\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1-t)^{r+1}},$$

et donc par croissance de l'intégrale, il vient

$$\int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}}\,dt \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{(1-t)^{r+1}}\,dt$$

Mais la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^r}$ est croissante[2] sur $[0, x]$, et donc

$$\forall t \in [0, x], \frac{1}{(1-t)^{r+1}} \leqslant \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

de sorte que

$$\int_0^x \frac{1}{(1-t)^{r+1}}\,dt \leqslant \frac{x}{(1-x)^{r+1}},$$

et donc

$$\boxed{R_n \leqslant \frac{r^{\langle n+1\rangle}}{n!} \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{r+1}} = u_n.}$$

[2] Nous avons calculé précédemment sa dérivée, qui est positive.

3.f. On a d'une part $R_n \geqslant 0$ en tant qu'intégrale d'une fonction positive sur $[0, x]$, avec $x > 0$.
D'autre part, $R_n \leqslant u_n$, et donc, d'après le théorème des gendarmes, $R_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'après la question 3.d, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{\langle k\rangle}}{k!} x^k = \frac{1}{(1-x)^r} - R_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-x)^r}.$$

Cela signifie donc que la série de terme général $\dfrac{r^{\langle k\rangle}}{k!}$ est convergente et que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{\langle k\rangle}}{k!} x^k = \frac{1}{(1-x)^k}.}$$

Remarque
Cette formule est en fait une généralisation des séries géométriques et géométriques dérivées. Pour $k = 0$, on retrouve les séries géométriques, et pour $k = 1$ et $k = 2$, on retrouve les séries géométriques dérivées.

4. La formule obtenue à la question précédente appliquée avec $x = 1 - p$ (qui est bien dans $]0, 1[$) nous donne

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{\langle k\rangle}}{k!} (1-p)^k = \frac{1}{(1-(1-p))^r} = \frac{1}{p^r},$$

et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{\langle k\rangle}}{k!} p^r (1-p)^k = 1.}$$

Remarque
Si $r = n$ est un entier, alors

$$\frac{n^{\langle k\rangle}}{k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

et la loi $BN(n, p)$ est alors la loi du nombre d'échecs avant le $n^{\text{ème}}$ succès lors d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. En particulier, pour $n = 1$, la loi $BN(1, p)$ est la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ à laquelle on retire un.

5.a. Notons f la fonction définie par $f(x) = x(x-1)\cdots(x-n+1)$, de sorte que $X_n = f(X)$.
D'après le théorème de transfert, X_n admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{m\geqslant 0} f(m) P(X = m)$$

converge absolument.
Si $m \leqslant n$, alors $f(m) = m(m-1)\cdots(m-n+1) = 0$.
Donc on peut sans restriction supposer que la somme commence à $m = n$, et alors

$$f(m)\frac{r^{\langle m\rangle}}{m!} p^r (1-p)^m = \frac{m!}{(m-n)!} \frac{r^{\langle m\rangle}}{m!} p^r (1-p)^m = \frac{r^{\langle m\rangle}}{(m-n)!} p^r (1-p)^m.$$

Par la question 1.a, on a
$$r^{\langle k+1\rangle} = (r+k+1)r^{\langle k\rangle}$$
puis
$$r^{\langle k+2\rangle} = (r+k+2)r^{\langle k+1\rangle} = (r+k+1)(r+k)r^{\langle k\rangle} = (r+k)^{\langle 2\rangle}r^{\langle k\rangle}$$
et de proche en proche[3], on montre que
$$r^{\langle k+n\rangle} = (r+k)^{\langle n\rangle}r^{\langle k\rangle}.$$

[3] ou par récurrence

En particulier, on a
$$r^{\langle m\rangle} = r^{\langle n+(m-n)\rangle} = (r+n)^{\langle m-n\rangle}r^{\langle n\rangle}.$$
Donc le terme général de la série définissant $E(X_n)$ est
$$r^{\langle n\rangle}\frac{(r+n)^{\langle m-n\rangle}}{(m-n)!}p^r(1-p)^m = r^{\langle n\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n \frac{(r+n)^{\langle m-n\rangle}}{(m-n)!}p^{r+n}(1-p)^{m-n}.$$
Procédons alors au changement d'indice $k = m-n$, de sorte que
$$\sum_{m\geqslant n} r^{\langle n\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n \frac{(r+n)^{\langle m-n\rangle}}{(m-n)!}p^{r+n}(1-p)^{m-n} = r^{\langle n\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n \sum_{k\geqslant 0}\frac{(r+n)^{\langle k\rangle}}{k!}p^{r+n}(1-p)^k.$$
Mais d'après la question 4.f, la série de terme général $\dfrac{(r+n)^{\langle k\rangle}}{k!}p^{r+n}(1-p)^k$ converge[4] et
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(r+n)^{\langle k\rangle}}{k!}p^{r+n}(1-p)^k = 1$$

[4] Absolument car il s'agit d'une série à termes positifs.

de sorte que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^{\langle n\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n \frac{(r+n)^{\langle k\rangle}}{k!}p^{r+n}(1-p)^k = r^{\langle n\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n.$$
On en déduit que X_n admet une espérance, et cette espérance vaut
$$\boxed{E(X_n) = r^{\langle n\rangle}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n.}$$

5.b. Pour $n=1$, la proposition précédente prouve que $X = X_1$ admet une espérance, et que cette espérance est $\boxed{r\dfrac{1-p}{p}.}$

Pour $n=2$, on a $X_2 = X(X-1) = X^2 - X$, de sorte que $X^2 = X_2 + X$ admet une espérance, et donc X admet un moment d'ordre 2, et ce moment est
$$E(X^2) = E(X_2) - E(X) = r(r+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r\frac{1-p}{p}.$$
Par la formule de Huygens, la variance de X est donc
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = r\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r\frac{1-p}{p} = r\frac{1-p}{p}\left(\frac{1-p}{p}+1\right) = \boxed{r\frac{1-p}{p^2}.}$$
Sur le même principe qu'à la question 1, on peut prouver que pour tout $n\in\mathbf{N}$, X^n est combinaison linéaire des X_k, $1\leqslant k\leqslant n$.

Mais alors si $X^n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \alpha_k X_k$, puisque les X_k admettent tous une espérance, X^n admet également une espérance.

Et donc, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbf{N},\ X \text{ admet un moment d'ordre } n.}$

Danger !

Bien que les expressions se ressemblent beaucoup, on n'a pas $X_n = X^{\langle n\rangle}$.
Par exemple, pour $n=2$, on a $X_2 = X(X-1)$ alors que $X^{\langle 2\rangle} = X(X+1)$.

Convolution discrète
Rappelons que le produit de convolution discret n'est rien d'autre que la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X = k], k \in \mathbf{N}\}$.

6. X et Y étant à valeurs dans $\mathbf{N}$, il en est de même de $X + Y$.
Les variables X et Y étant indépendantes, on peut appliquer le produit de convolution discret . Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
P(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)P(Y=n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{\langle k\rangle}}{k!} p^r(1-p)^k \frac{s^{\langle n-k\rangle}}{(n-k)!} p^s(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n!} r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-k\rangle} p^{s+r}(1-p)^n \\
&= p^{s+r}(1-p)^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{\langle k\rangle} s^{\langle n-k\rangle} \\
&= \frac{(r+s)^{\langle n\rangle}}{n!} p^{s+r}(1-p)^n
\end{aligned}$$

Nous reconnaissons là la loi $BN(r+s,p)$, et donc $\boxed{X + Y \hookrightarrow BN(r+s,p).}$

Partie II : Inégalités stochastiques.

7. Notons que si $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$, alors la variable aléatoire X prend toujours des valeurs inférieures ou égales à celles prises par la variable aléatoire Y.
En particulier, si $X(\omega) \geqslant x$, alors $Y(\omega) \geqslant X(\omega) \geqslant x$. Et donc quel que soit $x \in \mathbf{R}$, on a l'inclusion d'événements

$$[X \geqslant x] \subset [Y \geqslant x]$$

de sorte que

$$P(X \geqslant x) \leqslant P(Y \geqslant x).$$

Et donc $\boxed{X \text{ est stochastiquement inférieure à } Y.}$

8.a. Les deux variables X et Y étant indépendantes, on a déjà

$$P([X \geqslant 0] \cap [Y < 0]) = P(X \leqslant 0)P(Y > 0).$$

De plus, $[X \geqslant 0] = [X + 1 \geqslant 1]$ et donc $P(X \geqslant 0) = P(X + 1 \geqslant 1)$. Puisque $X + 1$ suit la loi normale centrée réduite, on a

$$P(X + 1 \geqslant 1) = 1 - P(X + 1 \leqslant 1) = 1 - \Phi(1).$$

De même, $Y - 1$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et donc

$$P(Y < 0) = P(Y - 1 < -1) = P(Y - 1 \leqslant -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1).$$

Et au final

$$\boxed{P([X \leqslant 0] \cap [Y > 0]) = (1 - \Phi(1))^2.}$$

8.b. Pour tout x réel, on a

$$P(X \geqslant x) = P(X+1 \geqslant x+1) = 1 - \Phi(x+1) \text{ et } P(Y \geqslant x) = P(Y-1 \geqslant x-1) = 1 - \Phi(x-1).$$

Mais par croissance de la fonction Φ, on a toujours $\Phi(x-1) < \Phi(x+1)$ et donc

$$P(X \geqslant x) = 1 - \Phi(x+1) \leqslant 1 - \Phi(x-1) = P(Y \geqslant x).$$

Et donc $\boxed{X \text{ est bien stochastiquement inférieure à } Y.}$

8.c. Notons que X et Y étant indépendantes, alors $X - Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,2)$.
En particulier, $P(X > Y) = P(X - Y > 0) = \frac{1}{2}$.
Donc l'événement $[X > Y]$ n'est pas vide : $\boxed{\text{on n'a pas } \forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant Y(\omega).}$

9. Supposons dans un premier temps que X est stochastiquement inférieure à Y. Alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$P(X \leqslant k) = 1-P(X > k) = 1-P(X \geqslant k+1) \geqslant 1-P(Y \geqslant k+1) = 1-P(Y > k) = P(Y \leqslant k).$$

Inversement, supposons que pour tout $k \in \mathbf{N}$, on ait $P(X \leqslant k) \geqslant P(Y \leqslant k)$.
Soit alors $x \in \mathbf{R}$. Si $x \leqslant 0$, on a $P(X \geqslant x) = P(Y \geqslant x) = 1$ car X et Y sont à valeurs dans $\mathbf{N}$.
Considérons à présent $x \in \mathbf{R}_+^*$, et supposons dans un premier temps que x n'est pas un entier.
Alors $P(X \geqslant x) = 1-P(X < x) = 1-P(X \leqslant \lfloor x \rfloor)$. De même, on a $P(Y \geqslant x) = 1-P(Y \leqslant \lfloor x \rfloor)$.
Mais par hypothèse, $P(X \leqslant \lfloor x \rfloor) \geqslant P(Y \leqslant \lfloor x \rfloor)$ et donc

$$P(X \geqslant x) = 1 - P(X \leqslant \lfloor x \rfloor) \leqslant 1 - P(Y \leqslant \lfloor x \rfloor) = P(Y \geqslant x).$$

> **Précautions**
> On a
> $$[X < x] = [X \leqslant \lfloor x \rfloor]$$
> uniquement si x n'est pas un entier.
> En effet, si x est entier, alors $\lfloor x \rfloor = x$.

Enfin, dans le cas où $x \in \mathbf{N}^*$, on a $x-1 \in \mathbf{N}$, et donc

$$P(X \geqslant x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leqslant x-1) \leqslant 1 - P(Y \leqslant x-1) = P(Y \geqslant x).$$

Dans tous les cas, on a bien

$$\forall x \in \mathbf{R},\ P(X \geqslant x) \leqslant P(Y \geqslant x)$$

et donc $\boxed{X \text{ est stochastiquement inférieure à } Y.}$

10.a. La somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$ est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda+\mu)$. Par conséquent, $X+Z$ suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\theta+\lambda-\theta) = \boxed{\mathscr{P}(\lambda).}$

10.b. Puisque X et Y sont à valeurs dans $\mathbf{N}$, nous pouvons utiliser le résultat de la question 9.
Soit $k \in \mathbf{N}$. On a $P(Y \leqslant k) = P(X+Z \leqslant k)$ car Y et $X+Z$ ont même loi.
Mais Z étant à valeurs positives, on a $[X+Z \leqslant k] \subset [X \leqslant k]$. En effet, si $X+Z \leqslant k$, alors X lui-même est inférieur à k.
Et donc $P(X+Z \leqslant k) \leqslant P(X \leqslant k)$.
On en déduit que $P(Y \leqslant k) \leqslant P(X \leqslant k)$, et donc $\boxed{X \text{ est stochastiquement inférieure à } Y.}$

11.a.

```
function y = suite(t,k)
  y = 0 ;
  for i = 0 :k
    y = y+t^i/prod(1 :i)*exp(-t) ;
  end
endfunction
```

11.b. Pour k fixé, la fonction $t \mapsto F(t,k)$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$. De plus, elle est dérivable, et on a, pour $k \geqslant 1$

$$F'(t,k) = \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{t^j}{j!}e^{-t}\right)' = -e^{-t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{jt^{j-1}-t^j}{j!}e^{-t} = -e^{-t} + e^{-t}\sum_{k=1}^{k}\frac{jt^{j-1}}{j!} - e^{-t}\sum_{j=1}^{k}\frac{t^j}{j!}$$
$$= -e^{-t} + e^{-t}\sum_{j=1}^{k}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!} - e^{-t}\sum_{j=1}^{k}\frac{t^j}{j!} = -e^{-t}\left(1 - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{t^i}{i!} + \sum_{j=1}^{k}\frac{t^j}{j!}\right) = -e^{-t}\frac{t^k}{k!}.$$

> **Chgt d'indice**
> Dans la première somme, $i = j-1$.

En particulier, on a $F'(t,k) < 0, \forall t \in \mathbf{R}_+^*$.
De même, si $k = 0$, on a $F'(t,0) = -e^{-t} < 0$.
Dans tous les cas, $t \mapsto F(t,k)$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.
Enfin, par croissances comparées,

$$\lim_{t \to 0} F(t,k) = 1 \text{ et } \lim_{t \to +\infty} F(t,k) = 0.$$

Donc d'après le théorème de la bijection,
$\boxed{\text{pour tout } \beta \in]0,1[, \text{ il existe un unique réel strictement positif } M(\beta,k) \text{ tel que } F(M(\beta,k),k) = \beta.}$

12.a. G est une fonction de répartition, donc a pour limite 1 en $+\infty$. En particulier, il existe A tel que pour $x \geqslant A$, $G(x) \geqslant \alpha$. Et donc par croissance de G, on a $G(\lfloor x \rfloor + 1) \geqslant \alpha$ (car $\lfloor x \rfloor + 1 > x$), avec $\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbf{N}$.
Ainsi, l'ensemble $\{k \in \mathbf{N} : G(k) \geqslant \alpha\}$ est non vide.
Mais toute partie non vide de $\mathbf{N}$ admet un plus petit élément, et donc L_α existe.
Par définition, on a nécessairement $G(L_\alpha) \geqslant \alpha$, et $G(L_\alpha - 1) < \alpha$, donc

$$\boxed{G(L_\alpha - 1) < \alpha \leqslant G(L_\alpha).}$$

Détails
$L_\alpha - 1$ est le plus grand entier dont l'image par G est strictement inférieure à α.

12.b. On a, par croissance de G, et car X est à valeurs dans $\mathbf{N}$,

$$[W < \alpha] = \{\omega \in \Omega : G(X(\omega)) < \alpha\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant L_\alpha - 1\} = [X \leqslant L_\alpha - 1].$$

Mais X étant une variable aléatoire, $[X \leqslant L_\alpha - 1] \in \mathscr{A}$, et donc est un événement.
De même, on a

$$[V \geqslant \alpha] = \{\omega \in \Omega : G(X(\omega) - 1) \geqslant \alpha\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) - 1 \geqslant L_\alpha\} = [X \geqslant L_\alpha + 1]$$

Mais $[X \geqslant L_\alpha + 1] \in \mathscr{A}$, et donc $[V \geqslant \alpha]$ est un événement.
On en déduit que V et W sont deux variables aléatoires.
Oui, mais ici les inégalités sont dans le mauvais sens...
En effet, V et W prennent leurs valeurs dans $[0, 1]$, et donc

$$\forall x \leqslant 0,\ [V \geqslant x] = \Omega \in \mathscr{A} \text{ et } [W < x] = \emptyset \in \mathscr{A}$$

et de même, $\forall x > 1$,

$$[V \geqslant x] = \emptyset \in \mathscr{A} \text{ et } [W < x] = \Omega \in \mathscr{A}.$$

Enfin, si $x = 1$, alors

$$[V \geqslant 1] = \{\omega \in \Omega : G(X(\omega - 1) \geqslant 1\}$$

Si $\forall t \in \mathbf{R}$, $G(t) < 1$, alors $[V \geqslant 1] = \emptyset \in \mathscr{A}$, et si $\exists t_0 \in \mathbf{R} : G(t_0) = 1$, alors soit $k = \min\{n \in \mathbf{N} : G(n) = 1\}$. Alors $[V \geqslant 1] = [X \geqslant n] \in \mathscr{A}$.
De même, on prouve (toujours en distinguant les deux mêmes cas) que $[W < 1]$ est un événement de $\mathscr{A}$.
Dans tous les cas, on a bien

$$\forall x \in \mathbf{R}, [W < x] \in \mathscr{A} \text{ et } [V \geqslant x] \in \mathscr{A}$$

donc $\boxed{V \text{ et } W \text{ sont des variables aléatoires sur } (\Omega, \mathscr{A}, P).}$

Variables aléatoires
Rappelons que la définition d'une variable aléatoire est la suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R}, [X \leqslant x] \in \mathscr{A}.$$

Puisqu'une tribu est stable par passage au complémentaire, il est équivalent de prouver que

$$\forall x \in \mathbf{R}, [X > x] \in \mathscr{A}.$$

Exemples
Pour une loi géométrique, la fonction de répartition ne prend jamais la valeur 1, mais pour une loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$, elle est stationnaire égale à 1 à partir de b.

12.c. D'après ce qui précède,

$$P(W < \alpha) = P(X \leqslant L_\alpha - 1) = \boxed{G(L_\alpha - 1).}$$

De même,

$$P(V \geqslant \alpha) = P(X-1 \geqslant \alpha) = P(X \geqslant L_\alpha+1) = 1-P(X < L_\alpha+1) = 1-P(X \leqslant L_\alpha) = \boxed{1 - G(L_\alpha).}$$

12.d. Si U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors pour on a

$$P(X \geqslant x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Puisque G est à valeurs dans $[0, 1]$, il en est de même des deux variables aléatoires V et W, et donc si $x \leqslant 0$, alors $P(V \geqslant x) = P(W \geqslant x) = 1$ et si $x > 1$, alors $P(V \geqslant x) = P(W \geqslant x) = 0$.
Soit $x \in]0, 1[$. Alors $P(V \geqslant x) = 1 - G(L_x)$ d'après la question 12.c. Mais par la question 12.a, on a $G(L_x) \geqslant x$, et donc

$$P(V \geqslant x) \leqslant 1 - x = P(U \geqslant x).$$

De même, $P(W \geqslant x) = 1 - P(W < x) = 1 - G(L_x - 1)$. Mais à la question 12.a, nous avons prouvé que $G(L_x - 1) < x$, et donc

$$P(W \geqslant x) = 1 - G(L_x - 1) > 1 - x = P(U \geqslant x).$$

Enfin, si $x = 1$, on a $P(W \geqslant 1) \geqslant 0 = P(U \geqslant 1)$.
Ceci achève de prouver que $\boxed{U \text{ est stochastiquement inférieure à } W.}$
Reste à prouver que $P(V \geqslant 1) \leqslant P(U \geqslant 1) = 0$, soit $P(V \geqslant 1) = 0$.
Mais nous savons que

$$[V \geqslant 1] = \{\omega \in \Omega : G(X(\omega) - 1) \geqslant 1\} = \{\omega \in \Omega : G(X(\omega) - 1) = 1\}.$$

Si G ne prend pas la valeur 1, cet ensemble est vide.
Si G prend la valeur 1 il existe un plus petit entier n tel que $G(n) = 1$.
Alors $G(n+1) = 1$ par croissance de G, et donc

$$P(X = n+1) = P(X \leqslant n+1) - P(X \leqslant n) = 0.$$

Et de même, pour tout entier $k \geqslant n+1$, on a $P(X = k) = 0$.
Ainsi, il vient

$$P(V \geqslant 1) = P(X - 1 \geqslant n) = P(X \geqslant n+1) = 0.$$

$\boxed{\text{Et donc } V \text{ est bien stochastiquement inférieure à } U.}$

13.a. L'espérance commune aux X_i est θ, et donc $E\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \theta$.

Ainsi, $\boxed{\dfrac{S_n}{n} \text{ est un estimateur sans biais de } \theta.}$

> **Remarque**
> X_1 est aussi un estimateur sans biais de θ. Il est probablement bien moins intéressant, notamment car il n'est pas convergent, mais c'est tout de même une réponse acceptable à la question...

13.b. Par indépendance des X_i, S_n suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(n\theta)$.
Sa fonction de répartition vérifie est donc

$$G : t \mapsto \sum_{j=0}^{\lfloor t \rfloor} P(S_n = j) = \sum_{j=0}^{\lfloor t \rfloor} \frac{n^j \theta^j}{j!} e^{-n\theta}.$$

Or, on a, pour $k \in \mathbf{N}$, $F(n\theta, k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{n^j \theta^j}{j!} e^{-n\theta}$.
Ainsi, pour $k \in \mathbf{N}$, $G(k) = F(n\theta, k)$.
Si l'on reprend les notations de la question 12, avec $X = S_n$, on a alors $F(n\theta, S_n) = W$.
Et donc, par la question 12.b, il vient

$$P\left(F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(G < \frac{\alpha}{2}\right) = G\left(L_{\frac{\alpha}{2}} - 1\right).$$

Par la question 12.a, on a alors

$$\boxed{P\left(F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}\right) < \frac{\alpha}{2}.}$$

De même, $F(n\theta, S_n - 1) = V$ et donc

$$P\left(\left[F(n\theta, S_n - 1) \geqslant 1 - \frac{\alpha}{2}\right]\right) = P\left(W \geqslant 1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 1 - G\left(L_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \leqslant 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \boxed{\frac{\alpha}{2}.}$$

13.c. Notons pour commencer qu'on a toujours $I(X_1, \ldots, X_n) \leqslant J(X_1, \ldots, X_n)$. Cette question mérite d'être reprise !
En effet, si $S_n = 0$, c'est évident car par définition, $M\left(\dfrac{\alpha}{2}, S_n\right) > 0$.
Si $S_n = k \neq 0$, on a

$$F\left(M\left(\frac{\alpha}{2}, k\right), k\right) = \frac{\alpha}{2} < 1 - \frac{\alpha}{2} = F\left(M\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k-1\right), k-1\right) \leqslant F\left(M\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k-1\right), k\right).$$

> **Détails**
> Par définition de F, on a clairement
> $$F(t, k-1) < F(t, k).$$

Mais par décroissance stricte[5] de $t \mapsto F(t, k)$, ceci est équivalent à

$$M\left(\frac{\alpha}{2}, k\right) > M\left(1 - \frac{\alpha}{2}, k-1\right).$$

Dans la suite, notons $B(X_1, \ldots, X_n)$ l'intervalle $[J(X_1, \ldots, X_n), I(X_1, \ldots, X_n)]$.

[5] Prouvée en 11.b.

On a
$$[\theta \notin B(X_1,\dots,X_n)] = [\theta < J(X_1,\dots,X_n)] \cup [\theta > I(X_1,\dots,X_n)].$$

> **Remarque**
> La question qui suit est vraiment **très délicate**, en tous cas si on souhaite bien la rédiger.
> Il en ressort tout de même une idée intéressante : pour montrer que $B(X_1,\dots,X_n)$ est un intervalle de confiance, on peut essayer de majorer la probabilité que θ soit hors de ces intervalle.

Or,
$$P(\theta < J(X_1,\dots,X_n)) = P\left(\theta < \frac{1}{n}M\left(\frac{\alpha}{2},S_n\right)\right) = P\left(n\theta \geqslant M\left(\frac{\alpha}{2},S_n\right)\right).$$
Mais, par croissance de $t \mapsto F(t,S_n)$, on a
$$\left[n\theta \geqslant M\left(\frac{\alpha}{2},S_n\right)\right] = \left[F(n\theta,S_n) \leqslant \frac{\alpha}{2}\right].$$
Et donc, par la question 13.b,
$$P\left(\theta > J(X_1,\dots,X_n)\right) \leqslant \frac{\alpha}{2}.$$

> **Remarque**
> C'est ici qu'il est délicat de rédiger correctement, car il s'agit d'utiliser intelligemment la distinction de cas dans la définition de $I(X_1,\dots,X_n)$.

Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $[S_n = 0], [S_n \neq 0]$, on a
$$P(\theta < I(X_1,\dots,X_n)) = P([\theta < I(X_1,\dots,X_n)]\cap[S_n = 0]) + P([\theta < I(X_1,\dots,X_n)]\cap[S_n \neq 0]).$$
Or, la première de ces deux probabilités est nulle car elle vaut $P([\theta < 0] \cap [S_n = 0])$ et que θ ne prend que des valeurs positives.
Pour la seconde, on a
$$P([\theta < I(X_1,\dots,X_n)]\cap[S_n \neq 0]) = P\left(\left[\theta < \frac{1}{n}M\left(1-\frac{\alpha}{2},S_n-1\right)\right]\cap[S_n\neq 0]\right) \leqslant P\left(\theta < \frac{1}{n}M\left(1-\frac{\alpha}{2},S_n-1\right)\right).$$
Mais, par décroissance de $t \mapsto F(t,S_n-1)$, on a :
$$\left[\theta < \frac{1}{n}M\left(1-\frac{\alpha}{2},S_n-1\right)\right] = \left[n\theta < M\left(1-\frac{\alpha}{2},S_n-1\right)\right]\left[F(n\theta,S_n-1) \geqslant 1-\frac{\alpha}{2}\right]$$

> **Pour pinailler**
> Si on veut être vraiment rigoureux, il faudrait introduire un $\omega \in \Omega$ et parler de la fonction
> $$t \mapsto F(t, S_n(\omega)-1).$$

et donc par la question précédente
$$P(\theta < I(X_1,\dots,X_n)) \leqslant P\left(F(n\theta,S_n-1) \geqslant 1-\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \frac{\alpha}{2}.$$
Au final, on a
$$P(\theta \notin B(X_1,\dots,X_n)) \leqslant \frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2} = \alpha$$
et donc
$$P(\theta \in B(X_1,\dots,X_n)) \geqslant 1-\alpha.$$
Donc $[I(X_1,\dots,X_n), J(X_1,\dots,X_n)]$ est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance α.

Partie III : Lois de Poisson mélangées

14. Notons $\varphi_n : t \mapsto t^n e^{-t}$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbf{R}_+$, et a pour dérivée $\varphi_n'(t) = e^{-t}t^{n-1}(n-t)$.
Ainsi, φ_n est croissante sur $[0,n]$ et décroissante sur $[n,+\infty[$.
Ainsi, φ_n atteint un maximum M_n en n.
Et donc pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, on a
$$0 \leqslant t^n e^{-t} f(t) \leqslant M_n f(t).$$
Puisque l'intégrale de $f(t)$ converge, il en est de même de $\int_0^{+\infty} M_n f(t)\,dt$ et donc de $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} f(t)\,dt$.

> **Alternative**
> On peut également constater que
> $$t^n e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o(f(t))$$
> et que l'intégrale de f converge en $+\infty$.
> On n'oubliera pas alors de faire également une étude en 0, par exemple en notant que
> $$t^n f(t) \underset{t\to 0}{\sim} f(t).$$

15.a. Notons avant de commencer les calculs que
$$P(X_A > n) = 1 - P(X_A \leqslant n) = 1 - \sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{A^k}{k!}e^{-A} = 1 - F(A,n).$$

et donc

$$1 - v_n = \int_0^{+\infty} (1 - F(t,n)) f(t)\, dt.$$

Or, nous savons que pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*, F(t,n) < 1$, et donc $(1 - F(t,n)) \geqslant 0$. Puisque f est une fonction positive, par croissance de l'intégrale, on en déduit que $1 - v_n \geqslant 0$.
De plus,

$$1 - v_n = \int_0^A (1 - F(t,n)) f(t)\, dt + \int_A^{+\infty} (1 - F(t,n)) f(t)\, dt.$$

Mais pour tout $t \in]0, A], F(t,n) \geqslant F(A,n)$, et donc $(1 - F(t,n)) \leqslant (1 - F(A,n))$.
Puisque f est positive[6], on a alors

$$\forall t \in]0, A], (1 - F(t,n)) f(t) \leqslant (1 - F(A,n)) f(t) = (1 - P(X_A \leqslant n) f(t) dt = P(X_A > n) f(t).$$

[6] C'est une densité.

Et donc

$$\int_0^A (1 - F(t,n)) f(t)\, dt \leqslant P(X_A > n) \int_0^A f(t)\, dt \leqslant P(X_A > n).$$

De même, pour tout $t \in]A, +\infty[$, $0 \leqslant 1 - F(t,n) \leqslant 1$, et donc

$$0 \leqslant \int_A^{+\infty} (1 - F(t,n)) f(t)\, dt \leqslant \int_A^{+\infty} f(t)\, dt$$

de sorte que

$$\boxed{0 \leqslant 1 - v_n \leqslant P(X_A > n) + \int_A^{+\infty} f(t)\, dt.}$$

15.b. De $1 - v_n \geqslant 0$, on obtient $v_n \leqslant 1$.
Mais v_n est la somme partielle d'ordre n de la série de terme général z_n.
Puisque de plus $z_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbf{N}$, la suite (v_n) est croissante. Étant croissante et majorée, elle converge, et donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} z_n \text{ converge.}}$

Pour montrer que la somme vaut 1, il s'agit de prouver que $v_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$.
Soit donc $\varepsilon > 0$. Puisque $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, il existe $A > 0$ tel que

$$\int_A^{+\infty} f(t)\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Détails
Le reste d'une intégrale convergente tend vers 0.

De plus, $P(X_A > n) = 1 - F_{X_A}(n)$, et puisque $\lim_{n \to \infty} F_{X_A}(n) = 1$ (c'est une fonction de répartition), alors $\lim_{n \to \infty} P(X_A > n) = 0$.
Par conséquent, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $P(X_A > n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Alors pour $n \geqslant n_0$, on a

$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci prouve bien que $\lim_{n \to \infty} 1 - v_n = 0$, et donc $\lim_{n \to \infty} v_n = 1$.
Par conséquent, on a bien

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = 1.}$$

16.a. Il est clair que f est continue, sauf en 0, et positive sur $\mathbf{R}$.
De plus, nous savons, par définition de la fonction Γ, que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(r)} t^{r-1} e^{-t}\, dt = 1.$$

En procédant au changement de variable $u = \dfrac{1-p}{p} t$, qui est $\mathscr{C}^1$ et réalise une bijection[7] de $\mathbf{R}_+^*$ sur lui-même, il vient

[7] C'est en fait un changement de variable affine.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(r)} \left(\frac{p}{1-p} u \right)^{r-1} e^{-\frac{p}{1-p} u} \frac{p}{p-1}\, du = 1$$

soit encore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(r)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^r u^{r-1}e^{-\frac{pu}{1-p}}\,du = 1.$$

Ainsi, on a bien $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ et par conséquent, $\boxed{f \text{ est une densité.}}$

16.b. Une densité de $\dfrac{p}{1-p}T$ est obtenue par transformation affine : il s'agit de

$$t \mapsto \frac{1-p}{p} f\left(\frac{1-p}{p}t\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\Gamma(r)}t^{r-1}e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Nous reconnaissons là la densité d'une loi $\gamma(r)$, donc $\dfrac{p}{1-p}T \hookrightarrow \gamma(r)$.

On en déduit que $E\left(\dfrac{p}{1-p}T\right) = r$ et $V\left(\dfrac{p}{1-p}T\right) = r$. Et donc

$$\boxed{E(T) = \frac{1-p}{p}r \text{ et } V(T) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 r.}$$

16.c. Soit $n \in \mathbf{N}$, et soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{P}_f$. Alors

$$\begin{aligned}
P(X=n) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!}e^{-t}\frac{1}{\Gamma(r)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^r t^{r-1}e^{-\frac{pt}{1-p}}\,dt \\
&= \frac{1}{n!\Gamma(r)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^r \int_0^{+\infty} t^{r+n-1}e^{-\left(\frac{pt}{1-p}+t\right)}\,dt \\
&= \frac{1}{n!\Gamma(r)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^r \int_0^{+\infty} t^{r+n-1}e^{-\frac{t}{1-p}}\,dt \\
&= \frac{1}{n!\Gamma(r)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^r \int_0^{+\infty} (1-p)^{r+n-1}x^{r+n-1}e^{-x}(1-p)\,dx \\
&= \frac{1}{n!\Gamma(r)}p^r(1-p)^n \int_0^{+\infty} x^{r+n-1}e^{-x}\,dx \\
&= \frac{1}{n!\Gamma(r)}p^r(1-p)^n\Gamma(r+n).
\end{aligned}$$

Chgt de variable
$x = (1-p)t$.

Si $n = 0$, alors $\Gamma(r+n) = \Gamma(r)$.
Si $n > 0$, alors $\Gamma(r+n) = (r+n-1)\Gamma(r+n-2) = (r+n-1)\cdots r\Gamma(r)$, et alors

$$P(X=n) = \frac{(r+n-1)\cdots r}{n!}p^r(1-p)^n = \frac{r^{\langle n\rangle}}{n!}p^r(1-p)^n.$$

Nous reconnaissons là $\boxed{\text{la loi binomiale négative } BN(r,p).}$

17.a. Procédons de la même manière que dans la question 10.
En effet, nous avons prouvé à la question 6 une propriété de stabilité pour les lois binomiales négatives de même paramètre p.
Soit donc V une variable aléatoire indépendante de Y, suivant la loi $BN(s-r,p)$. Alors $Y+V$ suit la loi $BN(s,p)$, c'est-à-dire possède même loi que Z.
Et donc il suffit de prouver que Y est stochastiquement inférieure à $Y+V$.
Soit $k \in \mathbf{N}$. Alors $[Y+V \leqslant k] \subset [Y \leqslant k]$ car V est à valeurs positives, de sorte que $P(Y+V \leqslant k) \leqslant P(Y \leqslant k)$.
Mais alors

$$P(Z \leqslant k) = P(Y+V \leqslant k) \leqslant P(Y \leqslant k).$$

Puisque Z et Y sont deux variable aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$, ceci prouve[8] que $\boxed{Y \text{ est stochastiquement inférieure à } Z.}$

[8] D'après la question 9.

17.b. Notons que si Y est stochastiquement inférieure à Z et si Z est stochastiquement inférieure à W, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$P(Y \geqslant x) \leqslant P(Z \geqslant x) \leqslant P(W \geqslant x)$$

et donc Y est stochastiquement inférieure à W.
Aussi, nous allons prouver que Z est stochastiquement inférieure à W.
Pour cela, utilisons la question 16.c, et soient f_p et f_q les deux fonctions définies par

$$f_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^s x^{s-1}e^{-\frac{pt}{1-p}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ et } f_q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{q}{1-q}\right)^s x^{s-1}e^{-\frac{qt}{1-q}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

de sorte que $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$P(Z=n) = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!}e^{-t}f_p(t)\,dt$$

et donc $\forall k \in \mathbf{N}$,

$$P(Z \leqslant k) = \sum_{n=0}^{k} P(Z=n) = \sum_{n=0}^{k}\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{n!}e^{-t}f_p(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{t^n}{n!}e^{-t}f_p(t)\,dt = \int_0^{+\infty}F(t,k)f_p(t)\,dt.$$

De même, on a

$$P(W \leqslant k) = \int_0^{+\infty} F(t,k)f_q(t)\,dt.$$

Dans la première intégrale, réalisons le changement de variable $u = \dfrac{1-q}{q}\dfrac{p}{1-p}t$, qui réalise bien une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbf{R}_+^*$ sur lui-même. Alors

$$\begin{aligned} P(Z \leqslant k) &= \int_0^{+\infty} F\left(\frac{q}{1-q}\frac{1-p}{p}u, k\right)\frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{p}{1-p}\right)^s\left(\frac{1-p}{p}\frac{q}{1-q}\right)^s u^{s-1}e^{-\frac{q}{1-q}u}\,du \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{q}{1-q}\right)^s\int_0^{+\infty}F\left(\frac{q}{1-q}\frac{1-p}{p}u,k\right)u^{s-1}e^{-\frac{q}{1-q}u}\,du \end{aligned}$$

Puisque $p > q$, alors $1-p < 1-q$ et donc $\dfrac{1}{1-p} > \dfrac{1}{1-q}$, de sorte que $\dfrac{p}{1-p} > \dfrac{q}{1-q}$.
Alors pour $u > 0$, $\dfrac{q}{1-q}\dfrac{1-p}{p}u < u$, et par stricte décroissance de la fonction $t \mapsto F(t,k)$, on a
$F\left(\dfrac{q}{1-q}\dfrac{1-p}{p}u,k\right) > F(u,k)$.
Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^{+\infty}F\left(\frac{q}{1-q}\frac{1-p}{p}u,k\right)u^{s-1}e^{-\frac{q}{1-q}u}\,du \geqslant \int_0^{+\infty}F(u,k)u^{s-1}e^{-\frac{q}{1-q}u}\,du$$

et donc

$$\begin{aligned} P(Z \leqslant k) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{q}{1-q}\right)^s\int_0^{+\infty}F\left(\frac{q}{1-q}\frac{1-p}{p}u,k\right)u^{s-1}e^{-\frac{q}{1-q}u}\,du \\ &\geqslant \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{q}{1-q}\right)^s\int_0^{+\infty}F(u,k)u^{s-1}e^{-\frac{q}{1-q}u}\,du \\ &= P(W \leqslant k) \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons bien Z qui est stochastiquement inférieure à W, et comme mentionné précédemment, cela implique que $\boxed{Y \text{ est stochastiquement inférieure à } W.}$

Extraits commentés du rapport du jury

3.d — La formule de Taylor est bien connue mais ses hypothèses sont souvent omises ou escamotées.

✎ N'oublions pas que pour appliquer une formule de Taylor, il faut vérifier la classe de la fonction : la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n nécessite une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, ce qui est bien le minimum puisque la formule contient une intégrale comprenant $f^{(n+1)}$, qui doit donc être définie et continue afin de considérer son intégrale.
De manière générale, il est important de vérifier les hypothèses d'un théorème avant de l'appliquer, même lorsque le sujet ne le demande pas explicitement. Ceci permet

1. de montrer que l'on connait ces hypothèses
2. mais surtout de s'assurer que ce que l'on fait est bien justifié.

14 — Cette question a fait l'objet d'un nombre d'erreurs de raisonnement impressionnant ! Les candidats ne tiennent pas compte des hypothèses et la plupart d'entre eux s'appuient sur «le fait que» f tend vers 0 en 0 et $+\infty$, est négligeable devant ce que bon leur semble, est bornée, continue sur $\mathbf{R}_+$, etc.

✎ Ce point soulève deux remarques :

1. Si les intégrales impropres ressemblent beaucoup aux séries, elles n'en partagent pas toutes les propriétés.
   En particulier, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ n'implique pas que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ (alors que si $\sum u_n$ converge, $u_n \to 0$.)
   De fait, il est tout à fait possible de construire une fonction continue, positive sur $[1, +\infty[$, d'intégrale convergente et qui prend des valeurs arbitrairement grandes.
2. D'autre part, le fait d'avoir une limite finie peut prouver la convergence d'une intégrale en $a \in \mathbf{R}$ (c'est ce que nous avons appelé les intégrales faussement impropres), mais ne peut en aucun cas fonctionner pour des intégrales impropres en $\pm\infty$.
   Par exemple $\displaystyle\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, mais en aucun cas on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ converge.

Maths II 2012

Sujet : Autour du modèle de régression linéaire **Difficile**
Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★☆☆
Thèmes du programme abordés : projecteurs orthogonaux, variables à densité, estimation ponctuelle, optimisation sous contrainte
Modifications apportées au sujet d'origine : Les questions 9.c et 9.d ont été modifiées en raison de la disparition des lois Γ du programme.
Commentaires : bien que le thème abordé soit intéressant, le sujet est probablement trop ambitieux, et pour le candidat ne disposant pas d'assez de recul, doit se limiter à une suite de calculs fastidieux dans les parties I et II.
Avec la disparition des formules pour les pseudo-solutions du programme 2015, la question 3 devient vraiment délicate, même si elle reste abordable si on a les idées claires sur la preuve du théorème des pseudo-solutions.
Les questions sur les vecteurs normaux sont difficiles, mais se croisent régulièrement dans des sujets de parisiennes, et peuvent être intéressantes pour un candidat solide.

- Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont réelles et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ où P peut dépendre de paramètres réels inconnus a, b, σ etc ; elles admettent toutes une espérance et une variance : si J désigne l'une de ces variables aléatoires, on note $E(J)$ son espérance et $V(J)$ sa variance.
  Si J_1, J_2 et $J_1 + J_2$ sont des variables aléatoires à densité, on admet alors l'existence de la covariance de J_1 et J_2, notée $\operatorname{Cov}(J_1, J_2)$, qui est définie par la formule : $\operatorname{Cov}(J_1, J_2) = \dfrac{1}{2}(V(J_1 + J_2) - V(J_1) - V(J_2))$.
  On admet que les covariances de variables aléatoires à densité vérifient les mêmes règles de calcul que celles des variables aléatoires discrètes.
- Pour tout (k, ℓ) de $(\mathbf{N}^*)^2$, on note $\mathscr{M}_{k,\ell}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices à k lignes et ℓ colonnes à coefficients réels ; on note $\mathscr{M}_k(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre k.
- On note ${}^tQ$ la transposée d'une matrice Q.
- Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

L'objectif du problème est l'étude de quelques propriétés du modèle de régression linéaire élémentaire.

Partie I – Quelques résultats statistiques et algébriques

On considère une population d'individus statistiques dans laquelle on étudie deux caractères quantitatifs $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. On extrait de cette population, un échantillon de n individus sélectionnés selon des valeurs choisies du caractère $\mathcal{X}$ et numérotées de 1 à n.
Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, les réels x_i et y_i sont les observations respectives de $\mathcal{X}$ et de $\mathcal{Y}$ pour l'individu i de l'échantillon. On suppose que les réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne sont pas tous égaux.
Soit a et b deux paramètres réels. On pose pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $u_i = y_i - (ax_i + b)$. $\quad (*)$

1. On note $\overline{x}$ (resp. $\overline{y}$) et s_x^2 (resp. s_y^2), la moyenne empirique et la variance empirique de la série statistique $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ (resp.$(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$) ; on rappelle que $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $s_x^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.
   a. Montrer que $s_x^2 > 0$.
   b. Établir les formules : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})y_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - n\overline{x}\,\overline{y}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - n\overline{x}^2$.
   c. On pose pour tout i de $[\![1, n]\!]$: $\alpha_i = \dfrac{(x_i - \overline{x})}{ns_x^2}$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = 1$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 = \dfrac{1}{ns_x^2}$.
2. On pose : $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $\theta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ et $M = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,2}(\mathbf{R})$.
   Les n relations $(*)$ s'écrivent sous la forme matricielle suivante $y = M\theta + u$.
   a. Quel est le rang de la matrice M ?
   b. Calculer la matrice ${}^tMM$ et justifier son inversibilité.
   On exprimera les coefficients de ${}^tMM$ en fonction de s_x^2, $\overline{x}$ et n.

3. L'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ et $(1 \dots, 1)$ de $\mathbf{R}^n$. On note K la matrice du projecteur orthogonal de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et $G = I - K$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

   a. On cherche les matrices $\theta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ qui minimisent $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2$.

      Montrer que ce problème admet une unique solution $\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$ et qu'elle vérifie la relation ${}^tMM\hat{\theta} = {}^tMy$.

   b. Montrer que $\hat{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ et $\hat{b} = \overline{y} - \hat{a}\overline{x}$.

   c. Exprimer K en fonction de M et de ${}^tM$.

   d. Soit $\hat{u}$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de composantes $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n$ définie par $\hat{u} = y - M\hat{\theta}$.
      Montrer que : $\hat{u} = Gy = Gu$.

   e. En déduire les égalités : ${}^t\hat{u}\hat{u} = \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = {}^tyGy = {}^tuGu$.

Partie II – Le modèle de régression linéaire

Le contexte et les notations sont ceux de la partie I. Dans cette partie, on cherche à modéliser les fluctuations aléatoires du caractère $\mathcal{Y}$ sur l'échantillon.

Les hypothèses du modèle de régression linéaire élémentaire sont les suivants :

- les réels a et b sont des paramètres inconnus.
- pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la valeur x_i du caractère $\mathcal{X}$ est connue et la valeur y_i du caractère $\mathcal{Y}$ est la réalisation d'une variable aléatoire Y_i.
- pour tout i de $[\![1, n]\!]$, Y_i est la somme d'une composante déterministe $ax_i + b$, fonction affine de la valeur x_i, et d'une composante aléatoire U_i.
- les variables aléatoires $U_1, U_2, \dots, U_n$ sont mutuellement indépendantes, de même loi, possèdent une densité, et pour tout i de $[\![1, n]\!]$: $E(U_i) = 0$ et $V(U_i) = \sigma^2$, où le paramètre inconnu σ est strictement positif.

Le modèle de régression linéaire s'écrit alors : pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $Y_i = ax_i + b + U_i$ (1).
L'objectif consiste à estimer les paramètres inconnus a, b et σ^2 du modèle (1).

On pose pour tout $n \geqslant 3$: $\overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ et $\overline{U}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i$.

4. On note A_n et B_n les deux variables aléatoires définies par $A_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i$ et $B_n = \overline{Y}_n - A_n\overline{x}$, où le réel α_i a été défini dans la question 1.c.

   a. Montrer que A_n et B_n sont des estimateurs sans biais de a et b respectivement.

   b. Établir les formules suivantes : $V(A_n) = \dfrac{\sigma^2}{ns_x^2}$ et $V(B_n) = \left(1 + \dfrac{\overline{x}^2}{s_x^2}\right)\dfrac{\sigma^2}{n}$.

   c. Calculer $\mathrm{Cov}(A_n, B_n)$.

5. Dans cette question uniquement, l'entier n n'est plus fixé.

   On suppose l'existence de $\lambda = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\mu^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$.

   Montrer que les deux suites $(A_n)_{n \geqslant 3}$ et $(B_n)_{n \geqslant 3}$ convergent en probabilité vers a et b respectivement.

6. a. On pose pour tout i de $[\![1, n]\!]$: $\hat{U}_i = Y_i - A_n x_i - B_n$. Calculer $E(\hat{U}_i)$.

   b. Établir l'égalité : $\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (U_i - \overline{U}_n)^2 - ns_x^2(A_n - a)^2$.

   c. Calculer $E\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2\right)$. En déduire un estimateur sans biais de σ^2.

Partie III – Hypothèse de normalité et prévision

Le contexte et les notations de cette partie sont ceux des parties I et II. De plus, on suppose dans cette partie que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la variable aléatoire U_i suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

On pose $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$. Le modèle (1) de la partie II s'écrit alors matriciellement : $Y = M\theta + U$.

Soit $W_1, W_2, \ldots, W_q$ ($q \in \mathbf{N}^*$), q variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit le vecteur aléatoire $(W_1, W_2, \ldots, W_q)$ à valeurs dans $\mathbf{R}^q$; en associant à tout ω de Ω le vecteur $(W_1(\omega), W_2(\omega), \ldots, W_q(\omega))$ de $\mathbf{R}^q$. On dit que le vecteur aléatoire $(W_1, W_2, \ldots, W_q)$ est *normal* si pour tout q-uplet $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_q)$ de nombres réels, différent de $(0, 0, \ldots, 0)$, la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} \rho_i W_i$ suit une loi normale de variance non nulle.

Dans le cas où le vecteur $(W_1, W_2, \ldots, W_q)$ est normal, on admet que les variables aléatoires $W_1, W_2, \ldots, W_q$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout (i, j) de $[\![1, q]\!]^2$ avec $i \neq j$, $\mathrm{Cov}(W_i, W_j) = 0$.

7. a. Montrer que le vecteur aléatoire $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ est normal mais que le vecteur $(Y_1 - \overline{Y}_n, Y_2 - \overline{Y}_n, \ldots, Y_n - \overline{Y}_n)$ ne l'est pas.

   b. Déterminer la loi de chacune des variables aléatoires A_n et B_n. Le vecteur aléatoire (A_n, B_n) est-il normal ?

8. Soit S une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On note T la matrice colonne des composantes du vecteur aléatoire $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ telle que $T = SU$.

   a. Montrer que le vecteur $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ est normal.

   b. On suppose que la matrice S est orthogonale i.e. ${}^tS = S^{-1}$. Montrer que $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont mutuellement indépendantes.

9. Soit $\hat{U}_1, \hat{U}_2, \ldots, \hat{U}_n$ les variables aléatoires qui ont été définies dans la question 6.

   On note $\hat{U}$ la matrice colonne de composantes $\hat{U}_1, \hat{U}_2, \ldots, \hat{U}_n$ définie par $\hat{U} = Y - M \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$

   a. Montrer que $\hat{U} = GU$, où la matrice G a été définie dans la question 3.

   b. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale R de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et d'une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, telles que $G = RD^tR$. Quels sont les éléments diagonaux de D ?

   c. Soit Z la matrice colonne de composantes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ définie par $Z = {}^tRU$. Quelle est la loi de $\dfrac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-2} Z_i^2$?

   d. En déduire une densité de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2$.

   e. Soit p un réel donné vérifiant $0 < p < 1$. Établir l'existence d'un réel c_n ne dépendant pas des paramètres inconnus a, b et σ^2, tel que $P\left(\left[\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 \geqslant c_n \sigma^2\right]\right) = p$.

Dans les questions 10 et 11, on suppose qu'une $(n+1)^{\text{ème}}$ valeur de $\mathcal{X}$, notée x_{n+1}, est choisie mais que la valeur correspondante y_{n+1} de $\mathcal{Y}$ est inconnue. On suppose que y_{n+1} est la réalisation d'une variable aléatoire Y_{n+1} qui vérifie $Y_{n+1} = ax_{n+1} + b + U_{n+1}$, où les variables aléatoires $U_1, U_2, \ldots, U_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

10. On pose pour tout n-uplet $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ de $\mathbf{R}^n$: $\hat{Y}_{n+1}^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} r_i Y_i$.

    L'ensemble $\left\{\hat{Y}_{n+1}^{(r)} ;\ r \in \mathbf{R}^n\right\}$ est l'ensemble des "prédicteurs linéaires" de Y_{n+1}.

    a. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs réelles, telle que pour tout $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ de $\mathbf{R}^n$, $g(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2$. On rappelle que pour tout i de $[\![1, n]\!]$: $\alpha_i = \dfrac{(x_i - \overline{x})}{ns_x^2}$.

    Montrer que la fonction g admet un minimum absolu sous les contraintes $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = x_{n+1}$, atteint en l'unique point $r^* = (r_1^*, r_2^*, \ldots, r_n^*)$, où pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $r_i^* = \dfrac{1}{n} + (x_{n+1} - \overline{x})\alpha_i$

    b. Montrer que parmi les prédicteurs linéaires $\hat{Y}_{n+1}^{(r)}$ de Y_{n+1} , qui vérifient $E\left(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}\right) = E(Y_{n+1})$ pour tout (a, b) de $\mathbf{R}^2$, $\hat{Y}_{n+1}^{(r^*)}$ est celui qui a la plus petite variance.
    Vérifier que $\hat{Y}_{n+1}^{(r^*)} = A_n x_{n+1} + B_n$.

11. a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y_{n+1} - (A_n x_{n+1} + B_n)$.

    b. On note Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit p un réel donné vérifiant $\dfrac{1}{2} < p < 1$.
    Justifier l'existence d'un réel d_n, que l'on exprimera à l'aide de Φ^{-1}, ne dépendant pas de a, b et σ^2, tel que $P\Big(\big[\,|Y_{n+1} - (A_n x_{n+1} + B_n)| \leqslant d_n \sigma\big]\Big) = p$.

c. En déduire, à l'aide de la question 9.e., un intervalle dont les bornes ne dépendent que des $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, des $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$, de c_n et d_n, qui contienne Y_{n+1} avec une probabilité supérieure ou égale à $2p-1$.
S'agit-il d'un intervalle de confiance au sens usuel du terme ?

MATHS II 2012 : CORRIGÉ

Partie I – Quelques résultats statistiques et algébriques

1.a. Par hypothèse, les x_i ne sont pas tous égaux.
Et donc l'un au moins de x_i, notons-le x_{i_0}, est différent de $\overline{x}$. Alors $(x_{i_0}-\overline{x})^2>0$, et donc

$$s_x^2=\frac{(x_{i_0}-\overline{x})^2}{n}+\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}(x_i-\overline{x})^2}_{\geqslant 0}\geqslant\frac{1}{n}(x_{i_0}-\overline{x})^2\boxed{>0.}$$

1.b. On a

$$\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})y_i=\sum_{i=1}^n x_iy_i-\overline{x}\sum_{i=1}^n y_i=\boxed{\sum_{i=1}^n x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}.}$$

De plus

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})^2&=\sum_{i=1}^n\left(x_i-2\overline{x}x_i+\overline{x}^2\right)=\sum_{i=1}^n x_i^2-2\overline{x}\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{i=1}^n\overline{x}^2\\&=\sum_{i=1}^n x_i^2-2n\overline{x}^2+n\overline{x}^2\\&=\boxed{\sum_{i=1}^n x_i^2-n\overline{x}^2.}\end{aligned}$$

> **Remarque**
> Notons qu'on a donc
> $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_i^2&=\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})^2+n\overline{x}^2\\&=ns_x^2+n\overline{x}^2,\end{aligned}$$
> identité que nous utiliserons régulièrement dans la suite.

1.c. Par linéarité de la somme,

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i=\frac{1}{ns_x^2}\sum_{i=1}^n\left(\sum_{i=1}^n x_i-\sum_{i=1}^n\overline{x}\right)=\frac{1}{ns_x^2}(n\overline{x}-n\overline{x})=\boxed{0.}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i&=\frac{1}{ns_x^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})x_i=\frac{1}{ns_x^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})(x_i-\overline{x}+\overline{x})\\&=\frac{1}{ns_x^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})^2+\frac{1}{ns_x^2}\overline{x}\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})\\&=1-\frac{\overline{x}}{s_x^2}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i}_{\overline{x}}-\frac{\overline{x}}{ns_x^2}n\overline{x}=\boxed{1.}\end{aligned}$$

Et enfin,

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i^2=\frac{1}{n^2s_x^4}\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{ns_x^4}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{ns_x^4}s_x^2=\boxed{\frac{1}{ns_x^2}.}$$

2.a. Puisque les x_i ne sont pas tous égaux, la première colonne de M n'est pas colinéaire à la seconde, et donc $\boxed{M \text{ est une matrice de rang 2.}}$

> **Rappel**
> Le rang d'une matrice est, par définition, le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

2.b. On a ${}^tMM=\begin{pmatrix}x_1&\dots&x_n\\1&\dots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&1\\\vdots&\vdots\\x_n&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n x_i^2&\sum_{i=1}^n x_i\\\sum_{i=1}^n x_i&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ns_x^2+n\overline{x}^2&n\overline{x}\\n\overline{x}&n\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}s_x^2+\overline{x}^2&\overline{x}\\\overline{x}&1\end{pmatrix}.$

Le déterminant de ${}^tMM$ est donc

$$\det({}^tMM)=n^2\left(s_x^2+\overline{x}^2-\overline{x}^2\right)=s_x^2\neq 0.$$

Puisque ce déterminant est non nul, $\boxed{{}^tMM \text{ est inversible.}}$

3.a. Notons que $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = \|M\theta - y\|^2$, et donc il s'agit de minimiser la distance entre $M\theta$ et y, lorsque θ parcourt $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.
Notons alors $F = \{MX,\ X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})\}$.
Si on note f_M l'application linéaire de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont la matrice dans les bases canoniques est M (qui, rappelons-le, n'est autre que l'application $X \mapsto MX$), alors on a $F = \operatorname{Im} f_M$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Nous savons alors qu'il existe un unique $Y_0 \in F$ minimisant l'ensemble des $\{\|Y-y\|^2,\ Y \in F\}$, et que Y_0 est le projeté orthogonal de y sur F.
Puisque M est de rang 2, f_M est également de rang 2, et donc par le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker} f_M = \dim \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}) - \operatorname{rg}(f_M) = 2 - 2 = 0.$$

Autrement dit, $\operatorname{Ker} f_M = \{0\}$, et donc f_M est injective. Par conséquent, tout élément de $F = \operatorname{Im}(f_M)$ possède un unique antécédent par f_M : il existe un unique $\hat{\theta} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ tel que $Y_0 = M\hat{\theta}$.
Et donc il existe un unique $\hat{\theta} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ minimisant $\sum_{i=1}^{n} u_i^2$.

Puisque $M\hat{\theta}$ est le projeté orthogonal de y sur F, $y - M\hat{\theta} \in F^{\perp}$.
Et donc, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$,

$$\langle MX, y - M\hat{\theta}\rangle = 0 \Leftrightarrow {}^t(MX)\left(M\hat{\theta} - y\right) = 0 \Leftrightarrow {}^tX\,{}^tM\left(M\hat{\theta} - y\right) = 0.$$

Ceci étant vérifié pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, c'est en particulier vrai pour $X = {}^tM\left(M\hat{\theta} - y\right)$, et donc

$$\left\|{}^tM\left(M\hat{\theta} - y\right)\right\|^2 = 0 \Leftrightarrow {}^tM\left(M\hat{\theta} - y\right) = 0 \Leftrightarrow {}^tMM\hat{\theta} = {}^tMy \Leftrightarrow \boxed{\hat{\theta} = \left({}^tMM\right)^{-1}{}^tMy.}$$

Remarque

Notons que l'existence et l'unicité de $\hat{\theta}$ découlent directement du théorème des pseudo-solutions.
En revanche, la relation vérifiée par $\hat{\theta}$ ne fait pas partie de l'énoncé de ce théorème, et pour la prouver, nous nous inspirons de la preuve du théorème des pseudo-solutions.

Prod. scalaire

Dans cette question, lorsque nous parlons de produit scalaire, de norme, de projeté orthogonal, il est toujours question du produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$:

$$\langle X, Y\rangle = {}^tXY.$$

3.b. Nous avons déjà calculé les coefficients de ${}^tMM$. Donc la relation ${}^tMM\hat{\theta} = {}^tMy$ nous donne

$$n\begin{pmatrix} s_x^2 + \overline{x}^2 & \overline{x} \\ \overline{x} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{a} \\ \hat{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} n\left(s_x^2 + \overline{x}^2\right)\hat{a} + n\overline{x}\hat{b} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ n\overline{x}\hat{a} + n\hat{b} = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Notons que $\sum_{i=1}^{n} y_i = n\overline{y}$, et qu'en vertu de la relation obtenue à la question 1.b,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})\, y_i + n\overline{x}\overline{y}.$$

Multiplions la seconde équation par $\overline{x}$ et soustrayons la à la première :

$$ns_x^2\hat{a} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})\, y_i + n\overline{xy} - n\overline{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})\, y_i.$$

Et donc $\hat{a} = \dfrac{1}{ns_x^2}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})\, y_i = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i.}$
Et alors, en réinjectant dans la seconde équation,

$$\hat{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \overline{x}\hat{a} = \boxed{\overline{y} - \overline{x}\hat{a}.}$$

Commentaires *: nous venons donc de trouver l'équation de la droite des moindres carrés étudiée en TP qui est donc la droite d'équation* $y = \hat{a}x + \hat{b}$.

3.c. Notons que la matrice cherchée est également la matrice, dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Im} f_M$.

Soit donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, et soit U son projeté orthogonal sur $\operatorname{Im} f_M$.
Alors U est de la forme MY, avec $Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, et $X - U = X - MY$ est dans $(\operatorname{Im} f_M)^\perp$, et par conséquent, orthogonal à tout vecteur de $\operatorname{Im} f_M$.
Mais les vecteurs de $\operatorname{Im} f_M$ sont exactement ceux qui sont de la forme MV, $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.
Ainsi, quel que soit $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$,

$$\langle X - MY, MV\rangle = 0 \Leftrightarrow {}^tV\,{}^tM(X - MY) = 0 \Leftrightarrow \langle {}^tM(X - MY), V\rangle = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, on a donc ${}^tM(X - MY) = 0$.
Et donc ${}^tMX = {}^tMMY \Leftrightarrow Y = \left({}^tMM\right)^{-1}\,{}^tMX$.
Et donc, le projeté orthogonal de X sur $\operatorname{Im} f_M$ est donc $MY = M\left({}^tMM\right)^{-1}\,{}^tMX$, de sorte que $\boxed{K = M\left({}^tMM\right)^{-1}\,{}^tM.}$

> **Intuition**
> Nous ne justifions pas tout ici, mais travailler avec des vecteurs de $\mathbf{R}^n$ (en ligne) ou avec des vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ (en colonne) ne fait aucun différence. Du moment qu'on munit chacun de ces deux espaces de son produit scalaire canonique.

> **Détails**
> Un vecteur de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ qui est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ est en particulier orthogonal à lui même, et donc est nécessairement le vecteur nul.

3.d. Puisque K est la matrice de la projection orthogonale sur $F = \operatorname{Im} f_M$, alors $G = I - K$ est la matrice de la projection orthogonale sur $F^\perp$. Par conséquent, les égalités à prouver reviennent à dire que $\hat{u}$ est le projeté orthogonal sur $F^\perp$ à la fois de y et de u.
Or, nous savons que $M\hat{\theta}$ est le projeté orthogonal sur F de y.
Donc $M\hat{\theta} \in F$ et $y - M\hat{\theta} \in F^\perp$.
Et donc $y = \underbrace{y - M\hat{\theta}}_{\in F^\perp} + \underbrace{M\hat{\theta}}_{\in F}$ de sorte que le projeté orthogonal sur $F^\perp$ de y est $y - M\hat{\theta}$. Et donc $Gy = y - M\hat{\theta} = \hat{u}$.

Puisque de plus $u = y - \underbrace{\left(a\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{\in F}$ alors $\boxed{Gu = Gy.}$

> **Détails**
> Le projeté orthogonal sur $F^\perp$ d'un vecteur de F est nul.
> Et puisque y et u ne diffèrent que d'un vecteur de F, ils ont donc mêmes projetés orthogonaux sur $F^\perp$.

3.e. On a ${}^t\hat{u}\hat{u} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 & \dots & \hat{u}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$.

D'autre part,

$${}^t\hat{u}\hat{u} = {}^t(Gy)\,Gy = {}^ty\,{}^tGGy.$$

Or, G est la matrice dans une base orthonormée d'un endomorphisme symétrique[1], donc G est symétrique. Et alors ${}^tGG = GG = G^2 = G$ car G est une matrice de projecteur.
Et donc $\boxed{{}^t\hat{u}\hat{u} = {}^tyGy}$ et de même $\boxed{{}^t\hat{u}\hat{u} = {}^tuGu.}$

[1] Les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes symétriques.

Partie II – Le modèle de régression linéaire

4.a. Par linéarité de l'espérance, on a

$$E(A_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(Y_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(ax_i + b + \underbrace{E(U_i)}_{=0}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(ax_i + b) = a\underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}_{=1} + b\underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i}_{=0} = a.$$

Et donc $\boxed{A_n \text{ est un estimateur sans biais de } a.}$
De même, on a

$$E(B_n) = E(\overline{Y_n}) - \overline{x}E(A_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(Y_i) - \overline{x}a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (ax_i + b + E(U_i)) - \overline{x}a = a\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i}_{=\overline{x}} + b - \overline{x}a = b.$$

Et donc $\boxed{B_n \text{ est un estimateur sans biais de } b.}$

4.b. Puisque les U_i sont mutuellement indépendantes, il en est de même des Y_i. Et donc

$$V(A_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 V(Y_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 V(U_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2\sigma^2 = \sigma^2\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \boxed{\frac{\sigma^2}{ns_x^2}.}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
V(B_n) &= V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{x} Y_i\right)\\
&= V\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \overline{x}\alpha_i\right) Y_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} - \overline{x}\alpha_i\right)^2 \sigma^2\\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2\alpha_i\overline{x}}{n} + \alpha_i^2\overline{x}^2\right)\\
&= \sigma^2\left(\frac{1}{n} - 2\overline{x}\underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i}_{=0} + \overline{x}^2\sum_{i=1}^n \alpha_i^2\right)\\
&= \frac{\sigma^2}{n}\left(1 + \frac{\overline{x}^2}{s_x^2}\right).
\end{aligned}$$

Danger ! Il y a ici un piège : $\overline{Y_n}$ et A_n ne sont pas indépendantes (en tous cas, cela ne découle pas du lemme des coalitions), et donc la variance de la somme n'est pas la somme des variances.

Les Y_i sont mutuellement indépendantes.

4.c. Par bilinéarité de la covariance,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(A_n, B_n) &= \operatorname{Cov}\left(A_n, \overline{Y_n} - \overline{x}A_n\right) = \operatorname{Cov}(A_n, \overline{Y_n}) - \overline{x}\operatorname{Cov}(A_n, A_n)\\
&= \operatorname{Cov}(A_n, \overline{Y_n}) - \overline{x}V(A_n)\\
&= \operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y_j\right) - \frac{\overline{x}\sigma^2}{ns_x^2}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \alpha_i \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) - \frac{\overline{x}\sigma^2}{ns_x^2}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \alpha_i V(Y_i) - \frac{\overline{x}\sigma^2}{ns_x^2}\\
&= \sigma^2\frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i}_{=0} - \frac{\overline{x}\sigma^2}{ns_x^2}\\
&= \boxed{-\frac{\overline{x}\sigma^2}{ns_x^2}.}
\end{aligned}$$

Alternative Dans cette question, il est également possible de procéder comme à la question précédente afin de calculer $V(A_n + B_n)$, puis d'utiliser l'identité de polarisation :

$$\operatorname{Cov}(A_n, B_n) = \frac{1}{2}(V(A_n + B_n) - V(A_n) - V(B_n)).$$

Bilinéarité de la covariance.

Détails Les U_i sont deux à deux indépendantes, donc il en est de même des Y_i. Par conséquent, $\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ si $i \neq j$.

5. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev[2],

$$P(|A_n - a| \geqslant \varepsilon) = P\left(|A_n - E(A_n)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(A_n)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{\sigma^2}{ns_x^2\varepsilon^2}.$$

[2] Qui s'applique puisque A_n admet une variance.

Mais $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu^2$ et $\frac{\sigma^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Danger La notation est ambiguë, mais s_x^2 dépend de n !

On en déduit que $\frac{\sigma^2}{ns_x^2\varepsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $P(|A_n - a| \geqslant \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: $\boxed{A_n \xrightarrow{P} a.}$

De même, puisque $E(B_n) = b$ et que $1 + \frac{\overline{x}^2}{s_x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + \frac{\lambda^2}{\mu^2}$, alors $V(B_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev prouve également que $\boxed{B_n \xrightarrow{P} b.}$

6.a. Par linéarité de l'espérance, on a

$$E\left(\hat{U}_i\right) = E(Y_i) - x_iE(A_n) - E(B_n) = E(ax_i + b) + \underbrace{E(U_i)}_{=0} - ax_i - b = \boxed{0.}$$

6.b. Commençons par noter que

$$\overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b + U_i) = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + b + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i = a\overline{x} + b + \overline{U_n}.$$

Par conséquent,

$$\hat{U_i} = Y_i - A_n x_i - \left(\overline{Y_n} - A_n\overline{x}\right) = ax_i + \cancel{b} + U_i - A_n x_i - \overline{U_n} - a\overline{x} - \cancel{b} + A_n\overline{x} = (U_i - \overline{U_n}) + (a - A_n)(x_i - \overline{x}).$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\hat{U_i}^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\left(U_i - \overline{U_n}\right) + (a - A_n)(x_i - \overline{x})\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \overline{U_n}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(a - A_n)(x_i - \overline{x})(U_i - \overline{U_n}) + \sum_{i=1}^{n}(a - A_n)^2(x_i - \overline{x})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \overline{U_n}\right)^2 + 2(a - A_n)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\left(U_i - \overline{U_n}\right) + (a - A_n)^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \overline{U_n}\right)^2 + 2(a - A_n)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\left(U_i - \overline{U_n}\right) + (a - A_n)^2 n s_x^2.\end{aligned}$$

Et donc

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{U_i}^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \overline{U_n}\right)^2 + ns_x^2(A_n - a)^2 = 2(a - A_n)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})\left(U_i - \overline{U_n}\right) + ns_x^2(a - A_n)\right).$$

Pour prouver le résultat demandé, il suffit donc de prouver que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(U_i - \overline{U_n}) = ns_x^2(A_n - a).$$

Mais on a

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(U_i - \overline{U_n}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})U_i - \overline{U_n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})}_{=0} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})U_i.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}A_n - a &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i Y_i - a = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(ax_i + b + U_i) - a \\ &= a\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}_{=1} + b\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}_{=0} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_i - a = \cancel{a} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i U_i - \cancel{a} = \frac{1}{ns_x^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})U_i.\end{aligned}$$

Il vient donc bien

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(u_i - \overline{U_n}) = ns_x^2(A_n - a).$$

Et donc

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{U_i}^2 - \sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \overline{U_n}\right)^2 + ns_x^2(A_n - a)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n}\hat{U_i}^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(U_i - \overline{U_n}\right)^2 - ns_x^2(A_n - a)^2.}$$

Astuce

Puisqu'on souhaite obtenir à la fin des $U_i - \overline{U_n}$, autant les faire apparaître dès maintenant, même si cela semble encore un peu articiciel et qu'on ne voit pas encore bien comment tout ceci va se simplifier.

Méthode

Pour prouver que deux quantités sont égales, il suffit de prouver que leur différence est nulle.
Lorsque les calculs sont complexes, comme c'est le cas ici, cela permet souvent de faire apparaître des simplifications et d'y voir plus clair sur ce qu'on cherche à prouver.

6.c. D'après la question précédente,

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{U_i}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}E\left(\left(U_i - \overline{U_n}\right)^2\right) - ns_x^2 E\left((A_n - a)^2\right).$$

D'une part, puisque $E(A_n) = a$, alors $E\left((A_n - a)^2\right) = E\left((A_n - E(A_n))^2\right) = V(A_n) = \dfrac{\sigma^2}{n s_x^2}$.
D'autre part, pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
E\left(\left(U_i - \overline{U_n}\right)^2\right) &= E\left(U_i^2 - 2U_i\overline{U_n} + \overline{U_n}^2\right) \\
&= E\left(U_i^2\right) - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} E(U_iU_j) + E\left(\overline{U_n}^2\right) \\
&= E\left(U_i^2\right) - \frac{2}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \underbrace{E(U_i)}_{=0} E(U_j) - \frac{2}{n}E\left(U_i^2\right) + E\left(\overline{U_n}^2\right) \\
&= \frac{n-2}{n}E\left(U_i^2\right) + E\left(\overline{U_n}^2\right) \\
&= \frac{n-2}{n}\left(V(U_i) + E(U_i)^2\right) + \left(V\left(\overline{U_n}\right) + \underbrace{E\left(\overline{U_n}\right)}_{=0}^2\right) \\
&= \frac{n-2}{n}\left(\sigma^2 + 0^2\right) + V\left(\overline{U_n}\right).
\end{aligned}$$

Rappel
Pour $i \neq j$, U_i et U_j sont indépendantes, donc $E(U_iU_j) = E(U_i)E(U_j)$.

Formule de Huygens (deux fois).

Mais puisque les U_j sont indépendantes,

$$V\left(\overline{U_n}\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{j=1}^{n} U_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} V(U_j) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Et donc

$$E\left(\left(U_i - \overline{U_n}\right)^2\right) = \frac{n-2}{n}\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

On en déduit donc que

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{U_i}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{n}\sigma^2 - ns_x^2\frac{\sigma^2}{ns_x^2} = (n-1)\sigma^2 - \sigma^2 = (n-2)\sigma^2.$$

On en déduit que $\boxed{\dfrac{1}{n-2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\hat{U_i}^2 \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma^2.}$

Partie III – Hypothèse de normalité et prévision.
Commençons par noter que lorsque l'énoncé mentionne des lois normales de variance non nulle, il est alors question de variables certaines[3].
Autrement dit, le vecteur aléatoire $(W_1, \dots, W_q)$ est normal si pour tout q-uplet $(\rho_1, \dots, \rho_n)$ non nul, la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\rho_iW_i$ n'est pas une variable certaine, et suit une loi normale.
Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors (X, X) est pas un vecteur normal car $1\cdot X + (-1)\cdot X = 0$ est une variable certaine.
Pourtant, ce vecteur est «presque» normal, car si $\rho_1 \neq -\rho_2$, alors

$$\rho_1X + \rho_2X = (\rho_1 + \rho_2)X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, (\rho_1+\rho_2)^2\right).$$

[3] Les seules variables aléatoires de variance nulle sont les variables certaines.

7.a. Par transformation affine de loi normale, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$Y_i = ax_i + b + U_i \hookrightarrow \mathcal{N}(ax_i + b, \sigma^2).$$

Et puisque les Y_i sont indépendantes[4], pour tout $(\rho_1, \dots, \rho_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, par stabilité des lois normales, il vient

$$\sum_{i=1}^{n}\rho_iY_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\rho_i(ax_i+b), \sigma^2\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2\right)$$

[4] Car les U_i le sont.

qui suit bien une loi normale de variance non nulle car $\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2 > 0$.

Et donc $\boxed{(Y_1,\ldots,Y_n) \text{ est un vecteur normal.}}$

En revanche, le vecteur $(Y_1-\overline{Y_n},\ldots,Y_n-\overline{Y_n})$ n'est pas normal car pour $(\rho_1,\ldots\rho_n)=(1,\ldots,1)$, il vient

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y_n}) = \sum_{i=1}^{n} Y_i - n\overline{Y_n} = \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$$

qui est une variable aléatoire de variance nulle.

Variance non nulle

Notons que nous n'avons jamais autorisé la variance d'une loi normale a être nulle, et donc cette hypothèse de variance nulle est un peu étrange...

De toutes façons, nous savons que seules les variables certaines ont une variance nulle.

7.b. Comme prouvé à la question précédente, les Y_i sont indépendantes, et $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\alpha_i(ax_i+b), \alpha_i^2\sigma^2\right)$.
Et donc par stabilité des lois normales,

$$A_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(ax_i+b), \sigma^2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right).$$

Mais d'après les relations prouvées en 1.c, on a

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(ax_i+b) = a\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i + b\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = a$$

et donc $\boxed{A_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(a, \frac{\sigma^2}{ns_x^2}\right).}$

De même, B_n est une combinaison linéaire des Y_i.
Plutôt que d'exprimer explicitement les coefficients de cette combinaison linéaire, notons que par stabilité des lois normales[5], B_n va suivre une loi normale.
Or nous avons déjà calculé à la question 4 l'espérance et la variance de B_n : $E(B_n)=b$ et $V(B_n) = \left(1+\frac{\overline{x}^2}{s_x^2}\right)\frac{\sigma^2}{n}$.

Donc $\boxed{B_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(b, \left(1+\frac{\overline{x}^2}{s_x^2}\right)\frac{\sigma^2}{n}\right).}$

Soient à présent $(\rho_1,\rho_2)\neq(0,0)$. Alors

$$\begin{aligned}\rho_1A_n+\rho_2B_n &= \rho_1\sum_{i=1}^{n}Y_i + \rho_2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i - \rho_2\overline{x}\sum_{i=1}^{n}\alpha_iY_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\rho_1\alpha_i-\rho_2\overline{x}\alpha_i+\frac{\rho_2}{n}\right)Y_i.\end{aligned}$$

Le vecteur $(Y_1,\ldots,Y_n)$ étant normal, il suffit de prouver que les $\rho_1\alpha_i-\rho_2\overline{x}\alpha_i+\frac{\rho_2}{n}$ ne sont pas tous simultanément nuls pour garantir que $\rho_1A_n+\rho_2B_n$ suit une loi normale de variance non nulle.
Si $\rho_1=0$, alors $\rho_2\neq0$, et le résultat est évident.
Et si $\rho_1\neq0$, puisque nous savons que les α_i ne sont pas tous égaux, alors les $\rho_1\alpha_i-\rho_2\overline{x}\alpha_i+\frac{\rho_2}{n}$ ne sont pas non plus tous égaux[6], et en particulier ne peuvent être tous nuls.
Donc $\rho_1A_n+\rho_2B_n$ suit une loi normale de variance non nulle, de sorte que $\boxed{\text{le vecteur } (A_n,B_n) \text{ est normal.}}$

[5] Qui s'applique encore une fois par indépendance des Y_i.

[6] Car les x_i ne sont pas tous égaux.

8.a. Soient $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n$ des réels non tous nuls, et soit $X=\sum_{i=1}^{n}\rho_iT_i$.

Notons $S=(s_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, de sorte que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $T_i=\sum_{j=1}^{n}s_{i,j}U_j$.

Ainsi, $X=\sum_{i=1}^{n}\rho_iT_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_is_{i,j}U_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\rho_is_{i,j}\right)U_j$.

Notons que $\sum_{i=1}^{n}\rho_is_{i,j}$ est alors le $j^{\text{ème}}$ coefficient du vecteur ligne $(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n)S$.

Puisque S est inversible et $(\rho_1,\dots,\rho_n) \neq (0,\dots,0)$, $(\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_n)S \neq 0$.

Et donc les $\sum_{i=1}^{n} \rho_i s_{i,j}$ ne sont pas tous nuls, de sorte que X est une combinaison linéaire des U_i, et cette combinaison linéaire n'est pas celle dont tous les coefficients sont nuls.
Par indépendance des U_i, et par stabilité des lois normales, X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\rho_i s_{i,j}\right)^2 \sigma^2\right)$ dont la variance est bien non nulle[7].
Et donc $\boxed{(T_1,\dots,T_n) \text{ est un vecteur normal.}}$

Détails
Si $(\rho_1,\dots,\rho_n)S$ étant nul, en multipliant à droite par S^{-1}, il viendrait $(\rho_1,\dots,\rho_n)=0$.

[7] C'est une somme de nombres positifs non tous nuls.

8.b. D'après ce qui a été admis dans l'énoncé, il s'agit de montrer que pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, on a $\operatorname{Cov}(T_i,T_j)=0$. Notons donc $S=(s_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On a alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(T_i,T_j) &= \operatorname{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} s_{i,k}U_k, \sum_{\ell=1}^{n} s_{j,\ell}U_\ell\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} s_{i,k}s_{j,\ell}\operatorname{Cov}(U_k,U_\ell)\\ &= \sum_{k=1}^{n} s_{i,k}s_{j,k}V(U_k)\\ &= \sigma^2\sum_{k=1}^{n} s_{i,k}s_{j,k}.\end{aligned}$$

Mais $\sum_{k=1}^{n} s_{i,k}s_{j,k}$ est précisément le coefficient situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de $S^tS=I_n$.
Il vaut donc 1 si $i=j$ et 0 sinon.
Par conséquent, pour $i\neq j$, $\operatorname{Cov}(T_i,T_j)=0$, et donc $(T_1,\dots,T_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Indépendance
Notons qu'il n'est pas question d'espérer s'en tirer à l'aide du lemme des coalitions : les T_i dépendent a priori toutes de $U_1, U_2, \dots, U_n$, et donc le lemme des coalitions ne s'applique surtout pas !

9.a. À la question 3.b, nous avons prouvé que $\hat{a}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i$, alors que $A_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Y_i$.
De même, $\hat{b}=\overline{y}-\hat{a}\overline{x}$, alors que $B_n=\overline{Y_n}-\overline{x}A_n$.
Et puisque $\hat{u}=y-M\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{pmatrix}=Gu$, alors

$$\hat{U}=Y-M\begin{pmatrix}A_n\\ B_n\end{pmatrix}=GU.$$

9.b. Comme mentionné précédemment, G est la matrice, dans une base orthonormée, d'un projecteur orthogonal, donc d'un endomorphisme symétrique. Et donc, G est une matrice symétrique.
Par conséquent, elle est diagonalisable en base orthonormée : il existe D diagonale et R orthogonale telles que $G=RD^tR$.
Les coefficients diagonaux de D sont alors les valeurs propres de G, qui sont 0 et 1 puisqu'il s'agit d'une matrice de projecteur.
De plus, puisque $\mathcal{F}$ est de dimension 2, $\mathcal{F}^\perp$ est de dimension $n-2$, et donc G est de rang $n-2$.
Par conséquent, sur la diagonale de G se trouvent $n-2$ coefficients égaux à 1, et deux coefficients égaux à 0.

Rappel
Les valeurs propres d'un projecteur p sont 0 et 1, avec

$$\dim E_1(p)=\dim \operatorname{Im} p$$

et

$$\dim E_0(p)=\dim \operatorname{Ker} p.$$

9.c. D'après 8.a, les Z_i suivent des lois normales, et sont d'espérance nulle car combinaisons linéaires de variables centrées.
De plus, d'après le calcul effectué en 8.b[8], pour tout $i\in[\![1,n]\!]$,

$$V(Z_i)=\operatorname{Cov}(Z_i,Z_i)=\sigma^2\sum_{k=1}^{n}s_{i,k}s_{i,k}=\sigma^2.$$

Donc $Z_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.
Et comme prouvé à la question 8.b, les Z_i sont mutuellement indépendantes.

[8] Qui s'applique car ${}^tR$ est orthogonale.

Commençons par déterminer la loi de Z_1^2. Il est évident que Z_1^2 est à valeurs positives, et donc pour $x < 0$, $P(Z_1^2 \leqslant x) = 0$.
En revanche, si $x \geqslant 0$, alors

$$\begin{aligned} P\left(Z_1^2 \leqslant x\right) &= P\left(-\sqrt{x} \leqslant Z_1 \leqslant \sqrt{x}\right) = P\left(Z_1 \leqslant \sqrt{x}\right) - P\left(Z_1 \leqslant \sqrt{-x}\right) \\ &= P\left(\frac{Z_1}{\sigma} \leqslant \sqrt{x}\sigma\right) - P\left(\frac{Z_1}{\sigma} \leqslant -\sqrt{x}\sigma\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{x}}{\sigma}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{\sigma}\right) - 1. \end{aligned}$$

Rappel
$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Cette fonction est alors $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0, et elle est continue en 0 puisque $\lim_{x\to 0} \Phi(x) = \frac{1}{2}$.
On en déduit que Z_1^2 est une variable à densité, et l'une de ses densités est donnée par

$$f_{Z_1^2} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{x}}\Phi'\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sigma}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par transformation affine, une densité de $\frac{1}{2\sigma^2}Z_1^2$ est alors

$$g : x \mapsto 2\sigma^2 f_{Z_1^2}\left(2\sigma^2 x\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En notant que $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} = x^{1/2-1}$, on constate que cette densité est très semblable à celle d'une loi $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
Toutefois, il faudrait pour cela que $\sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)$. Montrons que c'est bien le cas.
Puisque g est une densité, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} x^{1/2-1}e^{-x}\,dx = \sqrt{\pi} \Leftrightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Et donc g est la densité d'une loi $\gamma(1/2)$, de sorte que $\frac{1}{2\sigma^2}Z_1^2 \hookrightarrow \gamma(1/2)$.
Les Z_i étant indépendantes, les $\frac{1}{2\sigma^2 Z_i^2}$ le sont également, et donc, par stabilité des lois γ,

$$\boxed{\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-2} Z_i^2 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n-2}{2}\right).}$$

9.d. On a $\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = {}^t\hat{U}\hat{U} = {}^t(GU)(GU) = {}^tUGU = {}^tURD{}^tRU = {}^tZDZ$.

Mais puisque $D = \mathrm{Diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{n-2\text{fois}},0,0)$, il vient $\sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i^2 = {}^t\hat{U}\hat{U} = \sum_{i=1}^{n-2} Z_i^2$.

Détails
Dans ce qui a été dit avant, rien n'oblige D à être cette matrice diagonale en particulier, il peut s'agir de n'importe quelle matrice diagonale possédant $n-2$ fois 1 sur sa diagonale et deux fois 0.
Mais comme l'ordre des valeurs propres peut être changé, quitte à changer la matrice R, il n'est pas restrictif de supposer que les $n-2$ premiers coefficients diagonaux de D sont égaux à 1 et les deux derniers à 0.

Mais nous connaissons une densité de $\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-2} Z_i^2$, qui est

$$h : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma((n-2)/2)}x^{(n-2)/2-1}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc par transformation affine, une densité de $\sum_{i=1}^{n-2} Z_i^2$ est

$$x \mapsto \frac{1}{2\sigma^2}h\left(\frac{x}{2\sigma^2}\right) = \boxed{\begin{cases} \dfrac{1}{2^{(n-2)/2}\sigma^2\Gamma((n-2)/2)}x^{(n-2)/2-1}e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

9.e. Les calculs précédemment réalisés prouvent que la densité de $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\hat{U}_i^2$ ne dépend ni de a, ni de b, ni de σ. En effet, il s'agit de

$$x \mapsto \frac{1}{2}h\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{(n-2)/2}\Gamma((n-2)/2)} x^{(n-2)/2-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit donc V_n une variable aléatoire de même loi que $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\hat{U}_i^2$.
Sa fonction de répartition tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$, et elle est continue sur $\mathbf{R}$ puisque fonction de répartition d'une variable à densité.
Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c_n ne dépendant que de n tel que $F_{V_n}(c_n) = 1 - p$, et donc

$$P(V_n \geqslant c_n) = 1 - P(V_n \leqslant c_n) = 1 - (1-p) = p.$$

Et donc, V_n et $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\hat{U}_i^2$ ayant même loi, il vient

$$P\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\hat{U}_i^2 \geqslant c_n\right) = p \Leftrightarrow \boxed{P\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{U}_i^2 \geqslant c_n\sigma^2\right) = p.}$$

> **Mieux**
> Si l'on remarque que la densité est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$, on peut en fait prouver que F_{V_n} est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$ et prouver l'unicité d'un tel c_n à l'aide du théorème de la bijection.

10.a. La fonction g est $\mathscr{C}^1$ car polynomiale sur $\mathbf{R}^n$, et il s'agit donc de la minimiser sous le système $\mathscr{C}$ de contraintes d'égalités linéaires $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} r_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i r_i = x_{n+1} \end{cases}$.
D'une part, les dérivées partielles de g sont données par

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \partial_i g(x_1,\dots,x_n) = 2r_i.$$

D'autre part, nous savons que $(r_1,\dots,r_n) \in \mathbf{R}^n$ est un point critique de g sous la contrainte $\mathscr{C}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} r_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i r_i = x_{n+1} \\ \nabla g(r_1,\dots,r_n) \in \mathrm{Vect}\left((1,\dots,1),(x_1,\dots,x_n)\right) \end{cases}$$

Autrement dit, si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} r_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i r_i = x_{n+1} \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ 2r_i = \lambda + \mu x_i \end{cases}$$

> **Rappel**
> Nous avons donc là un système de $n+2$ équations à $n+2$ inconnues : $r_1, \dots, r_n$, λ et μ.
> Les valeurs finales de λ et μ ne nous intéressent pas.

En substituant $\lambda + \mu x_i$ à $2r_i$, la première équation devient donc

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda + \mu x_i = 2 \Leftrightarrow n\lambda + n\mu\overline{x} = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{n} - \mu\overline{x}.$$

Et la seconde équation devient

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda x_i + \mu x_i^2 = 2x_{n+1} \Leftrightarrow n\lambda\overline{x} + \mu\left(ns_x^2 + n\overline{x}^2\right) = 2x_{n+1}.$$

> **Détails**
> Nous avons utilisé là les formules de la question 1.b.

Et donc

$$\begin{cases}\lambda = \dfrac{2}{n} - \mu\overline{x} \\ \lambda\overline{x} + \mu\left(s_x^2 + \overline{x}^2\right) = 2\frac{x_{n+1}}{n}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = \dfrac{2}{n} - \mu\overline{x} \\ \dfrac{2\overline{x}}{n} - \mu\overline{x}^2 + \mu\left(s_x^2 + \overline{x}^2\right) = 2\dfrac{x_{n+1}}{n}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = \frac{2}{n} - \mu\overline{x} \\ \mu = 2\dfrac{x_{n+1} - \overline{x}}{ns_x^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = \dfrac{2}{n} - 2\overline{x}\dfrac{x_{n+1} - \overline{x}}{ns_x^2} \\ \mu = 2\dfrac{x_{n+1} - \overline{x}}{ns_x^2}\end{cases}$$

Il y a donc un unique point critique, qui est $(r_1^*, \dots, r_n^*)$, où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$r_i^* = \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu x_i}{2} = \frac{1}{n} - \frac{\overline{x}x_{n+1}}{ns_x^2} + \frac{\overline{x}^2}{ns_x^2} + x_i\frac{x_{n+1}}{ns_x^2} - \frac{\overline{x}x_i}{ns_x^2} = \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \overline{x})(x_i - \overline{x})}{ns_x^2} = \boxed{\frac{1}{n} + (x_{n+1} - \overline{x})\alpha_i.}$$

Il reste à prouver que ce point critique correspond bien à un minimum de g sous la contrainte $\mathscr{C}$.
Soit donc $(r_1, \dots, r_n) \in \mathscr{C}$, et soit $h = (h_1, \dots, h_n) = (r_1, \dots, r_n) - (r_1^*, \dots, r_n^*)$.
Alors h est une solution du système homogène associé à $\mathscr{C}$, ce qui signifie que

$$\sum_{i=1}^n h_i = \sum_{i=1}^n h_i x_i = 0.$$

> **Rappel**
> Étant donné $c \in \mathscr{C}$, alors
> $$x \in \mathscr{C} \Leftrightarrow x = c + h$$
> avec $h \in \mathscr{H}$ une solution du système homogène associé.

On a alors

$$\begin{aligned} g(r_1, \dots, r_n) - g(r^*) &= \sum_{i=1}^n (r_i^* + h_i)^2 - \sum_{i=1}^n (r_i^*)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n h_i^2 + 2\sum_{i=1}^n r_i^* h_i \\ &= \sum_{i=1}^n h_i^2 + \frac{2}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^n h_i}_{=0} + 2(x_{n+1} - \overline{x})\sum_{i=1}^n \alpha_i h_i. \end{aligned}$$

Mais $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i h_i = \frac{1}{ns_x^2}\left(\sum_{i=1}^n x_i h_i - \overline{x}\sum_{i=1}^n h_i\right) = 0.$
Et donc on en déduit que

$$g(r_1, \dots, r_n) - g(r_1^*, \dots, r_n^*) = \sum_{i=1}^n h_i^2 \geqslant 0.$$

Et donc $\boxed{g \text{ admet, sous la contrainte } \mathscr{C}, \text{ un minimum en } (r_1^*, \dots, r_n^*).}$

10.b. Soit $r \in \mathbf{R}^n$, et soit $\hat{Y}_{n+1}^{(r)} = \displaystyle\sum_{i=1}^n r_i Y_i$ un prédicteur linéaire de Y_{n+1}.

On a alors

$$E\left(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}\right) = \sum_{i=1}^n r_i E(Y_i) = \sum_{i=1}^n r_i(ax_i + b) = a\sum_{i=1}^n r_i x_i + b\sum_{i=1}^n r_i.$$

D'autre part, on a $E(Y_{n+1}) = ax_{n+1} + b$.
Et donc, si pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $E\left(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}\right) = E(Y_{n+1})$, alors

$$\sum_{i=1}^n x_i r_i = x_{n+1} \text{ et } \sum_{i=1}^n r_i = 1.$$

> **Détails**
> En prenant $(a, b) = (1, 0)$ puis $(a, b) = (0, 1)$, la relation
> $$E\left(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}\right) = E(Y_{n+1})$$
> devient successivement
> $$\sum_{i=1}^n x_i r_i = x_{n+1}$$
> et
> $$\sum_{i=1}^n r_i = 0.$$

Par indépendance des x_i, la variance de $\hat{Y}_{n+1}^{(r)}$ est

$$V\left(\hat{Y}_{n+1}^{(r)}\right) = \sum_{i=1}^n r_i^2 V(Y_i) = \sigma^2\sum_{i=1}^n r_i^2 = \sigma^2 g(r).$$

Et donc, grâce au résultat de la question précédente, parmi les prédicteurs linéaires d'espérance égale[9] $E(Y_{n+1})$, celui de plus petite variance est celui qui minimise g, c'est-à-dire $\hat{Y}_{n+1}^{(r^*)}$.

[9] C'est-à-dire ceux pour lesquels $(r_1, \dots, r_n) \in \mathscr{C}$.

On a alors

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{n+1}^{(r^*)} &= \sum_{i=1}^n r_i^* Y_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} + \alpha_i(x_{n+1} - \overline{x})\right) Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i + x_{n+1}\sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i - \overline{x}\sum_{i=1}^n x_i Y_i \\ &= \overline{Y_n} - \overline{x}\sum_{i=1}^n x_i Y_i + x_{n+1}\sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i = \boxed{x_{n+1}A_n + B_n.}\end{aligned}$$

11.a. Nous savons que pour $i \in [\![1, n+1]\!]$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{N}(ax_i + b, \sigma^2)$. D'autre part,

$$Y_{n+1} - (A_n x_{n+1} + B_n) = Y_{n+1} - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{n+1} Y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i + \overline{x}\sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i = Y_{n+1} + \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i(\overline{x} - x_{n+1}) - \frac{1}{n}\right) Y_i.$$

Les Y_i suivent tous des lois normales, et sont mutuellement indépendantes, donc par stabilité des lois normales, $Y_{n+1} - (A_n x_{n+1} + B_n)$, qui est une combinaison linéaire de $Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1}$, suit également une loi normale. Il suffit donc de déterminer son espérance et sa variance pour déterminer entièrement sa loi.
Or,

$$E\left(Y_{n+1} - (A_n x_{n+1} + B_n)\right) = E(Y_{n+1}) - x_{n+1}E(A_n) - E(B_n) = ax_{n+1} + b - x_{n+1}a - b = 0.$$

D'autre part, Y_{n+1}, qui ne dépend que de U_{n+1}, et $x_{n+1}A_n + B_n$, qui ne dépend que de $U_1, \dots, U_n$ sont indépendantes par le lemme des coalitions.
Et donc $V(Y_{n+1} - (x_{n+1}A_n + B_n)) = V(Y_{n+1}) + V(x_{n+1}A_n + B_n)$.
D'autre part, en utilisant le résultat de la question 4.c,

$$\begin{aligned}V(x_{n+1}A_n + B_n) &= V(x_{n+1}A_n) + 2\operatorname{Cov}(x_{n+1}A_n, B_n) + V(B_n) \\ &= x_{n+1}^2 V(A_n) + 2x_{n+1}\operatorname{Cov}(A_n, B_n) + V(B_n) \\ &= x_{n+1}^2 \frac{\sigma^2}{ns_x^2} - 2x_{n+1}\frac{\overline{x}\sigma^2}{ns_x^2} + \frac{\sigma^2}{n}\left(1 + \frac{\overline{x}^2}{s_x^2}\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{ns_x^2}\left(x_{n+1}\left(x_{n+1} - 2\overline{x}\right) + s_x^2 + \overline{x}^2\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}V(Y_{n+1} - x_{n+1}A_n + B_n) &= V(Y_{n+1}) + V(x_{n+1}A_n + B_n) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{ns_x^2}\left(x_{n+1}\left(x_{n+1} - 2\overline{x}\right) + s_x^2 + \overline{x}^2\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{ns_x^2}\left((n+1)s_x + (\overline{x} - x_{n+1})^2\right).\end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{Y_n - (x_{n+1}A_n + B_n) \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{ns_x^2}\left((n+1)s_x^2 + (\overline{x} - x_{n+1})^2\right)\right).}$$

11.b. Notons que pour tout réel positif d,

$$P\left(|Y_{n+1} - (x_{n+1}A_n + B_n)| \leqslant d\sigma\right) = P\left(-d\sigma \leqslant Y_{n+1} - (x_{n+1}A_n + B_n) \leqslant d\sigma\right).$$

Posons $v_n = \dfrac{1}{\sigma^2}V\left(Y_{n+1} - x_{n+1}A_n - B_n\right)$, de sorte que

$$\frac{Y_{n+1} - x_{n+1}A_n - B_n}{\sigma\sqrt{v_n}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Alors

$$P\left(-d\sigma \leqslant Y_{n+1} - (x_{n+1}A_n + B_n) \leqslant d\sigma\right) = P\left(-\frac{d}{\sqrt{v_n}} \leqslant \frac{Y_{n+1} - (x_{n+1}A_n + B_n)}{\sigma\sqrt{v_n}} \leqslant \frac{d}{\sqrt{v_n}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{d}{\sqrt{v_n}}\right) - \Phi\left(-\frac{d}{\sqrt{v_n}}\right)$$
$$= 2\Phi\left(\frac{d}{\sqrt{v_n}}\right) - 1.$$

Et donc on a

$$P(-d\sigma \leqslant Y_{n+1} - (x_{n+1}A_n + B_n) \leqslant d\sigma) = p \Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{d}{\sqrt{v_n}}\right) - 1 = p \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{d}{\sqrt{v_n}}\right) = \frac{p+1}{2}.$$

Puisque la fonction Φ est une bijection de $\mathbf{R}$ dans $]0,1[$, ceci est équivalent à

$$d = \sqrt{v_n}\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

Et donc nous pouvons poser

$$d_n = \sqrt{v_n}\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right) = \sqrt{(n+1)s_x^2 + (\overline{x} - x_{n+1})^2}\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

11.c. Il serait tentant de procéder comme à la question précédente, en remplaçant p par $2p-1$, mais le problème est qu'on obtient alors un intervalle dépendant de σ, qui est a priori inconnu, et dont ne doit pas dépendre l'énoncé demandé par l'intervalle.
Nous venons de prouver que

$$P(-d_n\sigma \leqslant Y_{n+1} - (x_{n+1}A_n + B_n) \leqslant d_n\sigma) = p \Leftrightarrow P(|Y_{n+1} - (x_{n+1}A_n + B_n)| \leqslant d_n\sigma) = p.$$

D'autre part, nous savons d'après la question 9.e que

$$P\left(\sigma \leqslant \sqrt{\frac{1}{c_n}\sum_{i=1}^n \hat{U_i}^2}\right) = p.$$

Appliquons donc la formule des probabilités totales au système complet d'événements

$$\left\{\left[\sigma \leqslant \sqrt{\frac{1}{c_n}\sum_{i=1}^n \hat{U_i}^2}\right], \left[\sigma > \sqrt{\frac{1}{c_n}\sum_{i=1}^n \hat{U_i}^2}\right]\right\}.$$

Il vient alors

$$\underbrace{P(|Y_{n+1} - (x_{n+1}A_n + B_n)| \leqslant d_n\sigma)}_{=p} = P\left([|Y_{n+1} - (x_{n+1}A_n + B_n)| \leqslant d_n\sigma] \cap \left[\sigma \leqslant \sqrt{\frac{1}{c_n}\sum_{i=1}^n \hat{U_i}^2}\right]\right)$$
$$+ P\left([|Y_{n+1} - (x_{n+1}A_n + B_n)| \leqslant d_n\sigma] \cap \left[\sigma > \sqrt{\frac{1}{c_n}\sum_{i=1}^n \hat{U_i}^2}\right]\right).$$

D'une part, on a

$$P\left([|Y_{n+1} - (x_{n+1}A_n + B_n)| \leqslant d_n\sigma] \cap \left[\sigma > \sqrt{\frac{1}{c_n}\sum_{i=1}^n \hat{U_i}^2}\right]\right) \leqslant P\left(\sigma > \sqrt{\frac{1}{c_n}\sum_{i=1}^n \hat{U_i}^2}\right) = 1 - p.$$

D'autre part,

$$P\left([|Y_{n+1} - (x_{n+1}A_n + B_n)| \leqslant d_n\sigma] \cap \left[\sigma \leqslant \sqrt{\frac{1}{c_n}\sum_{i=1}^n \hat{U_i}^2}\right]\right) \leqslant P\left(|Y_{n+1} - (x_{n+1}A_n + B_n)| \leqslant d_n\sqrt{\frac{1}{c_n}\sum_{i=1}^n \hat{U_i}^2}\right).$$

Et donc

$$P\left(|Y_{n+1} - (x_{n+1}A_n + B_n)| \leqslant d_n\sqrt{\frac{1}{c_n}\sum_{i=1}^n \hat{U_i}^2}\right) \geqslant p - (1-p) = 2p - 1.$$

Soit encore

$$P\left(x_{n+1}A_n + B_n - \frac{d_n}{\sqrt{c_n}}\sqrt{\sum_{i=1}^n \hat{U_i}^2} \leqslant Y_{n+1} \leqslant x_{n+1}A_n + B_n + \frac{d_n}{\sqrt{c_n}}\sqrt{\sum_{i=1}^n \hat{U_i}^2}\right) \geqslant 2p - 1.$$

Il ne nous reste alors plus qu'à constater que les $\hat{U_i}$ ne dépendent que de A_n et de B_n, qui eux-mêmes ne dépendent que des Y_i et des x_i, mais ni de a, ni de b, ni de σ.
Et donc l'intervalle

$$\boxed{\left[x_{n+1}A_n + B_n - \frac{d_n}{\sqrt{c_n}}\sqrt{\sum_{i=1}^n \hat{U_i}^2}, x_{n+1}A_n + B_n + \frac{d_n}{\sqrt{c_n}}\sqrt{\sum_{i=1}^n \hat{U_i}^2}\right]}$$

répond à la question posée. Il ne s'agit pas d'un intervalle de confiance au sens usuel du terme, puisque c'est la variable aléatoire Y_{n+1} qui appartient à cet intervalle, et pas un paramètre réel θ que l'on chercherait à estimer.

Maths II 2011

Sujet : Autour de la médiane empirique **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : variables à densité, vecteurs aléatoires, convergence des variables aléatoires, estimation ponctuelle

Toutes les variables aléatoires qui apparaissent dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On note F_Z la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z et, si cette variable aléatoire admet un densité, on note f_Z une densité de Z.
Sous réserve d'existence, on note $E(Z)$ et $V(Z)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle Z et $\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2)$ la covariance de deux variables aléatoires Z_1 et Z_2.
La fonction exponentielle est notée exp et la partie entière d'un réel x est notée $\lfloor x \rfloor$.

On **admet** les résultats suivants :
• la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes, s'appliquent au cas de variables aléatoires à densité ;
• si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors la variable aléatoire $Z_1 Z_2$ admet une espérance et $E(Z_1 Z_2) = E(Z_1)E(Z_2)$.

Dans tout le problème, on considère une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X et admettant une densité f_X.
Les solutions éventuelles de l'équation $F_X(x) = \dfrac{1}{2}$ s'appellent *les médianes théoriques de X*.
Pour n entier de $\mathbf{N}^*$, on considère un n-échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ i.i.d (indépendant, identiquement distribué) de la loi de X et on définit la variable aléatoire : $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, qui est la *moyenne empirique de l'échantillon* $(X_1, \dots, X_n)$.
On admet l'existence de variables aléatoires à densité $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ telles que, pour tout ω de Ω, les réels $Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_n(\omega)$ constituent un réarrangement par ordre croissant des réels $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$, de telle sorte que, pour tout ω de Ω : $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega)$.
En particulier, $Y_1 = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Plus généralement, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, il existe une fonction ψ_k définie et continue sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs réelles, telle que $Y_k = \psi_k(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
Si n est un entier impair ($n = 2\ell + 1$, avec $\ell \in \mathbf{N}$), alors la variable aléatoire $Y_{\ell+1}$ est appelée *la médiane empirique de l'échantillon* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
La partie II du problème est indépendante de la partie I.

Partie I. Quelques propriétés des statistiques d'ordre

Pour tout réel x et tout entier k de $[\![1, n]\!]$, on note $J_k(x)$ la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$J_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } [X_k \leqslant x] \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } [X_k > x] \text{ est réalisé} \end{cases}$$

On pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} J_k(x)$.

1. a. Montrer que les fonctions f_{Y_1} et f_{Y_n} définies pour tout x réel par : $f_{Y_1}(x) = n(1 - F_X(x))^{n-1} f_X(x)$ et $f_{Y_n}(x) = n(F_X(x))^{n-1} f_X(x)$ sont des densités de Y_1 et Y_n respectivement.
   b. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $S_n(x)$?
   c. Justifier l'égalité entre événements suivante : $[Y_k \leqslant x] = [S_n(x) \geqslant k]$.
   d. Établir la relation : pour tout x réel, $F_{Y_k}(x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F_X(x))^j (1 - F_X(x))^{n-j}$.
   e. En déduire que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, la fonction f_{Y_k} définie pour tout x réel par

$$f_{Y_k}(x) = k\binom{n}{k}(F_X(x))^{k-1}(1 - F_X(x))^{n-k} f_X(x)$$

   est une densité de Y_k.

f. Montrer que si X admet un moment d'ordre r ($r \in \mathbf{N}^*$), alors pour tout k de $[\![1,n]\!]$, Y_k admet un moment d'ordre r.

Exemple. *Dans les questions 2 à 4, on suppose que la fonction de répartition F_X est donnée par*

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

2. a. Tracer la courbe représentative de F_X dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Préciser la demi-tangente à droite au point d'abscisse $x = 1$.
Justifier que X est une variable aléatoire à densité et préciser une densité f_X de X.
   b. Montrer que X n'admet aucun moment.
   c. Établir l'unicité de la médiane théorique M de X. Calculer M.
   d. Expliciter, pour tout k de $[\![1,n]\!]$ et pour tout x réel l'expression $f_{Y_k}(x)$ d'une densité de Y_k. En déduire un équivalent de $f_{Y_k}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. On suppose dans cette question que $n \geqslant 3$.
   a. Montrer que pour tout k de $[\![1,n-2]\!]$, Y_k admet une espérance.
   b. En justifiant l'emploi du changement de variable $t = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, établir pour tout k de $[\![1,n-2]\!]$ la formule :

$$E(Y_k) = k\binom{n}{k}\int_0^1 t^{n-k-2}(1-t)^{k-1}\,dt.$$

   c. Pour tout couple (r,s) de $(\mathbf{N}^*)^2$, on pose : $I_{r,s} = \displaystyle\int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{s-1}\,dt$.
Montrer que pour tout couple (r,s) de $(\mathbf{N}^*)^2$, on a : $I_{r,s} = \dfrac{(r-1)!(s-1)!}{(r+s-1)!}$.
   d. En déduire l'expression de $E(Y_k)$ pour tout k de $[\![1,n-2]\!]$.
   e. On suppose que n est impair et supérieur ou égal 5, et on pose $n = 2\ell + 1$. Justifier la définition de la médiane empirique $Y_{\ell+1}$ d'un échantillon, et établir l'égalité $E(Y_{\ell+1}) = 4 + \dfrac{6}{\ell - 1}$. Commenter
4. On pose pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $Z_n = \dfrac{1}{n^2}\max(X_1, X_2, \dots, X_n) = \dfrac{Y_n}{n^2}$.
   a. Calculer pour tout x réel, $F_{Z_n}(x)$.
   b. On définit la fonction φ_Z par : $\varphi_Z(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$
Montrer que φ_Z est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z à densité.
   c. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers Z.

Partie II. Existence et unicité d'un estimateur optimal

Dans cette partie, X suit la loi normale d'espérance θ et de variance égale à 1. On suppose que le paramètre réel θ est inconnu.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
On rappelle que pour tout entier n de $\mathbf{N}^*$, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un n-échantillon i.i.d. de la loi de X.

5. Quelle est la loi de $\overline{X_n}$? Montrer que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre θ.
6. Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$. On appelle *marge d'erreur* associée à un intervalle de confiance de θ au niveau de risque α, le réel positif noté $\mu(\alpha)$, égal à la demi-longueur de cet intervalle.
   a. Justifier l'existence de la fonction réciproque Φ^{-1} de la fonction Φ.
   b. Déterminer un intervalle de confiance du paramètre θ au niveau de risque α dont le milieu est $\overline{X_n}$.
Vérifier que $\mu(\alpha) = -\dfrac{\Phi^{-1}(\alpha/2)}{\sqrt{n}}$.
   c. On considère un risque $\beta(\beta \neq \alpha)$ tel que $\mu(\beta) = b\mu(\alpha)$ avec $0 < b < 1$. Exprimer β en fonction de α. Comparer α et β. Commenter.
7. On note $\mathscr{E}_\theta$ l'ensemble des variables aléatoires $U_n = g_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ où g_n est une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, qui sont des estimateurs sans biais de θ qui admettent une variance.
Sous réserve d'existence, on dit qu'un élément Z_n de $\mathscr{E}_\theta$ est un estimateur optimal dans $\mathscr{E}_\theta$, si pour tout U_n de $\mathscr{E}_\theta$, on a $V(Z_n) \leqslant V(U_n)$.
On admet que pour tout U_n de $\mathscr{E}_\theta$, on a $\mathrm{Cov}(\overline{X_n}, U_n - \overline{X_n}) = 0$.

a. Montrer que $\mathscr{E}_\theta$ n'est pas vide.

b. Montrer que $\overline{X_n}$ est optimal dans $\mathscr{E}_\theta$.

c. Soit Z_n un estimateur optimal dans $\mathscr{E}_\theta$. On pose pour tout U_n de $\mathscr{E}_\theta$ et pour tout λ réel : $A_n(\lambda) = Z_n + \lambda(U_n - Z_n)$. Montrer que $A_n(\lambda)$ est un élément de $\mathscr{E}_\theta$. Calculer $V(A_n(\lambda))$. En déduire que $\mathrm{Cov}(Z_n, U_n - Z_n) = 0$.

d. On suppose l'existence de deux estimateurs optimaux $\overline{X_n}$ et Z_n dans $\mathscr{E}_\theta$.
Montrer que $Z_n = \overline{X_n}$ presque sûrement. Conclure.

8. a. Justifier l'existence et l'unicité de la médiane théorique M de X, et exprimer M en fonction de θ.

b. Calculer $f_X(M)$. Montrer que pour tout réel x, on a : $F_X(2M - x) = 1 - F_X(x)$.
En déduire une relation entre $f_X(2M - x)$ et $f_X(x)$.

c. Établir pour tout k de $[\![1, n]\!]$, la relation : $E(Y_k - M) = E(M - Y_{n-k+1})$.

d. En supposant que $n = 2\ell + 1, (\ell \in \mathbf{N})$, calculer $E(Y_{\ell+1})$ puis justifier que $V(Y_{\ell+1}) \geqslant \dfrac{1}{n}$. Commenter.

Partie III. Résultats asymptotiques

Le contexte de cette partie est identique à celui de la partie II.
Dans cette partie, on note T une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
Si U est une variable aléatoire et s un réel tels que la variable aléatoire $\exp(sU)$ admette une espérance, on pose : $L_U(s) = E(\exp(sU))$.

9. Soit J une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p $(0 < p < 1)$.

a. Calculer, pour tout s réel, $L_J(s)$.

b. Établir pour tout s réel, l'existence de $L_T(s)$.

c. Calculer pour tout s réel, $L_T(s)$. En déduire que pour tout couple (θ, σ) de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ et pour tout s réel, on a $L_{\sigma T + \theta}(s) = \exp\left(\sigma^2 \dfrac{s^2}{2} + \theta s\right)$.

Dans les questions 10 et 11, x est un réel fixé.

10. On pose pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $y_n = M + \dfrac{x}{\sqrt{n}}$, $q_n = F_X(y_n)$ et $k(n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$.

a. Montrer que l'on a : $k(n) = \dfrac{n}{2} + o(\sqrt{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b. En appliquant la formule de Taylor-Young à la fonction F_X au voisinage de M, justifier la relation :

$$q_n = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

c. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ la suite définie par : pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(k(n) - nq_n)$.
Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite u.

11. On pose pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $W_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(S_n(y_n) - nq_n)$, où $S_n(y_n)$ a été définie dans le préambule de la partie I.

a. Établir pour tout réel s, la relation :

$$L_{W_n}(s) = \exp(-s\sqrt{n}q_n)\left(1 + q_n \exp\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) - q_n\right)^n.$$

b. En utilisant un développement limité à l'ordre 2, montrer que l'on a : $\ln(L_{W_n}(s)) = \dfrac{s^2}{8} + o(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire l'égalité : $\lim\limits_{n \to +\infty} L_{W_n}(s) = L_{\frac{T}{2}}(s)$.

On admet alors que la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en loi vers la variable aléatoire $\frac{T}{2}$.

12. On suppose que $x = 0$. Quels sont les arguments qui permettent d'obtenir directement le résultat final de la question 11.b ?

13. a. Établir pour tout n de $\mathbf{N}^*$ et pour tout x réel, les égalités d'événements suivantes :

$$[\sqrt{n}(Y_{k(n)} - M) \leqslant x] = [S_n(y_n) \geqslant k(n)] = [W_n \geqslant u_n].$$

b. Montrer l'égalité : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(W_n \geqslant u_n) = P\left(\left[\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}T \leqslant x\right]\right)$.

c. En déduire que la suite de variables aléatoires $\left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}}(Y_{k(n)} - M)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi et préciser sa limite.

14. On suppose dans cette question que n est impair et on pose $n = 2\ell + 1$, $\ell \in \mathbf{N}$.
On note ρ_n le coefficient de corrélation linéaire de $Y_{k(n)}$ et $\overline{X_n}$.

a. Que vaut $k(n)$?

b. Préciser la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_{k(n)})$.

c. On admet sans démonstration que la suite réelle de terme général $E\left(\left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}}(Y_{k(n)} - M)\right)^2\right)$ converge vers $E(T^2)$.

En déduire un équivalent de $V(Y_{k(n)})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d. À l'aide des questions 5,7,8 et 14.c, déterminer la limite de ρ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

MATHS II 2011 : CORRIGÉ

Partie I. Quelques propriétés des statistiques d'ordre

1.a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$P(Y_n \leqslant x) = P(\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right).$$

Par indépendance des X_i, il vient alors

$$P(Y_n \leqslant x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) = F_X(x)^n.$$

Puisque X est une variable à densité, F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Il en est donc de même de $F_{Y_n} = F_X^n$.
Ainsi, Y_n est une variable à densité. Là où F_X est dérivable[1], F_Y l'est aussi, et on a

$$F_Y'(x) = nF_X(x)^{n-1} f_X(x) = F_{Y_n}(x).$$

Ainsi, $\boxed{\text{on peut prendre } f_{Y_n} \text{ comme densité de } Y_n.}$
De même, on a

$$P(Y_1 \leqslant x) = 1 - P(Y_1 > x) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = 1 - (1 - F_X(x))^n.$$

On en déduit donc que F_{Y_1} est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, et que là où elle est dérivable,

$$F_{Y_1}'(x) = n(1 - F_X(x))^{n-1} f_X(x) = f_{Y_1}(x).$$

Par conséquent, $\boxed{f_{Y_1} \text{ est bien une densité de } Y_1.}$

1.b. Les $J_k(x)$ suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_k \leqslant x) = F_X(x)$.
De plus, elles sont indépendantes car les X_i le sont.
Par stabilité des lois binomiales, $\boxed{S_n \text{ suit une loi binomiale } \mathscr{B}(n, F_X(x)).}$

1.c. On a $[Y_k \leqslant x]$ si et seulement si k variables (ou plus) parmi $X_1, \ldots, X_n$ prennent des valeurs inférieures ou égales à x.
Autrement dit, si et seulement si k événements (ou plus) de la forme $[X_i \leqslant x]$ sont réalisés.
Puisque les $J_k(x)$ sont les variables indicatrices de ces événements, on a donc $[Y_k \leqslant x]$ si et seulement si k de ces variables prennent la valeur 1. Et donc si et seulement si $S_n(x) \geqslant k$.
On a donc bien $\boxed{[Y_k \leqslant x] = [S_n(x) \geqslant k].}$

1.d. Puisque $S_n(x)$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, F_X(x))$, on a

$$P(S_n(x) \geqslant k) = \sum_{j=k}^{n} P(S_n(x) = j) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F_X(x))^j (1 - F_X(x))^{n-j}.$$

Et donc, par la question précédente,

$$F_{Y_k}(x) = P(Y_k \leqslant x) = P(S_n(x) \geqslant k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F_X(x))^j (1 - F_X(x))^{n-j}.$$

1.e. F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points, donc par somme et produits, il en est de même de F_{Y_k}. Ainsi, $\boxed{Y_k \text{ est une variable à densité.}}$
Là où F_{Y_k} est dérivable[2], on a alors

$$F_{Y_k}'(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left(j f_X(x)(F_X(x))^{j-1}(1 - F_X(x))^{n-j} - (n-j) f_X(x)(F_X(x))^j (1 - F_X(x))^{n-j-1} \right)$$

[1] Donc en tous les points de $\mathbf{R}$, sauf éventuellement un nombre fini.

Indépendance

Il n'est pas si facile de voir que les $J_k(x)$ sont indépendantes. Pour vérifier que des variables de Bernoulli X et Y sont indépendantes, il suffit de vérifier que les événements $[X = 1]$ et $[Y = 1]$ sont indépendants.
Ici c'est le cas car les X_i sont indépendantes.

Notations

Le x a tendance à nous le faire oublier, mais $S_n(x)$ est bien une variable aléatoire.

[2] C'est au moins le cas là où F_X l'est.

$$= \sum_{j=k}^{n} j\binom{n}{j} f_X(x)(F_X(x))^{j-1}(1-F_X(x))^{n-j} - \sum_{i=k}^{n}(n-i)\binom{n}{i} f_X(x)F_X(x)^i(1-F_X(x))^{n-i-1}$$

Dans la première somme, posons

$j-1=i$.

$$= \sum_{i=k-1}^{n-1}(i+1)\binom{n}{i+1} f_X(x)(F_X(x))^{i}(1-F_X(x))^{n-i-1} - \sum_{i=k}^{n}(n-i)\binom{n}{i} f_X(x)F_X(x)^i(1-F_X(x))^{n-i-1}$$

Pour $i=k-1$, le terme correspondant de la première somme est $k\binom{n}{k} f_X(x)F_X(x)^{k-1}(1-F_X(x))^{n-k}$ et pour $i=n$, le terme de la seconde somme est nul car $n-i=n-n=0$.
Enfin, pour $k \leqslant i \leqslant n-1$, on a

$$(i+1)\binom{n}{i+1} - (n-i)\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i-1)!} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!} = 0$$

et donc les termes des deux sommes se compensent.
Au final, on a bien

$$F'_{Y_k}(x) = k\binom{n}{k} f_X(x)F_X(x)^{k-1}(1-F_X(x))^{n-k}.$$

Et donc, f_{Y_k} coïncide avec F'_{Y_k} là où celle-ci est définie : $\boxed{f_{Y_k} \text{ est une densité de } Y_k.}$

1.f. Par le théorème de transfert, X admet un moment d'ordre r si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\,dt$ converge.

De même, Y_k admet un moment d'ordre r si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_{Y_k}(t)\,dt$ converge.

Or, pour $t \in \mathbf{R}$, on a

$$0 \leqslant F_X(t)^{k-1}(1-F_X(t))^{n-k} \leqslant 1$$

de sorte que

$$0 \leqslant t^r f_{Y_k}(t) \leqslant k\binom{n}{k} t^r f_X(t).$$

Puisque l'intégrale de $t^r f_X(t)$ converge, il en est de même[3] de celle de $t^r f_{Y_k}(t)$, et donc Y_k admet un moment d'ordre r.

[3] $k\binom{n}{k}$ est une constante !

2.a. F_X est dérivable, sauf en $x=1$ où elle est uniquement dérivable à droite et dérivable à gauche, et on a

$$F'_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Dérivée
Être dérivable à droite et à gauche ne suffit pas à être dérivable, encore faut-il que les deux dérivées soient égales.

En particulier, $F'_X(x) > 0$ pour tout $x > 1$, et donc F_X est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
Le graphe de F_X est alors

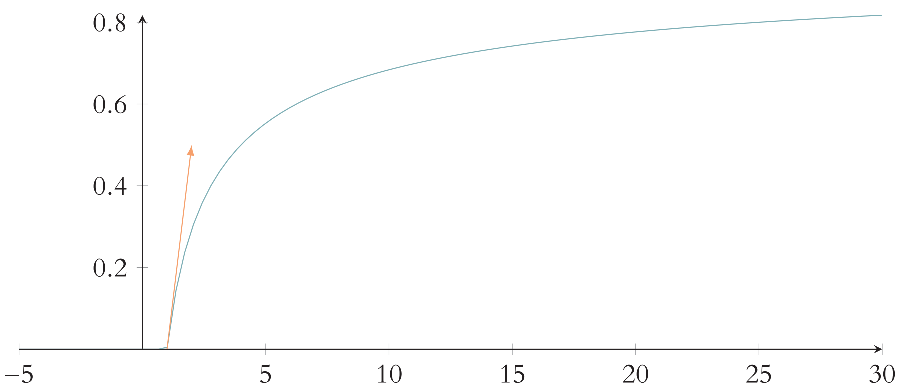


FIGURE 1 – Le graphe de F_X.

En particulier, la dérivée de F_X à droite en $x = 1$ vaut $\frac{1}{2}$, et donc l'équation de la demi-tangente est $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + F_X(1) = \dfrac{1}{2}(x-1)$.
Puisque $\lim\limits_{x\to 1^+} F_X(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 1^-} F_X(x)$, F_X est continue en $x = 1$.
Elle est évidemment continue sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ par composition de fonctions usuelles, donc elle est continue sur $\mathbf{R}$.
Et comme mentionné précédemment, elle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, sauf en $x = 1$.
On en déduit que F_X est la fonction de répartition d'une variable à densité, dont une densité f_X est

$$\boxed{f_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

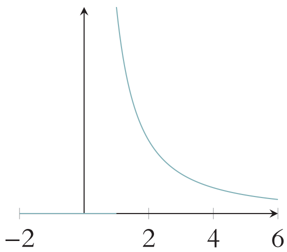


FIGURE 2– La densité f_X.

2.b. X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} x f_X(x)\,dx$ converge. Or, on a $x f_X(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Nous reconnaissons alors une intégrale de Riemann divergente : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, et donc X n'admet pas d'espérance.
N'admettant pas d'espérance, elle ne peut admettre de moment d'ordre supérieur.

Rappel
Si X admet un moment d'ordre r, alors elle admet des moments d'ordre p pour tout $p \leqslant r$.

2.c. Il s'agit de prouver que l'équation $F_X(x) = \dfrac{1}{2}$ possède une unique solution.
Une telle solution est alors nécessairement dans $[1; +\infty[$, et donc il s'agit de résoudre $1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$ avec $x \geqslant 1$. Il vient

$$1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Ainsi, l'unique médiane théorique de X est $\boxed{M = 4.}$

Médiane
En termes de densité, cela signifie que
$$\int_1^4 f_X(x)dx = \int_4^{+\infty} f_X(x)dx$$

2.d. D'après la question 1.e, on a

$$f_{Y_k}(x) = k\binom{n}{k}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{x}^{\,n-k}} \frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

Au voisinage de $+\infty$, on a $1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} \sim 1$ et donc

$$\boxed{f_{Y_k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{k}{2}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n-k+3}.}$$

3.a. Y_k admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_1^{+\infty} x f_{Y_k}(x)\,dx$ converge.
Or l'intégrande est continue sur $[1, +\infty[$, donc le seul éventuel problème de convergence est au voisinage de $+\infty$.
Mais, par la question 2.d, on a alors

$$x f_{Y_k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{k}{2}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n-k+1} = \frac{k}{2}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-k+1}{2}}.$$

Mais pour $k \in [\![1, n-2]\!]$, on a $n - k \geqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{n-k+1}{2} \geqslant \dfrac{3}{2} > 1$.
Et donc, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} t f_{Y_k}(t)\,dt$ converge, de sorte que $\boxed{Y_k \text{ admet une espérance.}}$

Remarque
En revanche, Y_n, le maximum des n variables n'admet pas d'espérance !

3.b. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est $\mathscr{C}^1$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Le changement de variable est donc légitime.
Posons $t = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, de sorte que $x = \dfrac{1}{t^2}$ et donc $dx = -\dfrac{2}{t^3}\,dt$. Il vient alors

$$\begin{aligned} E(Y_k) &= \int_1^{+\infty} k\binom{n}{k}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k-1}\frac{1}{\sqrt{x}^{\,n-k}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \\ &= k\binom{n}{k}\int_1^0 (1-t)^{k-1}t^{n-k+1}\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{t^3}\right)dt \\ &= \boxed{k\binom{n}{k}\int_0^1 (1-t)^{k-1}t^{n-k-2}\,dt.} \end{aligned}$$

Bornes
Lorsque $x \to 1$, alors $t \to 1$ et lorsque $x \to +\infty$, alors $t \to 0$.

3.c. Commençons par remarquer que pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, on a

$$I_{r,1} = \int_0^1 t^{r-1}\,dt = \frac{1}{r}.$$

Prouvons le résultat par récurrence sur s. Plus précisément, soit $\mathscr{P}(s)$ la proposition : «pour tout $r \in \mathbf{N}^*$, $I_{r,s} = \dfrac{(r-1)!(s-1!)}{(r+s-1)!}$».
Nous venons de prouver que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Supposons que $\mathscr{P}(s)$ est vraie, et soit $r \in \mathbf{N}^*$. Alors, une intégration par parties[4] donne

[4] Sur le **segment** $[0, 1]$ car l'intégrande y est continue.

$$I_{r,s+1} = \int_0^1 t^{r-1}(1-t)^s\,dt = \left[\frac{t^r}{r}(1-t)^s\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^r}{r}s(1-t)^{s-1}\,dt = \frac{s}{r}I_{r+1,s} = \frac{s}{r}\frac{r!(s-1)!}{(r+s-1)!} = \frac{(r-1)!s!}{(r+s-1)!}.$$

Ainsi, $\mathscr{P}(s+1)$ est vérifiée.
Et donc par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall s \in \mathbf{N}^*, \forall r \in \mathbf{N}^*,\ I_{r,s} = \frac{(r-1)!(s-1)!}{(r+s-1)!}.}$$

3.d. De ce qui précède, on déduit que

$$E(Y_k) = k\binom{n}{k}I_{n-k-1,k} = k\binom{n}{k}\frac{(n-k-2)!(k-1)!}{(n-2)!} = k\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k-2)!(k-1)!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{(n-k)(n-k-1)}.$$

3.e. La médiane empirique est la valeur médiane (*i.e.* «du milieu») des X_i, ce qui correspond à la définition usuelle de la médiane en statistiques.
On a alors, en appliquant le résultat précédent,

$$E(Y_{\ell+1}) = \frac{(2\ell+1)2\ell}{\ell(\ell-1)} = \frac{4\ell+2}{\ell-1} = \frac{4(\ell-1)+6}{\ell-1} = \boxed{4 + \frac{6}{\ell-1}.}$$

WTF ?
Drôle de question que celle-ci : «justifier la définition». Suffisait-il de remarquer qu'on avait bien reconnu la médiane qu'on connaît depuis nôtre plus jeune âge ?

4.a. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leqslant x) = P(\max(X_1, \ldots, x_n) \leqslant n^2x) = \left(\bigcap_{i=1}^n [X_i \leqslant n^2x]\right).$$

Par indépendance des X_i, il vient donc

$$\boxed{F_{Z_n}(x) = \prod_{i=1}^n P\left(X_i \leqslant n^2x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n^2x < 1 \\ \left(1-\dfrac{1}{n\sqrt{x}}\right)^n & \text{si } n^2x \geqslant 1 \end{cases}}$$

4.b. φ_Z est continue sur $\mathbf{R}_-$ ainsi que sur $\mathbf{R}_+^*$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi_Z(x) = 0 = \varphi_Z(0)$, donc φ_Z est continue sur $\mathbf{R}$.
De même, il est facile de voir que φ_Z est de classe $\mathscr{C}^1$, sauf peut-être en 0.
Enfin, il est aisé de voir que φ_Z est croissante, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi_Z(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_Z(x) = e^0 = 1$.
Ainsi, $\boxed{\varphi_Z \text{ est la fonction de répartition d'une variable à densité.}}$

Astuce
Puisque l'énoncé nous indique que φ_Z doit être la fonction de répartition **d'une variable à densité**, vérifions directement la continuité sur $\mathbf{R}$ plutôt que de s'embêter à vérifier la continuité à droite en tout point.

4.c. Soit $x \in \mathbf{R}$. Si $x \leqslant 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}, n^2x < 1$, de sorte que $F_{Z_n}(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = \varphi_Z(x)$.
Si $x > 0$, alors pour n suffisamment grand, on a $n^2x \geqslant 1$. Et donc

$$F_{Z_n}(x) = \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{x}}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n\sqrt{x}}\right)}.$$

Lorsque $n \to +\infty$, on a $\dfrac{1}{n\sqrt{x}} \to 0$ et donc

$$n\ln\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{x}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\frac{1}{n\sqrt{x}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{x}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Par continuité de l'exponentielle, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \varphi_Z(x).$$

Ainsi, on a bien prouvé que $\boxed{Z_n \xrightarrow{\mathscr{L}} Z.}$

Partie II. Existence et unicité d'un estimateur optimal

5. Par stabilité des lois normales, et par indépendance des X_i, $\overline{X_n}$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\theta, \dfrac{1}{n}\right)$.
En particulier, $E(\overline{X_n}) = \theta$ et donc $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de θ.
Il est convergent car, par la loi faible des grands nombres[5], $\overline{X_n} \xrightarrow{P} \theta$.

[5] Qui s'applique car les X_i sont indépendantes et admettent une variance.

6.a. Φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, de dérivée égale à

$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} > 0.$$

Par conséquent, elle est strictement croissante.
Comme on a, comme pour toute fonction de répartition

$$\lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1,$$

alors, par le théorème de la bijection, $\boxed{\Phi \text{ réalise une bijection de } \mathbf{R} \text{ sur }]0,1[.}$

6.b. Il s'agit de déterminer $\mu(\alpha)$ tel que

$$P(\overline{X_n} - \mu(\alpha) \leqslant \theta \leqslant \overline{X_n} + \mu(\alpha)) = 1 - \alpha.$$

Mais on a $[\overline{X_n} - \mu(\alpha) \leqslant \theta \leqslant \overline{X_n} + \mu(\alpha)] = [\theta - \mu(\alpha) \leqslant \overline{X_n} \leqslant \theta + \mu(\alpha)]$. Et donc

$$P(\overline{X_n}-\mu(\alpha) \leqslant \theta \leqslant \overline{X_n}+\mu(\alpha)) = P(\theta-\mu(\alpha) \leqslant \overline{X_n} \leqslant \theta+\mu(\alpha)) = P\left(-\sqrt{n}\mu(\alpha) \leqslant \sqrt{n}(\overline{X_n} - \theta) \leqslant \sqrt{n}\mu(\alpha)\right).$$

Et alors $\sqrt{n}(\overline{X_n} - \theta)$ suit la loi normale centrée réduite, donc cette dernière probabilité vaut

$$\Phi(\sqrt{n}\mu(\alpha)) - \Phi(-\sqrt{n}\mu(\alpha)) = 1 - 2\Phi(-\sqrt{n}\mu(\alpha)).$$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

On doit donc avoir $1 - 2\Phi(-\sqrt{n}\mu(\alpha)) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi(-\sqrt{n}\mu(\alpha)) = \dfrac{\alpha}{2}$.
Soit au final, $\mu(\alpha) = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.
L'intervalle de confiance est donc

$$\boxed{\left[\overline{X_n} - \frac{\Phi^{-1}(\alpha/2)}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{\Phi^{-1}(\alpha/2)}{\sqrt{n}}\right].}$$

Remarque

Cet intervalle de confiance n'est autre que l'intervalle de confiance **asymptotique** donné dans le cours pour l'espérance.
Ici, les X_i suivent une loi normale, donc il n'est pas nécessaire de faire appel au théorème central limite, et donc il s'agit d'un véritable intervalle de confiance.

6.c. Si $\mu(\beta) = b\mu(\alpha)$, alors

$$\Phi^{-1}(\beta/2) = b\Phi^{-1}(\alpha/2) \Leftrightarrow \beta = 2\Phi(b\Phi^{-1}(\alpha/2)).$$

Puisque Φ est strictement croissante, et que $0 < b < 1$, on a

$$\Phi^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right) = b\,\underbrace{\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}_{<0} > \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \beta > \alpha.$$

Et donc si on veut un intervalle de confiance d'étendue plus faible, il faut accepter un niveau de risque plus élevé[6].

[6] Tout ceci est bien conforme à l'intuition : plus on souhaite être sûr de notre résultat, plus il faut accepter une «grande» marge d'incertitude.

7.a. $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de θ, et de plus il admet une variance égale à

$$V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1}{n}.$$

Donc $\overline{X_n} \in \mathscr{E}_\theta$ et donc $\boxed{\mathscr{E}_\theta \text{ n'est pas vide.}}$

7.b. Il s'agit de montrer que pour tout $U_n \in \mathscr{E}_\theta$, on a $V(\overline{X_n}) \leqslant V(U_n)$.
Comme indiqué dans l'énoncé, on a $\mathrm{Cov}(\overline{X_n}, U_n - \overline{X_n}) = 0$. Mais par linéarité à droite de la covariance, on a

$$\mathrm{Cov}(\overline{X_n}, U_n - \overline{X_n}) = \mathrm{Cov}(\overline{X_n}, U_n) - \mathrm{Cov}(\overline{X_n}, \overline{X_n}) = \mathrm{Cov}(\overline{X_n}, U_n) - V(\overline{X_n}).$$

Et donc $\mathrm{Cov}(\overline{X_n}, U_n) = V(\overline{X_n})$. D'autre part, on a

$$V(\overline{X_n} - U_n) = V(\overline{X_n}) + V(U_n) - 2\mathrm{Cov}(\overline{X_n}, U_n) = V(\overline{X_n}) + V(U_n) - 2V(\overline{X_n}) = V(U_n) - V(\overline{X_n}).$$

Mais une variance est toujours positive, donc

$$V(\overline{X_n} - U_n) \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{V(\overline{X_n}) \leqslant V(U_n).}$$

7.c. $A_n(\lambda)$ est encore un estimateur de θ, et on a

$$E(A_n(\lambda)) = E(Z_n) + \lambda E(U_n - Z_n) = E(Z_n) + \lambda(E(U_n) - E(Z_n)) = \theta + \lambda(\theta - \theta) = \theta.$$

Et donc $\boxed{A_n(\lambda) \text{ est un estimateur sans biais de } \theta.}$
On a alors $V(A_n(\lambda)) = V(Z_n) + \lambda^2 V(U_n - Z_n) + 2\lambda\mathrm{Cov}(Z_n, U_n - Z_n)$.
Puisque Z_n est un estimateur optimal de $\mathscr{E}_\theta$, on a $V(Z_n) \leqslant V(A_n(\lambda))$.
Et donc $\lambda^2 V(U_n - Z_n) + 2\lambda\mathrm{Cov}(Z_n, U_n - Z_n) \geqslant 0$, quel que soit $\lambda > 0$.
Mais il s'agit d'une expression polynomiale de degré 2 en λ : étant de signe constante, c'est que son discriminant est négatif ou nul. Or ce discriminant vaut $4\mathrm{Cov}(Z_n, U_n - Z_n)^2$.
Un carré étant toujours positif ou nul, on en déduit que $\boxed{\mathrm{Cov}(Z_n, U_n - Z_n) = 0.}$

7.d. Supposons que Z_n soit un estimateur optimal dans $\mathscr{E}_\theta$. Alors, par la question précédente, on a $\mathrm{Cov}(Z_n, \overline{X_n} - Z_n) = 0$.
De la même manière qu'à la question 7.b, on peut prouver que $\mathrm{Cov}(Z_n, \overline{X_n}) = V(Z_n)$.
Il vient alors

$$V(\overline{X_n} - Z_n) = V(\overline{X_n}) + V(Z_n) - 2\mathrm{Cov}(Z_n, \overline{X_n}) = V(\overline{X_n}) + V(Z_n) - V(\overline{X_n}) - V(Z_n) = 0.$$

Mais une variable est de variance nulle si et seulement si elle est presque sûrement constante.
Donc il existe une constante $a \in \mathbf{R}$ telle que

$$P(Z_n - \overline{X_n} = a) = 1 \Leftrightarrow P(Z_n = \overline{X_n} + a) = 1.$$

Mais alors $E(Z_n) = E(\overline{X_n} + a) = E(\overline{X_n}) + a$.
Puisque $\overline{X_n}$ et Z_n sont deux estimateurs sans biais de θ, ils ont la même espérance θ, de sorte que $a = 0$.
Et donc $\boxed{\overline{X_n} = Z_n \text{ presque sûrement.}}$

8.a. On sait que $X - \theta \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, donc la fonction de répartition de X est

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(X - \theta \leqslant x - \theta) = \Phi(x - \theta).$$

Or, la fonction Φ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$, donc il en est de même de F_X. Comme on a $F_X(\theta) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$, on en déduit que θ est l'unique médiane théorique de X.

Unicité
La stricte croissance garantit l'injectivité, et donc il y a **au plus** une médiane théorique. Puisqu'on en a trouvé une, il y en a une et une seule.

8.b. On a $f_X(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\theta-\theta)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
De plus,

$$F_X(2M - x) = F_X(2\theta - x) = \Phi(\theta - x) = 1 - \Phi(x - \theta) = 1 - F_X(x).$$

En dérivant la relation ainsi obtenue, il vient $-f_X(2M-x) = -f_X(x) \Leftrightarrow f_X(x) = f_X(2M-x)$.

8.c. Par transformation affine, une densité de $Y_k - M$ est $x \mapsto f_{Y_k}(x+M)$.
Et donc l'espérance de $Y_k - M$ est

$$E(Y_k - M) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{Y_k}(x+M)\,dx = k\binom{n}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} x(F_X(x+M))^{k-1}(1-F_X(x+M))^{n-k} f_X(x+M)\,dx.$$

Mais par la question précédente, $F_X(x+M) = 1 - F_X(2M-(x+M)) = 1 - F_X(M-x)$. De même, $1 - F_X(x+M) = F_X(M-x)$ et[7] $f_X(x+M) = f_X(M-x)$. Donc

$$E(Y_k - M) = k\binom{n}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} x(1 - F_X(M-x))^{k-1}(F_X(M-x))^{n-k} f_X(M-x)\,dx.$$

D'autre part, par transformation affine, une densité de $M - Y_{n-k+1}$ est

$$x \mapsto f_{Y_{n-k+1}}(M-x) = (n-k+1)\binom{n}{n-k+1}(F_X(M-x))^{n-k+1-1}(1-F_X(M-x))^{n-(n-k+1)} f_X(M-x).$$

De plus, on a

$$(n-k+1)\binom{n}{n-k+1} = n\binom{n-1}{n-k} = n\binom{n-1}{(n-1)-(n-k)} = n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}.$$

On en déduit donc que

$$E(Y_k - M) = (n-k-1)\binom{n}{n-k+1}\int_{-\infty}^{+\infty} x(F_X(M-x))^{n-k}(1-F_X(M-x))^{k-1} f_X(M-x)\,dx = \boxed{E(M - Y_{n-k+1}).}$$

8.d. Par la question précédente, appliquée avec $k = \ell + 1$, on obtient

$$E(Y_{\ell+1} - M) = E(M - Y_{2\ell+1-\ell-1+1}) \Leftrightarrow E(Y_{\ell+1}) - M = M - E(Y_{\ell+1}).$$

On a donc $E(Y_{\ell+1}) = M$.
Ainsi, $Y_{\ell+1}$ est un estimateur sans biais de $M = \theta$.
Mais par la question 7, un tel estimateur possède une variance supérieure à $\overline{X_n}$.
Les X_i étant indépendantes, on a

$$V(\overline{X_n}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{V(X_i)}_{=1} = \frac{1}{n}.$$

On en déduit que $V(Y_{\ell+1}) \geqslant \dfrac{1}{n}$.

Nous venons de prouver que $Y_{\ell+1}$ est un estimateur sans biais de θ, mais dont le risque quadratique est plus grand que $\overline{X_n}$. Autrement dit, si on dispose d'un échantillon $(x_1, \dots, x_n)$ de la loi de X, pour estimer θ, mieux vaut prendre la moyenne des x_i que leur médiane.

Partie III. Résultats asymptotiques

9.a. D'après le théorème de transfert, appliqué à la fonction $t \mapsto \exp(st)$, on a

$$L_J(s) = e^0 P(J=0) + e^s P(J=1) = (1-p) + pe^s.$$

9.b. D'après le théorème de transfert, $L_T(s)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$ converge absolument[8].
Traitons le cas où s est positif, le cas où s est négatif étant similaire.
Notons que l'intégrande est continue sur $\mathbf{R}$, de sorte que les éventuels problèmes de

Espérances
Nous savons que les espérances en jeu existent en utilisant la question 1.f.

[7] En dérivant la relation $f_X(x+M) = 1 - F_X(M-x)$.

Coeff. binomiaux
On a utilisé à deux reprises la formule

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

dont il faut savoir qu'elle existe, l'expression exacte pouvant se retrouver en revenant aux factorielles.

Commenter ?
Nous faisons un commentaire car l'énoncé le demande, mais il n'y a pas beaucoup de choses à dire qui n'auraient été dites précédemment...

Convergence
Notons que la convergence est automatique car e^{sJ} est une variable finie, elle ne prend que deux valeurs.

[8] On se contentera d'étudier la convergence plutôt que la convergence absolue car l'intégrande est positive.

convergence sont en $\pm\infty$. Au voisinage de $-\infty$, on a $e^{st}e^{-\frac{1}{2}t^2} = o\left(e^{-\frac{1}{2}t^2}\right)$, donc par critère de comparaison, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{st}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$ converge.

Au voisinage de $+\infty$, par croissance comparée, on a

$$t^2e^{st}e^{-\frac{1}{2}t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et donc } e^{st}e^{-\frac{1}{2}t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{st}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$ converge.

Ainsi, $L_T(s)$ existe.

9.c. Soit $s \in \mathbf{R}$. Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$e^{st}e^{-\frac{1}{2}t^2} = e^{-\frac{1}{2}(t^2+2s)} = e^{-\frac{1}{2}((t+s)^2-s^2)} = e^{\frac{s^2}{2}}e^{-\frac{1}{2}(t+s)^2}.$$

En procédant alors au changement de variable $u = t + s$, qui est légitime car affine, on obtient

$$L_T(s) = e^{\frac{s^2}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du}_{=1} = \boxed{e^{\frac{s^2}{2}}.}$$

Remarque

Faire directement ce calcul aurait permis de répondre à la question 9.b directement, le théorème de changement de variable impliquant la convergence.

Alors, pour $(\theta, \sigma) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$ et pour $s \in \mathbf{R}$, on a

$$L_{\sigma T+\theta}(s) = E(e^{s(\sigma T+\theta)}) = e^{s\theta}E(e^{s\sigma T}) = e^{s\theta}L_T(s\sigma) = \boxed{\exp\left(\sigma^2\frac{s^2}{2} + \theta s\right).}$$

10.a. Par définition de la partie entière, $\dfrac{n}{2} - 1 < \lfloor\frac{n}{2}\rfloor \leqslant \dfrac{n}{2}$. Et donc

$$0 < k(n) - \frac{n}{2} \leqslant 1 \Rightarrow 0 < \frac{k(n)-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k(n)-n/2}{\sqrt{n}} = 0 \Leftrightarrow k(n) - \frac{n}{2} = o(\sqrt{n}).$$

Et donc $\boxed{k_n - n/2 = o(\sqrt{n}).}$

10.b. Nous savons que F_X est dérivable, et que sa dérivée est la densité usuelle de la loi normale $\mathcal{N}(M,1)$, c'est-à-dire $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-M)^2}$.

Par la formule de Taylor-Young appliquée[9] au voisinage de M, on a alors

$$F_X(t) = F_X(M) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(t-M) + \underset{t\to M}{o}(t-M) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(t-M) + \underset{t\to M}{o}(t-M).$$

[9] C'est légitime car F_X est de classe $\mathscr{C}^1$.

En particulier, pour $t = y_n$, il vient

$$q_n = F_X(y_n) = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\frac{x}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Reste

$y_n - M = \frac{q}{\sqrt{n}}$ où q est une constante. Donc une quantité négligeable devant $y_n - M$ est la même chose qu'une quantité négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Si les constantes ont leur importance dans les équivalents, elles sont inutiles pour les o.

10.c. D'après ce qui précède, on a

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{n}{2} + o(\sqrt{n}) - \frac{n}{2} - \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} + o(\sqrt{n})\right) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}.$$

11.a. Par définition, $L_{W_n}(s) = E(\exp(sW_n))$.

Rappelons que $S_n(y_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} J_k(y_n)$, où les $J_k(y_n)$ sont indépendantes, et suivent une loi

binomiale de paramètre $P(X \leqslant y_n) = F_X(y_n) = q_n$.
Mais alors
$$\exp(sW_n) = \prod_{k=1}^{n} \exp(sJ_k(y_n))$$
et les $sJ_k(y_n)$ sont mutuellement indépendantes. Alors
$$L_{S_n(y_n)}(s) = E(\exp(sS_n(y_n))) = \prod_{k=1}^{n} E(\exp(sJ_k(y_n))).$$
On peut alors utiliser le résultat de la question 9.a : pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout s réel,
$$E(\exp(sJ_k(y_n))) = (1-q_n) + q_n e^s.$$
Et donc, pour tout $s \in \mathbf{R}$,
$$L_{S_n(y_n)}(s) = E\left(\exp(sS_n(y_n))\right) = \prod_{k=1}^{n} L_{S_n(y_n)}(s) = ((1-q_n) + q_n e^s)^n.$$
On en déduit alors que
$$\begin{aligned} L_{W_n}(s) =& E\left(\exp\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\left(S_n(y_n) - nq_n\right)\right)\right) = e^{-s\sqrt{n}q_n} E\left(\exp\left(\frac{s}{\sqrt{n}} S_n(y_n)\right)\right) \\ =& e^{-sq_n\sqrt{n}} L_{S_n(y_n)}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \boxed{e^{-s\sqrt{n}q_n}\left((1-q_n) + q_n \exp\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right)^n}. \end{aligned}$$

> **Notations** Les notations sont trompeuses, mais $S_n(y_n)$ est bien une variable aléatoire !

> **Rappel** L'espérance d'un produit de variables mutuellement indépendantes est le produit des espérances.

11.b. De la question qui précède, il vient
$$\ln(L_{W_n}(s)) = -sq_n\sqrt{n} + n\ln\left(1 + q_n \exp\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) - q_n\right).$$
Mais $q_n\left(\exp\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) - 1\right) \sim q_n \frac{s}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc on peut utiliser le développement limité en 0 de $\ln(1+t)$. Il vient alors
$$\ln\left(1 + q_n \exp\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) - q_n\right) = q_n\left(\exp\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) - 1\right) - \frac{q_n^2}{2}\left(\exp\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)^2 + \underbrace{o\left(\left(\exp\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)^2\right)}_{=o\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

> **Rappels** On a
> $$e^x - 1 \sim_0 x$$
> $$\ln(1+x) =_0 x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

De plus,
$$\exp\left(\frac{s}{\sqrt{n}} - 1\right) = \frac{s}{\sqrt{n}} + \frac{s^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
Et donc
$$\left(\exp\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)^2 = \frac{s^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
Il vient alors
$$\ln(L_{W_n}(s)) = -sq_n\sqrt{n} + \sqrt{n}sq_n + \frac{q_n s^2}{2} - q_n^2\frac{s^2}{2} + o(1) = q_n\frac{s}{2}(1-q_n) + o(1).$$
Mais $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ et donc $(1-q_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
On en déduit que $q_n(1-q_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$, et donc est égal à $\frac{1}{4} + o(1)$.
Il vient donc bien
$$\boxed{\ln(L_{W_n}(s)) = \frac{s^2}{8} + o(1).}$$
Il est alors facile de voir que $\ln(L_{W_n}(s)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{s^2}{8}$ et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} L_{W_n}(s) = e^{\frac{s^2}{8}}}$.
Or, par la question 9.c, on a
$$L_{\frac{T}{2}}(s) = \exp\left(\frac{s^2}{8}\right) \text{ et donc } \lim_{n\to+\infty} L_{W_n}(s) = L_{\frac{T}{2}}(s).$$

12. Si $x=0$, alors $y_n = M$ et $q_n = F_X(M) = \frac{1}{2}$. Donc
$$W_n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_n\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{n}{2}.$$
Mais $S_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} J_k\left(\frac{1}{2}\right)$ où les $J_k\left(\frac{1}{2}\right)$ sont indépendantes et suivent toutes la loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
Donc $S_n\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{n}{2}$ est la variable centrée à associée à la somme des $J_k(1/2)$.
De plus, $V(S_n(1/2)) = \frac{n}{4}$, donc la variable centrée réduite associée à la somme des $J_k(1/2)$ est $\frac{2}{\sqrt{n}}\left(S_n(1/2) - \frac{n}{2}\right) = 2W_n$.
Par le théorème central limite, $2W_n \xrightarrow{\mathscr{L}} T$.
La fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$ étant continue sur $\mathbf{R}$, on en déduit que $\boxed{W_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{T}{2}.}$

> **Méthode**
> Il s'agit de prouver une convergence en loi vers une variable suivant une loi normale, dur de ne pas penser au théorème central limite !

13.a. On a
$$[\sqrt{n}(Y_{k(n)} - M) \leqslant x] = \left[Y_{k(n)} \leqslant \frac{x}{\sqrt{n}} + M\right] = [Y_{k(n)} \leqslant y_n].$$
Et alors, d'après la question 1.c, cet événement est égal à $[S_n(y_n) \geqslant k(n)]$.
Et alors, on a
$$[S_n(y_n) \geqslant k(n)] = [S_n(y_n) - nq_n \geqslant k(n) - nq_n] = \left[W_n \geqslant \frac{k(n) - nq_n}{\sqrt{n}}\right] = \boxed{[W_n \geqslant u_n].}$$

> **Variables certaines**
> u_n et $-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}$ ne sont a priori pas des variables aléatoires, mais on peut choisir de les voir comme des variables certaines.
> Plus précisément : pour $\varepsilon > 0$ fixé, pour n assez grand, on a $|u_n + x/\sqrt{2\pi}| < \varepsilon$ et donc
> $$P\left(\left|u_n + \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

13.b. Notons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}$, et donc $u_n \xrightarrow{P} -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}$.
Alors, par le théorème de Slutsky, on a $W_n - u_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{T}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}}$.
Et donc, il vient
$$P(W_n \geqslant u_n) = P(W_n - u_n \geqslant 0) = 1 - F_{W_n - u_n}(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - F_{\frac{T}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}}}(0).$$
Mais alors
$$1 - F_{\frac{T}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}}}(0) = 1 - P\left(\frac{T}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \leqslant 0\right) = P\left(\frac{T}{2} \geqslant -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right) = P\left(T \geqslant -x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right).$$
Puisque T suit une loi normale centrée réduite, quel que soit $t \in \mathbf{R}$, on a $P(T \geqslant t) = P(T \geqslant -t)$ et donc
$$P\left(T \geqslant -x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = P\left(T \leqslant x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) = P\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leqslant x\right).$$
Et donc on a bien prouvé que
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(W_n \geqslant u_n) = P\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}T \leqslant x\right).}$$

13.c. En combinant les résultats des deux questions précédentes, on prouve que $\sqrt{n}(Y_{k(n)} - M) \xrightarrow{\mathscr{L}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}T$.
Et par composition par la fonction continue $x \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}}x$, il vient alors
$$\boxed{\sqrt{\frac{2n}{\pi}}(Y_{k(n)} - M) \xrightarrow{\mathscr{L}} T.}$$

14.a. Si $n = 2\ell + 1$, alors $n/2 = \ell + \frac{1}{2}$ et donc
$$k(n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1 = \ell + 1.$$

14.b. Par la question 8.d, on a $E(Y_{k(n)}) = \theta$ et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(Y_{k(n)}) = \theta.}$

14.c. Notons que par la formule de Huygens, $E(T^2) = V(T) + E(T)^2 = 1$.
Or on a

$$E\left(\left(\sqrt{\frac{2n}{\pi}}(Y_{k(n)} - M\right)^2\right) = \frac{2n}{\pi}E((Y_{k(n)} - M)^2) = \frac{2n}{\pi}V(Y_{k(n)}).$$

Donc $\boxed{V(Y_{k(n)}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}.}$

14.d. Par définition du coefficient de corrélation linéaire, on a

$$\rho(\overline{X_n}, Y_{k(n)}) = \frac{\mathrm{Cov}(\overline{X_n}, Y_{k(n)})}{\sqrt{V(\overline{X_n})V(Y_{k(n)})}}.$$

Mais puisque $Y_{k(n)}$ est un estimateur sans biais de θ, on a, comme à la question 7.b, $\mathrm{Cov}(\overline{X_n}, Y_{k(n)}) = V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}$.
Et donc

$$\rho(\overline{X_n}, Y_{k(n)}) = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}V(Y_{k(n)})}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2n}{\pi}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi}}.}$$

Remarque

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \simeq 0.8$$

donc lorsque n est grand, $\overline{X_n}$ et $Y_{k(n)}$ (c'est-à-dire la moyenne et la médiane) sont plutôt bien corrélées.

MATHS II 2010

Sujet : Quelques propriétés de la fonction Γ via les lois γ : formules de duplication et de Stirling. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : variables à densité, intégrales impropres, séries, convergence des variables aléatoires.

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Commentaires : quelques questions sont bien trop difficiles, notamment la 4 et la 14.b. Pour autant, la première partie, si l'on exclut la question 4, constitue un excellent entraînement sur les variables à densité.

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$;
- pour tout réel $t > 0$, X_t désigne une variable aléatoire à valeurs strictement positives qui suit la loi gamma de paramètre t, notée $\gamma(t)$;
- U désigne une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0,1]$;
- l'espérance et la variance d'une variable aléatoire A sont notées respectivement $E(A)$ et $V(A)$;
- la notation exp désigne la fonction exponentielle de base e.

On rappelle ou on admet sans démonstration les résultats suivants :

- la fonction Γ définie pour tout réel $t > 0$ par $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{t-1}\,dt$, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^{+*}$; on note Γ' et Γ'' les dérivées premières et secondes de la fonction Γ. Pour tout réel t les intégrales $\int_0^{+\infty} (\ln u)e^{-u}u^{t-1}\,du$ et $\int_0^{+\infty} (\ln u)^2 e^{-u}u^{t-1}\,du$ sont convergentes et valent respectivement $\Gamma'(t)$ et $\Gamma''(t)$;
- on a pour tout réel $t > 0$: $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$;
- pour tout réel $t > 0$, une densité f_{X_t} de X_t est donnée par : $f_{X_t}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(t)}e^{-x}x^{t-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$;
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

L'objet du problème est de démontrer quelques propriétés de la fonction Γ en utilisant des méthodes essentiellement probabilistes.

Partie I. Quelques résultats préliminaires

1. On pose pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On considère les deux suites $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par : pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $\gamma_n = h_n - \ln(n)$ et $v_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n$.
   a. Montrer que la série de terme général v_n est convergente.
   b. En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$; on note γ sa limite.
   c. On pose pour tout réel $t > 0$: $d_{n,t} = \gamma + \ln(t+n) - h_n$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} d_{n,t}$.
2. a. Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $E(X_t)$ et $V(X_t)$.
   b. On note pour tout réel $t > 0$, $\psi(t) = \Gamma'(t)/\Gamma(t)$, et ψ' la dérivée de ψ. Montrer que $E(\ln(X_t)) = \psi(t)$ et $V(\ln(X_t)) = \psi'(t)$.
3. a. Montrer que pour tout réel $t > 1$, $E(1/X_t)$ existe et calculer sa valeur.
   b. Établir pour tout réel $x > 0$, l'encadrement : $1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$.

      En déduire que l'on a : $(\ln x)^2 \leqslant \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + (x-1)^2$.
   c. À l'aide des questions précédentes, établir les inégalités suivantes : pour tout réel $t > 0$, $E\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \leqslant 0$; pour tout réel $t > 1$, $E\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \geqslant -\frac{1}{t-1}$; pour tout réel $t > 2$, $E\left(\ln^2\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \leqslant \frac{2t}{(t-2)^2}$.

d. Soit t un réel fixé strictement positif. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

4. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$, $(B_n)_{n\geqslant 1}$ et $(C_n)_{n\geqslant 1}$ trois suites de variables aléatoires à densité qui convergent en probabilité vers 0. On pose pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $D_n = A_n + B_n + C_n$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle qui converge vers u. On considère deux variables aléatoires réelles à densité M et N telles que pour tout n de $\mathbf{N}^*$, M est de même loi que $N + D_n + u_n$.

   a. Montrer pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'inclusion : $[|D_n| > \varepsilon] \subset [|A_n| > \varepsilon/3] \cup [|B_n| > \varepsilon/3] \cup [|C_n| > \varepsilon/3]$. En déduire que la suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

   b. On pose pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $V_n = D_n + u_n - u$. Montrer que la suite de variables aléatoires $(V_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0. En déduire la limite en probabilité de la suite $((N+u)+V_n)_{n\geqslant 1}$.

   c. On admet sans démonstration que la convergence en probabilité entraîne la convergence en loi. Montrer que les variables aléatoires M et $N+u$ sont de même loi.

5. Soit (α, β) un couple de réels strictement positifs, et X_α et X_β deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$. On pose : $T_{\alpha,\beta} = \frac{X_\alpha}{X_\beta}$, $Q_{\alpha,\beta} = \ln(T_{\alpha,\beta})$ et $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

   a. Préciser $Q_{\alpha,\beta}(\Omega)$. Déterminer une densité de $\ln(X_\alpha)$ et de $-\ln(X_\beta)$ respectivement.

   b. En déduire qu'une densité $f_{Q_{\alpha,\beta}}$ de $Q_{\alpha,\beta}$ est donnée par : pour tout réel x,

$$f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+\beta)y} \exp\left(-e^y(1+e^{-x})\right) dy$$

   c. À l'aide du changement de variable $u = e^y(1+e^{-x})$, dont on justifiera la validité, établir la formule suivante : pour tout réel x, $f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \times \frac{e^{\alpha x}}{(1+e^x)^{\alpha+\beta}}$.

   d. En déduire une densité $f_{T_{\alpha,\beta}}$ de $T_{\alpha,\beta}$.

   e. On pose : $J_{\alpha,\beta} = \frac{X_\alpha}{X_\alpha + X_\beta}$. Montrer qu'une densité $f_{J_{\alpha,\beta}}$ de $J_{\alpha,\beta}$ est donnée par :

$$f_{J_{\alpha,\beta}}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \notin]0,1[\\ \frac{1}{B(\alpha,\beta)} z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} & \text{si } z \in]0,1[\end{cases}$$

Partie II. Étude de la variable aléatoire $\ln(X_t)$

Soit $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On suppose que pour tout réel $\alpha > 0$, X_α est indépendante de chacune des variables aléatoires de la suite $(Y_k)_{k\geqslant 1}$.

On pose : $S_0 = 0$ et pour tout k de $\mathbf{N}^*$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i$.

6. Rappeler sans démonstration la loi de S_k ainsi que les valeurs respectives de $E(S_k)$ et $V(S_k)$.

7. **a.** Justifier pour tout n de $\mathbf{N}^*$, l'égalité suivante : $\ln(X_t) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k}\right) + \ln(X_t + S_n)$.

   b. Montrer que pour tout entier m de $\mathbf{N}^*$, la loi de $X_t + S_m$ est celle de X_{t+m}.

   On admet jusqu'à la fin du problème les résultats suivants :

   - soit n un entier de $\mathbf{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Alors, pour tout p de $[\![1, n-1]\!]$, pour toutes fonctions réelles φ_1 et φ_2 continues, les variables aléatoires $\varphi_1(A_1, \ldots, A_p)$ et $\varphi_2(A_{p+1}, \ldots, A_n)$ sont indépendantes ;
   - si A et B sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors AB admet une espérance et $E(AB) = E(A)E(B)$;
   - pour tout couple (α, β) de réels strictement positifs, si les variables aléatoires X_α et X_β sont indépendantes, de lois respectives $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$, alors les variables aléatoires $\frac{X_\alpha}{X_\alpha + X_\beta}$ et $X_\alpha + X_\beta$ sont indépendantes.

8. On pose pour tout k de $\mathbf{N}^*$: $R_{t,k} = \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k}$.

   a. Montrer que $R_{t,1}$ et $R_{t,2}$ sont indépendantes. On admet dans la suite que les variables aléatoires $R_{t,k}$ $(k \geqslant 1)$ sont indépendantes.

   b. En déduire, à l'aide des questions précédentes que pour tout n de $\mathbf{N}^*$, les variables aléatoires $\ln(X_t)$ et $\sum_{k=1}^{n} \ln(R_{t,k}) + \ln(X_{t+n})$ sont de même loi.

9. a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $-\ln(U)$.

b. À l'aide de la question 5.e, calculer une densité $f_{R_{t,k}}$ de la variable aléatoire $R_{t,k}$.

c. Soit $(U_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U. Montrer que pour tout k de $\mathbf{N}^*$, les variables aléatoires $R_{t,k}$ et $U_k^{\frac{1}{t+k-1}}$ sont de même loi.

d. Déduire des questions précédentes que pour tout n de $\mathbf{N}^*$, la variable aléatoire $\ln(X_t)$ est de même loi que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{Y_{k+1}}{t+k}\right)+\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)+d_{n,t}-\gamma$.

10. En utilisant les résultats des questions 1.c, 2.b, 3.c et 9.d, montrer que pour tout réel $t>0$, on a :

$$E\left(\ln(X_t)\right)=\psi(t)=-\gamma+\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{t+k}\right)\ \text{ et }\ V\left(\ln(X_t)\right)=\psi'(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(t+k)^2}.$$

11. En utilisant la question 3.c, calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(\psi(t)-\ln(t)\right)$.

12. On pose : $W=U^{1/\mu}$, où μ désigne un paramètre réel strictement positif inconnu. Afin d'estimer μ, on considère pour p supérieur ou égal à 3, un p-échantillon $(W_1,W_2,\ldots,W_p)$ i.i.d. de la loi de W.

On pose $G_p=-p\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\ln W_i\right)^{-1}$. Justifier que la variable aléatoire G_p est un estimateur du paramètre μ. Est-il sans biais ? Est-il convergent ?

13. On rappelle que l'appel à la fonction `Scilab` `rand()` a pour résultat un nombre réel pris au hasard dans l'intervalle $[0,1]$, suivant une loi uniforme.

a. Soit `X` la fonction `Scilab` suivante :

```
function y=X(lambda)
        y = -log(1-rand())/lambda
endfunction
```

Cette fonction simule une variable aléatoire réelle. Donner sa loi. Justifier votre réponse.

b. Écrire une fonction `Scilab` d'entête `function y = g(n)` simulant une variable aléatoire de loi $\gamma(n)$.

c. Soit `m` la fonction `Scilab` suivante :

```
function y = m(p)
        m = p/g(p)
endfunction
```

On appelle la fonction `m` pour différentes valeurs de p, de plus en plus grandes. Que devrait-on constater ?

Partie III. Quelques propriétés de la fonction Γ

Les notations sont celles des parties I et II.

14. **Premières applications : les formules de Wilks et Legendre.**

a. Soit $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$ et pour tout réel $t>0$, établir l'égalité :

$$2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{k+1}}{t+k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{2k+1}}{\frac{t}{2}+k}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{2k+2}}{\frac{t+1}{2}+k}\right)+2\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right).$$

b. Exprimer $w_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$ en fonction de deux termes de la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}w_n=\ln 2$.

c. Pour $t>0$, soit X_t et $X_{t+\frac{1}{2}}$ deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(t)$ et $\gamma(t+\frac{1}{2})$.
En utilisant les questions 4 et 9.d, montrer que la variable aléatoire $2\ln(X_t)$ est de même loi que la variable aléatoire $\ln\left(X_{\frac{t}{2}}\right)+\ln\left(X_{\frac{t+1}{2}}\right)+2\ln 2$.

d. On pose : $t=2s$. Déduire de la question précédente que pour tout réel $r>0$, $(X_{2s})^{2r}$ et $2^{2r}(X_s)^r(X_{s+\frac{1}{2}})^r$ sont de même loi.

e. En choisissant une valeur particulière de s, établir pour tout $r>0$, la formule :

$$2^{2r-1}\Gamma(r)\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)=\Gamma(2r)\sqrt{\pi}.$$

15. Deuxième application : la formule de Stirling

a. Déterminer quatre réels a, b, c, d tels que pour tout réel $u > 0$, on a : $\dfrac{1}{u^2(u+1)^2} = \dfrac{a}{u^2} + \dfrac{b}{(u+1)^2} + \dfrac{c}{u} + \dfrac{d}{u+1}$.

En déduire pour tout $t > 0$, la relation : $\psi'(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{2t^2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}$.

On admet sans démonstration que pour tout $u > 0$, on a :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\left(u+\frac{1}{14}\right)^3} - \frac{1}{\left(u+\frac{15}{14}\right)^3}\right) \leqslant \frac{1}{u^2(u+1)^2} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{(u+1)^3}\right)$$

b. Déduire des deux résultats précédents, pour tout $t > 0$, les deux encadrements :

$$\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6\left(t+\frac{1}{14}\right)^3} \leqslant \psi'(t) - \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3} \text{ et } \ln t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12t^2} \leqslant \psi(t) \leqslant \ln t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12\left(t+\frac{1}{14}\right)^2}$$

En déduire un équivalent de $E(\ln(X_t))$ et de $V(\ln(X_t))$ respectivement, lorsque t tend vers $+\infty$.

c. Calculer pour tout y vérifiant $y > t > 0$, l'intégrale : $\displaystyle\int_t^y \left(\psi(x) - \ln(x) + \frac{1}{2x}\right) dx$.

Montrer pour t fixé, l'existence de $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \ln\left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}}e^{-y}}\right)$; on note θ cette limite.

d. En utilisant la question 14.e et l'identité $x^x = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^x\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{-x}$, valable pour $x > 0$, calculer e^θ.

En déduire que $\Gamma(x)$ est équivalent à $\sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}$, lorsque x tend vers $+\infty$.

MATHS II 2010 : CORRIGÉ

Partie I. Quelques résultats préliminaires.

1.a. On a

$$v_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Mais nous savons que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Et de même, $\frac{1}{1+n} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Et donc $v_n = -\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

Et donc, d'après le critère des équivalents pour les séries de signe constant[1], on en déduit que $\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$

Rappel
Au voisinage de 0,
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
et
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x).$$
De plus, $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

[1] $-\frac{1}{2n^2} \leqslant 0$.

1.b. Pour $N \geqslant 2$, on a

$$\sum_{k=1}^{N-1} v_k = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_{k+1} - \gamma_k = \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_{k+1} - \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k = \sum_{i=2}^{N} \gamma_i - \sum_{k=1}^{N-1} \gamma_k = \gamma_N - \gamma_1.$$

Or, par définition d'une série convergente[2] $\sum_{k=1}^{N-1} v_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$, et donc $\gamma_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} v_k + \gamma_1$.
Ainsi $\boxed{(\gamma_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$

[2] La somme de la série est la limite de la suite des sommes partielles.

1.c. On a

$$d_{n,t} = \gamma + \ln(n) + \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) - h_n = \gamma - \gamma_n + \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma - \gamma + 0 = \boxed{0.}$$

2.a. On a $\boxed{E(X_t) = V(X_t) = t.}$

2.b. D'après le théorème de transfert, on a, sous réserve de convergence,

$$E(\ln(X_t)) = \int_0^{+\infty} \ln(x)\frac{1}{\Gamma(t)}x^{t-1}e^{-x}\,dx = \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{+\infty} \ln(x)x^{t-1}e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \psi(t).$$

Convergence
La convergence de l'intégrale a en fait été donnée par l'énoncé.

De même, on a

$$E\left(\ln(X_t)^2\right) = \int_0^{+\infty} (\ln x)^2 \frac{1}{\Gamma(t)}x^{t-1}e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)}.$$

Et donc, par la formule de Huygens,

$$V(\ln(X_t)) = E\left(\ln(X_t)^2\right) - E(\ln(X_t))^2 = \frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)} - \frac{\Gamma'(t)^2}{\Gamma(t)^2} = \frac{\Gamma''(t)\Gamma(t) - \Gamma'(t)^2}{\Gamma(t)^2}.$$

D'autre part, un calcul de dérivée prouve que

$$\psi'(t) = \frac{\Gamma''(t)\Gamma(t) - \Gamma'(t)^2}{\Gamma(t)^2} = V(\ln(X_t)).$$

3.a. Toujours d'après le théorème de transfert, on a, sous réserve de convergence absolue

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{X_t}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\frac{1}{\Gamma(t)}x^{t-1}e^{-x}\,dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^{+\infty} x^{t-2}e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(t-1)}{\Gamma(t)} \\ &= \frac{\Gamma(t-1)}{(t-1)\Gamma(t-1)} = \frac{1}{t-1}. \end{aligned}$$

On a reconnu des intégrales convergentes, donc l'espérance existe.

Et donc $\boxed{E\left(\frac{1}{X_t}\right) \text{ existe et vaut } \frac{1}{t-1}.}$

3.b. La fonction ln est concave et donc située en dessous de ses tangentes. En particulier, la tangente en $t = 1$ est la droite d'équation $y = x - 1$.

Et donc pour tout $x > 0$, $\boxed{\ln(x) \leqslant x - 1.}$

Pour prouver la seconde inégalité, posons $f(x) = \ln(x) - 1 + \dfrac{1}{x}$.

Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, de dérivée égale à

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

f est donc décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. Elle admet donc un minimum en $x = 1$, et $f(1) = 0$.

Par conséquent, pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln(x).}$

Si $x \geqslant 1$, on a $\ln(x) \geqslant 0$ et donc $(\ln x)^2 \leqslant (x-1)^2 \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^2 + (x-1)^2$.

En revanche, si $x \leqslant 1$, alors $\ln(x) \leqslant 0$ et donc, la fonction carré étant décroissante sur $\mathbf{R}_-$, $\ln(x)^2 \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^2 \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^2 + (x-1)^2$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $\boxed{\ln(x)^2 \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^2 + (x-1)^2}$.

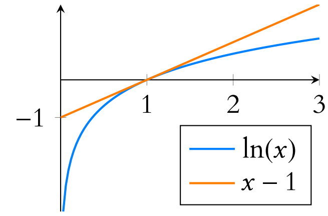


FIGURE 1– ln et sa tangente en $x = 1$.

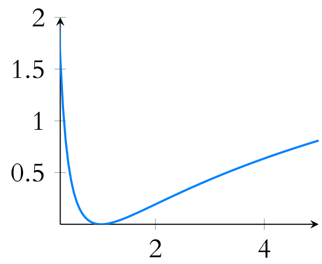


FIGURE 2– La fonction f.

3.c. Soit $t > 0$. Alors par le théorème de transfert[3],

$$\begin{aligned} E\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(t)} \ln\left(\frac{x}{t}\right) x^{t-1} e^{-x}\,dx \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(t)}\left(\frac{x}{t} - 1\right) x^{t-1} e^{-x}\,dx \\ &\leqslant \frac{1}{t\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\,dx - \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\,dx \\ &\leqslant \frac{\Gamma(t+1)}{t\Gamma(t)} - \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(t)} \\ &\leqslant 1 - 1 = \boxed{0.} \end{aligned}$$

[3] Nous savons déjà que cette intégrale converge, car $\ln(X_t)$ admet une espérance d'après la question 2.b, et donc il en est de même de $\ln\left(\frac{X_t}{t}\right) = \ln(X_t) - \ln(t)$.

D'autre part, d'après l'inégalité de la question 3.b, $\ln\left(\dfrac{X_t}{t}\right) \geqslant 1 - \dfrac{t}{X_t}$, de sorte que par croissance de l'espérance[4],

$$E\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \geqslant 1 - E\left(\frac{t}{X_t}\right) \geqslant 1 - tE\left(\frac{1}{X_t}\right) \geqslant 1 - \frac{t}{t-1} \geqslant \boxed{-\frac{1}{t-1}.}$$

[4] Qui s'applique puisque $\frac{t}{X_t} = t \times \frac{1}{X_t}$ admet une espérance.

Enfin, d'après la question 3.b,

$$\ln^2\left(\frac{X_t}{t}\right) \leqslant \left(1 - \frac{t}{X_t}\right)^2 + \left(\frac{X_t}{t} - 1\right)^2 = 2 - 2\frac{t}{X_t} + \frac{t^2}{X_t^2} - 2\frac{X_t}{t} + \frac{X_t^2}{t^2}.$$

Comme à la question 3.a, nous pouvons appliquer le théorème de transfert pour prouver que pour $t > 2$,

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{X_t^2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\frac{1}{\Gamma(t)} x^{t-1} e^{-x}\,dx = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} x^{t-3} e^{-x}\,dx \\ &= \frac{\Gamma(t-2)}{\Gamma(t)} = \frac{\Gamma(t-2)}{(t-1)\Gamma(t-1)} = \frac{\Gamma(t)}{(t-1)(t-2)\Gamma(t)} = \frac{1}{(t-1)(t-2)}. \end{aligned}$$

Et donc toutes les variables aléatoires de l'inégalité précédemment prouvée possèdent une espérance, de sorte que, par croissance de l'espérance,

$$E\left(\ln^2\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \leqslant 2 - 2tE\left(\frac{1}{X_t}\right) + t^2 E\left(\frac{1}{X_t^2}\right) - \frac{2}{t}E(X_t) + \frac{1}{t^2}E\left(X_t^2\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant 2 - 2\frac{t}{t-1} + \frac{t^2}{(t-1)(t-2)} - 2 + \frac{V(X_t)+E(X_t)^2}{t^2} \\
&\leqslant \frac{t^2 - 2t(t-2)}{(t-1)(t-2)} + \frac{t+t^2}{t^2} \\
&\leqslant \frac{-t^2+4t}{(t-1)(t-2)} + \frac{1+t}{t} \\
&\leqslant \frac{-t^3+4t^2+(1+t)(t-1)(t-2)}{t(t-1)(t-2)} \\
&\leqslant \frac{-t^3+4t^2+t^3-2t^2-t+2}{t(t-1)(t-2)} \\
&\leqslant \frac{2t^2-t+2}{t(t-1)(t-2)} \\
&\leqslant \frac{2t^2}{t(t-1)(t-2)} \\
&\boxed{\leqslant \frac{2t}{(t-2)^2}.}
\end{aligned}$$

Formule de Huygens.

$t > 2$ donc $2 - t \leqslant 0$.

$t - 2 < t - 1$.

3.d. Par l'inégalité de Markov, appliquée à la variable aléatoire $\ln^2\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)$, qui est positive[5] et possède une espérance, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$P\left(\left|\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right| > \varepsilon\right) = P\left(\ln^2\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) > \varepsilon^2\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}E\left(\ln^2\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right) \leqslant \frac{2(t+n)}{\varepsilon^2(t+n-2)^2}.$$

[5] Hypothèse indispensable pour appliquer Markov !

Or, $\frac{t+n}{(t+n-2)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right| > \varepsilon\right) = 0$$

ce qui prouve que $\boxed{\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) \xrightarrow{P} 0.}$

4.a. Travaillons avec les événements contraires : si l'événement $[|A_n| \leqslant \varepsilon/3] \cap [|B_n| \leqslant \varepsilon/3] \cap [|C_n| \leqslant \varepsilon/3]$ est réalisé, alors, par l'inégalité triangulaire,

$$|D_n| = |A_n + B_n + C_n| \leqslant |A_n| + |B_n| + |C_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, on a prouvé que

$$[|A_n| \leqslant \varepsilon/3] \cap [|B_n| \leqslant \varepsilon/3] \cap [|C_n| \leqslant \varepsilon/3] \subset [|D_n| \leqslant \varepsilon].$$

En passant aux événements contraires on a donc

$$\overline{[|D_n| \leqslant \varepsilon]} \subset \overline{[|A_n| \leqslant \varepsilon/3] \cap [|B_n| \leqslant \varepsilon/3] \cap [|C_n| \leqslant \varepsilon/3]}.$$

Rappel
Si $A \subset B$, alors $\bar{B} \subset \bar{A}$.

Soit encore

$$[|D_n| > \varepsilon] \subset [|A_n| > \varepsilon] \cup [|B_n| > \varepsilon] \cup [|C_n| > \varepsilon].$$

Rappel
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

On en déduit que

$$P(|D_n| > \varepsilon) \leqslant P(|A_n| > \varepsilon) + P(|B_n| > \varepsilon) + P(|C_n| > \varepsilon).$$

Mais puisque $(A_n), (B_n)$ et (C_n) convergent les trois en probabilités vers 0, il vient donc, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|D_n| > \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \boxed{D_n \xrightarrow{P} 0.}$

4.b. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, comme à la question précédente, on a

$$0 \leqslant P(|D_n| > \varepsilon) \leqslant P\left(|D_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|u_n - u| > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Mais $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$, et donc il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $|u_n - u| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Et donc en particulier, pour $n \geqslant N$, l'événement $\left[|u_n - u| > \frac{\varepsilon}{2}\right]$ est l'événement vide ($\emptyset$), et donc est de probabilité nulle. Ainsi, pour $n \geqslant N$, on a

$$0 \leqslant P(|D_n + u_n - u| > \varepsilon) \leqslant P\left(|D_n| > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Remarque
Nous parlons ici d'un événement qui n'a rien d'aléatoire : il ne contient aucune variable aléatoire. Et donc soit il vaut Ω (si l'événement est réalisé), soit il vaut $\emptyset$.

Et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|D_n + u_n - u| > \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et donc on a bien $\boxed{V_n \xrightarrow{P} 0.}$
On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|(N + u + V_n) - (N + u)| > \varepsilon) = P(|V_n| > \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc $\boxed{N + u + V_n \xrightarrow{P} N + u.}$

Remarque
La même preuve montre que si $X_n \xrightarrow{P} 0$, alors pour toute variable aléatoire **fixée** N, $X_n + N \xrightarrow{P} N$.

4.c. Notons que $N + D_n + u = N + u + V_n$. Et donc $N + D_n + u \xrightarrow{P} N + u$.
Et donc, d'après le résultat admis par l'énoncé, $N + D_n + u \xrightarrow{\mathscr{L}} N + u$.
Puisque la convergence en loi ne dépend que de la loi, et que $N + D_n + u$ et M ont même loi, on en déduit que $M \xrightarrow{\mathscr{L}} N + u$.
Or, M ne dépend pas de n ! Plus précisément : la convergence en loi signifie qu'en tout point de continuité de F_{N+u}, on a $F_M(x) = F_{N+u}(x)$.
Mais $N + u$ est une variable à densité, donc sa fonction de répartition est continue sur $\mathbf{R}$ tout entier, et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F_M(x) = F_{N+u}(x)$: $\boxed{M \text{ et } N + u \text{ ont même loi.}}$

CV en loi
La convergence en loi est définie uniquement en termes de fonctions de répartitions, et donc ne dépend que des lois et non des variables.

5.a. Puisque X_α et X_β ne prennent que des valeurs strictement positives, il en est de même de $T_{\alpha,\beta}$. Et donc $Q_{\alpha,\beta}$ est bien définie, à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Pour $x \in \mathbf{R}$, on a, par croissance de la fonction exponentielle :

$$P(\ln(X_\alpha) \leqslant x) = P(X_\alpha \leqslant e^x) = F_{X_\alpha}(e^x).$$

Mais puisque X_α est une variable à densité, sa fonction de répartition F_{X_α} est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. Par composition par la fonction exponentielle, qui est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, il en est donc de même de la fonction de répartition de $\ln(X_\alpha)$.
Ainsi, X_α est une variable à densité, et une densité en est donnée par

Remarque
Le fait que X_α possède une densité continue sauf peut-être (c'est le cas si et seulement si $\alpha > 1$) en 0 indique que F_{X_α} est $\mathscr{C}^1$, sauf peut-être en 0.
Et donc la fonction de répartition de $\ln(X_\alpha)$ est $\mathscr{C}^1$, sauf peut-être en $1 = e^0$.

$$f_\alpha : x \mapsto e^x F'_{X_\alpha}(e^x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^x (e^x)^{\alpha-1} e^{-e^x} = \boxed{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{\alpha x - e^x}}.$$

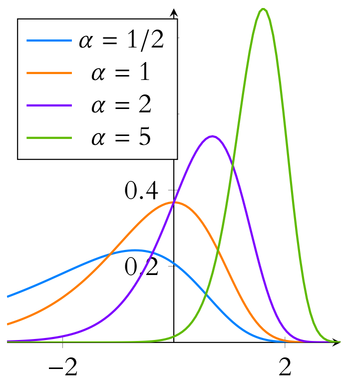


FIGURE 3– La densité f_α.

De même, une densité de $\ln(X_\beta)$ est $x \mapsto \frac{1}{\Gamma(\beta)} e^{\beta x - e^x}$.
Par transformation affine, une densité de $-\ln(X_\beta)$ est donc

$$f_\beta : x \mapsto \frac{1}{\Gamma(\beta)} e^{-\beta x - e^{-x}}.$$

5.b. On a $Q_{\alpha,\beta} = \ln(X_\alpha) - \ln(X_\beta)$.
Or, $\ln(X_\alpha)$ et $-\ln(X_\beta)$ sont indépendantes car X_α et X_β le sont, et f_β est bornée par $\frac{1}{\Gamma(\beta)}$ de sorte que, par produit de convolution, $Q_{\alpha,\beta}$ est une variable à densité dont une densité est donnée par

$$\begin{aligned}
f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t) f_\beta(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{\alpha t - e^t} \frac{1}{\Gamma(\beta)} e^{-\beta(x-t) - e^{-(x-t)}}\,dt \\
&= \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+\beta)t} e^{-e^t - e^t e^{-x}}\,dt \\
&= \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+\beta)t} e^{-e^t(1+e^{-x})}\,dt \\
&= \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+\beta)y} e^{-e^y(1+e^{-x})}\,dy.
\end{aligned}$$

Remarque
Nous avons seulement changé la variable muette t en y pour obtenir le même résultat que dans l'énoncé.

5.c. Le changement de variable proposé est $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant, donc légitime.
Lorsque $y \to -\infty$, $u \to 0$ et lorsque $y \to +\infty$, $u \to +\infty$. De plus, on a

$$u = e^y(1+e^{-x}) \Leftrightarrow e^y = \frac{u}{1+e^{-x}} \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{u}{1+e^{-x}}\right).$$

Et alors $du = e^y(1+e^{-x})dy = u\,dy \Leftrightarrow dy = \dfrac{du}{u}$.
Ainsi, il vient

$$\begin{aligned} f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) &= \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1+e^{-x}}\right)^{\alpha+\beta} e^{-u} \frac{du}{u} \\ &= \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(1+e^{-x})^{\alpha+\beta}} \int_0^{+\infty} u^{\alpha+\beta-1} e^{-u}\, du \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{e^{-\beta x}}{(1+e^{-x})^{\alpha+\beta}} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{e^{\alpha x}}{(1+e^{x})^{\alpha+\beta}} \\ &= \boxed{\frac{1}{B(\alpha,\beta)} \frac{e^{\alpha x}}{(1+e^{x})^{\alpha+\beta}}}. \end{aligned}$$

On a mutliplié numérateur et dénominateur par $e^{(\alpha+\beta)x}$.

5.d. Notons que $T_{\alpha,\beta}$ ne prend que des valeurs positives, et donc pour $x < 0$, $P(T_{\alpha,\beta} \leqslant x) = 0$.
De plus, $T_{\alpha,\beta} = 0$ si et seulement si $X_\alpha = 0$ et donc

$$P(T_{\alpha,\beta} \leqslant 0) = P(T_{\alpha,\beta} = 0) = P(X_\alpha = 0) = 0.$$

Soit à présent $x > 0$. Alors, par croissance de la fonction logarithme,

$$F_{T_{\alpha,\beta}}(x) = P(T_{\alpha,\beta} \leqslant x) = P(Q_{\alpha,\beta} \leqslant \ln(x)).$$

Mais $Q_{\alpha,\beta}$ est une variable aléatoire à densité, et l'une de ses densités, $f_{Q_{\alpha,\beta}}$ est continue sur $\mathbf{R}$, donc sa fonction de répartition est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.
Par composition avec la fonction logarithme, $F_{T_{\alpha,\beta}}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
De plus, on a

$$\lim_{x\to 0^+} F_{T_{\alpha,\beta}(x)} = \lim_{x\to 0^+} F_{Q_{\alpha,\beta}}(\ln(x)) = \lim_{y\to -\infty} F_{Q_{\alpha,\beta}}(y) = 0 = F_{T_{\alpha,\beta}}(0).$$

Et $F_{T_{\alpha,\beta}}$ étant constante sur $\mathbf{R}_-$, elle y est continue[6] et même $\mathscr{C}^1$.
Ainsi, $F_{T_{\alpha,\beta}}$ est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 0.
Donc $T_{\alpha,\beta}$ est une variable à densité.
Une densité en est alors toute fonction qui coïncide avec $F'_{T_{\alpha,\beta}}$ sur $\mathbf{R}^*$. Par exemple, on peut prendre

$$f_{T_{\alpha,\beta}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} f_{Q_{\alpha,\beta}}(\ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} \dfrac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

$\mathscr{C}^1$
Une variable de densité f_X possède

$$F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt$$

pour fonction de répartition.
Si f_X est continue, alors par le théorème fondamental de l'analyse, F_X est $\mathscr{C}^1$, de dérivée f_X.

[6] En particulier, elle est continue à gauche en 0.

Détails
Rappelons que $F_{Q_{\alpha,\beta}}$ possède $f_{Q_{\alpha,\beta}}$ pour dérivée, comme indiqué plus haut.

5.e. Commençons par noter que $J_{\alpha,\beta}$ ne prend que des valeurs positives, et donc pour $x < 0$, $P(J_{\alpha,\beta} \leqslant x) = 0$.
De plus, $J_{\alpha,\beta} = 0$ si et seulement si $X_\alpha = 0$, et donc

$$P(J_{\alpha,\beta} \leqslant 0) = P(J_{\alpha,\beta} = 0) = P(X_\alpha = 0) = 0.$$

D'autre part, $X_\alpha \leqslant X_\alpha + X_\beta$ et donc $J_{\alpha,\beta} \leqslant 1$. Donc pour $x \geqslant 1$, $P(J_{\alpha,\beta} \leqslant x) = 1$.
Soit à présent $x \in]0,1[$. On a

$$\begin{aligned} F_{J_{\alpha,\beta}}(x) = P(J_{\alpha,\beta} \leqslant x) &= P\left(\frac{X_\alpha}{X_\alpha + X_\beta} \leqslant x\right) \\ &= P\left(\frac{X_\alpha + X_\beta}{X_\alpha} \geqslant \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
&= P\left(1 + \frac{X_\beta}{X_\alpha} \geqslant \frac{1}{x}\right)\\
&= P\left(\frac{X_\beta}{X_\alpha} \geqslant \frac{1-x}{x}\right) = P\left(\frac{X_\alpha}{X_\beta} \leqslant \frac{x}{1-x}\right)\\
&= P\left(T_{\alpha,\beta} \leqslant \frac{x}{1-x}\right) = F_{T_{\alpha,\beta}}\left(\frac{x}{1-x}\right).
\end{aligned}$$

Il est donc évident[7] que la fonction de répartition de $J_{\alpha,\beta}$ est $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0 et en 1.
De plus, lorsque $x \to 0^+$, $\frac{x}{1-x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ et donc $F_{J_{\alpha,\beta}}(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
Et de même, lorsque $x \to 1^-$, $\frac{x}{1-x} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $F_{J_{\alpha,\beta}}\left(\frac{x}{1-x}\right) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 1$.
On en déduit donc que $F_{J_{\alpha,\beta}}$ est continue sur $\mathbf{R}$, $\mathscr{C}^1$ sauf en 0 et en 1, et donc $J_{\alpha,\beta}$ est une variable à densité.
Pour $x \in]0,1[$, par dérivation d'une composée, on a alors

$$F'_{J_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha+\beta} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}.$$

Et donc une densité de $J_{\alpha,\beta}$ est :

$$\boxed{f_{J_{\alpha,\beta}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$$

Partie II. Étude de la variable aléatoire $\ln(X_t)$.

6. Puisque la loi $\mathscr{E}(1)$ n'est autre que la loi $\gamma(1)$, alors, par stabilité[8] des lois γ, $S_k \hookrightarrow \gamma(k)$.
Et donc en particulier $\boxed{E(S_k) = k \text{ et } V(S_k) = k.}$

7.a. Il s'agit de remarquer que le produit dans le logarithme est un produit télescopique :

$$\prod_{k=1}^n \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k} = \frac{X_t}{\cancel{X_t + S_1}}\,\frac{\cancel{X_t + S_1}}{\cancel{X_t + S_2}}\cdots\frac{\cancel{X_t + S_{n-1}}}{X_t + S_n} = \frac{X_t}{X_t + S_n}.$$

Et donc

$$\ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k}\right) + \ln(X_t + S_n) = \ln\left(\frac{X_t}{X_t + S_n}\right) + \ln(X_t + S_n) = \boxed{\ln(X_t).}$$

7.b. Puisque X_t est indépendante de $Y_1, \dots, Y_m$, par le lemme des coalitions, elle est indépendante de S_m.
Et donc, par stabilité des lois gamma, $X_t + S_m$ suit la loi $\gamma(t+m)$, et donc $\boxed{\text{a même loi que } X_{t+m}.}$

8.a. On a $R_{t,1} = \frac{X_t}{X_t + S_1}$ et $R_{t,2} = \frac{X_t + S_1}{X_t + S_2}$.
D'après le résultat admis fourni par l'énoncé[9], nous pouvons déjà affirmer que $\frac{X_t}{X_t + S_1}$ et $X_t + S_1$ sont indépendantes.
Puisque de plus, X_t, Y_1 et Y_2 sont mutuellement indépendantes, alors Y_2 et $\frac{X_t}{X_t + Y_1}$ sont indépendantes.
Ainsi, $\frac{X_t}{X_t + Y_1}$ et $X_t + S_2 = (X_t + Y_1) + Y_2$ sont indépendantes.
Et donc, toujours par le lemme des coalitions $\frac{X_t}{X_t + Y_1} = R_{t,1}$ et $\frac{X_t + Y_1}{X_t + S_2} = R_{t,2}$ sont indépendantes.

8.b. On a

$$\sum_{k=1}^n \ln(R_{t,k}) = \ln\left(\prod_{k=1}^n R_{t,k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k}\right) = \ln\left(\frac{X_t}{X_t + S_n}\right).$$

[7] Car la fonction de répartition de $F_{T_{\alpha,\beta}}$ est $\mathscr{C}^1$ sauf en 0.

[8] Qui s'applique car les Y_i sont indépendantes.

[9] Qui s'applique bien puisque X_t et S_1 suivent toutes deux des lois gamma.

Mais $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} R_{t,k} = \frac{X_t}{X_t+S_n}$, qui d'après le résultat admis, est indépendante de X_t+S_n.

De plus, X_t+S_n a même loi que X_{t+n}, qui est elle même indépendante de $\dfrac{X_t}{X_t+S_n}$ car indépendante de X_t et des Y_i.

Ainsi, les couples $\left(\dfrac{X_t}{X_t+S_n}, X_{t+n}\right)$ et $\left(\dfrac{X_t}{X_t+S_n}, X_t+S_n\right)$ ont même loi.

Ainsi, en appliquant la fonction $(x,y)\mapsto \ln(x)+\ln(y)$, continue sur $\mathbf{R}_+^*\times\mathbf{R}_+^*$, les variables $\ln\left(\dfrac{X_t}{X_t+S_n}\right)+\ln(X_t+S_n)$ et $\ln\left(\dfrac{X_t}{X_t+S_n}\right)+\ln(X_{t+n})$ ont même loi.

Et puisque $\ln\left(\dfrac{X_t}{X_t+S_n}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(R_{t,k})$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(R_{t,k})+\ln(X_t+S_n)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(R_{t,k})+\ln(X_{t+n})$ ont même loi.

D'autre part, nous savons, d'après la question 7.a que

$$\ln(X_t) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{X_t+S_{k-1}}{X+S_k}\right)+\ln(X_t+S_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}R_{t,k}\right)+\ln(X_t+S_n) = \sum_{k=1}^{n}\ln(R_{t,k})+\ln(X_t+S_n).$$

Donc $\boxed{\ln(X_t) \text{ et } \sum_{k=1}^{n}\ln(X_{t+n}) \text{ ont bien même loi.}}$

> **Détails**
> Il ne suffit pas de remarquer que ces deux couples ont les mêmes lois marginales : l'indépendance des deux variables est importante, c'est grâce à elle que la loi du couple est caractérisée par les lois marginales.

9.a. Puisque U est à valeurs dans $]0,1]$, $-\ln(U)$ est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.
Donc déjà, pour $x<0$, $P(-\ln(U)\leqslant x)=0$.
Pour $x\geqslant 0$, on a, par croissance de la fonction exponentielle,

$$P(-\ln(U)\leqslant x) = P(U\geqslant e^{-x}) = 1-P(U\leqslant e^{-x}) = 1-e^{-x}.$$

Et donc $\boxed{-\ln(U) \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } 1.}$

9.b. On a $R_{t,k} = \dfrac{X_t+S_{k-1}}{X_t+S_k} = \dfrac{X_t+S_{k-1}}{X_t+S_{k-1}+Y_k}$, et par le lemme des coalitions, X_t+S_{k-1} et Y_k sont indépendantes.
Par la question 7.b, X_t+S_{k-1} suit la loi $\gamma(t+k-1)$, et par définition, Y_k suit la loi $\mathscr{E}(1)=\gamma(1)$.
Et donc d'après le résultat de la question 5.e, une densité de $R_{t,k}$ est

$$f_{R_{t,k}} : z\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z\notin[0,1]\\ \dfrac{1}{B(t+k-1,1)}z^{t+k-2} & \text{si } z\in[0,1]\end{cases}$$

Mais $B(t+k-1,1) = \dfrac{\Gamma(t+k-1)\Gamma(1)}{\Gamma(t+k)} = \dfrac{\Gamma(t+k-1)}{\Gamma(t+k)} = \dfrac{\Gamma(t+k-1)}{(t+k-1)\Gamma(t+k-1)} = \dfrac{1}{t+k-1}$.
On a donc

$$\boxed{f_{R_{t,k}}(z) = \begin{cases}(t+k-1)z^{t+k-2} & \text{si } z\in[0,1]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$$

9.c. Puisque U_k est à valeurs dans $[0,1]$, il en est de même de $U_k^{\frac{1}{t+k-1}}$.
Donc pour $z<0$, $P\left(U_k^{\frac{1}{t+k-1}}\leqslant z\right)=0$ et pour $z\geqslant 1$, $P\left(U_k^{\frac{1}{t+k-1}}\leqslant z\right)=1$.
Soit donc à présent $z\in[0,1]$. Alors

$$P\left(U_k^{\frac{1}{t+k-1}}\leqslant z\right) = P\left(U_k\leqslant z^{t+k-1}\right) = z^{t+k-1}.$$

Il est aisé de constater que la fonction de répartition de $U_k^{\frac{1}{t+k-1}}$ est alors continue en 0 et en 1, et donc sur $\mathbf{R}$, et qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 0 et en 1.
Donc $U_k^{\frac{1}{t+k-1}}$ est une variable à densité, et l'une de ses densités est donnée par

$$z\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } z\notin[0,1]\\ (t+k-1)z^{t+k-2} & \text{si } z\in[0,1]\end{cases}$$

Et donc $\boxed{U_k^{\frac{1}{t+k-1}} \text{ et } R_{t,k} \text{ sont de même loi.}}$

9.d. On a

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{Y_{k+1}}{t+k}\right)+\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)+d_{n,t}-\gamma=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}_{=h_n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{Y_k}{t+k-1}+\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)+\ln(t+n)-h_n$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\frac{Y_k}{t+k-1}+\ln\left(X_{t+n}\right).$$

D'après la question 9.c, $\ln(R_{t,k})$ a même loi que $\ln\left(U_k^{\frac{1}{t+k-1}}\right)=-\frac{1}{t+k-1}\left(-\ln U_k\right)$.
Mais d'après 9.a, $-\ln(U_k)$ suit la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$, c'est-à-dire la même loi que Y_k.
Donc $-\frac{Y_k}{t+k-1}$ a même loi que $\ln(R_{t,k})$.
Et puisque les Y_k sont mutuellement indépendantes, et indépendantes de X_{t+n}, de même que les $R_{t,k}$ sont indépendantes et indépendantes de X_{t+n}, on en déduit que
$\sum_{k=1}^{n}-\frac{Y_k}{t+k-1}+\ln(X_{t+n})$ et $\sum_{k=1}^{n}\ln(R_{t,k})+\ln(X_{t+n})$ ont même loi.

Et donc $\ln(X_{t+n})$ a même loi que $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{Y_{k+1}}{t+k}\right)+\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)+d_{n,t}-\gamma$.

10. D'après 9.d, et par linéarité de l'espérance,

$$E\left(\ln(X_t)\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{t+k}E(Y_{k+1})\right)+E\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)+d_{n,t}-\gamma$$

$$=-\gamma+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{t+k}\right)+E\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)+d_{n,t}.\qquad(\star)$$

Mais nous savons d'après la question 1.c que $d_{n,t}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et les encadrements de la question 3.c prouvent que $E\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
Et donc, en passant à la limite[10] lorsque $n\to+\infty$, il vient donc

$$\boxed{\psi(t)=E\left(\ln(X_t)\right)=-\gamma+\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{t+k}\right).}$$

Convergence
Au premier abord, il faudrait peut-être prouver la convergence de cette série (ce qui n'est pas très difficile).
Mais l'égalité ($\star$) permet d'écrire les sommes partielles de cette série comme combinaison linéaire de termes admettant tous une limite lorsque $n\to+\infty$, et donc, automatiquement, ces sommes partielles admettent une limite, et donc la série converge.

De plus, les Y_k étant mutuellement indépendantes, et indépendantes de X_{t+n}, il vient

$$V\left(\ln(X_t)\right)=\sum_{k=0}^{n-1}V\left(\frac{1}{k+1}-\frac{Y_{k+1}}{t+k}\right)+V\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(t+k)^2}+V\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right).$$

De plus, nous avons prouvé à la question 3.c que $V\left(\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Et donc en passant à la limite, $\boxed{\psi'(t)=V(\ln(X_t))=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2}.}$

11. La question 3.c nous a prouvé que $E\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Mais $E\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right)=E(\ln(X_t))-\ln(t)=\psi(t)-\ln(t)$.

Et donc $\boxed{\lim_{t\to+\infty}\psi(t)-\ln(t)=0.}$

12. On a $\ln(W)=\frac{1}{\mu}\ln(U)$. Or, nous avons prouvé à la question 9.a que $-\ln(U)\hookrightarrow\mathscr{E}(1)$.

Donc par stabilité[11] des lois γ, $-\mu\sum_{i=1}^{p}\ln W_i\hookrightarrow\gamma(p)$.

[11] Qui s'applique car les W_i sont indépendantes.

Autrement dit, $-\mu\sum_{i=1}^{p}\ln W_i$ a même loi que X_p. Et donc $G_p = \mu p\dfrac{1}{-\mu\sum_{i=1}^{p}\ln W_i}$ a même loi que $\mu p\dfrac{1}{X_p}$.
Et donc en réutilisant le résultat de la question 3.a :

$$E(G_p) = \mu p E\left(\frac{1}{X_p}\right) = \frac{\mu p}{p-1}.$$

Et donc $E(G_p) \neq \mu$: $\boxed{G_p \text{ n'est pas un estimateur sans biais de } \mu.}$

Biais
Notons en revanche que G_p est asymptotiquement sans biais.

De même, en réutilisant un calcul de la question 3.c,

$$E\left(G_p^2\right) = (\mu p)^2 E\left(\frac{1}{X_p^2}\right) = \frac{\mu^2 p^2}{(p-1)(p-2)}.$$

Par la formule de Huygens, il vient alors

$$V(G_p) = \frac{\mu^2p^2}{(p-1)(p-2)} - \frac{\mu^2p^2}{(p-1)^2} = \frac{\mu^2p^2}{(p-1)^2(p-2)}.$$

Ainsi, le risque quadratique de G_p, en tant qu'estimateur de μ vaut

$$\begin{aligned} r(G_p) &= b(G_p)^2 + V(G_p) \\ &= \left(\mu - \mu\frac{p}{p-1}\right)^2 + \frac{\mu^2p^2}{(p-1)^2(p-2)} \\ &= \frac{\mu^2}{(p-1)^2} + \frac{\mu^2p^2}{(p-1)^2(p-2)} \\ &= \frac{\mu^2(p^2+p-2)}{(p-1)(p-2)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Et donc $\boxed{G_p \text{ est un estimateur convergent de } \mu.}$

Rappel
Un estimateur dont le risque tend vers 0 est convergent.

13.a. C'est un grand classique : cette fonction simule une loi exponentielle de paramètre λ.
Pour le prouver, le plus simple serait probablement de déterminer la fonction de répartition de $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$, où $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.
Remarquons plutôt que $1-U$ suit également la loi $\mathcal{U}([0,1])$.
Et donc par 9.a, $-\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, de sorte que $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

Rappel
Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors $\dfrac{X}{\lambda} \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

13.b. Il s'agit de se rappeler que la somme de n lois $\gamma(1)$ indépendantes est une loi $\gamma(n)$, et que la loi $\gamma(1)$ n'est autre que la loi $\mathcal{E}(1)$. Et donc il suffit de simuler la somme de n lois $\mathcal{E}(1)$.

```
function y = g(n)
        y = 0
        for i=1 :n
                y = y-log(rand())
        end
endfunction
```

13.c. Le résultat de la question 12 est valable pour tout $\mu > 0$, et donc en particulier pour $\mu = 1$:
$\dfrac{p}{-\sum_{i=1}^{p}\ln(W_i)} \xrightarrow[p\to+\infty]{P} 1.$
Mais les $-\ln(W_i)$ sont indépendantes, suivent la loi $\mathcal{E}(1)$, et donc leur somme suit la loi $\gamma(p)$.
Comme le résultat de la commande `g(p)`.
Et donc pour p grand, le résultat de la commande `g(p)` doit être proche de 1.

Partie III. Quelques propriétés de la fonction Γ.

14. Premières applications : les formules de Wilks et Legendre.

14.a. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{2k+2}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+2}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+2}\\&=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

D'autre part, en séparant les termes pairs des termes impairs, on a

$$\begin{aligned}2\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{a_{k+1}}{t+k}&=2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2k+2}}{2k+1+t}+2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2k+1}}{2k+t}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2k+2}}{\frac{t+1}{2}+k}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{2k+1}}{\frac{t}{2}+k}.\end{aligned}$$

Et donc en sommant les deux relations obtenues, il vient bien

$$\boxed{2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{k+1}}{t+k}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{2k+1}}{\frac{t}{2}+k}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{a_{2k+2}}{\frac{t+1}{2}+k}\right)+2\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right).}$$

14.b. On a

$$\begin{aligned}w_n&=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+2}-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+2}\\&=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\\&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\&=\boxed{h_{2n}-h_n.}\end{aligned}$$

Et donc

$$w_n=\gamma_{2n}+\ln(2n)-\gamma_n-\ln(n)=\gamma_{2n}-\gamma_n+\ln(2)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\gamma-\gamma+\ln(2)=\boxed{\ln(2).}$$

14.c. D'après la question 9.d, la variable aléatoire $2\ln(X_t)$ est de même loi que

$$\begin{aligned}&2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{Y_{k+1}}{t+k}\right)+2\ln\left(\frac{X_{t+2n}}{t+2n}\right)+2d_{2n,t}-2\gamma\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{Y_{2k+1}}{\frac{t}{2}+k}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{Y_{2k+2}}{\frac{t+1}{2}+k}\right)+2w_n+2\ln\left(\frac{X_{t+2n}}{t+2n}\right)+2d_{2n,t}-2\gamma.\end{aligned}$$

Mais la question 9.d, appliquée avec $\frac{t}{2}$ au lieu de t montre également que $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{Y_{k+1}}{\frac{t}{2}+k}\right)+\ln\left(\frac{X_{t/2+n}}{t+n}\right)+d_{n,t/2}-\gamma$ a même loi que $\ln(X_{t/2})$.

De la même manière, $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{Y_{k+1}}{\frac{t+1}{2}+k}\right)+\ln\left(\frac{X_{(t+1)/2+n}}{t+n}\right)+d_{n,(t+1)/2}-\gamma$ a même loi

que $\ln(X_{(t+1)/2})$.
Ainsi, $2\ln(X_t)$ a même loi[12] que

$$\ln\left(X_{t/2}\right)+\ln\left(X_{(t+1)/2}\right)-\ln\left(\frac{X_{(t+1)/2+n}}{\frac{t+1}{2}+n}\right)-\ln\left(\frac{X_{t/2+n}}{\frac{t}{2}+n}\right)+2\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)+2w_n+2d_{n,t}-2d_{n,t/2}-2d_{n,(t+1)/2}.$$

[12] Toutes les variables considérées sont indépendantes.

Or, à la question 3.c, nous avons prouvé que $\ln\left(\dfrac{X_{t+n}}{t+n}\right)\xrightarrow{P} 0$.
Et de même, $\ln\left(\dfrac{X_{t/2+n}}{t/2+n}\right)\xrightarrow{P} 0$ et $\ln\left(\dfrac{X_{(t+1)/2+n}}{(t+1)/2+n}\right)\xrightarrow{P} 0$.
Enfin, $2w_n+2d_{n,t}-2d_{n,t/2}-2d_{n,(t+1)/2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ln(2)$.
Nous pouvons donc appliquer le résultat de la question 4, où $N=\ln(X_{t/2})+\ln(X_{(t+1)/2})$, $u_n=2w_n+2d_{n,t}-2d_{n,t/2}-2d_{n,(t+1)/2}$ et

$$D_n=\underbrace{-\ln\left(\frac{X_{(t+1)/2+n}}{\frac{t+1}{2}+n}\right)}_{=A_n}\underbrace{-\ln\left(\frac{X_{t/2+n}}{\frac{t}{2}+n}\right)}_{=B_n}+\underbrace{2\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)}_{=C_n}.$$

Et donc $\boxed{M=2\ln(X_t)\text{ a même loi que } N+u=\ln(X_{t/2})+\ln(X_{(t+1)/2})+2\ln(2).}$

14.d. D'après la question précédente, $2\ln(X_{2s})$ et $\ln(X_s)+\ln\left(X_{s+\frac{1}{2}}\right)+2\ln(2)$ sont de même loi.
Et donc $2r\ln(X_{2s})$ et $r\ln(X_s)+r\ln\left(X_{s+\frac{1}{2}}\right)+2r\ln(2)$ sont de même loi.
En passant à l'exponentielle, il vient $(X_{2s})^{2r}$ et $2^{2r}\left(X_s\right)^r\left(X_{s+\frac{1}{2}}\right)^r$ sont de même loi.

14.e. Pour tout $r>0$ et tout $s>0$, on a donc

$$E\left(X_s^{2r}\right)=2^{2r}E\left(X_s^rX_{s+\frac{1}{2}}^r\right)=2^{2r}E\left(X_s^r\right)E\left(X_{s+\frac{1}{2}}^r\right).\qquad(\diamond)$$

Détails
Les variables X_s et $X_{s+1/2}$ sont indépendantes, donc il en est de même de X_s^r et $X_{s+1/2}^r$.
Et donc l'espérance du produit est égale au produit des espérances.

Mais par le théorème de transfert, pour tout $r>0$ et tout $t>0$, on a

$$E(X_t^r)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(t)}x^{t+r-1}e^{-}\,dx=\frac{\Gamma(t+r)}{\Gamma(t)}.$$

Prenons $s=\dfrac{1}{2}$, de sorte que pour tout $r>0$, la relation $(\diamond)$ s'écrit

$$\frac{\Gamma(2r+1)}{\Gamma(1)}=2^{2r}\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(1)}\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Méthode
Nous choisissons $s=\frac{1}{2}$, principalement pour réussir à faire apparaître $\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)$, qui viendra donc de $E\left(X_{1/2}^r\right)$.

En se rappelant que $\Gamma(1)=1$, et en multipliant par $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, il vient

$$2^{2r}\Gamma(r+1)\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)=\Gamma(2r+1)\sqrt{\pi}.$$

Enfin, notons que $\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)$ et $\Gamma(2r+1)=2r\Gamma(2r)$ de sorte qu'après division par $2r$,

$$\boxed{2^{2r-1}\Gamma(r)\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)=\Gamma(2r)\sqrt{\pi}.}$$

15. Deuxième application : la formule de Stirling

15.a. Pour tout $u>0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{a}{u^2}+\frac{b}{(u+1)^2}+\frac{c}{u}+\frac{d}{u+1}&=\frac{a(u+1)^2+bu^2+cu(u+1)^2+du^2(u+1)}{u^2(u+1)^2}\\&=\frac{a(u^2+2u+1)+bu^2+c(u^3+2u^2+u)+d(u^3+u^2)}{u^2(u+1)^2}\\&=\frac{(c+d)u^3+(a+b+2c+d)u^2+(2a+c)u+a}{u^2(u+1)^2}.\end{aligned}$$

Et donc $\dfrac{a}{u^2}+\dfrac{b}{(u+1)^2}+\dfrac{c}{u}+\dfrac{d}{u+1}=\dfrac{1}{u^2(u+1)^2}$ pour tout $u>0$ si et seulement si $(c+d)u^3+(a+b+2c+d)u^2+(2a+c)u+a=1$ pour tout $u>0$.
Or deux polynôme coïncident en une infinité de points[13] si et seulement si ils ont les mêmes coefficients, donc si et seulement si

[13] Il y a une infinité de réels $u>0$.

$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+c=0 \\ a+b+2c+d=0 \\ c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a=1 \\ c=-2 \\ d=2 \\ b=1 \end{cases}}$$

Et donc il vient, pour tout $t>0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(t+k)^2}+\frac{1}{(t+k+1)^2}-\frac{2}{t+k}+\frac{2}{(t+k+1)}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(t+k)^2}+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{(t+i)^2}-2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{t+k}+2\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{t+i}\\
&= -\frac{1}{t^2}+2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(t+k)^2}-\frac{2}{t}\\
&= -\frac{1}{t^2}+2\psi'(t)-\frac{2}{t}.
\end{aligned}$$

On a utilisé l'expression de $\psi'(t)$ obtenue à la question 10.

Et donc

$$\boxed{\psi'(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}.}$$

15.b. Puisque $\psi'(t)-\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2t^2}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}$, en utilisant l'encadrement donné par l'énoncé, il vient donc

$$\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\left(t+k+\frac{1}{14}\right)^2}-\frac{1}{\left(t+k+\frac{15}{14}\right)^2}\right)\leqslant \psi'(t)-\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}\leqslant \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(t+k)^3}-\frac{1}{(t+k+1)^3}\right).$$

Remarque
Toutes les séries en jeu sont évidemment convergentes par comparaison à des séries de Riemann.

Or, il est immédiat que la dernière série est une série télescopique :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(t+k)^3}-\frac{1}{(t+k+1)^3}\right)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{(t+k)^3}-\frac{1}{(t+k+1)^3}\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{(t+N+1)^3}\right)=\frac{1}{t^3}.$$

De plus, en notant que $t+k+\dfrac{15}{14}=t+(k+1)+\dfrac{1}{14}$, la première série est également télescopique, et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\left(t+k+\frac{1}{14}\right)^2}-\frac{1}{\left(t+k+\frac{15}{14}\right)^2}\right)=\frac{1}{\left(t+\frac{1}{14}\right)^2}.$$

Et donc nous avons prouvé que

$$\boxed{\frac{1}{6}\frac{1}{\left(t+\frac{1}{14}\right)^2}\leqslant \psi'(t)-\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}\leqslant \frac{1}{6t^3}.}$$

Remarque
Si $A>t$, alors les bornes sont «dans le bon sens», et donc la croissance de l'intégrale s'applique bien.

Intégrons cette inégalité entre t et A, avec $A>t$. Alors

$$\int_t^A\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6\left(x+\frac{1}{14}\right)^3}\right)dx\leqslant\int_t^A\left(\psi'(x)-\frac{1}{x}\right)dx\leqslant\int_t^A\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^2}\right)dx.$$

On a alors
$$\int_t^A\left(\psi'(x)-\frac{1}{x}\right)dx=[\psi(x)-\ln(x)]_t^A=\psi(A)-\ln(A)-(\psi(t)-\ln(t))\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}-(\psi(t)-\ln(t)).$$
D'autre part,
$$\int_t^A\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6\left(x+\frac{1}{14}\right)^3}\right)dx=\left[-\frac{1}{2x}-\frac{1}{12\left(x+\frac{1}{14}\right)^2}\right]_t^A=-\frac{1}{2A}-\frac{1}{12\left(A+\frac{1}{14}\right)^2}+\frac{1}{2t}+\frac{1}{12\left(t+\frac{1}{14}\right)^2}$$
$$\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2t}+\frac{1}{12\left(t+\frac{1}{14}\right)^2}.$$
Enfin,
$$\int_t^A\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}\right)dx=\left[-\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}\right]_t^A\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2t}+\frac{1}{12t^2}.$$
Autrement dit, en faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on a
$$\frac{1}{2t}+\frac{1}{12\left(t+\frac{1}{14}\right)^2}\leqslant-(\psi(t)-\ln(t))\leqslant\frac{1}{2t}+\frac{1}{12t^2}.$$
Et donc en multipliant le tout par -1, on a enfin
$$\boxed{-\frac{1}{2t}-\frac{1}{12t^2}\leqslant\psi(t)-\ln(t)\leqslant-\frac{1}{2t}-\frac{1}{12\left(t+\frac{1}{14}\right)^2}.}$$

Danger ! Attention au sens des inégalités : on prend $t>1$ pour diviser par un nombre positif, et donc préserver le sens des inégalités.

En divisant cette inégalité par $\ln t$, on obtient, pour $t>1$,
$$1-\frac{1}{2t\ln t}-\frac{1}{12t^2\ln t}\leqslant\frac{\psi(t)}{\ln t}\leqslant1-\frac{1}{2t\ln t}-\frac{1}{12\left(t+\frac{1}{14}\right)^2\ln t}.$$
Et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\psi(t)}{\ln t}=1\Leftrightarrow\psi(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\ln(t)$.
De même, on a
$$\frac{1}{2t}+\frac{t}{6\left(t+\frac{1}{14}\right)^3}\leqslant t\psi'(t)-1\leqslant\frac{1}{2t}+\frac{1}{6t^2}$$
de sorte que par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{t\to+\infty}t\psi'(t)-1=0\Leftrightarrow\psi'(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t}$.
Et donc on en déduit que
$$\boxed{E(\ln(X_t))\underset{t\to+\infty}{\sim}\ln(t)\text{ et }V(\ln(X_t))\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{t}.}$$

15.c. Notons que $\psi:t\mapsto\dfrac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$ est la dérivée de $t\mapsto\ln(\Gamma(t))$.
Et donc
$$\int_t^y\left(\psi(x)-\ln(x)+\frac{1}{2x}\right)dx=\left[\ln(\Gamma(x))-x\ln(x)+x+\frac{\ln(x)}{2}\right]_t^y.$$
Mais l'encadrement de la question 15.b montre que
$$-\frac{1}{12x^2}\leqslant\psi(x)-\ln(x)+\frac{1}{2x}\leqslant-\frac{1}{12\left(t+\frac{1}{14}\right)^2}$$
et donc $\psi(x)-\ln(x)+\dfrac{1}{2x}\underset{x\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{12x^2}$.
On en déduit, par critère de comparaison pour les intégrales de signe constant, que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\psi(x)-\ln(x)+\frac{1}{2x}\right)dx$ converge.

Autrement dit, $\lim_{y\to+\infty}\int_1^y\left(\psi(x)-\ln(x)+\frac{1}{2x}\right)dx$ existe.

Et donc $\lim_{y\to+\infty}\ln(\Gamma(y))-y\ln(y)+y+\frac{\ln(y)}{2}$ existe.

Or $\ln(\Gamma(y)-y\ln(y)+y+\frac{\ln(y)}{2}=\ln\left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}}e^{-y}}\right)$.

Ceci prouve donc que $\boxed{\lim_{y\to+\infty}\ln\left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}}e^{-y}}\right)\text{ existe.}}$

15.d. Commençons par nous assurer que l'identité donnée par l'énoncé est correcte :

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^x\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{-x}=\left(\frac{2x+1}{2}\right)^x\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{-x}=\left(\frac{2x+1}{2}\right)^x\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^x=x^x.$$

Par définition, $e^\theta=\lim_{y\to+\infty}\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}}e^{-y}}$.

Et donc en particulier,

$$e^\theta=\lim_{r\to+\infty}\frac{\Gamma(2r)}{(2r)^{2r-\frac{1}{2}}e^{-2r}}.$$

Or, d'après la question 14.e,

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(2r)}{(2r)^{2r-\frac{1}{2}}e^{-2r}}&=\frac{2^{2r-1}\Gamma(r)\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(2r)^{2r-\frac{1}{2}}e^{-2r}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(r)\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{r^{2r-\frac{1}{2}}e^{-2r}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(r)}{r^{r-\frac{1}{2}}e^{-r}}\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{r^re^{-r}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(r)}{r^{r-\frac{1}{2}}e^{-r}}\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^r\left(1+\frac{1}{2r}\right)^{-r}e^{-r}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(r)}{r^{r-\frac{1}{2}}e^{-r}}\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}e^{-r-\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2r}\right)^r.\end{aligned}$$

C'est ici qu'on utilise l'identité donnée par l'énoncé.

Mais par définition de e^θ, on a $\lim_{r\to+\infty}\frac{\Gamma(r)}{r^{r-\frac{1}{2}}e^{-r}}=\lim_{r\to+\infty}\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}e^{-r-\frac{1}{2}}}=e^\theta$.

D'autre part, on a

$$\left(1+\frac{1}{2r}\right)^r=e^{r\ln\left(1+\frac{1}{2r}\right)}.$$

Or, $\ln\left(1+\frac{1}{2r}\right)\underset{r\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2r}$ et donc $r\ln\left(1+\frac{1}{2r}\right)\underset{r\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}$.

Par continuité de l'exponentielle, on a donc $\lim_{r\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2r}\right)^r=e^{1/2}$.

Et donc il vient, par unicité de la limite,

$$e^\theta=\lim_{r\to+\infty}\frac{\Gamma(2r)}{(2r)^{2r-\frac{1}{2}}e^{-2r}}=\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(r)}{r^{r-\frac{1}{2}}e^{-r}}\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}{\left(r+\frac{1}{2}\right)^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}e^{-r-\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2r}\right)^r=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{2\theta}.$$

Et donc $\boxed{e^\theta=\sqrt{2\pi}.}$

On en déduit donc que

$$\frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}}\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi}\Leftrightarrow\boxed{\Gamma(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}.}$$

Remarque *: en particulier, pour $n\in\mathbf{N}$, on trouve $(n-1)!=\Gamma(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi}n^{n-1/2}e^{-n}$, ce qui après multiplication par n nous donne l'équivalent «classique»*

$$n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}.$$

C'est généralement cette formule que l'on appelle formule de Stirling. On en trouvera une preuve «simple» dans le sujet d'EML 2012.

EXTRAITS COMMENTÉS DU RAPPORT DU JURY

3.a — Dans cette question, on demandait explicitement de justifier la convergence absolue d'une intégrale. Le plus souvent, les candidats se contentent de faire le calcul pour conclure.

✎ De manière générale, lorsqu'on calcule une espérance, à part pour les variables aléatoires finies, il y a une convergence à justifier (d'une série pour les variables discrètes, d'une intégrale pour les variables à densité).
S'il n'y a généralement pas besoin d'écrire un roman pour justifier cette convergence (le calcul fait souvent apparaître une série/intégrale de référence), il faut tout de même indiquer à quel moment on a prouvé la convergence. Ceci permet notamment de montrer qu'on sait bien que le théorème de transfert est valable **sous réserve de convergence** de l'intégrale/la série qui apparaît.

4.a — Cette question est très mal traitée. Ainsi, l'inégalité $P(A \cup B \cup C) \leqslant P(A) + P(B) + P(C)$ a donné lieu à des hypothèses de validité assez curieuses telles que «les événements A, B et C doivent être indépendants», ou encore «ils doivent être incompatibles». On lit souvent des implications et des inégalités ($\leqslant$) entre événements, des inclusions entre variables aléatoires ou entre probabilité.

✎ Rappelons que la formule $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$ est **toujours** valable. En revanche ce n'est une égalité que si les événements sont incompatibles.
Et l'indépendance n'a rien à faire ici, elle n'apparaît que si on s'intéresse à la probabilité de $A \cap B$, et non de $A \cup B$.
Enfin, les autres erreurs ne sont malheureusement pas surprenantes, et relèvent à la fois d'une mauvaise compréhension des concepts de probabilités, ainsi que de problèmes de logique.
Un événement est un ensemble (plus précisément : un sous-ensemble de l'univers Ω), et qu'à ce titre on peut écrire des inclusions et/ou des égalités entre événements. Mais pas d'implications (on ne peut avoir une implication qu'entre propositions logiques, par exemple des égalités), ni d'inégalités (on ne peut avoir une inégalité qu'entre deux nombres réels) ou de sommes.
Enfin, une probabilité est un nombre, et on ne peut donc pas avoir d'inclusion entre probabilités.
S'il est parfois possible de cacher son manque de compréhension de toutes ces notions dans des sujets plus classiques, il est plus dur d'aborder sérieusement un sujet de Maths II sans être à l'aise avec ces concepts.

4.b — Cette question et la suivante révèlent le faible niveau de compréhension des concepts de limite et de variable aléatoire : la plupart des candidats confondent l'égalité (ponctuelle) des variables aléatoires et leur égalité en loi.

✎ Il est évident que deux variables aléatoires égales ont la même loi, la réciproque étant clairement fausse.
Par exemple : si on lance deux dés, et qu'on note X_1 (respectivement X_2) le résultat du premier (resp. du second) lancer. Alors il est clair que X_1 et X_2 suivent la même loi (une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$). En revanche, X_1 et X_2 ne sont pas égales : le résultat du premier dé n'est pas toujours le même que celui du premier dé (l'un des deux dés peut par exemple donner un 1 alors que l'autre donne un 6).

5.b — L'indépendance des variables aléatoires n'est pas assez souvent mentionnée pour justifier l'application de la formule de convolution.

✎ Le produit de convolution pour les variables à densité n'est valable que pour la somme de deux variables **indépendantes**. C'est toujours le cas lorsqu'on en a besoin, mais il est indispensable de vérifier cette indépendance (généralement, il suffit de la mentionner). En l'absence de cette hypothèse d'indépendance, nous ne disposons d'aucun résultat général sur la somme de deux variables à densité.

13.b — La fonction qui devait simuler les valeurs prises par une variable aléatoire ne fait souvent que calculer des valeurs de la densité de cette variable.

✎ Simuler une variable aléatoire devrait retourner un résultat aléatoire (et donc en `Scilab` devrait faire appel à `rand` ou à `grand`), c'est-à-dire que plusieurs appels successifs à la fonction devraient retourner des résultats différents. Alors que le calcul de la densité (qui doit tout de même dépendre d'un paramètre x : pour quelle valeur de x veut-on calculer $f(x)$?) n'a rien d'aléatoire, et doit toujours retourner la même valeur.

15.a — Une proportion non négligeable de candidats ont eu le courage de calculer la décomposition en éléments simples (en résolvant un système de quatre équations) et le mérite de trouver les bons coefficients.

✎ La première partie de cette question est somme toute assez classique, bien que particulièrement calculatoire.
S'il est assez clair dès le départ que les calculs vont être pénibles, il ne faut pas hésiter à se lancer : on est dans une épreuve difficile, et il n'y aura pas ou peu de questions «faciles», il faut se raccrocher aux questions que l'on pense savoir faire. En tous cas, il semble que certains candidats y arrivent, ce qui leur permet sûrement de faire la différence au final.

Maths II 2009

Sujet : Théorème de Lehmann-Scheffé pour une loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$ **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : probabilités discrètes, couples de variables aléatoires, espérance conditionnelle, estimation ponctuelle.

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Dans tout le problème, N désigne un entier supérieur ou égal à 1.
On note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance, lorsqu'elles existent, de toute variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé.

Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$, mutuellement indépendantes et de même loi uniforme discrète sur $[\![1,N]\!]$.
On pose, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $T_n = \sup(U_1,U_2,\ldots,U_n)$ et $Z_n = \inf(U_1,U_2,\ldots,U_n)$. On admet que T_n et Z_n sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$. Ainsi, pour tout ω de Ω, on a

$$T_n(\omega) = \max(U_1(\omega),U_2(\omega),\ldots,U_n(\omega)) \text{ et } Z_n(\omega) = \min(U_1(\omega),U_2(\omega),\ldots,U_n(\omega)).$$

On rappelle que si C désigne un élément de $\mathscr{A}$, on note $\mathbb{1}_C$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement C, définie sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$ par

$$\mathbb{1}_C(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in C \\ 0 & \text{si } \omega \notin C \end{cases}$$

On pose, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $d_n(N) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } N \geqslant 2 \\ 0 & \text{si } N = 1 \end{cases}$

Préliminaire

1. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$, à valeurs dans $[\![1,N]\!]$. Établir les deux relations suivantes :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{N-1} P(Y>k) \text{ et } E\left(Y^2\right) = \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)P(Y>k).$$

Partie I. Inf et Sup

2. Rappeler, sans démonstration, les valeurs respectives de $E(U_1)$ et de $V(U_1)$.
3. a. Calculer, pour tout k de $[\![1,N]\!]$, $P(T_n \leqslant k)$.
   b. En déduire la loi de probabilité de T_n.
4. a. Montrer que la suite $(d_n(N))_{n\geqslant 1}$ est convergente, et calculer sa limite.
   b. Exprimer $E(T_n)$ en fonction de N et de $d_n(N)$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} E(T_n)$.
   c. Établir la formule suivante : $V(T_n) = (2N-1)d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - d_n^2(N)$.
   En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} V(T_n)$.
   d. Montrer que si $N \geqslant 2$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \dfrac{1}{N}$.
   En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$, on a : $V(T_n) \sim d_n(N)$.
5. Déterminer la loi de Z_n. Calculer $E(Z_n)$ et $V(Z_n)$.
6. Écrire une fonction `Scilab` `simulmax(N,n)` qui simule la variable aléatoire T_n.

Partie II : Couple (Inf,Sup)

7. On pose, pour tout n de $\mathbf{N}^*$ et pour tout couple (k,ℓ) de $\mathbf{N}^2$, $\phi_n(k,\ell) = P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell])$.
   a. Montrer, pour tout (k,ℓ) de $[\![1,N]\!]^2$, la relation suivante :

$$\phi_n(k,\ell) = \begin{cases} \left(\frac{k}{N}\right)^n & \text{si } k \leqslant \ell \\ \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n & \text{si } k > \ell \end{cases}$$

b. Établir, pour tout (k,ℓ) de $[\![1,N]\!]^2$, la formule suivante :

$$P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \phi_n(k,\ell) + \phi_n(k-1,\ell-1) - \phi_n(k-1,\ell) - \phi_n(k,\ell-1).$$

c. En déduire, en distinguant les trois cas $k<\ell, k=\ell$ et $k>\ell$, l'expression de $P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell])$ en fonction de k et ℓ.

8. On donne, pour tout couple (m,n) de $(\mathbf{N}^*)^2$, les deux relations suivantes :

$$\sum_{j=1}^{m} [(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n] = (m+1)^n - m^n - 1 \qquad (10.1)$$

$$\sum_{j=1}^{m} j\,[(j+1)^n - 2j^n + (j-1)^n] = m(m+1)^n - (m+1)m^n \qquad (10.2)$$

a. En déduire, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, la formule suivante : $E(T_nZ_n) = N(1+d_{n+1}(N))$.

b. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, ρ_n le coefficient de corrélation linéaire entre T_n et Z_n. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n$ lorsque $N \geqslant 2$.

9. **a.** Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, et pour tout couple (k,ℓ) de $[\![1,N]\!]^2$, calculer la probabilité conditionnelle $P_{[T_n=k]}(Z_n=\ell)$.

b. En déduire, pour tout n de $\mathbf{N}^*$ et pour tout k de $[\![1,N]\!]$, l'espérance conditionnelle $E(Z_n|T_n=k)$ de Z_n sachant $[T_n=k]$.

Partie III : Prévision

Pour n entier de $\mathbf{N}^*$, on dispose d'un $(n+1)$-échantillon indépendant identiquement distribué (i.i.d.) $(U_1,U_2,\dots,U_{n+1})$ de la loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$.

On pose $T_n = \sup(U_1,U_2,\dots,U_n)$ et $T_{n+1} = \sup(U_1,\dots,U_{n+1}) = \sup(T_n,U_{n+1})$.

Pour tout $t=(t_1,\dots,t_N)$ de $\mathbf{R}^N$, on pose : $W_t(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{N} t_k \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}$.

Dans cette partie, on se propose de déterminer la valeur de t pour laquelle les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) $E(W_t(T_n)) = E(T_{n+1})$;

ii) $E\left[(T_{n+1} - W_t(T_n))^2\right]$ est minimal.

10. Montrer, pour tout k de $[\![1,N]\!]$, la relation : $P(W_t(T_n)=t_k) = P(T_n=k)$.

11. Établir, pour tout k de $[\![1,N]\!]$, la formule suivante :

$$E(T_{n+1}\times \mathbb{1}_{[T_n=k]}) = E(T_{n+1}|T_n=k)\times P(T_n=k).$$

12. **a.** Calculer, pour tout couple (k,j) de $[\![1,N]\!]^2$, $P([T_n=k]\cap[T_{n+1}=j])$.

b. En déduire, pour tout couple (k,j) de $[\![1,N]\!]^2$, la probabilité conditionnelle $P_{[T_n=k]}(T_{n+1}=j)$.

c. Déterminer, pour tout k de $[\![1,N]\!]$, l'expression de l'espérance conditionnelle $E(T_{n+1}|T_n=k)$ de T_{n+1} sachant $[T_n=k]$.

d. En appliquant la formule de l'espérance totale, déduire de la question précédente la relation suivante :

$$E(T_{n+1}) = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N}\left(E\left(T_n^2\right) - E(T_n)\right).$$

13. Établir l'égalité suivante : $(W_t(T_n))^2 = \sum\limits_{k=1}^{N} t_k^2 \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}$.

14. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}^N$ à valeurs réelles par :

$$g(t_1,t_2,,\dots,t_N) = E\left[(T_{n+1}-W_t(T_n))^2\right].$$

a. À l'aide des résultats des questions 11,12 et 13, expliciter g en fonction des variables $t_1,t_2,\dots,t_N$.

b. Montrer que g admet un minimum global sur $\mathbf{R}^N$, atteint en un point $\theta=(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_N)$ que l'on déterminera en fonction de $E(T_{n+1}|T_n=1), E(T_{n+1}|T_n=2),\dots,E(T_{n+1}|T_n=N)$.

15. Établir les deux relations suivantes :

$$E(W_\theta(T_n)) = E(T_{n+1}) \text{ et } V(W_\theta(T_n)) \leqslant V(T_{n+1}).$$

16. **a.** Établir, pour tout i de $\mathbf{N}^*$, l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{N} k^i \times \mathbb{1}_{[T_n=k]} = (T_n)^i.$$

b. En déduire la relation suivante :

$$W_\theta(T_n) = \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N}\left(T_n^2 - T_n\right).$$

Partie IV : Estimation

Soit U une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de loi uniforme discrète sur $[\![1, N]\!]$. On suppose que le paramètre N est inconnu.

Cette partie a pour objet la détermination d'un estimateur ponctuel de N, sans biais et de variance minimale.

Pour n entier supérieur ou égal à 1, soit $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ un n-échantillon i.i.d. de la loi de U.

17. Soit ε un réel strictement positif. On pose :

$$A_n(\varepsilon) = [|T_n - N| \geqslant \varepsilon] \text{ et } B_n(\varepsilon) = [|T_n - E(T_n)| + |d_n(N)| \geqslant \varepsilon]\,.$$

   a. Peut-on dire que $T_n + d_n(N)$ est un estimateur sans biais de N ?

   b. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'estimateurs asymptotiquement sans biais du paramètre N.

   c. Montrer que $A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$ et qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout $n > n_0$, on a

$$B_n(\varepsilon) \subset [|T_n - E(T_n)| \geqslant \varepsilon/2]\,.$$

   d. En déduire que la suite d'estimateurs $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

18. a. Calculer, pour tout n-uplet $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de $[\![1, N]\!]^2$, $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right)$.

   b. En déduire que, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, la loi conditionnelle du vecteur aléatoire $(U_1, \dots, U_n)$ sachant $[T_n = k]$ est donnée par

$$P_{[T_n=k]}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = u_i]\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{k^n - (k-1)^n} & \text{si pour tout } i \in [\![1, n]\!], 1 \leqslant u_i \leqslant N \text{ et } \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(u_i) = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   On remarquera que cette loi conditionnelle ne dépend pas du paramètre N.

19. On pose, pour n entier de $\mathbf{N}^*$, $S_n = T_n + Z_n - 1$ et, pour tout k de $[\![1, N]\!]$,

$$\psi_n(k) = \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n}.$$

   a. Montrer que S_n est un estimateur sans biais de N.

   b. Établir, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, l'égalité : $\psi_n(k) = E(S_n | T_n = k)$.

   c. En déduire que $\psi_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N.

   d. On pose, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, $\varphi_n(k) = E(S_n^2 | T_n = k)$.
   Établir, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, l'inégalité : $\psi_n^2(k) \leqslant \varphi_n(k)$ (on pourra utiliser la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\lambda \mapsto E((S_n - \lambda)^2 | T_n = k)$). En déduire que $V(\psi_n(T_n)) \leqslant V(S_n)$.

   e. Calculer $V(S_n)$. En déduire que $\psi_n(T_n)$ est un estimateur convergent de N.

20. Soit, pour n entier de $\mathbf{N}^*$, un estimateur sans biais R_n du paramètre N.
   On pose, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, $f_n(k) = E(R_n | T_n = k)$.

   a. En utilisant une méthode analogue à celle de la question 19.*d*, montrer que
   $V(f_n(T_n)) \leqslant V(R_n)$.

   b. Soit F une fonction réelle. Montrer que pour n fixé dans $\mathbf{N}^*$, la condition «pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, $E(F(T_n)) = N$» est vérifiée si et seulement si, pour tout k de $[\![1, N]\!]$, on a : $F(k) = \psi_n(k)$.

   c. En déduire que dans l'ensemble des estimateurs sans biais de N, l'estimateur $\psi_n(T_n)$ est optimal, dans le sens où $V(\psi_n(T_n))$ est minimale.

   La partie IV constitue une démonstration du théorème de Lehmann-Scheffé dans le cas particulier d'une loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$, avec N inconnu.

MATHS II 2009 : CORRIGÉ

Préliminaires

1. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,N]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} P(Y>k) &= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i=k+1}^{N} P(Y=i) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{i-1} P(Y=i)\\ &= \sum_{i=1}^{N} P(Y=i)\sum_{k=0}^{i-1} 1 = \sum_{i=1}^{N} P(Y=i)i\\ &= \boxed{E(Y).}\end{aligned}$$

Remarque

Ce résultat reste en fait valable pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ admettant une espérance, en remplaçant la somme finie par la somme d'une série :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k).$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)P(Y>k) &= \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)\sum_{i=k+1}^{N} P(Y=i) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{i-1}(2k+1)P(Y=i)\\ &= \sum_{i=1}^{N} P(Y=i)\sum_{k=0}^{i-1}(2k+1) = \sum_{i=1}^{N} P(Y=i)\left(2\sum_{k=0}^{i-1} k + \sum_{k=0}^{i-1} 1\right)\\ &= \sum_{i=1}^{N} P(Y=i)\left(2\frac{(i-1)i}{2}+i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(Y=i)(i^2-i+i)\\ &= \sum_{i=1}^{N} i^2 P(Y=i) = \boxed{E\left(Y^2\right).}\end{aligned}$$

Partie I : Inf et Sup

2. On a $\boxed{E(U_1) = \dfrac{N+1}{2} \text{ et } V(U_1) = \dfrac{N^2-1}{12}.}$

3.a. Pour tout $k \in [\![1,N]\!]$ on a, par indépendance des U_i,

$$P(T_n \leqslant k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[U_i \leqslant k]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(U_i \leqslant k) = (P(U_1 \leqslant k))^n = \boxed{\left(\frac{k}{N}\right)^n.}$$

3.b. Puisque T_n est à valeurs dans $[\![1,N]\!]$, on en déduit, que

$$P(T_n = 1) = P(T_n \leqslant 1) = \frac{1}{N^n}$$

et que pour $k \in [\![2,N]\!]$,

$$\boxed{P(T_n = k) = P(T_n \leqslant k) - P(T_n \leqslant k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n.}$$

Notons que cette seconde formule reste valable pour $k=1$.

4.a. Si $N=1$, $d_n(N) = 0$ pour tout n, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} d_n(N) = 0.$$

Si $N \geqslant 2$, pour tout $k \in [\![1,N-1]\!]$, on a $0 \leqslant \frac{k}{N} < 1$ et donc $\left(\frac{k}{N}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, par somme d'un nombre fini[1] de suites de limites nulles, $(d_n(N))_{n\geqslant 1}$ est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} d_n(N) = \sum_{k=1}^{N-1}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{k}{N}\right)^n = \boxed{0.}$$

[1] et fixé !

4.b. D'après la question préliminaire, on a $E(T_n) = \sum_{k=0}^{N-1} P(T_n > k)$. Or,

$$P(T_n > k) = 1 - P(T_n \leqslant k) = 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

et donc

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{N-1}\left(1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n\right) = N - \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n = N - \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n = \boxed{N - d_n(N).}$$

On en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = N.}$

4.c. Toujours à l'aide du préliminaire, on a

$$\begin{aligned}
E\left(T_n^2\right) &= \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)P(Y > k) = \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)\left(1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1) - \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)\left(\frac{k}{N}\right)^n = 2\sum_{k=0}^{N-1} k + N - \sum_{k=0}^{N-1}(2k+1)\left(\frac{k}{N}\right)^n\\
&= 2\frac{N(N-1)}{2} + N - d_n(N) - 2\sum_{k=1}^{N-1} k\left(\frac{k}{N}\right)^n\\
&= N^2 - d_n(N) - 2N\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}\\
&= N^2 - d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N).
\end{aligned}$$

On a alors, par la formule de Huygens,

$$\begin{aligned}
V(T_n) = E\left(T_n^2\right) - E(T_n)^2 &= N^2 - d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - (N - d_n(N))^2\\
&= N^2 - d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - N^2 + 2Nd_n(N) - d_n(N)^2\\
&= (2N-1)d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - d_n^2(N).
\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} d_n(N) = 0$, on a également $\lim_{n\to+\infty} d_n(N)^2 = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} d_{n+1}(N) = 0$. Et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} V(T_n) = 0.}$$

Intuition

Lorsque deux suites tendent vers 0, c'est celle qui tend le «plus vite» vers 0 qui est négligeable devant l'autre. Pour s'en convaincre, le plus simple est de revenir au quotient.
En particulier, pour deux suites géométriques de raison dans $]-1, 1[$, c'est celle de plus petite raison qui est négligeable devant l'autre.

4.d. Commençons par remarquer que pour $k \in [\![1, N-2]\!]$, on a

$$\left(\frac{k}{N}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{N-2}\left(\frac{k}{N}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$$

de sorte que

$$d_n(N) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{N-1}{N}\right)^n.$$

On en déduit alors que

$$\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} = 1 - \frac{1}{N}.$$

Par conséquent, on a

$$\frac{V(T_n)}{d_n(N)} = (2N-1)-2N\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)}-d_n(N) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2N-1-2N\left(1-\frac{1}{N}\right) = 2N-1-2N+2 = 1.$$

Et donc $\boxed{V(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n(N).}$

5. Pour $k \in [\![1, N]\!]$, on a, toujours par indépendance des U_i,

$$P(Z_n \geqslant k) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[U_i \geqslant k]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(U_i \geqslant k) = (P(U_1 \geqslant k))^n.$$

Mais $P(U_1 \geqslant k) = \sum_{i=k}^{N} \frac{1}{N} = \frac{N-k+1}{N}$ et donc

$$\forall k \in [\![1, N]\!],\ P(Z_n \geqslant k) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n.$$

On a alors, $P(Z_n = N) = P(Z_n \geqslant N) = \left(\frac{1}{N}\right)^n$ et pour $k \in [\![1, N-1]\!]$,

$$P(Z_n = k) = P(Z_n \geqslant k) - P(Z_n \geqslant k+1) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n - \left(\frac{N-k}{N}\right)^n.$$

Afin d'éviter des calculs fastidieux, notons que

$$\forall k \in [\![1, N]\!],\ P(Z_n = k) = P(T_n = N+1-k) = P(N+1-T_n = k).$$

Donc Z_n et $N+1-T_n$ ont même loi.
On a alors

> **Même loi**
> Ces deux variables ont même loi, mais ne sont pas égales pour autant !

$$\boxed{E(Z_n) = E(N+1-T_n) = N+1-E(T_n) = d_n(N)+1 \text{ et } V(Z_n) = V(T_n).}$$

6. Il suffit de simuler n lois uniformes et de garder la plus grande d'entre elles.

```
function y = simulmax(N,n)
  A = grand(1,n,'uin',1,N)
  y = max(A)
endfunction
```

Partie II. Couple (Inf,Sup)

7.a. Notons qu'on a toujours $Z_n \leqslant T_n$, par définition.
Donc pour $k \leqslant \ell$, on a $[T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell] = [T_n \leqslant k]$, de sorte que

$$\boxed{\phi_n(k,\ell) = P(T_n \leqslant k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n.}$$

En revanche, si $k > \ell$, on a

$$P(T_n \leqslant k) = P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell]) + P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \geqslant \ell+1]).$$

Or,

> **Détails**
> On a à la fois $T_n \leqslant k$ et $Z_n \geqslant \ell+1$ si et seulement si les U_i sont tous plus petits que k (et donc le plus grand d'entre eux l'est aussi) et tous plus grands que $\ell+1$ (et donc le plus petit d'entre eux l'est aussi).

$$P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \geqslant \ell+1]) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[\ell+1 \leqslant U_i \leqslant k]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(\ell+1 \leqslant U_i \leqslant k) = \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n.$$

On en déduit que

$$\boxed{\phi_n(k,\ell) = P(T_n \leqslant \ell) - P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \geqslant \ell+1]) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-\ell}{N}\right)^n.}$$

7.b. On a

$$[T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell] = ([T_n \leqslant k] \cap [Z_n \leqslant \ell - 1]) \cup ([T_n \leqslant k] \cap [Z_n = \ell])$$

et ces deux événements dont disjoints. Donc

$$\phi_n(k, \ell) = \phi_n(k, \ell - 1) + P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n = \ell]).$$

Mais

$$P([T_n \leqslant k] \cap [Z_n = \ell]) = P([T_n \leqslant k - 1] \cap [Z_n = \ell]) + P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]).$$

et

$$P([T_n \leqslant k - 1] \cap [Z_n = \ell]) = P([T_n \leqslant k - 1] \cap [Z_n \leqslant \ell]) - P([T_n \leqslant k - 1] \cap [Z_n \leqslant \ell - 1]).$$

Au final, on a donc

$$\phi_n(k, \ell) = \phi_n(k, \ell - 1) + \phi_n(k - 1, \ell) - \phi_n(k - 1, \ell - 1) + P([Z_n = k] \cap [Z_n = \ell])$$

soit encore

$$\boxed{P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \phi_n(k, \ell) + \phi_n(k - 1, \ell - 1) - \phi_n(k - 1, \ell) - \phi_n(k, \ell - 1).}$$

7.c. • Si $k < \ell$, alors nous pourrions utiliser le résultat précédent, mais il est plus simple de remarquer que $[T_n = k] \cap [Z_n = \ell] = \emptyset$, et donc $\boxed{P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = 0.}$
• Si $k = \ell$, alors

$$P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [U_i = k]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(U_i = k) = \boxed{\frac{1}{N^n}.}$$

Explication
Si à la fois le plus grand et le plus petit des U_i valent k, alors tous les U_i sont égaux à k.

• Enfin, si $k > \ell$, alors on a $k \geqslant \ell - 1$, $k - 1 \geqslant \ell$ et $k - 1 \geqslant \ell - 1$, de sorte que

$$\begin{aligned} P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) &= \Phi_n(k, \ell) + \Phi_n(k - 1, \ell - 1) - \Phi_n(k - 1, \ell) - \Phi_n(k, \ell - 1) \\ &= \frac{1}{N^n} \left(k^n - (k - \ell)^n + (k - 1)^n - (k - \ell)^n - (k - 1)^n + (k - 1 - \ell)^n - k^n + (k - \ell + 1)^n\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{N^n} \left((k - 1 - \ell)^n + (k - \ell + 1)^n - 2(k - \ell)^n\right).} \end{aligned}$$

8.a. Par le théorème de transfert, on a

$$E(T_n Z_n) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{N} k\ell P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{k} k\ell P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]).$$

Nous avons mentionné que pour $\ell > k$,
$$P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) = 0.$$

En remplaçant $P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell])$ par l'expression obtenue à la question précédente, il vient, en séparant les cas $k = \ell$ et $k > \ell$,

$$\begin{aligned} E(T_n Z_n) &= \sum_{k=1}^{N} k^2 P([T_n = k] \cap [Z_n = k]) + \sum_{k=2}^{N} \sum_{\ell=1}^{k-1} k\ell P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell]) \\ &= \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^{N} k^2 + \frac{1}{N^n} \sum_{k=2}^{N} k \sum_{\ell=1}^{k-1} \ell \left((k - 1 - \ell)^n + (k - \ell + 1)^n - 2(k - \ell)^n\right). \end{aligned}$$

Dans la seconde somme, effectuons le changement d'indice $j = k - \ell$, de sorte que lorsque ℓ varie de 1 à $k - 1$, j varie de 1 à $k - 1$, et donc

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{k-1} \ell \left((k - 1 - \ell)^n + (k - \ell + 1)^n - 2(k - \ell)^n\right) &= \sum_{j=1}^{k-1} (k - j) \left((j + 1)^n + (j - 1)^n - 2j^n\right) \\ &= k \sum_{j=1}^{k-1} \left((j + 1)^n + (j - 1)^n - 2j^n\right) - \sum_{j=1}^{k-1} j \left((j + 1)^n + (j - 1)^n - 2j^n\right) \end{aligned}$$

$$= k\left(k^n - (k-1)^n - 1\right) - (k-1)k^n + k(k-1)^n$$
$$= k^{n+1} - (k-1)k^n - k = k^n - k$$

On a utilisé les résultats fournis par l'énoncé, avec $m = k-1$.

Et alors, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N} k \sum_{\ell=1}^{k-1} \ell\left((j+1)^n + (j-1)^n - 2j^n\right) &= \sum_{k=2}^{N} k(k^n - k)\\ &= \sum_{k=2}^{N} k^{n+1} - \sum_{k=2}^{N} k^2\\ &= \sum_{k=1}^{N} k^{n+1} - \sum_{k=1}^{N} k^2.\end{aligned}$$

Au final, on obtient donc

$$\boxed{E(T_nZ_n) = \frac{1}{N^n}\sum_{k=1}^{N} k^{n+1}.}$$

Si $N = 1$, on a alors[2] $E(T_nZ_n) = 1 = 1(1 + d_{n+1}(1))$, et si $N \geqslant 2$, on a

$$E(T_nZ_n) = N\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} = N\left(\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n + 1\right) = \boxed{N(1 + d_{n+1}(N)).}$$

[2] T_nZ_n est alors une variable certaine égale à 1.

8.b. Par définition, on a $\rho_n = \dfrac{\text{Cov}(T_n, Z_n)}{\sqrt{V(T_n)}\sqrt{V(Z_n)}} = \dfrac{\text{Cov}(T_n, Z_n)}{V(T_n)}$.
De plus, par la formule de Huygens,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(T_n, Z_n) = E(T_nZ_n) - E(T_n)E(Z_n) &= N(1 + d_{n+1}(N)) - (N - d_n(N))(d_n(N) + 1)\\ &= Nd_{n+1}(N) - Nd_n(N) + d_n(N)^2 + d_n(N).\end{aligned}$$

On en déduit[3] que

$$\begin{aligned}\rho_n &= \frac{1}{V(T_n)}\text{Cov}(T_n, Z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{d_n(N)}\left(Nd_{n+1}(N) - Nd_n(N) + d_n(N)^2 + d_n(N)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} N\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)} - N + d_n(N) + 1\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} N\left(1 - \frac{1}{N}\right) - N + 1 = 0.\end{aligned}$$

[3] Grâce à l'équivalent $V(T_n) \sim d_n(N)$ de la question 4.d.

On a utilisé la limite de $\frac{d_{n+1}(N)}{d_n(N)}$ calculée à la question 4.d.

9.a. Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a $P_{[T_n=k]}(Z_n = \ell) = \dfrac{P([T_n = k] \cap [Z_n = \ell])}{P(T_n = k)}$.
En utilisant le résultat de la question 7, on en déduit que

$$\boxed{P_{[T_n=k]}(Z_n = \ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < \ell\\ \dfrac{1}{N^n}\dfrac{1}{\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\dfrac{k-1}{N}\right)^n} = \dfrac{1}{k^n - (k-1)^n} & \text{si } k = \ell\\ \dfrac{\frac{1}{N^n}\left((k-1-\ell)^n + (k-\ell+1)^n - 2(k-\ell)^n\right)}{\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n} = \dfrac{(k-1-\ell)^n + (k-\ell+1)^n - 2(k-\ell)^n}{k^n - (k-1)^n} & \text{si } k > \ell\end{cases}}$$

9.b. Par définition de l'espérance conditionnelle, on a

$$E(Z_n|T_n = k) = \sum_{\ell=1}^{N} \ell P_{[T_n=k]}(Z_n = \ell).$$

À l'aide de l'expression de $P_{[T_n=k]}(Z_n = \ell)$ obtenue à la question 9.a, il vient

$$E(Z_n|T_n = k) = \frac{k}{k^n - (k-1)^n} + \frac{1}{k^n - (k-1)^n}\sum_{\ell=1}^{k-1} \ell\left((k-1-\ell)^n + (k-\ell+1)^n - 2(k-\ell)^n\right).$$

Remarquons alors que la somme qui apparaît dans la formule ci-dessus a déjà été calculée à la question 8.a, et vaut $k^n - k$, de sorte que

$$E(Z_n|T_n = k) = \frac{k}{k^n-(k-1)^n} + \frac{k^n-k}{k^n-(k-1)^n} = \boxed{\frac{k^n}{k^n-(k-1)^n}}.$$

Partie III : Prévision

10. Notons que T_n ne peut prendre qu'une valeur à la fois, et donc les $\mathbb{1}_{[T_n=k]}$ sont toujours toutes nulles, sauf l'une d'entre elles qui vaut 1.
Autrement dit, $W_t(T_n)$ prend la valeur t_k lorsque $T_n = k$.

Plus précisément, pour $\omega \in \Omega$, $W_t(T_n)(\omega) = \sum_{k=1}^{N} t_k \mathbb{1}_{[T_n=k]}(\omega) = \begin{cases} t_1 \text{ si } T_n(\omega) = 1 \\ t_2 \text{ si } T_n(\omega) = 2 \\ \vdots \\ t_N \text{ si } T_n(\omega) = N \end{cases}$

Et donc $[W_t(T_n) = t_k] = [T_n = k]$.
Et donc $\boxed{P(W_t(T_n) = t_k) = P(T_n = k).}$

> **Erreur**
> L'énoncé était faux ! Pour que le résultat de cette question soit valable, il faut supposer que les t_i sont deux à deux distincts, ce que nous faisons dans la suite.
> En effet, si on avait par exemple $t_1 = t_2$, alors on aurait
> $$[W_t(T_n) = t_1] = [T_n = 1] \cup [T_n = 2].$$

11. Notons que $\{[T_n = i], i \in [\![1, N]\!]\}$ est un système complet d'événements, et donc par la formule de l'espérance totale appliquée à $T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}$, on a

$$E(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}) = \sum_{i=1}^{N} E(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}|T_n = i)P(T_n = i).$$

> **Détails**
> On ne peut avoir $T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]} = j$ que si $T_{n+1} = j$ et que $[T_n = k]$ est réalisé, car sinon $\mathbb{1}_{[T_n=k]} = 0$.

Mais si $i \neq k$, alors pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, on a

$$P_{[T_n=i]}((T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}) = j) = \frac{P([T_{n+1} = j] \cap [T_n = k] \cap [T_n = i])}{P(T_n = i)} = 0$$

et donc pour $i \neq k$, $E(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}|T_n = i) = 0$.
Au contraire, si $k = i$, alors pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, on a

$$\begin{aligned} P_{[T_n=k]}(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]} = j) &= \frac{P([T_{n+1} = j] \cap [T_n = k] \cap [T_n = k])}{P(T_n = k)} \\ &= \frac{P([T_{n+1} = j] \cap [T_n = k])}{P(T_n = k)} \\ &= P_{[T_n=k]}(T_{n+1} = j). \end{aligned}$$

Ainsi, la loi conditionnelle de $T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}$ sachant $[T_n = k]$ est la loi de T_{n+1} sachant $[T_n = k]$ et donc
$E(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}|T_n = k) = E(T_{n+1}|T_n = k)$.
Il ne reste donc qu'un seul terme dans la formule de l'espérance totale, et

$$\boxed{E(T_{n+1} \times \mathbb{1}_{[T_n=k]}) = E(T_{n+1}|T_n = k) \times P(T_n = k).}$$

12.a. Commençons par remarquer que par le lemme des coalitions, T_n et U_{n+1} sont indépendantes, car T_n est fonction de $U_1, \dots, U_n$ et que les U_i sont mutuellement indépendantes.
Si $j < k$, alors $P([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]) = 0$ car on ne peut avoir $\max(U_1, \dots, U_{n+1}) < \max(U_1, \dots, U_n)$.
Si $j = k$, alors

$$[T_n = k] \cap [T_{n+1} = k] = [T_n = k] \cap [U_{n+1} \leqslant k]$$

et donc

$$P([T_n = k] \cap [T_{n+1} = k]) = P(T_n = k) \times P(U_{n+1} \leqslant k) = \boxed{\left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right)\frac{k}{N}}.$$

Enfin, si $j > k$, alors

$$[T_n = k] \cap [T_{n+1} = j] = [T_n = k] \cap [U_{n+1} = j]$$

de sorte que

$$P([T_n = k] \cap [T_{n+1} = j]) = P(T_n = k)P(U_{n+1} = j) = \boxed{\left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right)\frac{1}{N}}.$$

12.b. Par définition, on a

$$P_{[T_n=k]}(T_{n+1}=j)=\frac{P([T_n=k]\cap[T_{n+1}=j])}{P(T_n=k)}=\boxed{\begin{cases}0 & \text{si } j<k\\ \frac{k}{N} & \text{si } j=k\\ \frac{1}{N} & \text{si } j>k\end{cases}}$$

12.c. Par définition de l'espérance conditionnelle, on a

$$E(T_{n+1}|T_n=k)=\sum_{j=1}^{N} jP_{[T_n=k]}(T_{n+1}=j).$$

Et donc à l'aide du résultat de la question précédente, on obtient $E(T_{n+1}|T_n=k)=N$ si $k=N$, et pour $k<N$,

$$\begin{aligned}E(T_{n+1}|T_n=k)&=\frac{k^2}{N}+\sum_{j=k+1}^{N}\frac{j}{N}\\&=\frac{k^2}{N}+\sum_{j=1}^{N}\frac{j}{N}-\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{N}\\&=\frac{k^2}{N}+\frac{N(N+1)}{2N}-\frac{k(k+1)}{2N}\\&=\frac{1}{2N}\left(N^2+N+2k^2-k^2-k\right)\\&=\boxed{\frac{N+1}{2}+\frac{k^2-k}{2N}.}\end{aligned}$$

Notons que cette dernière formule reste valable pour $k=N$.

12.d. D'après la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'événements $\{[T_n=k], k\in[\![1,N]\!]\}$, il vient

$$\begin{aligned}E(T_{n+1})&=\sum_{k=1}^{N}E(T_{n+1}|T_n=k)P(T_n=k)\\&=\sum_{k=1}^{N}E(T_{n+1}|T_n=k)P(T_n=k)\\&=\frac{N+1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{N}P(T_n=k)}_{=1}+\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N}k^2P(T_n=k)-\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N}kP(T_n=k)\\&=\frac{N+1}{2}+\frac{1}{2N}E\left(T_n^2\right)-\frac{1}{2N}E(T_n)\\&=\boxed{\frac{N+1}{2}+\frac{1}{2N}\left(E\left(T_n^2\right)-E(T_n)\right).}\end{aligned}$$

13. Par définition, on a $W_t(T_n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}t_k\times\mathbb{1}_{[T_n=k]}$, et donc

$$W_t(T_n)^2=\left(\sum_{k=1}^{N}t_k\times\mathbb{1}_{[T_n=k]}\right)\times\left(\sum_{i=1}^{N}t_i\times\mathbb{1}_{[T_n=i]}\right)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}t_it_k\mathbb{1}_{[T_n=i]}\mathbb{1}_{[T_n=k]}$$

Mais pour $i\neq k$, les événements $[T_n=i]$ et $[T_n=k]$ sont incompatibles, et donc

$$\mathbb{1}_{[T_n=i]}\times\mathbb{1}_{[T_n=k]}=0.$$

Détails
On a toujours au moins l'un des deux événements $[T_n=k]$ et $[T_n=i]$ qui n'est pas réalisé, et donc l'indicatrice correspondante est nulle.

Ainsi, dans la somme, il ne reste que

$$W_t(T_n)^2=\sum_{k=1}^{N}t_k^2\mathbb{1}_{[T_n=k]}\mathbb{1}_{[T_n=k]}=\boxed{\sum_{k=1}^{N}t_k^2\mathbb{1}_{[T_n=k]}.}$$

14.a. Par linéarité de l'espérance, on a

$$g(t_1,\dots,t_N)=E(T_{n+1}^2)-2E(T_{n+1}W_t(T_n))+E(W_t(T_n)^2).$$

Or, en utilisant la question 11, on a

$$E(T_{n+1}W_t(T_n))=E\left(T_{n+1}\sum_{k=1}^N t_k\mathbb{1}_{[T_n=k]}\right)=\sum_{k=1}^N t_kE\left(T_{n+1}\mathbb{1}_{[T_n=k]}\right)=\sum_{k=1}^N t_kE(T_{n+1}|T_n=k)P(T_n=k).$$

Et par la question 13, on a

$$E(W_t(T_n)^2)=E\left(\sum_{k=1}^N t_k^2\mathbb{1}_{[T_n=k]}\right)=\sum_{k=1}^N t_k^2E\left(\mathbb{1}_{[T_n=k]}\right)=\sum_{k=1}^N t_k^2P(T_n=k).$$

Rappel

Pour tout événement A, $\mathbb{1}_A$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$, et donc son espérance vaut $P(A)$.

On en déduit que

$$\boxed{g(t_1,\dots,t_N)=\sum_{k=1}^N\left(t_k^2-2t_kE(T_{n+1}|T_n=k)+E(T_{n+1}^2)\right)P(T_n=k).}$$

14.b. Nous venons d'écrire $g(t_1,\dots,t_n)$ comme une somme de polynômes du second degré en les variables t_k.
Pour k fixé, le polynôme $\left(t_k^2-2t_kE(T_{n+1}|T_n=k)+E(T_{n+1}^2)\right)P(T_n=k)$ atteint un unique minimum global (sur $\mathbf{R}$) en $t_k=E(T_{n+1}|T_n=k)$, de sorte que g atteint un unique minimum global en

$$\theta=(E(T_{n+1}|T_n=1),\dots,E(T_{n+1}|T_n=N))$$

Détails

Il s'ait d'un résultat archi-classique : si $a>0$, alors ax^2+bx+c est minimal pour $x=\frac{-b}{2a}$.

et ce minimum vaut

$$\begin{aligned}g(\theta)&=\sum_{k=1}^N\left(E(T_{n+1}|T_n=k)^2-2E(T_{n+1}|T_n=k)^2+E(T_{n+1}^2)\right)P(T_n=k)\\&=E(T_{n+1}^2)-\sum_{k=1}^N E(T_{n+1}|T_n=k)^2P(T_n=k).\end{aligned}$$

15. En remplaçant θ par son expression, on obtient

$$E(W_\theta(T_n))=E\left(\sum_{k=1}^n E(T_{n+1}|T_n=k)\mathbb{1}_{[T_n=k]}\right)=\sum_{k=1}^N E(T_{n+1}|T_n=k)E\left(\mathbb{1}_{[T_n=k]}\right)=\sum_{k=1}^N E(T_{n+1}|T_n=k)P(T_n=k).$$

Mais d'après la formule de l'espérance totale, on reconnaît là l'espérance de T_{n+1}, et donc

$$\boxed{E(W_\theta(T_n))=E(T_{n+1}).}$$

Par la formule de Huygens, on a $V(T_{n+1})=E(T_{n+1}^2)-E(T_{n+1})^2$ et de même

$$V(W_\theta(T_n))=E(W_\theta(T_n)^2)-E(W_\theta(T_n))^2=E(W_\theta(T_n)^2)-E(T_{n+1})^2.$$

Il s'agit donc de prouver que $E(W_\theta(T_n)^2)\leqslant E(T_{n+1}^2)$.

Mais nous savons d'après la question 13 que $W_\theta(T_n)^2=\sum_{k=1}^N\theta_k^2\mathbb{1}_{[T_n=k]}$, de sorte que

$$E(W_\theta(T_n)^2)=\sum_{k=1}^N\theta_k^2P(T_n=k)=\sum_{k=1}^N E(T_{n+1}|T_n=k)^2P(T_n=k).$$

Ainsi,

$$E(T_{n+1}^2)-E(W_\theta(T_n)^2)=E(T_{n+1}^2)-\sum_{k=1}^n E(T_{n+1}|T_n=k)^2P(T_n=k)=g(\theta).$$

Mais la fonction g est positive sur $\mathbf{R}^N$, car il s'agit de l'espérance d'une variable aléatoire positive.
Donc $g(\theta)\geqslant 0$, de sorte que $E(W_\theta(T_n)^2)\leqslant E(T_{n+1}^2)$, et ainsi

$$\boxed{V(W_\theta(T_n))\leqslant V(T_{n+1}).}$$

16.a. Pour $\omega \in \Omega$, on a

$$k = 1^N k^i \mathbb{1}_{[T_n=k]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } T_n(\omega) = 1 \\ 2^i & \text{si } T_n(\omega) = 2 \\ & \vdots \\ N^i & \text{si } T_n(\omega) = N \end{cases} = T_n^i(\omega).$$

Et donc $\boxed{T_n^i = \sum_{k=1}^{N} k^i \mathbb{1}_{[T_n=k]}.}$

16.b. En remplaçant θ par son expression, on obtient

$$W_\theta(T_n) = \sum_{k=1}^{N} E(T_{n+1}|T_n = k)\mathbb{1}_{[T_n=k]}.$$

Mais nous avons calculé $E(T_{n+1}|T_n = k)$ à la question 12.c :

$$E(T_{n+1}|T_n = k) = \frac{N+1}{2} + \frac{k^2 - k}{2N}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} W_\theta(T_n) &= \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{N+1}{2} + \frac{k^2-k}{2N}\right)\mathbb{1}_{[T_n=k]} \\ &= \frac{N+1}{2}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{1}_{[T_n=k]} + \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N}(k^2-k)\mathbb{1}_{[T_n=k]} \\ &= \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N}\left(\sum_{k=1}^{N}k^2\mathbb{1}_{[T_n=k]} - \sum_{k=1}^{N}k\mathbb{1}_{[T_n=k]}\right) \\ &= \boxed{\frac{N+1}{2} + \frac{1}{2N}\left(T_n^2 - T_n\right).} \end{aligned}$$

Partie IV : Estimation

17.a. A la question 4.b, nous avons montré que $E(T_n) = N - d_n(N)$, de sorte que

$$E(T_n + d_n(N)) = N - d_n(N) + d_n(N) = N.$$

On serait donc tenté de dire que $T_n + d_n(N)$ est un estimateur sans biais de N.
Malheureusement, cette quantité dépend de N, qui est inconnu ! En fait, $T_n + d_n(N)$ n'est pas un estimateur : on ne peut l'écrire sous la forme $T_n + d_n(N) = \varphi(U_1, \dots, U_n)$, où φ est une fonction fixée (ne dépendant pas de N).

17.b. Toujours dans la question 4.b, nous avons prouvé que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(T_n) = N$, et donc
$\boxed{(T_n) \text{ est une suite d'estimateurs asymptotiquement sans biais de } N.}$

> **Remarque**
> Notons que T_n est bien un estimateur de N.

17.c. Supposons $A_n(\varepsilon)$ réalisé, c'est-à-dire que $|T_n - N| \geqslant \varepsilon$.
Alors par l'inégalité triangulaire, on a

$$\varepsilon \leqslant |T_n - N| = |T_n - E(T_n) + d_n(N)| \leqslant |T_n - E(T_n)| + |d_n(N)|$$

et donc $|T_n - E(T_n)| + |d_n(N)| \geqslant \varepsilon$.
Ainsi, $\boxed{A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)}$.

Nous avons prouvé précédemment que $d_n(N) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|d_n(N)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
Et alors si $|T_n - E(T_n)| + |d_n(N)| \geqslant \varepsilon$, il vient

$$|T_n - E(T_n)| \geqslant \varepsilon - |d_n(N)| \geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Et donc nous venons de prouver que pour $n \geqslant n_0$,

$$\boxed{B_n(\varepsilon) \subset \left[|T_n - E(T_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right].}$$

17.d. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors T_n possède une variance car il s'agit d'une variable aléatoire finie. Donc par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$P(|T_n - E(T_n)| \geqslant \varepsilon/2) \leqslant \frac{2V(T_n)}{\varepsilon}.$$

Or, il a été prouvé à la question 3.c. que $V(T_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} P(|T_n - E(T_n)| \geqslant \varepsilon/2) = 0.$$

De plus, on a $P(A_n(\varepsilon)) \leqslant P(B_n(\varepsilon))$, et pour n suffisamment grand,

$$P(B_n(\varepsilon)) \leqslant P(|T_n - E(T_n)| \geqslant \varepsilon/2).$$

On en déduit que pour n assez grand, $P(A_n(\varepsilon)) \leqslant P(|T_n - E(T_n)| \geqslant \varepsilon/2)$ et donc par le théorème des gendarmes[4],

$$\lim_{n\to+\infty} P(|T_n - N| \geqslant \varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n(\varepsilon)) = 0.$$

[4] Une probabilité est toujours positive.

Ainsi, (T_n) converge en probabilité vers N, et donc $\boxed{(T_n) \text{ est une suite d'estimateurs convergente de } N.}$

18.a. Il est évident que par indépendance des U_i,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[U_i = u_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(U_i = u_i) = \boxed{\frac{1}{N^n}.}$$

18.b. Si $\max(u_i) \neq k$, alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}[U_i = u_i] \cap [T_n = k] = \emptyset$ donc la probabilité conditionnelle cherchée est nulle.

En revanche, si le plus grand des u_i vaut k, on a $[T_n = k] \subset \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}[U_i = u_i]$, de sorte que

$$\bigcap_{i=1}^{n}[U_i = u_i] \cap [T_n = k] = \bigcap_{i=1}^{n}[U_i = u_i].$$

On en déduit que

$$\boxed{P_{[T_n=k]}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[U_i = u_i]\right) = \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[U_i = u_i]\right)}{P(T_n = k)} = \frac{1}{N^n}\frac{1}{\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n} = \frac{1}{k^n - (k-1)^n}.}$$

19.a. Commençons par remarquer que cette fois, S_n est bien un estimateur de N, car T_n et Z_n le sont. De plus, on a

$$E(S_n) = E(T_n) + E(Z_n) - 1 = N - d_n(N) + d_n(N) + 1 - 1 = N.$$

Et donc $\boxed{S_n \text{ est un estimateur sans biais de } N.}$

19.b. Par linéarité de l'espérance (rappelons que l'espérance conditionnelle est l'espérance pour la probabilité $P_{[T_n=k]}$), on a

$$E(S_n|T_n = k) = E(T_n|T_n = k) + E(Z_n|T_n = k) - 1.$$

Il est évident que $E(T_n|T_n = k) = k$.

Et nous avons montré à la question 9.b que $E(Z_n|T_n = k) = \dfrac{k^n}{k^n - (k-1)^n}$. On a donc

$$E(S_n|T_n = k) = k + \frac{k^n}{k^n - (k-1)^n} - 1 = \frac{k^{n+1} - k(k-1)^n + k^n + (k-1)^n - k^n}{k^n - (k-1)^n} = \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} = \boxed{\psi_n(k).}$$

19.c. D'après le théorème de transfert, on a

$$E(\psi_n(T_n)) = \sum_{k=1}^{n} \psi_n(k)P(T_n = k) = \sum_{k=1}^{N} E(S_n|T_n = k)P(T_n = k).$$

Par la formule de l'espérance totale, nous reconnaissons là $E(S_n)$, et donc

$$E(\psi_n(T_n)) = E(S_n) = N.$$

Ainsi, $\boxed{\psi_n(T_n) \text{ est un estimateur sans biais de } N.}$

19.d. La fonction $\lambda \mapsto E((S_n - \lambda)^2|T_n = k)$ est positive, par croissance de l'espérance (l'espérance conditionnelle n'est autre que l'espérance pour la probabilité $P_{[T_n=k]}$) et car la variable aléatoire $(S_n - \lambda)^2$ est positive.
Or,

$$E((S_n-\lambda)^2|T_n = k) = E(S_n^2-2\lambda S_n+\lambda^2|T_n = k) = E(S_n^2|T_n = k)-2\lambda E(S_n|T_n = k)+\lambda^2 = \varphi_n(k)-2\lambda\psi_n(k)+\lambda^2$$

Ainsi, on a une fonction polynomiale de degré 2 en λ, qui est de signe constant, donc son discriminant est négatif ou nul.
Or, ce discriminant vaut $4\psi_n(k)^2 - 4\varphi_n(k)$.
On en déduit que $\psi_n(k)^2 \leqslant \varphi_n(k)$.

Par la formule de Huygens, on a $V(\psi_n(T_n)) = E(\psi_n(T_n)^2) - E(\psi_n(T_n))^2 = E(\psi_n(T_n)^2) - N^2$.
Mais par le théorème de transfert,

$$E(\psi_n(T_n)^2) = \sum_{k=1}^{N} \psi_n(k)^2P(T_n = k) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \varphi_n(k)P(T_n = k) = E(S_n^2).$$

Notons que le dernier point vient de la formule de l'espérance totale appliquée à la variable aléatoire S_n^2 :

$$E\left(S_n^2\right) = \sum_{k=1}^{N} E(S_n^2|T_n = k)P(T_n = k).$$

Enfin, par la formule de Huygens, on a $V(S_n) = E(S_n)^2 - N^2$, et donc

$$\boxed{V(\psi_n(T_n)) \leqslant V(S_n).}$$

19.e. On a

$$V(S_n) = V(T_n+Z_n-1) = V(T_n+Z_n) = V(T_n)+V(Z_n)+2\mathrm{Cov}(Z_n,T_n) = 2V(T_n)+2\mathrm{Cov}(T_n,Z_n) = 2V(T_n)\,(1+\rho_n)\,.$$

Mais dans les parties I et II, nous avons déjà calculé $V(T_n)$ et ρ_n, de sorte que

$$\begin{aligned} V(S_n) &= 2\left((2N-1)d_n(N) - 2Nd_{n+1}(N) - d_n(N)^2\right) + 2\left(Nd_{n+1}(N) + d_n(N) - Nd_n(N) + d_n(N)^2\right) \\ &= 2N(d_n(N) - d_{n+1}(N)) \end{aligned}$$

Or, nous savons que

$$\lim_{n\to+\infty} d_n(N) = \lim_{n\to+\infty} d_{n+1}(N) = 0.$$

On en déduit que $V(S_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et donc $V(\psi_n(T_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Puisque $\psi_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N, son risque quadratique en N est égal à sa variance, et tend donc vers 0 lorsque $n \to +\infty$, de sorte que $\boxed{\psi_n(T_n) \text{ est un estimateur convergent de } N.}$

20.a. Commençons par remarquer que $f_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N car

$$E(f_n(T_n)) = \sum_{k=1}^{N} f_n(k)P(T_n = k) = \sum_{k=1}^{N} E(R_n|T_n = k)P(T_n = k) = E(R_n) = N.$$

De la même manière que dans la question 19.d, on peut prouver que

$$\forall k \in [\![1,N]\!], E(R_n|T_n = k)^2 \leqslant E(R_n^2|T_n = k).$$

Et alors comme en 19.d, on a
$$E(f_n(T_n)^2) \leqslant E(R_n^2).$$
Et donc par la formule de Huygens,
$$V(f_n(T_n)) = E(f_n(T_n)^2) - N^2 \leqslant E(R_n^2) - N^2 = V(R_n).$$

20.b. D'après le théorème de transfert, on a
$$E(F(T_n)) = \sum_{k=1}^{N} F(k)P(T_n = k).$$
Donc il est clair que si $\forall k \in [\![1, N]\!], F(k) = \psi_n(k)$, alors
$$E(F(T_n)) = \sum_{k=1}^{N} \psi_n(k)P(T_n = k) = N.$$
Inversement, supposons que pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, $E(F(T_n)) = N$.
Alors on a, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{N} F(k)\left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right) = N = \sum_{k=1}^{N} \psi_n(k)\left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right)$$
soit encore
$$\sum_{k=1}^{N} (F(k) - \psi_n(k))\,(k^n - (k-1)^n) = 0.$$
Pour $N = 1$, on a directement $F(1) = 1 = \psi_n(1)$.
Pour $N \geqslant 2$, en soustrayant la relation correspondant à N et celle correspondant à $N-1$, on a
$$0 = \sum_{k=1}^{N} ((F(k) - \psi_n(k))\left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right) - \sum_{k=1}^{N-1} (F(k) - \psi_n(k))\left(\left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n\right) = F(N) - \psi_n(N)\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right).$$
Ainsi, $\boxed{\forall N \in \mathbf{N}^*, F(N) = \psi_n(N).}$

20.c. Soit R_n un estimateur sans biais de N, et soit comme précédemment $f_n(k) = E(R_n | T_n = k)$.
Alors nous avons prouvé à la question 20.a que $f_n(T_n)$ est un estimateur sans biais de N.
Mais d'après la question 20.b, cela impose que $f_n = \psi_n$.
Et à la question 20.a, nous avons prouvé que
$$V(\psi_n(T_n)) = V(f_n(T_n)) \leqslant V(R_n).$$
Donc $\boxed{\psi_n(T_n) \text{ est bien de variance minimale parmi tous les estimateurs sans biais de } N.}$

MATHS II 2008

Sujet : Estimateur de James-Stein **Facile**
Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆
Thèmes du programme abordés : variables à densité, estimation ponctuelle et par intervalle de confiance

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X quelconque. Pour toute variable aléatoire réelle X admettant une densité sur $\mathbf{R}$, notée f_X, on note $\mathcal{D}_X$ l'ensemble des réels s pour lesquels la variable aléatoire e^{sX} admet une espérance, et on note Φ_X la fonction définie sur $\mathcal{D}_X$ par : $\Phi_X(s) = E(e^{sX})$.

On **admet** les résultats suivants :
• si deux variables aléatoires X et Y sont telles que Φ_X et Φ_Y coïncident sur un intervalle ouvert non vide, alors X et Y ont même loi ;
• si n est un entier naturel non nul, et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles quelconques, mutuellement indépendantes, alors, pour tout entier p de $[\![1, n-1]\!]$ et pour toutes fonctions réelles continues φ_1 et φ_2, les variables aléatoires $\varphi_1(X_1, \ldots, X_p)$ et $\varphi_2(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes ;
• si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors XY admet une espérance, et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

La fonction exponentielle est également notée exp. On rappelle que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}$.

Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Préliminaire

On rappelle que, pour tout s de $\mathcal{D}_X$, on a : $\Phi_X(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx) f_X(x)\, dx$.

1. Soit a un réel non nul et b un réel quelconque.
   a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2)\, dx$ est convergente si et seulement si $a > 0$, et vaut alors $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$.
   b. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx)\, dx$ est convergente si et seulement si $a > 0$, puis montrer que dans ces conditions, on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$.
2. a. Déterminer $\mathcal{D}_U$; pour tout s de $\mathcal{D}_U$, calculer $\Phi_U(s)$.
   b. On pose : $Z = U^2$. Établir que : $\mathcal{D}_Z = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$. Montrer, à l'aide du théorème de transfert, que pour tout réel s de $\mathcal{D}_Z$, on a : $\Phi_Z(s) = (1-2s)^{-1/2}$.
3. Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et soit μ et β deux réels quelconques.
   a. Montrer qu'un réel s appartient à $\mathcal{D}_{\mu X+\beta}$ si et seulement si μs appartient à $\mathcal{D}_X$, et que dans ce cas, on a : $\Phi_{\mu X+\beta}(s) = \exp(\beta s)\Phi_X(\mu s)$.
   b. On suppose que X suit une loi γ de paramètre ν, où ν est un réel strictement positif.
   Montrer que : $\mathcal{D}_X =]-\infty, 1[$. Pour tout s de $\mathcal{D}_X$, établir la formule : $\Phi_X(s) = (1-s)^{-\nu}$.
   De même, déterminer $\mathcal{D}_{2X}$, puis, pour tout s de $\mathcal{D}_{2X}$, calculer $\Phi_{2X}(s)$.

Partie I. Loi du χ^2 centré

Soit r un entier supérieur ou égal à 1. On considère une variable aléatoire X_r possédant une densité f_{X_r} donnée par

$$f_{X_r}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{r}{2}} \times \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \times x^{\frac{r}{2}-1} \times \exp\left(-\frac{x}{2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

On dit que X_r suit une loi du χ^2 («chi deux») centé à r degrés de liberté, et on note : $X_r \hookrightarrow \chi^2(r)$.

4. Étudier les variations de f_{X_4} et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

5. a. Montrer que la variable aléatoire $\frac{X_r}{2}$ suit une loi γ de paramètre $\frac{r}{2}$. En déduire $E(X_r)$ et $V(X_r)$.

   b. Déterminer $\mathcal{D}_{X_r}$. Pour tout s de $\mathcal{D}_{X_r}$, calculer $\Phi_{X_r}(s)$.

6. Soit n un entier de $\mathbf{N}^*$. On considère n variables aléatoires indépendantes $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de même loi que U. Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on pose $Z_i = U_i^2$.

   a. Vérifier que X_1 et U^2 sont de même loi.

   b. On pose $W_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$. En utilisant le résultat de la question 5.a, déterminer la loi de W_n.

   c. Déterminer $\mathcal{D}_{W_n}$, et pour tout s de $\mathcal{D}_{W_n}$, exprimer $\Phi_{W_n}(s)$ en fonction de s et de n. Établir une relation entre $\Phi_{W_n}(s)$ et $\Phi_{Z_1}(s), \Phi_{Z_2}(s), \ldots, \Phi_{Z_n}(s)$.

7. Soit T une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée de variance σ^2 inconnue, σ étant un réel strictement positif. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dispose d'un n échantillon indépendant, identiquement distribué (i.i.d.), $T_1, T_2, \ldots, T_n$ de la loi de T. On considère la variable aléatoire S_n définie par : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^2$.

   a. Montrer que S_n est un estimateur sans biais et convergent du paramètre σ^2.

   b. Soit α un réel vérifiant : $0 < \alpha < 1$, et soit k_α le réel strictement positif tel que : $P([W_n \geqslant k_\alpha]) = 1 - \alpha$.
   Montrer que l'intervalle $\left]0, \frac{nS_n}{k_\alpha}\right]$ est un intervalle de confiance de σ^2 au niveau de risque α.

Partie II. Loi du χ^2 décentré

On considère une suite $(M_j)_{j\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, telles que pour tout j de $\mathbf{N}^*$, M_j suive la loi normale d'espérance m_j $(m_j \in \mathbf{R})$ et de variance égale à 1.

Pour n entier de $\mathbf{N}^*$, on pose : $Y_n = \sum_{j=1}^{n} M_j^2$ et $\lambda_n = \sum_{j=1}^{n} m_j^2$.

On dit que Y_n suit une loi du χ^2 décentré à n degrés de liberté, de paramètre de décentrage λ_n, et on note : $Y_n \hookrightarrow \chi^2(n, \lambda_n)$.

8. Dans cette question *uniquement*, on suppose que l'entier n est égal à 1.

   a. Montrer les deux égalités suivantes : $E(U^3) = 0$ et $E(U^4) = 3$.

   b. En déduire, en fonction de λ_1, les valeurs respectives de $E(Y_1)$ et de $V(Y_1)$.

   c. Montrer que : $\mathcal{D}_{Y_1} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ et établir, pour tout réel s de $\mathcal{D}_{Y_1}$, la formule suivante :

$$\Phi_{Y_1}(s) = (1-2s)^{-1/2} \times \exp\left(\frac{s\lambda_1}{1-2s}\right).$$

9. Soit n un entier de $\mathbf{N}^*$.

   a. Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$ en fonction de n et de λ_n.

   b. On admet que l'on a $\mathcal{D}_{Y_n} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$. Pour tout s de $\mathcal{D}_{Y_n}$, exprimer $\Phi_{Y_n}(s)$ en fonction de s, n et λ_n.

Partie III. Nombre aléatoire de degrés de liberté

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{R}$ admettant une espérance $E(X)$, et une variable aléatoire K à valeurs dans $\mathbf{N}$.

On note N_K l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $P(X = k) > 0$, et pour tout entier k de N_K, on note $E(X|X = k)$ l'espérance de la variable aléatoire X pour la probabilité conditionnelle $P_{[X=k]}$.

On rappelle l'égalité suivante : $(\star)\ E(X) = \sum_{k\in N_K} E(X|K = k)P(K = k)$.

Soit g l'application définie sur $\mathbf{N}$ par : $g(k) = \begin{cases} E(X|K = k) & \text{si } k \in N_K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

10. *Vérification de la formule $(\star)$ sur un exemple.*
    Soit $(J_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Pour tout k de $\mathbf{N}^*$, on pose : $X_k = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}(J_i)$. Autrement dit, pour tout ω de Ω, $X_k(\omega) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} J_i(\omega)$.
    Soit K une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme discrète sur $[\![1,n]\!]$, $(n \in \mathbf{N}^*)$. On suppose que K est indépendante des variables aléatoires de la suite $(J_i)_{i\geqslant 1}$.
    Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $X(\omega) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant K(\omega)} J_i(\omega)$, et on admet que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

    a. Établir, pour tout entier k de $[\![1,n]\!]$ et pour tout réel x, la relation : $P_{[K=k]}(X \leqslant x) = P(X_k \leqslant x)$.

b. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

c. En déduire que X est une variable aléatoire à densité, qui admet une espérance $E(X)$ que l'on exprimera en fonction de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$.

d. Vérifier l'égalité $(\star)$: $E(X) = E(g(K))$.

11. Soit $(U_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi normale centrée réduite. Soit K une variable aléatoire indépendante des variables aléatoires de la suite $(U_i)_{i\geqslant 1}$, qui suit la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{2}$ strictement positif.
Pour n entier de $\mathbf{N}^*$, on pose $H_n = U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_{n+2K}^2$. On admet que H_n est une variable aléatoire à densité à valeurs positifs, et que $\mathscr{D}_{H_n} = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$.
Soit s un réel de $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$.

a. Montrer que pour tout k de $\mathbf{N}$, la loi conditionnelle de H_n sachant $[K = k]$ est la loi de la variable aléatoire W_{n+2k} définie dans la question 6.b.

b. En posant : $X = e^{sH_n}$, déterminer, pour tout entier k de $\mathbf{N}$, l'expression de $g(k)$ en fonction de k.

c. Établir la formule suivante :

$$E(g(K)) = (1-2s)^{-n/2} \times \exp\left(\frac{\lambda s}{1-2s}\right).$$

d. En utilisant l'égalité $(\star)$ avec $X = e^{sH_n}$, déterminer la loi de H_n.

e. À l'aide de la question 11.a, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :

$$E\left(\frac{1}{H_n}\right) = E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right).$$

Partie IV. Estimateur de James-Stein

Soit p un entier supérieur ou égal à 3. On suppose qu'un modèle aléatoire défini sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ comporte p paramètres réels inconnus $\theta_1, \ldots, \theta_p$ non tous nuls. Un échantillon d'observations statistiques permet d'exhiber des estimateurs $\widehat{\theta_1}, \ldots, \widehat{\theta_p}$, *sans biais* des paramètres $\theta_1, \ldots, \theta_p$ respectivement. On suppose que les variables aléatoires $\widehat{\theta_1}, \ldots, \widehat{\theta_p}$ sont indépendantes, et suivent une loi normale de variance égale à 1.

On pose : $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p), \widehat{\theta} = (\widehat{\theta_1}, \ldots, \widehat{\theta_p}), B_p = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \widehat{\theta_j}^{\,2}$ et $b_p = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \theta_j^2$.

On dit que le *vecteur aléatoire $\widehat{\theta}$ est un estimateur sans biais du paramètre vectoriel* θ, et $E(\widehat{\theta})$ est alors le vecteur θ.
On définit le *risque quadratique scalaire* d'un estimateur θ^* de θ, noté $R(\theta^*, \theta)$, par :

$$R(\theta^*, \theta) = E\left(\sum_{j=1}^{p} (\theta_j^* - \theta_j)^2\right).$$

Dans cette partie, on cherche un estimateur θ^* de θ, représenté par un vecteur aléatoire $(\theta_1^*, \ldots, \theta_p^*)$, dont le risque quadratique $R(\theta^*, \theta)$ est strictement inférieur à $R(\widehat{\theta}, \theta)$.

12. Justifier que la variable aléatoire B_p suit la loi $\chi^2(p, b_p)$, et qu'elle constitue un estimateur biaisé de b_p.

13. On pose : $\theta^* = \left(1 - \dfrac{c}{B_p}\right) \times \widehat{\theta}$, où c est un paramètre réel strictement positif. Soit K une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{b_p}{2}$.

a. En admettant que l'on a : $E\left(\dfrac{1}{B_p} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \theta_j \widehat{\theta_j}\right) = E\left(\dfrac{2K}{p-2+2K}\right)$, établir l'égalité suivante :

$$R(\theta^*, \theta) - R(\widehat{\theta}, \theta) = (c^2 - 2c(p-2)) \times E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right).$$

b. Montrer que l'inégalité : $R(\theta^*, \theta) < R(\widehat{\theta}, \theta)$ est vérifiée si et seulement si $0 < c < 2(p-2)$.
Déterminer, en fonction de p, la valeur de c pour laquelle $R(\theta^*, \theta) - R(\widehat{\theta}, \theta)$ est minimale. Comment s'écrit alors l'estimateur θ^* ?

MATHS II 2008 : CORRIGÉ

Préliminaire

1.a. Notons que la fonction $t \mapsto e^{-at^2}$ est paire, et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\,dt$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} e^{-at^2}\,dt$ converge.

Si $a > 0$, alors $t^2 e^{-at^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, et donc $e^{-at^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, on en déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-at^2}\,dt$ converge.

Si $a \leqslant 0$, alors pour tout $t \geqslant 0$, $e^{-at^2} \geqslant 1$. Or $\int_0^{+\infty} 1\,dt$ diverge, donc il en est de même de $\int_0^{+\infty} e^{-at^2}\,dt$.

Ainsi, $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\,dt \text{ converge si et seulement si } a > 0.}$

Dans cas, procédons au changement de variable[1] $u = \sqrt{2a}t$, de sorte que $du = \sqrt{2a}dt$. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-u^2/2}\,du = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2a}} = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{a}}.}$$

[1] Affine, donc légitime.

Intégrale de Gauss

La valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt$$

se retrouve en se rappelant que l'intégrale de la densité d'une loi normale centrée réduite vaut 1.

1.b. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $-ax^2 + bx = -a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a}$. Et donc

$$e^{-ax^2+bx} = e^{\frac{b^2}{4a}} e^{-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2}.$$

Procédons au changement de variable $t = x - \frac{b}{2a}$. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx$ converge si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{b^2}{4a}} e^{-at^2}\,dt$ converge.

Alors, par la question 1.a, la seconde intégrale converge si et seulement si $a > 0$. Dans ce cas, ces deux intégrales sont égales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx = e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right).}$$

Chgt de variable

Rappelons que le théorème de changement de variable affirme deux choses :
- les deux intégrales (avant et après chgt de variable) sont égales
- en cas de convergence, elles sont égales.

2.a. Par le théorème de transfert, $E(e^{sU})$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} f_U(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2+st}\,dt$ converge absolument.

Mais par la question 1.b, cette intégrale converge toujours, et vaut

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) = \boxed{e^{s^2/2}.}$$

2.b. Toujours par le théorème de transfert, $\Phi_Z(s) = E(e^{sU^2})$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st^2} f_U(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\left(\frac{1}{2} - s\right)t^2\right)\,dt$ converge absolument[2].

D'après la question 1.b, c'est le cas si et seulement si $\frac{1}{2} - s > 0 \Leftrightarrow s < \frac{1}{2}$. Ainsi, on a bien $\mathscr{D}_Z = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$.

Pour $s \in \mathscr{D}_Z$, on a alors

$$\Phi_Z(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{1/2 - s}} = \frac{1}{\sqrt{1-2s}} = \boxed{(1-2s)^{-1/2}.}$$

[2] L'intégrande étant positive, la convergence équivaut à la convergence absolue.

3.a. $s \in \mathcal{D}_{\mu X+\beta}$ si et seulement si $E(e^{s(\mu X+\beta)})$ existe. Or, $e^{s(\mu X+\beta)} = e^{s\beta}e^{s\mu X}$ admet une espérance si et seulement si $E(e^{s\mu X})$ existe, c'est-à-dire si et seulement si $\mu s \in \mathcal{D}_X$.
On a alors
$$\Phi_{\mu X+b}(s) = e^{s\beta}E(e^{s\mu X}) = \boxed{e^{s\beta}\Phi_X(\mu s).}$$

3.b. Par le théorème de transfert, $s \in \mathcal{D}_X$ si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}e^{-x+sx}\,dx$ converge.
Si $s < 1$, on a $1-s<0$, par le changement de variable $t = x(1-s)$, on a alors
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}e^{-x+sx}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{t}{1-s}\right)^{\nu-1}e^{-t}\frac{dt}{1-s} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\frac{1}{(1-s)^\nu}\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}\,dt.$$
Cette dernière intégrale converge et vaut $\Gamma(\nu)$, de sorte que $\boxed{\Phi_X(s) = (1-s)^{-\nu}.}$
Si $s = 1$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\nu-1}\,dx$ diverge[3] et donc $1 \notin \mathcal{D}_X$.
Enfin, si $s > 1$, alors $\forall x \in \mathbf{R}_+, x^{\nu-1}e^{-x+sx} \geqslant x^{\nu-1}$, et puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\nu-1}\,dx$ diverge, il en est de même de l'intégrale définissant $\Phi_X(s)$. Et donc $s \notin \mathcal{D}_X$.
Ainsi, on a bien $\boxed{\mathcal{D}_X =]-\infty, 1[.}$
Par la question 3.a, on a alors $s \in \mathcal{D}_{2X} \Leftrightarrow 2s \in \mathcal{D}_X \Leftrightarrow 2s \in]-\infty, 1[\Leftrightarrow s \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$.
Et alors, pour $s < \frac{1}{2}$, il vient, toujours d'après 3.a,
$$\Phi_{2X}(s) = \Phi_X(2s) = (1-2s)^{-\nu}.$$

Danger !
On serait tentés d'utiliser le même changement de variable pour $s > 1$. Il ne faut alors pas oublier que $1-s$ étant négatif, les bornes de l'intervalle d'intégration vont changer, et devenir 0 et $-\infty$.

[3] En 0 si $\nu \leqslant 2$ et en $+\infty$ si $x \geqslant 2$

Partie I. Loi du χ^2 centré

4. On a $f_{X_4} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\Gamma(2)}xe^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{4}xe^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.
Donc f_{X_4} est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, de dérivée égale à $\dfrac{e^{-2x}}{4}(1-2x)$.
Ainsi, f_{X_4} est croissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et décroissante sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
On a de plus, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f_{X_4}(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_{X_4}(x) = 0$ et $f_{X_4}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}e^{-1}$.

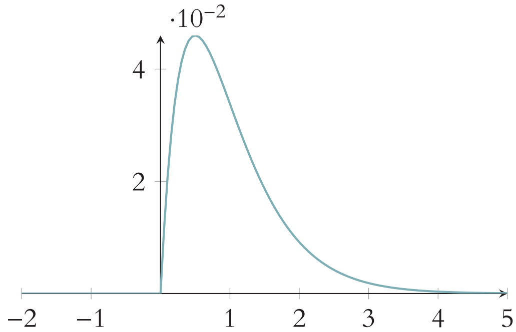


FIGURE 1– La courbe représentative de f_{X_4}.

5.a. Par transformation affine, une densité de $\dfrac{X_r}{2}$ est
$$x \mapsto 2f_{X_r}\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{2^{r/2}\Gamma(r)}(2x)^{r/2-1}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)}x^{r/2-1}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
On reconnaît alors la densité d'une loi $\gamma\left(\frac{r}{2}\right)$, et donc $\boxed{\frac{X_r}{2} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{r}{2}\right).}$
On en déduit que $E(X_r) = 2E\left(\frac{X_r}{2}\right) = 2\frac{r}{2} = \boxed{r}$ et
$$V(X_r) = V\left(2\frac{X_r}{2}\right) = 4V\left(\frac{X_r}{2}\right) = 4\frac{r}{2} = \boxed{2r.}$$

5.b. Il s'agit en fait du résultat de la question 3.b : $X_r = 2Y_r$ avec $Y_r \hookrightarrow \gamma\left(\frac{r}{2}\right)$.
Et donc $\mathcal{D}_{X_r} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ et $\boxed{\forall s < \frac{1}{2}, \Phi_{X_r}(s) = (1-2s)^{-r/2}.}$

6.a. Les résultats des questions 2.b et 5.b prouvent que pour tout $s \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$, $\Phi_{U_1^2}(s) = \Phi_{X_1}(s)$.
Et donc, d'après le résultat admis dans le préambule, $\boxed{X_1 \text{ et } U_1^2 \text{ ont même loi.}}$

Remarque
On pourrait prouver «à la main» que U_1^2 et X_1 ont même loi en montrant qu'elles ont les mêmes densités.

6.b. Notons que $W_n = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{Z_i}{2}$, où les $\frac{Z_i}{2}$ sont mutuellement indépendantes car les U_i le sont, et suivent toutes une loi γ de paramètre $\frac{1}{2}$.
Donc par stabilité des lois γ, $2W_n$ suit une loi $\gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, et donc, par la question 5.a, $\boxed{Z_n \hookrightarrow \chi^2(n).}$

6.c. D'après le résultat de la question 5.b, $\mathscr{D}_{W_n} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ et pour tout $s \in \mathscr{D}_{W_n}$, $\boxed{\Phi_{W_n}(s) = (1-2s)^{-n/2}.}$

On a alors $e^{sW_n} = \prod_{i=1}^{n} e^{sZ_i^2}$, et par indépendance des Z_i^2, il vient alors, pour $s \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$,

$$\Phi_{W_n}(s) = E(e^{sW_n}) E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{sZ_i^2}\right) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{sZ_i^2}) = \boxed{\prod_{i=1}^{n} \Phi_{Z_i^2}(s).}$$

Remarque
L'énoncé n'attendait visiblement pas cette preuve, pourtant peu difficile, et souhaitait juste que l'on constate, grâce aux valeurs calculées précédemment, que cette relation est vraie.

7.a. Par la formule de Huygens, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $E(T_i^2) = V(T_i) + E(T_i)^2 = \sigma^2 + 0^2 = \sigma^2$.
Et donc $E(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(T_i^2) = \sigma^2$, et donc S_n est un estimateur sans biais de σ^2.
De plus, les T_i^2 admettent un moment d'ordre 2, car les T_i admettent un moment d'ordre 4.
En effet, $E(T_i^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^4 e^{-1/2t^2}\,dt$ converge car $t^2 t^4 e^{-1/2t^2} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $t^4 e^{-1/2t^2} = \underset{t\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
La loi faible des grands nombres[4] prouve alors que

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^2 \xrightarrow{P} E(T_1^2) = \sigma^2.$$

Ainsi, $\boxed{S_n \text{ est un estimateur sans biais et convergent de } \sigma^2.}$

[4] Qui s'applique car les T_i^2 sont i.i.d. et possèdent un moment d'ordre 2.

7.b. Notons que les $\frac{T_i}{\sigma}$ suivent une loi normale centrée réduite, et donc les $\frac{T_i^2}{\sigma^2}$ ont même loi que U_1^2. On en déduit que

$$\frac{nS_n}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i^2}{\sigma^2} \hookrightarrow \chi^2(n).$$

En particulier, $\frac{nS_n}{\sigma^2}$ a même loi que W_n et donc

$$P\left(0 < \sigma^2 \leqslant \frac{nS_n}{k_\alpha}\right) = P\left(k_\alpha \leqslant \frac{nS_n}{\sigma^2}\right) = P\left(\frac{nS_n}{\sigma^2} \geqslant k_\alpha\right) = P(W_n \geqslant k_\alpha) = 1-\alpha.$$

Et donc $\boxed{\left]0, \frac{nS_n}{k_\alpha}\right] \text{ est un intervalle de confiance de } \sigma^2 \text{ au niveau de risque } \alpha.}$

Détails
Une loi du χ^2 ne prend que des valeurs positives, donc l'inégalité $0 \leqslant \frac{nS_n}{\sigma^2}$ est automatique vérifiée. Et puisqu'une loi du χ^2 est à densité, il est possible de remplacer l'inégalité large par une inégalité stricte.

Partie II. Loi du χ^2 décentré

8.a. Sous réserve de convergence, $E(U^4)$ est égal à $\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2t^2}\,dt$. Puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction paire, il nous suffit de calculer[5] l'intégrale entre 0 et $+\infty$. Or, pour $A > 0$, on a

$$\int_0^A t^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t^2/2}\,dt = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^A + \int_0^A \frac{3}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0+3\int_0^{+\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Et donc,

$$E(U^4) = 2\times 3\int_0^{+\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 3\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 3E(U^2) = \boxed{3.}$$

[5] Et d'étudier la convergence.

IPP
On a ici posé $u = t^3$ et

$$v' = te^{-\frac{t^2}{2}}$$

soit encore $v = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Puisque U admet un moment d'ordre 4, elle admet un moment d'ordre 3, qui par le théorème de transfert, est donné par

$$E\left(U^3\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Autrement dit, nous savons déjà que cette intégrale converge. Puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction impaire, elle est nulle : $\boxed{E\left(U^3\right) = 0.}$

8.b. Par transformation affine de loi normale, $M_1 - m_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, et donc $Y_1 = M_1^2 = ((M_1 - m_1) + m_1)^2 = (M_1 - m_1)^2 + 2m_1(M_1 - m_1) + m_1^2$, de sorte que

$$E(Y_1) = E((M_1 - m_1)^2) + 2m_1 \underbrace{E(M_1 - m_1)}_{=0} + m_1^2 = E(U^2) + m_1^2 = m_1^2 + 1 = \boxed{\lambda_1 + 1.}$$

Moment
On a
$E(U^2) = E(U)^2 + V(U) = 1.$

De même, on a

$$\begin{aligned} M_1^4 &= (M_1^2)^2 = \left(((M_1 - m_1) + m_1)^2\right)^2 = \left((M_1 - m_1)^2 + 2m_1(M_1 - m_1) + m_1^2\right)^2 \\ &= (M_1 - m_1)^4 + 4m_1(M_1 - m_1)^3 + 2m_1^2(M_1 - m_1)^2 + 4m_1^2(M_1 - m_1)^2 + 4m_1^3(M_1 - m_1) + m_1^4. \end{aligned}$$

Et alors, on en déduit[6] que

$$E(M_1^4) = E(U^4) + 4m_1E(U^3) + 2m_1^2E(U^2) + 4m_1^2E(U^2) + 4m_1^3E(U) + m_1^4 = 3 + 6m_1^2 + m_1^4.$$

[6] $M_1 - m_1$ a même loi que U, et donc les mêmes moments.

Par la formule de Huygens, on en déduit alors que

$$V(Y_1) = V(M_1^2) = E(Y_1^2) - E(Y_1)^2 = E(M_1^4) - E(M_1^2)^2 = 3 + 6m_1^2 + m_1^4 - (m_1^2 + 1)^2 = 2 + 4m_1^2 = \boxed{4\lambda_1 + 2.}$$

8.c. Sous réserve de convergence, on a, par le théorème de transfert,

$$\Phi_{Y_1}(s) = E(e^{sM_1^2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(t-m_1)^2/2}\,dt = \frac{e^{-m_1^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(s-\frac{1}{2}\right)t^2 + m_1 t}\,dt.$$

D'après la question 1.b, cette intégrale converge si et seulement si $s - \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow s \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ et alors

$$\Phi_{Y_1}(s) = \frac{e^{-\frac{m_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2} - s}} \exp\left(\frac{m_1^2}{2(1-2s)}\right) = \sqrt{\frac{1}{1-2s}} \exp\left(\lambda_1\left(\frac{1}{2(1-2s)} - \frac{1}{2}\right)\right) = \boxed{(1-2s)^{-1/2} \exp\left(\frac{s\lambda_1}{1-2s}\right).}$$

9.a. Pour tout j, on a $E(M_j^2) = V(M_j) + E(M_j)^2 = 1 + m_j^2$, de sorte que

$$E(Y_n) = \sum_{j=1}^{n} E(M_j^2) = n + \sum_{j=1}^{n} m_j^2 = \boxed{n + \lambda.}$$

De même, on a prouvé en 8.b que pour chaque M_j, $V(M_j) = 2 + 4m_j^2$. Les M_j étant indépendantes, on en déduit que

$$V(Y_n) = \sum_{j=1}^{n} V(M_j^2) = \sum_{j=1}^{n} (2 + 4m_j^2) = \boxed{2n + 4\lambda_n.}$$

9.b. Pour $s \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$, on a

$$\Phi_{W_n}(s) = E\left(e^{sW_n}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{sM_i^2}\right).$$

Par indépendance des M_i, il vient alors

$$\Phi_{W_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{M_i^2}) = \prod_{i=1}^{n} (1-2s)^{-1/2} \exp\left(\frac{sm_i^2}{1-2s}\right) = (1-2s)^{-n/2} \exp\left(\frac{s\sum_{i=1}^{n} m_i^2}{1-2s}\right) = \boxed{(1-2s)^{-n/2} \exp\left(\frac{s\lambda_n}{1-2s}\right).}$$

Partie III. Nombre aléatoire de degrés de liberté

10. *Vérification de la formule (★) sur un exemple.*

10.a. On a, par définition de X, $[X \leqslant x] \cap [K = k] = [X_k \leqslant x] \cap [K = k]$. Et alors

$$P_{[K=k]}(X \leqslant x) = \frac{P([K = k] \cap [X \leqslant x])}{P(K = k)} = \frac{P([K = k] \cap [X_k \leqslant x])}{P(K = k)} = \frac{P(K = k)P(X_k \leqslant x)}{P(K = k)} = \boxed{P(X_k \leqslant x).}$$

Indépendance
Par hypothèse, K est indépendante des J_i, et donc, par le lemme des coalitions, de X_k, et ce quelle que soit la valeur de k.
En revanche, K n'est pas indépendante de X, dont la définition dépend clairement de K.

10.b. Il est évident que X est à valeurs dans $[0, 1]$. Soit donc $x \in [0, 1]$. Alors, par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[K = k], k \in [\![1, n]\!]\}$, on a

$$P(X \leqslant x) = \sum_{k=1}^{n} P_{[K=k]}(X \leqslant x)P(K = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} P(X_k \leqslant x).$$

Support
Commencer par déterminer le support de X permet de s'éviter de fastidieuses distinctions de cas par la suite.

Or, il est classique[7] que $P(X_k \leqslant x) = \prod_{i=1}^{k} P(J_i \leqslant x) = x^k$, de sorte que

$$P(X \leqslant x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x^k = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1}{n}\dfrac{x^{n+1} - x}{1 - x} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

La fonction de répartition de X est donc

$$\boxed{x \mapsto F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{n}\dfrac{x^{n+1} - x}{1 - x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

[7] C'est un maximum de lois uniformes indépendantes, nous l'avons déjà fait plusieurs fois.

10.c. La fonction de répartition de X est évidemment de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
De plus, elle est continue en 0 et en 1 car

$$\lim_{x\to 0^-} F_X(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} F_X(x) \text{ et } \lim_{x\to 1^-} F_X(x) = 1 = \lim_{x\to 1^+} F_X(x).$$

Limite en 1^-
La limite en 1^- est évidente si l'on se rappelle que pour $0 < x < 1$,
$$F_X(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x^k.$$

Ainsi, F_X est continue sur $\mathbf{R}$, et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en 0 et en 1 : $\boxed{X \text{ est une variable à densité.}}$
Une densité en est alors donnée par

$$x \mapsto f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

X admet une espérance car $0 \leqslant X \leqslant 1$, et alors

$$E(X) = \int_0^1 x f_X(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} kx^k\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 kx^k\,dx = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}}.$$

Astuce
Prouver l'existence de l'espérance grâce à un encadrement permet d'éviter de prouver la convergence d'une intégrale.

10.d. Nous avons montré à la question 10.a que la loi conditionnelle de X conditionnellement à l'événement $[K = k]$ est la loi de X_k.

Or, nous avons déjà prouvé que la fonction de répartition de X_k est $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^k & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Il est aisé de prouver alors que X_k est une variable à densité, et qu'une densité en est donnée par $x \mapsto \begin{cases} kx^{k-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Et alors X_k admet une espérance, égale à

$$E(X_k) = \int_0^1 kx^k\,dx = \frac{k}{k+1}.$$

On en déduit donc que pour $k \in [\![1,n]\!]$, $E(X|K=k) = E(X_k) = \dfrac{k}{k+1}$.
Et alors, par le théorème de transfert[8], il vient

[8] Version discrète.

$$E(g(K)) = \sum_{k=1}^{n} P(K=k)E(X|K=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{k}{k+1} = E(X).$$

Remarque

La formule ($\star$) rappelée par l'énoncé n'est autre que la formule de l'espérance totale.

11.a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors on a

$$[H_n \leqslant x] \cap [K=k] = [K=k] \cap [U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_{n+2k}^2 \leqslant x].$$

Et alors, par le même argument d'indépendance qu'à la question 10.a, il vient

$$P_{[K=k]}(H_n \leqslant x) = \frac{P([K=k]\cap[U_1^2+U_2^2+\cdots+U_{n+2k}^2 \leqslant x])}{P(K=k)} = \frac{P(U_1^2+U_2^2+\cdots+U_{n+2k}^2 \leqslant x)P(K=k)}{P(K=k)} = P(U_1^2+\cdots+U_{n+2k}^2 \leqslant x).$$

Les U_i étant indépendantes, et suivant la loi normale centrée réduite,

$$U_1^2 + \cdots + U_{n+2k}^2 \hookrightarrow \chi^2(n+2k).$$

Et donc la loi conditionnelle de H_n sachant $[K=k]$ est bien la loi $\chi^2(n+2k)$, c'est-à-dire celle de W_{n+2k}.

11.b. Soit $x = e^{sH_n}$. Alors on a

$$g(k) = E(e^{sH_n}|K=k) = E(e^{sW_{n+2k}}) = \Phi_{W_{n+2k}}(s) = \boxed{(1-2s)^{-\frac{n}{2}-k}}.$$

11.c. Par le théorème de transfert, on a, sous réserve de convergence[9] de la série

[9] Absolue, mais tous les termes sont positifs.

$$E(g(K)) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(K=k)g(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k (1-2s)^{-\frac{n}{2}-k} = (1-2s)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\lambda}{2}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{2(1-2s)}\right)^k.$$

On reconnaît alors une série exponentielle, qui est nécessairement convergente, de sorte que $g(K)$ admet une espérance et

$$E(g(K)) = (1-2s)^{-n/2}\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\exp\left(\frac{\lambda}{2(1-2s)}\right) = \boxed{(1-2s)^{-n/2}\exp\left(\frac{s\lambda}{1-2s}\right)}.$$

11.d. D'après la formule ($\star$), on a $E(X) = E(g(K))$.
D'autre part, $E(X) = \Phi_{H_n}(s)$ et on reconnaît $\Phi_{Y_n}(s)$, où Y_n est la variable aléatoire rencontrée à la partie II.
Ainsi, pour tout $s < \dfrac{1}{2}$, $\Phi_{H_n}(s) = \Phi_{Y_n}(s)$, donc Y_n et H_n ont même loi : $\boxed{H_n \hookrightarrow \chi^2(n,\lambda)}$.

Même loi

On utilise ici le résultat admis au début de l'énoncé, qui permet de reconnaître que deux variables X et Y ont la même loi car Φ_X et Φ_Y coïncident. Cela évite donc de repasser par la fonction de répartition.

11.e. Commençons par remarquer que $\dfrac{1}{n-2+2K}$ admet une espérance car $0 \leqslant \dfrac{1}{n-2+2K} \leqslant 1$, et que la variable constante égale à 1 admet une espérance.
Par le théorème de transfert, on a alors

$$E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{n-2+2k}P(K=k).$$

D'autre part, nous savons, d'après le résultat de la question 11.a, que la loi conditionnelle de H_n conditionnellement à l'événement $[K=k]$ est la loi du χ^2 centré à $n+2k$ degrés de libertés, dont la densité est donnée par

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n+2k}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2k}{2}\right)}x^{\frac{n+2k}{2}-1}\exp\left(-\frac{x}{2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par le théorème de transfert, on a alors, sous réserve de convergence,

$$E\left(\frac{1}{H_n}\Big|[K=k]\right) = E\left(\frac{1}{W_{n+2k}}\right) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\frac{1}{2^{\frac{n+2k}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2k}{2}\right)}x^{\frac{n+2k}{2}-1}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2^{\frac{n+2k}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2k}{2}\right)}\int_0^{+\infty}x^{\frac{n+2(k-1)}{2}-1}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)dx.$$

Mais, en notant que la densité de la loi $\chi^2(n+2(k-1))$ est d'intégrale égale à 1, on remarque que

$$\int_0^{+\infty} x^{\frac{n+2(k-1)}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx = 2^{\frac{2+2(k-1)}{2}} \Gamma\left(\frac{n+2k}{2}-1\right)$$

et donc $E\left(\frac{1}{W_{n+2k}}\right)$ existe[10] et

[10] Car l'intégrale converge.

$$E\left(\frac{1}{W_{n+2k}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+2k}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2k}{2}\right)}.$$

Or, nous savons que

$$\Gamma\left(\frac{n+2k}{2}\right) = \Gamma\left(\left(\frac{n+2k}{2}-1\right)+1\right) = \left(\frac{n+2k}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n+2k}{2}-1\right) = \frac{n-2+2k}{2}\Gamma\left(\frac{n+2k}{2}-1\right).$$

Fonction Γ

Pour tout $x > 0$, on a

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

On en déduit donc que

$$E\left(\frac{1}{W_{n+2k}}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{n-2+2k} = \frac{1}{n-2+2k}.$$

Et alors, par la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'événements $\{[K=k], k \in \mathbf{N}\}$, on a, sous réserve de convergence de la série suivante :

$$E\left(\frac{1}{H_n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} E\left(\frac{1}{H_n}\|[K=k]\right) P(K=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} E\left(\frac{1}{W_{n+2k}}\right) P(K=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n-2+2k} P(K=k).$$

Espérance totale

Notons que l'énoncé ne rappelle que la moitié de la formule de l'espérance totale : si $E(X)$ existe, alors les espérances conditionnelles existent, et la série de la formule $(\star)$ converge.
Mais nous utilisons ici la réciproque (qui fait bien partie de l'énoncé de la formule de l'espérance totale) : si les espérances conditionnelles existent, et si la série de la formule $(\star)$ converge, alors $E(X)$ existe et est égale à la somme de la série.

Mais nous avons prouvé précédemment que cette série converge, et que sa somme est égale à $E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right)$. Et donc $E\left(\frac{1}{H_n}\right)$ existe et

$$\boxed{E\left(\frac{1}{H_n}\right) = E\left(\frac{1}{n-2+2K}\right).}$$

Partie IV. Estimateur de James-Stein

12. Pour tout i, $\widehat{\theta}_i$ est un estimateur sans biais de θ_i, et donc $E(\widehat{\theta}_i) = \theta_i$.
Puisque l'on sait déjà que $\widehat{\theta}_i$ suit une loi normale de variance 1, on en déduit que

$$\widehat{\theta}_i \hookrightarrow \mathcal{N}(\theta_i, 1).$$

Les $\widehat{\theta}_i$ étant indépendants, d'après la définition de la loi $\chi^2(p, b_p)$ donnée au début de la partie II, on en déduit que $B_p = \sum_{i=1}^{p} \widehat{\theta}_i^2 \hookrightarrow \chi^2\left(p, \sum_{i=1}^{p}\theta_i^2\right) = \boxed{\chi^2(p, b_p).}$

Par la question 9.a, on a alors $E(B_p) = b_p + n$, et donc $\boxed{B_p \text{ est un estimateur biaisé de } b_p}$ (et son biais en b_p est égal à n).

13.a. On a

$$\begin{aligned}
R(\theta^*, \theta) =& E\left(\sum_{j=1}^{p}(\theta_j^* - \theta_j)^2\right) = E\left(\sum_{j=1}^{p}\left(\left(1-\frac{c}{B_p}\right)\widehat{\theta}_j - \theta_j\right)^2\right)\\
=& E\left(\left(1-\frac{c}{B_p}\right)^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{p}\widehat{\theta}_j^2}_{=B_p}\right) - 2E\left(\left(1-\frac{c}{B_p}\right)\sum_{j=1}^{p}\theta_j\widehat{\theta}_j\right) + E\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{p}\theta_j^2}_{\in\mathbf{R}}\right)\\
=& E\left(B_p - 2c + \frac{c^2}{B_p}\right) - 2E\left(\sum_{j=1}^{p}\theta_j\widehat{\theta}_j\right) + 2cE\left(\frac{1}{B_p}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\widehat{\theta}_j\right) + \sum_{j=1}^{p}\theta_j^2
\end{aligned}$$

$$=E(B_p) - 2c + c^2E\left(\frac{1}{B_p}\right) - 2\sum_{j=1}^{p}\theta_j \underbrace{E(\widehat{\theta_j})}_{=\theta_j} + 2cE\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right) + b_p$$

Mais d'après les questions 11.d et 11.e, $E\left(\frac{1}{B_p}\right)$ existe[11] et vaut $E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right)$, de sorte que

$$\begin{aligned}R(\theta^*,\theta) &= b_p + p - 2c + c^2E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) - 2b_p + 2cE\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right) + b_p\\ &= p - 2c + c^2E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) + 2cE\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right).\end{aligned}$$

[11] B_p et H_n ont la même loi, donc $\frac{1}{B_p}$ et $\frac{1}{H_n}$ aussi. Elles ont donc les mêmes espérances.

Or, on a $\dfrac{2K}{p-2+2K} = \dfrac{p-2+2K-(p-2)}{p-2+2K} = 1 - \dfrac{p-2}{p-2+2K}$, de sorte que

$$E\left(\frac{2K}{p-2+2K}\right) = 1 - (p-2)E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right).$$

On en déduit que

$$R(\theta^*,\theta) = p - 2c + c^2E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) + 2c - 2c(p-2)E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right) = 2p + (c^2 - 2c(p-2))E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right).$$

Notons que les $\widehat{\theta_j} - \theta_j$ suivent la loi normale centrée réduite et sont indépendantes, de sorte que $\displaystyle\sum_{j=1}^{p}(\widehat{\theta_j} - \theta_j)^2 \hookrightarrow \chi^2(p)$. On en déduit que

$$R(\widehat{\theta},\theta) = E\left(\sum_{j=1}^{p}(\widehat{\theta_j} - \theta_j)^2\right) = p.$$

Et donc il vient bien

$$\boxed{R(\theta^*,\theta) - R(\widehat{\theta},\theta) = (c^2 - 2c(p-2))E\left(\frac{1}{p-2+2K}\right).}$$

13.b. La variable aléatoire $\dfrac{1}{p-2+2K}$ est strictement positive, donc son espérance l'est aussi.
On a donc

$$R(\theta^*,\theta) < R(\widehat{\theta},\theta) \Leftrightarrow R(\theta^*,\theta) - R(\widehat{\theta},\theta) < 0 \Leftrightarrow c(c - 2(p-2)) < 0.$$

Or une étude du signe de la fonction[12] $c \mapsto c(c-2(p-2))$ montre qu'elle est strictement négative si et seulement si $0 < c < 2(p-2)$.
La valeur pour laquelle $R(\theta^*,\theta) - R(\widehat{\theta},\theta)$ est minimale[13] est alors $\boxed{c = p-2.}$
Dans ce cas, on a

$$\boxed{\theta^* = \left(1 - \frac{p-2}{B_p}\right)\widehat{\theta}.}$$

[12] Polynomiale de degré 2, et dont les racines sont 0 et $2(p-2)$.

[13] Rappelons que l'extremum de $ax^2 + bx + c$ est atteint en $x = -\frac{b}{2a}$.

Maths II 2006

Sujet : Nombre de racines d'un polynôme à coefficients aléatoires **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : variables aléatoires discrètes, variables à densité, produit de convolution, polynômes, fonctions d'une variable réelle, séries.

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Modifications apportées au sujet d'origine : question 3 : ajout de la partie «montrer qu'elles sont à densité». Remplacement du terme «polynôme normalisé» par «polynôme unitaire».

Commentaires : la question 8 est excessivement difficile à rédiger correctement. Toutefois, on peut comprendre ce qui se passe et donner une esquisse de preuve, ou admettre le résultat et passer à la suite. L'énoncé fait tout de même admettre un résultat non trivial à la question 14.

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés concernant le nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n, $(n \geqslant 1)$, à coefficients réels fixés ou aléatoires.
Pour toute fonction Ψ dérivable sur son domaine de définition, la dérivée de Ψ est notée Ψ'.
Les quatre parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I : Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires

On considère dans cette partie, deux variables aléatoires réelles X_0 et X_1 définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et de même loi. Pour tout ω de Ω, on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y, défini par :

$$Q_\omega(y) = y^2 + X_1(\omega)y + X_0(\omega).$$

On désigne par $M(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω.

1. Montrer que l'application M qui, à tout ω de Ω associe $M(\omega)$, est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p $(p \in]0,1[)$. On suppose dans cette question que X_0 et X_1 suivent la même loi que $2Z-1$.
   a. Déterminer la loi de X_0.
   b. Déterminer la loi de M et calculer son espérance $E(M)$.

Dans les questions suivantes, on suppose que X_0 et X_1 suivent une même loi exponentielle de paramètre $1/2$.

On pose : $Y_0 = -4X_0$, $Y_1 = X_1^2$, $Y = Y_1 + Y_0$, et on note F_{Y_0}, F_{Y_1}, et F_Y, les fonctions de répartition de Y_0, Y_1 et Y, respectivement.

3. Montrer que l'on a, pour tout x réel

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{et } F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^{x/8} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   En déduire que Y_0 et Y_1 sont à densité, et donner l'expression d'une densité f_{Y_0} de Y_0 et d'une densité f_{Y_1} de Y_1.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \times \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t}{4} + \sqrt{t}\right)\right]$, où exp désigne la fonction exponentielle.
   a. Établir la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$.
   b. En déduire qu'une densité f_Y de la variable aléatoire Y est donnée, pour tout x réel, par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{32} e^{x/8} \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{32} e^{x/8} \displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)\,dt & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

5. On désigne par Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
   a. Justifier la validité du changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$.

b. En déduire que $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = 4\sqrt{e}\int_1^{+\infty} e^{-v^2/2}\,dv$, et donner, pour tout réel x négatif, l'expression de $f_Y(x)$ en fonction de Φ.

c. Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $f_Y(x) = \dfrac{\sqrt{2\pi e}}{8} e^{x/8}\left[1 - \Phi\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}+1\right)\right]$.

d. Déterminer la loi de M et son espérance $E(M)$ (on fera intervenir le nombre $\Phi(1)$).

Partie II – Suites de Sturm

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire ($a_n = 1$) donné, à coefficients réels. On suppose que toutes les racines réelles de P sont simples.

L'objectif de cette partie est de décrire un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P appartenant à un intervalle donné $[a, b]$.

On associe au polynôme P la suite $(R_i)_{i\geqslant 0}$ de polynômes définie de la manière suivante : $R_0 = P$, $R_1 = -P'$, et pour tout entier j tel que $R_{j+1} \neq 0$, le polynôme R_{j+2} est l'opposé du reste de la division euclidienne de R_j par R_{j+1}. Si $R_{j+1} = 0$, on pose $R_{j+2} = 0$.

6. Montrer qu'il existe un entier k ($k \geqslant 2$), tel que $R_k = 0$. On note R_m ($m \geqslant 1$), le dernier polynôme non nul de la suite $(R_i)_{i\geqslant 0}$.

Dans toute cette partie, on pose :

$$\begin{cases} R_0 & = S_1R_1 - R_2 \\ R_1 & = S_2R_2 - R_3 \\ & \vdots \\ R_{m-2} & = S_{m-1}R_{m-1} - R_m \\ R_{m-1} & = S_mR_m \end{cases}$$

7. a. Montrer que s'il existe un entier j de $[\![0, m-1]\!]$ et un réel x_0 tels que $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$, alors $P(x_0) = P'(x_0) = 0$.

b. En déduire que le polynôme R_m n'admet pas de racine réelle.

c. Soit j un entier de $[\![1, m-1]\!]$. Montrer que si x_0 est une racine réelle de R_j, alors $R_{j-1}(x_0) \times R_{j+1}(x_0) < 0$.

8. Soit $s = (s_1, s_2, \ldots, s_t)$ une t-liste ($t \geqslant 2$) de nombres réels non tous nuls. On ôte de s tous les éléments nuls en préservant l'ordre, et on obtient ainsi une p-liste ($p \leq t$) $\widehat{s} = (\widehat{s_1}, \widehat{s_2}, \ldots, \widehat{s_p})$.

On appelle **nombre de changements de signe de** s, le nombre d'éléments de l'ensemble E défini par :

$$E = \{i \in [\![1, p-1]\!] / \widehat{s_i}\widehat{s_{i+1}} < 0\}.$$

Si $p = 1$, on dit que le nombre de changements de signe est nul.

Par exemple, si $s = (0, 3, 0, 5, -3, 2)$, on a : $\widehat{s} = (3, 5, -3, 2)$, et le nombre de changements de signe est égal à 2.

Pour tout réel x, on note respectivement $C_1(x)$, $C_2(x)$ et $C(x)$, le nombre de changements de signe du couple $(R_0(x), R_1(x))$, de la m-liste $(R_1(x), R_2(x), \ldots, R_m(x))$, et de la $(m+1)$-liste $(R_0(x), R_1(x), R_2(x), \ldots, R_m(x))$.

On désigne par x_0 une racine réelle du polynôme P.

a. En étudiant les variations de P au voisinage de x_0, montrer qu'il existe un réel $\delta_1 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_1]$, on a : $C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1$.

b. À l'aide de la question 7.c, montrer qu'il existe un réel $\delta_2 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_2]$, on a : $C_2(x_0 + h) = C_2(x_0 - h)$ (on distinguera les deux éventualités : soit, x_0 n'est racine d'aucun des polynômes $R_1, R_2, \ldots, R_m$, soit, il existe un entier j de $[\![1, m-1]\!]$ tel que $R_j(x_0) = 0$).

c. Déduire des deux questions précédentes que pour $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et $h \in]0, \delta]$, on a $C(x_0 + h) - C(x_0 - h) = 1$, et que si a et b sont deux réels qui ne sont pas racines de P et qui vérifient $a < b$, alors le nombre de racines réelles de P dans $[a, b]$ est égal à $C(b) - C(a)$.

9. a. Soit α une racine (réelle ou complexe) de P.

Montrer que si $|\alpha| > 1$, alors $|\alpha|^n \leqslant |\alpha|^{n-1} \times \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

En déduire, pour toute racine α de P, l'inégalité : $|\alpha| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

b. Écrire en français, un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P.

10. Écrire une fonction `Scilab` d'entête `function y = nbchgs(T)` qui prend en paramètre un vecteur ligne `T` et retourne le nombre de changements de signes de la suite `T(1),T(2),. . .,T(n)`.

On tiendra compte du fait que le tableau `T` peut contenir des éléments nuls.

Partie III – Un majorant du nombre de racines réelles de P

Soit V un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ tel que $V(X) = v_m X^m + v_{m-1}X^{m-1} + \cdots + v_1 X + v_0$. On note $V^\star$ le polynôme réciproque du polynôme V, défini par : $V^\star(X) = v_0 X^m + v_1 X^{m-1} + \cdots + v_{m-1}X + v_m$.

Soit n un entier de $\mathbf{N}^*$. On considère l'application T qui, à tout polynôme P de degré n, unitaire, à coefficients réels, $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, associe le polynôme $T(P)$ défini par $T(P)(X) = XP'(X)$.

On désigne par $N_0(P)$ le nombre de racines non nulles de P dans l'intervalle $[-1,1]$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, par $N_1(P)$ le nombre de racines de P dans $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, et par $N(P)$ le nombre de racines réelles de P comptées avec leurs ordres de multiplicité.

11. **a.** Établir, à l'aide du théorème de Rolle, l'inégalité : $N_1(P) \leqslant N_1\big(T(P)\big) + 2$.

b. Pour tout k de $\mathbf{N}^*$, on pose $T^k = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (k fois).
Montrer que $N_1(P) \leq N_1\big(T^k(P)\big) + 2k$.

12. **a.** Montrer que pour tout réel x non nul, on a $P^\star(x) = x^n P\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

b. Montrer que $N_1(P) = N_0(P^\star)$.

13. Pour tout réel x et pour tout entier naturel k non nul, on pose :

$$Q_k(x) = 1 + a_{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k x + a_{n-2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k x^2 + \cdots + a_1\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k x^{n-1}.$$

Montrer que $\big(T^k(P)\big)^\star = n^k Q_k$.

14. **a.** Établir, pour tout réel y de $[0,1]$, l'inégalité : $(1-y)e^y \leqslant 1$.

b. On admet la propriété suivante : soit r et ρ deux réels tels que $0 < r < \rho$. On note $D_\rho = \{z \in \mathbf{C} / |z| \leqslant \rho\}$.
Soit U un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ tel que $U(0) \neq 0$. Soit μ un réel strictement positif tel que pour tout z de D_ρ, $|U(z)| \leqslant \mu$. Alors, le nombre de racines réelles de U comptées avec leurs ordres de multiplicité, dans l'intervalle $[-r,r]$, est majoré par le réel : $\dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{\rho}{r}\right)} \times \ln\left(\dfrac{\mu}{|U(0)|}\right)$.

En appliquant cette propriété au polynôme Q_k avec $r = 1$ et $\rho = e^{k/n}$, ($k \in \mathbf{N}^*$), déduire des questions précédentes que pour tout k de $\mathbf{N}^*$, on a : $N_1(P) \leqslant 2k + \dfrac{n}{k}\ln(L(P))$, avec $L(P) = 1 + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$.

c. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\psi(x) = 2x + \dfrac{\theta}{x}$, où θ est un paramètre réel positif.

- **i.** Étudier les variations de ψ.
- **ii.** Montrer que $\psi(\sqrt{\theta/2} + 1) \leqslant 2 + 2\sqrt{2\theta}$.
- **iii.** En déduire l'inégalité : $N_1(P) \leqslant 2 + 2\sqrt{2n\ln(L(P))}$.

d. En supposant $a_0 \neq 0$, on démontrerait de même (et on admettra dans la suite du problème) que :

$$N_0(P) \leqslant 2 + 2\sqrt{2n\ln\left(\frac{L(P)}{|a_0|}\right)}.$$

Conclure en donnant un majorant de $N(P)$, fonction des coefficients $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_{n-1}$.

Partie IV – Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n à coefficients aléatoires

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère dans cette partie, les variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ, strictement positif.

Pour tout ω de Ω, on considère le polynôme Q_ω, d'indéterminée y, défini par :

$$Q_\omega(y) = y^n + X_{n-1}(\omega)y^{n-1} + \cdots + X_1(\omega)y + 1.$$

Soit $M_n(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω. On admet que l'application $M_n : \omega \longmapsto M_n(\omega)$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

15. On définit la variable aléatoire L_n par : $L_n = 2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Soit $Z_n = L_n - 2$. Rappeler la loi de Z_n.

16. À l'aide des résultats de la partie III, montrer que pour tout ω de Ω, on a :

$$M_n(\omega) \leqslant 4 + 4\sqrt{2n} \times \sqrt{\ln(Z_n(\omega) + 2)}.$$

17. Soit h une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, concave sur $\mathbf{R}_+$. Soit W une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose l'existence des espérances $E(W)$ et $E\left(h(W)\right)$.

a. Montrer que, pour tout couple (x_0, x) de réels positifs, on a : $h(x) \leqslant h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0)$.

b. En prenant $x_0 = E(W)$, établir l'inégalité suivante : $E\left((h(W)\right) \leqslant h\left(E(W)\right)$.

18. **a.** Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbf{R}_+$ par $\varphi(x) = \sqrt{\ln(x+2)}$ est concave sur $\mathbf{R}_+$.

b. Soit a un réel positif. Montrer que la série de terme général $\sqrt{\ln(k+2)} \times \dfrac{a^k}{k!}$ est convergente.

19. **a.** Prouver l'existence de l'espérance $E(M_n)$.

b. Montrer que, pour tout réel β strictement supérieur à $1/2$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(M_n)}{n^\beta} = 0.$$

MATHS II 2006 : CORRIGÉ

Partie I : Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires.

1. Le discriminant de Q_ω est $\Delta(\omega) = X_1(\omega)^2 - 4X_0(\omega)$. C'est donc une variable aléatoire car X_1 et X_0 le sont.
De plus, on sait $M(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et que

$$[M = 0] = [\Delta < 0],\ [M = 1] = [\Delta = 0],\ [M = 2] = [\Delta > 0].$$

Et donc, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$[M \leqslant x] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < 0 \\ [\Delta < 0] & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ [\Delta \leqslant 0] & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ \Omega & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}.$$

Puisque Δ est une variable aléatoire, $[\Delta < 0]$ et $[\Delta \leqslant 0]$ sont des éléments de la tribu $\mathscr{A}$, de même que $\emptyset$ et Ω, et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $[M \leqslant x] \in \mathscr{A}$: M est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

> **Rappel**
> Rappelons qu'une fonction $M : \Omega \to \mathbf{R}$ est une variable aléatoire si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$, $[M \leqslant x] \in \mathscr{A}$ (c'est-à-dire est bien un événement dont on peut considérer la probabilité).

2.a. On a $X_0(\Omega) = \{-1, 1\}$ et

$$P(X_0 = -1) = P(2Z - 1 = -1) = P(Z = 0) = 1 - p.$$

Et alors nécessairement, $P(X_0 = 1) = p$.

2.b. Notons que X_1^2 est toujours égal à 1 et donc $\Delta = X_1^2 - 4X_0 = 1 - 4X_0$.
Donc Δ ne peut prendre que les valeurs -3 et 5.
On a alors $[M = 0] = [\Delta < 0] = [X_0 = 1]$ et $[M = 2] = [\Delta > 0] = [X_0 = -1]$.
Ainsi, $P(M = 0) = p$ et $P(M = 2) = 1 - p$.
On a alors $\boxed{E(M) = 2(1 - p).}$

> **Remarque**
> Notons que dans ce cas précis, M ne peut prendre la valeur 1 : Q_ω ne peut avoir de racine double.

3. Notons que Y_1 étant un carré, elle prend ses valeurs dans $\mathbf{R}_+$. Et donc, pour $x < 0$, $F_{Y_1}(x) = 0$.
Si $x \geqslant 0$, on a

$$F_{Y_1}(x) = P(Y_1 \leqslant x) = P(X_1^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X_1 \leqslant \sqrt{x}) = F_{X_1}(\sqrt{x}) - \underbrace{F_{X_1}(-\sqrt{x})}_{=0} = 1 - e^{-\sqrt{x}/2}.$$

> **Remarque**
> Notons que pour $x = 0$, on a alors $F_{Y_1}(0) = 0$, conformément à ce qui nous était demandé.

Et donc

$$\boxed{F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$$

Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$F_{Y_0}(x) = P(Y_0 \leqslant x) = P\left(X_0 \geqslant -\frac{x}{4}\right) = 1 - P\left(X_0 \leqslant \frac{x}{4}\right) = 1 - \begin{cases} 1 - e^{\frac{x}{4}\frac{1}{2}} & \text{si } -\frac{x}{4} \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} e^{x/8} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Ces fonctions sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$, et on a

$$\lim_{x \to 0^-} F_{Y_1}(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} F_{Y_1}(x) = F_{Y_1}(0) \text{ et } \lim_{x \to 0^-} F_{Y_0}(x) = 1 = \lim_{x \to 0^+} F_{Y_0}(x) = F_{Y_0}(0).$$

Donc F_{Y_0} et F_{Y_1} sont continues en 0 et donc sont continues sur $\mathbf{R}$ tout entier, et $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 0.
Donc Y_0 et Y_1 sont des variables à densité, et toute fonction coïncidant avec F'_{Y_0} (resp. F'_{Y_1}) sur $\mathbf{R}^*$ est une densité de Y_0 (resp. de Y_1). Par exemple, on peut prendre

$$f_{Y_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ et } f_{Y_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{1}{8} e^{x/8} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

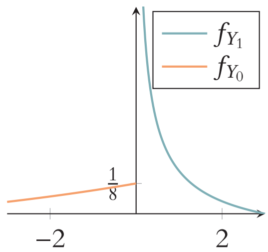


FIGURE 1– Les densités f_{Y_0} et f_{Y_1}.

4.a. La fonction g est continue sur $]0;+\infty[$, donc il y a d'éventuels problèmes de convergence au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de 0, on a $g(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

Mais $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann convergente, et donc, par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$ converge.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$t^2 g(t) = \underbrace{t^{3/2}e^{-t/8}}_{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0}\underbrace{\sqrt{t}e^{-\sqrt{t}/2}}_{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc $g(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, et donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt \text{ converge.}}$

Méthode

Rappelons que la seule croissance comparée dans le cours est $t^\alpha e^t$, et que si l'intuition «toute exponentielle l'emporte sur toute puissance de t» est globalement valable, il y a des précautions à prendre. Par exemple, on n'en conclura pas que

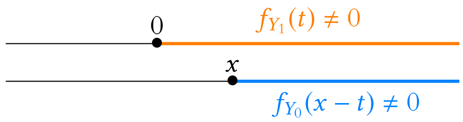
$$\underbrace{t^2e^{-\ln t}}_{=t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mieux vaut donc prendre l'habitude de faire un changement de variable pour se ramener aux croissances comparées usuelles.

4.b. Puisque X_1 et X_0 sont indépendantes, il en est de même de Y_0 et Y_1, et alors une densité de $Y = Y_0 + Y_1$ est obtenue par convolution :

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(t)f_{Y_0}(x-t)\,dt.$$

On a alors $f_{Y_1}(t) \neq 0 \Leftrightarrow t > 0$ et $f_{Y_0}(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow x - t < 0 \Leftrightarrow t > x$.



Donc pour $x \geqslant 0$, on a $f_Y(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{32\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}/2}e^{(x-t)/8}\,dt = \frac{1}{32}e^{x/8}\int_x^{+\infty} g(t)\,dt$.

Et de même, pour $x < 0$, $f_Y(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{32\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}/2}e^{(x-t)/8}\,dt = \frac{1}{32}e^{x/8}\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$.

5.a. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et y est strictement croissante, donc le changement de variable $u = \sqrt{t}$ est légitime.

5.b. En posant $u = \sqrt{t} \Leftrightarrow t = u^2$, on a $2u\,du = dt$ et donc, par le théorème de changement de variable,

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u}\times\exp\left[-\frac12\left(\frac{u^2}{4}+u\right)\right]2u\,du = 2\int_0^{+\infty}\exp\left[-\frac12\left(\frac{u}{2}+1\right)^2+\frac12\right]du.$$

Procédons alors au changement de variable[1] $v = \dfrac{u}{2}+1$. Il vient alors $du = 2\,dv$ et donc

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = 2\int_1^{+\infty} e^{-\frac12 v^2+\frac12}2\,dv = 4\sqrt{e}\int_1^{+\infty} e^{-v^2/2}\,dv.$$

Rappelons que la fonction Φ est définie par $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-v^2/2}\,dv$.

Et puisque $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2/2}\,dv = 1$, alors

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-v^2/2}\,dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2/2}\,dv - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-v^2/2}\,dv = 1-\Phi(x).$$

Et donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-v^2/2}\,dv = \sqrt{2\pi}(1-\Phi(x))$.

On en déduit que pour $x < 0$,

$$\boxed{f_Y(x) = \frac18\sqrt{2\pi e}(1-\Phi(1))e^{x/8}.}$$

[1] Légitime, car affine.

5.c. Pour $x \geqslant 0$, les mêmes changements de variable $u = \sqrt{t}$ puis $v = \dfrac{u}{2} + 1$ nous donnent

$$\int_x^{+\infty} g(t)\,dt = 4\sqrt{e}\int_{\sqrt{x}/2+1}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du = 4\sqrt{2\pi e}\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+1\right)\right).$$

Et donc,

$$\boxed{f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8}e^{x/8}\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+1\right)\right).}$$

5.d. Comme à la question 2, on a $M = 0$ si $Y < 0$, $M = 1$ si $Y = 0$ et $M = 2$ si $Y > 0$.
Puisque nous avons prouvé que Y est une variable à densité, alors $P(M = 1) = P(Y = 0) = 0$.
De plus,

$$P(M=0) = P(Y<0) = \int_{-\infty}^{0} f_Y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_Y(t)\,dt = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8}(1-\Phi(1))\int_0^{+\infty} e^{t/8}\,dt.$$

Mais pour $A < 0$, on a

$$\int_A^0 e^{t/8}\,dt = \left[8e^{t/8}\right]_A^0 = 8 - 8e^{A/8} \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} 8.$$

Et donc $P(M = 0) = \sqrt{2\pi e}(1 - \Phi(1))$.
Et alors[2] $P(M = 2) = 1 - P(M = 1) - P(M = 0) = 1 - \sqrt{2\pi e}(1 - \Phi(1))$.
On en déduit que

$$E(M) = 2P(M=2) = \boxed{2 - 2\sqrt{2\pi e}\,(1 - \Phi(1)).}$$

Une valeur approchée peut aisément être calculée avec `Scilab` à l'aide de l'instruction

```
2-2*sqrt(2*%pi*%e)*(1-cdfnor('PQ',1,0,1))
```

qui nous donne alors $E(M) \simeq 0.68$.

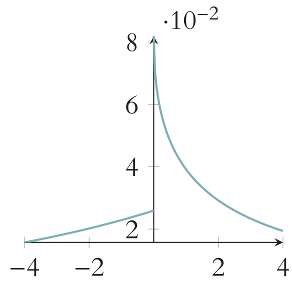


FIGURE 2– La densité f_Y.

[2] M ne peut prendre que les valeurs 0, 1 ou 2 et nous connaissons déjà $P(M = 0)$ et $P(M = 1)$.

Partie II – Suites de Sturm.

6. Supposons au contraire que pour tout k, $R_k \neq 0 \Leftrightarrow \deg R_k \geqslant 0$.
Puisque $-R_{k+1}$ est le reste d'une division euclidienne par R_k, on a $\deg R_{k+1} < \deg R_k$.
Et donc la suite $(\deg R_k)_k$ est une suite d'entiers positifs strictement décroissante. Ceci est impossible, et donc $\boxed{\text{il existe un entier } k \text{ tel que } R_k = 0.}$

Détails

Si (u_n) est une suite d'entiers (relatifs) strictement décroissante, alors pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n - 1$ et donc $u_n \leqslant u_0 - n$. Pour $n > u_0$, on a donc $u_n < 0$.

7.a. Si $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$, alors, en évaluant la relation $R_{j-1} = R_jS_j - R_{j+1}$ en x_0, il vient

$$R_{j-1}(x_0) = R_j(x_0)S_j(x_0) - R_{j+1}(x_0) = 0.$$

Puis $R_{j-2}(x_0) = R_{j-1}(x_0)S_{j-1}(x_0) - R_j(x_0) = 0, \dots, R_1(x_0) = 0, R_0(x_0) = 0$.
Mais $R_0 = P$ et $R_1 = -P'$, donc on a alors $\boxed{P(x_0) = P'(x_0) = 0.}$

7.b. Supposons au contraire que R_m admette une racine réelle x_0.
Alors $R_{m-1}(x_0) = S_m(x_0)R_m(x_0) = 0$, et d'après la question précédente, $P(x_0) = P'(x_0) = 0$.
Alors x_0 est une racine double de P, ce qui est contraire au fait que toutes les racines de P sont des racines simples.
Et donc $\boxed{R_m \text{ n'admet pas de racine réelle.}}$

Remarque

Notons que ceci exclut le fait que R_m soit de degré 1, ou plus généralement de degré impair car tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

7.c. On a $R_{j-1}(x_0) = R_j(x_0)S_j(x_0) - R_{j+1}(x_0) = -R_{j+1}(x_0)$.
De plus, on ne peut avoir $R_{j+1}(x_0) = 0$ ou $R_{j-1}(x_0) = 0$, car alors, on aurait deux R_i consécutifs admettant x_0 pour racine, et le même raisonnement qu'à la question précédente prouverait qu'alors P admet une racine double, ce qui n'est pas le cas.
Donc $R_{j-1}(x_0) = -R_{j+1}(x_0)$, et ces deux nombres étant non nuls et de signes opposés, il vient $\boxed{R_{j-1}(x_0) \times R_{j+1}(x_0) < 0.}$

8.a. Puisque x_0 est une racine simple de P, on a $P'(x_0) \neq 0$.
Dans le cas où $P'(x_0) > 0$, alors, P' étant continue sur $\mathbf{R}$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $h \in]-\delta_1, \delta_1[$, $P'(x_0 + h) > 0$.

Et donc P est croissante strictement sur $[x_0-\delta_1, x_0+\delta_1]$.
Et puisque $P(x_0)=0$, pour tout $h\in]0,\delta_1]$, $P(x_0-h)<0$ et $P(x_0+h)>0$.

On en déduit que $(R_0(x_0+h), R_1(x_0+h)) = \left(\underbrace{P(x_0+h)}_{>0}, \underbrace{-P'(x_0+h)}_{<0}\right)$ change une fois de signe, et donc $C_1(x_0+h)=1$.

De même, on a $(R_0(x_0-h), R_1(x_0-h)) = \left(\underbrace{P(x_0+h)}_{<0}, \underbrace{-P'(x_0+h)}_{<0}\right)$ et donc $C_1(x_0-h)=0$.

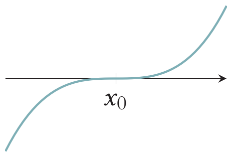
Ainsi, on a bien $\boxed{C_1(x_0+h)-C_1(x_0-h)=1.}$
On conclut de la même manière si $P'(x_0)<0$, dans ce cas, P' est strictement décroissante sur un intervalle de la forme $]x_0-\delta_1, x_0+\delta_1[$, et alors $C_1(x_0+h)=1$ et $C_1(x_0-h)=0$.

8.b. Comme indiqué dans l'énoncé, distinguons deux cas.
• **1^er cas** : x_0 n'est racine d'aucune des polynômes $R_1,\dots,R_m$.
Dans ce cas, pour tout $i\in [\![1,m]\!]$, il existe $\eta_i>0$ tel que R_i soit non nul[3] sur $[x_0-\eta_i, x_0+\eta_i]$.
Et donc en posant $\delta_2=\min(\eta_1,\dots,\eta_m)$, sur $[x_0-\delta_2, x_0+\delta_2]$, tous les R_i ne s'annulent pas et sont de signe constant.
En particulier, pour $h\in]0,\delta_2]$, $R_i(x_0+h)$ et $R_i(x_0-h)$ sont de même signe.
Et donc le nombre de changements de signe de $(R_1(x_0+h),\dots,R_m(x_0+h))$ est égal au nombre de changements de signe de $(R_1(x_0-h),\dots,R_m(x_0-h))$.
Ainsi $\boxed{C_2(x_0+h)=C_2(x_0-h).}$

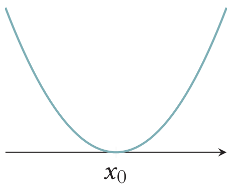
[3] Et donc de signe constant, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

• **2^e cas** : il existe $j\in [\![1,m-1]\!]$ tel que $R_j(x_0)=0$.
Si l'un[4], ou plusieurs des R_j s'annule en x_0, alors R_j peut changer de signe au voisinage de x_0 (dans le cas où x_0 est une racine d'ordre impair de R_j) ou ne pas changer de signe au voisinage de x_0 (dans le cas où R_j est une racine d'ordre pair de R_j).
Quoi qu'il en soit, si δ_2 est tel que tous les R_j, $j\in [\![1,m-1]\!]$ ne s'annulent pas sur $[x_0-\delta_2, x_0+\delta_2]-\{x_0\}$, alors tous les R_j sont de signe constant sur $[x_0-\delta_2, x_0[$ et sur $]x_0, x_0+\delta_2]$.
Notons qu'un tel δ_2 existe car les R_j sont des polynômes et donc possèdent un nombre fini de racines.

[4] D'après ce qui a été dit à la question 7, ni R_1 ni R_m ne peuvent s'annuler en x_0.



x_0 est racine d'ordre impair de R_j : R_j change de signe au voisinage de x_0.



x_0 est racine d'ordre pair de R_j : R_j ne change pas de signe au voisinage de x_0.

Soit alors $h\in]0,\delta_2]$, et j tel que R_j change de signe au voisinage de x_0 (le seul cas susceptible de poser problème).
Alors, d'après 7.c, $R_{j-1}(x_0)$ et $R_{j+1}(x_0)$ sont non nuls et de signes opposés. Et donc $R_{j+1}(x_0-h)$ et $R_{j-1}(x_0+h)$ sont de signes opposés.
Et dans ce cas, le nombre de changements de signe de $(R_{j-1}(x_0-h), R_j(x_0-h), R_{j+1}(x_0-h))$ est égal au nombre de changements de signe de $(R_{j-1}(x_0+h), R_j(x_0+h), R_{j+1}(x_0+h))$.
En effet, si les premiers signes sont $(+,+,-)$, alors les seconds seront $(+,-,-)$, etc.
Puisque les j tels que R_j ne change pas de signe sur $[x_0-\delta_2, x_0+\delta_2]$ ne posent pas de problème, on en déduit que $\boxed{C_2(x_0-h)=C_2(x_0+h).}$

8.c. Soit donc $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ et soit $h\in]0,\delta]$.
Rappelons qu'à la question 7.a, nous avons défini δ_1 de telle sorte que P' ne s'annule pas sur $[x_0-\delta_1, x_0+\delta_1]$.
En particulier, $R_1(x_0+h)$ et $R_1(x_0-h)$ sont non nuls.
Dans ce cas, le nombre de changements de signes de la $(m+1)$-liste $(R_0(x_0+h), R_1(x_0+h),\dots,R_m(x_0+h))$ est égal au nombre de changements de signe de $(R_0(x_0+h), R_1(x_0+h))$ plus le nombre de changements de signe de $(R_1(x_0+h),\dots,R_m(x_0+h))$.
Et donc $C(x_0+h)=C_1(x_0+h)+C_2(x_0+h)$.
De même en x_0-h, $C(x_0-h)=C_1(x_0-h)+C_2(x_0-h)$.
Et donc à l'aide des résultats des questions précédentes,

$$C(x_0+h)-C(x_0-h)=C_1(x_0+h)-C_1(x_0-h)+C_2(x_0+h)-C_2(x_0-h)=\boxed{1.}$$

Remarque
Ce résultat ne serait pas vrai si R_1 pouvait s'annuler.
Par exemple, le nombre de changements de signe de $(1,0,-1,1)$ n'est pas égal au nombre de changements de signe de $(1,0)$ plus celui de $(0,-1,1)$.

La suite de la question était véritablement difficile à rédiger, et nécessitait de prendre un certain nombre d'initiatives car le résultat ne découle pas directement de ce qui précède. Dans une telle question, toute initiative sera appréciée, et toute idée de preuve, même incomplète sera valorisée.
Commençons par remarquer que si $[\alpha,\beta]$ est un intervalle sur lequel aucun des R_i ne s'annule, alors ceux-ci y sont de signe constant, et donc $C(\beta)=C(\alpha)$.

Notons donc $x_1 < \cdots < x_n$ l'ensemble[5] des racines des R_i dans $]a, b[$.

[5] Nécessairement fini.

Dans ce qui a été dit à la question 8.c, il n'a jamais été utile de supposer que $P(x_0) = 0$, sauf peut-être lorsqu'on a dit que $P'(x_0)$ ne pouvait pas s'annuler.
Et donc si x_i n'est pas racine de P ni de P', il existe toujours un $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $h \in]0, \delta_2]$, $C_2(x_i + h) = C_2(x_i - h)$.
Alors, si $\delta \leqslant \delta_2$ est tel que P et P' soient de signe constant sur $[x_i - \delta, x_i + \delta]$, pour tout $h \in]0, \delta]$, $C_1(x_i + h) = C_1(x_i - h)$ et donc

$$C(x_i + h) = C_1(x_i + h) + C_2(x_i + h) = C_1(x_i - h) + C_2(x_i - h) = C(x_i - h).$$

Enfin, dans le cas où x_i est une racine de P' (et donc pas de P). Alors il est possible de refaire le raisonnement du second cas de la question précédente : d'après la question 7.c, $R_0(x_i)R_2(x_i) < 0$ et donc $C(x_i - h) = C(x_i + h)$ pour h suffisamment petit.

Ainsi, pour chacun des x_i, il existe $\delta_i > 0$ tel que pour $h \in]0, \delta_i]$, on ait

$$C(x_i - h) - C(x_i + h) = \begin{cases} 1 & \text{si } P(x_i) = 0 \\ 0 & \text{si } P(x_i) \neq 0 \end{cases}$$

Quitte à diminuer les x_i, on peut supposer que les intervalles $[x_i - \delta_i, x_i + \delta_i]$ sont deux à deux disjoints.
Et alors

$$C(b) - C(a) = C(b) - C(x_n + \delta_n) + C(x_n - \delta_n) + C(x_n - \delta_n) + C(x_{n-1} + \delta_{n-1}) + \cdots + C(x_1 + \delta_1) - C(x_1 - \delta_1) + C(x_1 - \delta_1) - C(a)$$

$$= C(b) - C(x_n + \delta_n) + \sum_{i=1}^{n} (C(x_i + \delta_i) - C(x_i - \delta_i)) + \sum_{i=1}^{n-1} (C(x_{i+1} - \delta_{i+1}) - C(x_i + \delta_i)) + C(x_1 - \delta_1) - C(a).$$

<u>**1er cas** : si aucun des R_i ne s'annule en a ou en n.</u>
Puisqu'aucun des P_j ne s'annule sur $[x_n + \delta_n, b]$ ni sur $[a, x_1 - \delta_1]$, le premier et le dernier terme de la somme sont nuls.
De même, aucun des P_j ne possède de racine sur $[x_i + \delta_i, x_{i+1} - \delta_{i+1}]$, donc les $C(x_{i+1} - \delta_{i+1}) - C(x_i + \delta_i)$ sont nuls.
Enfin, les $C(x_i + \delta_i) - C(x_i - \delta_i)$ sont égaux à 1 si x_i est une racine de P et à 0 sinon.
Donc $C(b) - C(a)$ est une somme de termes valant 0 ou 1, et il y a autant de 1 que de racines de P : $\boxed{C(b) - C(a) \text{ est égal au nombre de racines de } P \text{ dans } [a, b].}$

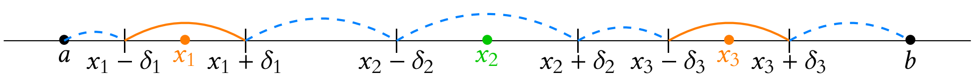


FIGURE 3 – Un exemple où $n = 3$: x_1 et x_3 sont des racines de P et x_2 est une racine d'un des P_j, $j \geqslant 1$. En pointillés sont représentés les intervalles ne contenant pas de racine de P, où C prend la même valeur aux deux extrémités. En trait plein les intervalles contenant une racine, le long desquels C augmente de 1.

Remarque
Par hypothèse, P ne peut pas s'annuler en a ni en b, donc $R_0(a)R_0(b) \neq 0$.

<u>**2ème cas** : l'un des R_i, $i \geqslant 1$ s'annule en a ou en n.</u>
Traitons le cas où l'un d'entre eux s'annule en a.
Alors $R_{i-1}(a)R_{i+1}(a) < 0$. Les signes de $(R_{i-1}(a), R_i(a), R_{i+1}(a))$ sont alors par exemple $(+, 0, -)$, alors que ceux de $(R_{i-1}(x_1 - \delta_1), R_i(x_1 - \delta_1), R_{i+1}(x_1 - \delta_1))$ sont $(+, +, -)$ (ou $(+, -, -)$, de sorte que $C(a) = C(x_1 - \delta_1)$.
Tout ce qui a été dit précédemment sur les $C_(x_{i+1} - \delta_{i+1} - C(x_i + \delta_i))$ reste valable, et on a toujours $C(b) - C(a)$ qui est égal au nombre de racines de P dans $[a, b]$.
On traite de même le cas où l'un des R_i s'annule en b.

9.a. Soit α une racine vérifiant $|\alpha| > 1$. Alors $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k$.

Soit encore $|\alpha|^n = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k\right|$. D'après l'inégalité triangulaire, il vient donc

$$|\alpha|^n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||\alpha|^k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||\alpha|^{n-1} = |\alpha|^{n-1} \times \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.$$

Remarque
L'hypothèse $|\alpha| \geqslant 1$ est indispensable pour garantir que pour $k \leqslant n-1$, $|\alpha|^k \leqslant |\alpha|^{n-1}$.

Donc si $|\alpha| > 1$, en divisant l'inégalité par $|\alpha|^{n-1}$, il vient $|\alpha| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

Et si $|\alpha| \leqslant 1$, alors évidemment, $|\alpha| \leqslant 1 \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

Ainsi, $\boxed{\text{toute racine } \alpha \text{ de } P \text{ vérifie } |\alpha| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.}$

Interprétation

Géométriquement, cela signifie que toutes les racines de P se trouvent dans un cercle de centre 0 et dont le rayon dépend des coefficients de P.

9.b. Il s'agit de mettre bout à bout les deux résultats des questions 9.a et 8.c.

En effet, si on pose $S = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$, alors toute racine réelle de P se trouve dans $[-S, S]$.
En particulier, elles se trouvent dans $[-S-1, S+1]$ et ni $-S-1$ ni $S+1$ ne sont racines de P.
Et donc le nombre de racines est égal à $C(S+1) - C(-S-1)$.

```
n ← degre(P)
S ← 2 + ∑_{k=0}^{n-1} |a_k|
R(0) ← P
R(1) ← -P'
m = 1
tant que R(m) ≠ 0 faire
        m = m+1
        R(m) ← reste de la division euclidienne de -R(m-2) par -R(m-1)
fin tant que
L ← (R(0)(S),...,R(m)(S))
M ← (R(0)(-S),...,R(m)(-S))
res ← nombre de changements de signe de L - nombre de changements de
signe de M
retourner res
```

10. On parcourt un par un les coefficients de T, en comptant le nombre de fois où $T(i+1)T(i) < 0$.
Il y a tout de même des précautions à prendre à cause des coefficients nuls : pour cela, on propose d'utiliser une variable `der` qui sert à stocker la position du dernier coefficient non nul.

```
function y = nb_chg_sgn(T)
    y = 0
    l = length(T)
    m = min(find(T<>0))
    der=m
    for i=m+1 :l
        if T(i)<> 0 then
            if T(i)*T(der)<0 then
                y = y+1
            end
            der = i
        end
    end
endfunction
```

Partie III – Un majorant du nombre de racines réelles de P.

11.a. Notons que les racines de $T(P)$ sont les racines de P' et 0.
Et puisque N_1 ne compte que les racines hors de $]-1, 1[$, $N_1(T(P)) = N_1(P')$.
Notons donc $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ les racines réelles de P dans $]-\infty, -1]$ et $y_1 < \cdots < y_r$ les racines de P dans $[1; +\infty[$.
Par le théorème de Rolle, P' admet une racine dans $]x_1, x_2[$, une dans $]x_2, x_3[$, ... ,une dans $]x_{p-1}, x_p[$.
De même, P' possède une racine dans $]y_1, y_2[$, etc, une dans $]y_{r-1}, y_r[$.

Donc déjà P' possède au moins $(p-1)$ racines[6] dans $]-\infty,-1]$ et $(r-1)$ dans $[1;+\infty[$.
De plus, si x_i (resp. y_j) est une racine de P d'ordre de multiplicité r_i (resp. q_j), alors c'est une racine de P' de multiplicité r_i-1 (resp. q_j-1).

Et donc $N_1(P)=\sum_{i=1}^{p} r_i+\sum_{j=1}^{r} q_j$ et

$$\begin{aligned}N_1(T(P))=N_1(P')&\geqslant \sum_{i=1}^{p}(r_i-1)+(p-1)+\sum_{j=1}^{r}(q_j-1)+(r-1)\\&=\sum_{i=1}^{p} r_i-p+p-1+\sum_{j=1}^{r} q_j-r+r-1=N_1(P)-2.\end{aligned}$$

Et donc $\boxed{N_1(P)\leqslant N_1(T(P))+2.}$
Notons que tous les calculs qui viennent d'être faits restent valables si $p=0$ et/ou si $r=0$, c'est-à-dire si P n'admet pas de racines dans $]-\infty,-1]$ et/ou dans $[1;+\infty[$.

[6] Comptées sans multiplicités pour l'instant.

Remarque

Il s'agit seulement d'une inégalité, car P' peut éventuellement posséder d'autres racines. Ou encore car les racines obtenues avec le théorème de Rolle peuvent être des racines doubles, ce que nous n'avons pas pris en compte.

11.b. Procédons par récurrence sur k.
Pour $k=1$, c'est le résultat de la question précédente.
Supposons donc que $N_1(P)\leqslant N_1(T^k(P))+2k$.
Alors, en appliquant le résultat de la question précédente à $T^k(P)$, on a

$$N_1(T^k(P))\leqslant N_1(T^{k+1}(P))+2$$

et donc

$$N_1(P)\leqslant N_1(T^{k+1}(P))+2+2k\leqslant N_1(T^{k+1}(P))+2(k+1).$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$, et par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall k\geqslant 1,\ N_1(P)\leqslant N_1(T^k(P))+2k.}$$

12.a. Pour $x\neq 0$, on a

$$x^nP\left(\frac{1}{x}\right)=x^n\left(\frac{1}{x^n}+a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{1}{x}+a_0\right)=1+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+a_0x^n=\boxed{P^\star(x).}$$

12.b. Notons $\lambda_1\dots,\lambda_p$ les racines de P qui se trouvent dans $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.
Alors $\frac{1}{\lambda_1},\dots,\frac{1}{\lambda_p}$ sont des nombres non nuls de $[-1,1]$ et sont des racines de $P^\star$ car

$$P^\star\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)=\frac{1}{\lambda_i^n}P(\lambda_i)=0.$$

De plus, si λ_i est une racine de P de multiplicité r_i, alors $P(X)=(X-\lambda_i)^{r_i}Q_i(X)$, avec $Q_i(\lambda_i)\neq 0$. Ainsi,

$$P^\star(X)=X^n\left(\frac{1}{X}-\lambda_i\right)^{r_i}Q_i\left(\frac{1}{X}\right)=(1-\lambda_iX)^{r_i}\underbrace{X^{n-r_i}Q_i\left(\frac{1}{X}\right)}_{=Q_i^\star}=\frac{1}{\lambda_i^{r_i}}\left(\frac{1}{\lambda_i}-X\right)^{r_i}Q_i^\star(X).$$

Multiplicité

λ est racine d'ordre r d'un polynôme P si et seulement si P est divisible par $(X-\lambda)^r$ et pas par $(X-\lambda)^{r+1}$. Cela revient à dire que

$P=(X-\lambda)^rQ$ **avec** $Q(\lambda)\neq 0$.

Et alors $Q_i^\star\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)=\lambda_i^{\deg Q_i}Q_i(\lambda_i)\neq 0$.

Par conséquent, $\frac{1}{\lambda_i}$ est une racine de $P^\star$ de multiplicité égale à r_i.

Notons que de plus, les λ_i étant deux à deux distincts, les $\frac{1}{\lambda_i}$ le sont aussi.

Ainsi, on a $N_1(P)\leqslant N_0(P^\star)$.
De plus, la relation obtenue en 12.a prouve qu'une racine non nulle de $P^\star$ dans $[-1,1]$ est nécessairement l'inverse d'une racine de P dans $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.
Ainsi, nous avons bien compté toutes les racines non nulles de $P^\star$ dans $[-1,1]$ et donc $\boxed{N_1(P)=N_0(P^\star).}$

Inégalité

À chaque racine de P nous avons associé une racine de $P^\star$, mais ce dernier possède peut-être d'autres racines, donc pour l'instant il ne s'agit que d'une inégalité.

13. Notons tout de suite que $n^kQ_k(X) = n^k + a_{n-1}(n-1)^kX + a_{n-2}(n-2)^kX^2 + \cdots + a_1 1^k X^{n-1}$.
D'autre part, on a

$$P'(X) = nX^{n-1} + a_{n-1}(n-1)X^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Et donc $T(P) = XP'(X) = nX^n + a_{n-1}(n-1)X^{n-1} + \cdots + a_1X$.
De même, on a alors

$$T^2(P) = n^2X^n + a_{n-1}(n-1)^2X^{n-1} + \cdots + a_1X.$$

Puis, de proche en proche,

$$T^k(P) = n^kX^n + a_{n-1}(n-1)^kX^{n-1} + \cdots + a_1X.$$

Et alors

$$T^k(P)^\star = a_1X^{n-1} + a_2 2^kX^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(n-1)^kX + n^k = \boxed{n^kQ_k.}$$

Autrement dit,
T est l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ qui à X^k associe kX^k.
Et donc X^k en est un vecteur propre, associé à la valeur propre k.

14.a. Soit $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $g(y) = (1-y)e^y$.
Alors g est dérivable et $g'(y) = (1-y)e^y - e^y = -ye^y \leqslant 0$.
Ainsi, g est décroissante sur $[0,1]$ et on a $g(0) = 1$, de sorte que pour tout $y \in [0,1]$, $\boxed{g(y) = (1-y)e^y \leqslant 1 = g(0).}$

14.b. D'après la question 11.b, on a $N_1(P) \leqslant N_1(T^k(P)) + 2k$.
Mais d'après 12.b, $N_1(T^k(P)) = N_0(T^k(P)^\star)$.
Et d'après 13, $N_0(T^k(P)^\star) = N_0(n^kQ_k) = N_0(Q_k)$.
Il s'agit donc de borner le nombre de racines[7] de Q_k dans l'intervalle $[-1,1]$.
Comme indiqué dans l'énoncé, appliquons pour cela le résultat admis avec $r = 1$ et $\rho = e^{k/n}$.
Pour tout $z \in D_1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leqslant 1\}$, on a

$$|Q_k(z)| \leqslant 1+|a_{n-1}|\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right||z|+|a_{n-2}|\left|\left(1-\frac{2}{n}\right)^k\right||z|^2+\cdots+|a_1|\left|\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^k\right||z|^{n-1} \leqslant 1+\sum_{i=0}^{n-1}|a_i| = L(P).$$

De plus, on a $Q_k(0) = 1$, donc le résultat admis s'applique bien.
Donc le nombre de racines réelles de Q_k dans $[-1,1]$, comptées avec leur multiplicité vérifie

$$N_0(Q_k) \leqslant \frac{1}{\ln\left(e^{k/n}\right)} \times \ln(L(P)) = \frac{n}{k}\ln(L(P)).$$

Et donc $N_1(P) \leqslant N_0(Q_k) + 2k \leqslant \boxed{2k + \frac{n}{k}\ln(L(P)).}$

[7] Comptées avec multiplicité.

14.c.i. La fonction ψ est dérivable, de dérivée égale à $\psi'(x) = 2 - \dfrac{\theta}{x^2}$.

Et donc $\psi'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \geqslant \dfrac{\theta}{2} \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{\dfrac{\theta}{2}}$.
Le tableau de variations de ψ est alors

x	0		$\sqrt{\theta/2}$		$+\infty$
$g_y'(x)$		$-$	0	$+$	
g_y	$+\infty$	$\searrow$	$\psi(\sqrt{\theta/2})$	$\nearrow$	$+\infty$

14.c.ii. On a

$$\psi(\sqrt{\theta/2}+1) = 2\sqrt{\theta/2}+2+\frac{\theta}{\sqrt{\theta/2}+1} \leqslant 2\sqrt{\theta/2}+2+\frac{\theta}{\sqrt{\theta/2}} \leqslant 2+\sqrt{2\theta}+\sqrt{2\theta} \leqslant \boxed{2+2\sqrt{2\theta}.}$$

14.c.iii. En prenant $\theta = n\ln(L(P))$, on a prouvé à la question 14.b que $N_1(P) \leqslant \psi(k)$, et ce pour tout $k \geqslant 0$.
Soit alors k l'unique entier dans l'intervalle $[\sqrt{\theta/2}, \sqrt{\theta/2}+1[$. Sur cet intervalle, ψ est croissante, et on a donc $\psi(k) \leqslant \psi(\sqrt{\theta/2}+1) \leqslant 2+2\sqrt{2\theta}$.
Et alors

$$N_1(P) \leqslant 2+2\sqrt{2\theta} \leqslant \boxed{2+2\sqrt{2n\ln(L(P))}.}$$

14.d. Sous l'hypothèse que $a_0 \neq 0$, 0 n'est pas racine de P et donc $N(P) \leqslant N_1(P) + N_0(P)$.
Et donc

$$\boxed{N(P) \leqslant 4 + 2\sqrt{2n\ln(L(P))} + 2\sqrt{2n\ln\left(\frac{L(P)}{|a_0|}\right)}.}$$

> **Inégalité**
> On serait tentés d'affirmer que $N(P) = N_1(P) + N_0(P)$. Cette égalité est vraie, sauf dans le cas ou 1 et/ou -1 est racine de P, car on a alors compté une telle racine une fois dans $N_1(P)$ et une fois dans $N_0(P)$.
> Pour éviter ce problème, on se contente d'une inégalité, qui reste vraie y compris si 1 et/ou -1 est racine.

Partie IV - Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n à coefficients aléatoires.

15. On a donc $Z_n = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$.
Les variables X_i étant mutuellement indépendantes, par stabilité de la loi de Poisson, Z_n suit $\boxed{\text{la loi de Poisson de paramètre } (n-1)\lambda.}$

16. Pour tout $\omega \in \Omega$, Q_ω est un polynôme unitaire, de coefficient constant non nul, donc le résultat de 14.d s'applique : le nombre de racines réelles de Q_ω, comptées avec multiplicité est inférieur ou égal à

$$4 + 2\sqrt{2n\ln(L(P))} + 2\sqrt{2n\ln(L(P))} = 4 + 4\sqrt{2n\ln\left(1 + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i(\omega)\right)}.$$

> **Remarque**
> Notons que dans le terme $L(P)$, le coefficient constant apparaît. Ici il vaut 1.

Et donc, $M_n(\omega)$, qui est le nombre de racines réelles comptées sans multiplicité vérifie

$$\boxed{M_n(\omega) \leqslant 4 + 4\sqrt{2n}\sqrt{\ln(Z_n(\omega) + 2)}.}$$

17.a. Notons que la tangente à la courbe représentative de h au point d'abscisse x_0 est la droite d'équation $y = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)$.
Or une fonction concave est en dessous de toutes ses tangentes, et donc

$$\boxed{\forall (x, x_0) \in \mathbf{R}^2,\ h(x) \leqslant h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0).}$$

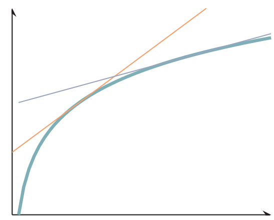


FIGURE 4– Une fonction concave est en dessous de ses tangentes.

17.b. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $h(k) \leqslant h'(E(W))(k - E(W)) + h(E(W))$.
Et donc $P(W = k)h(k) \leqslant P(W = k)h'(E(W))(k - E(W)) + P(W = k)h(E(W))$.
Par le théorème de transfert, on a $E(h(W)) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)P(W = k)$, et cette série converge car on a supposé l'existence de $E(h(W))$.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{+\infty} P(W = k)h'(E(W))(k - E(W)) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(W = k)h(E(W))\\
=&h'(E(W))\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} kP(W = k)}_{=E(W)} - E(W)\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} P(W = k)}_{=1}\right) + h(E(W))\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} P(W = k)}_{=1}\\
=&h'(E(W))\,(E(W) - E(W)) + h(E(W)) = h(E(W)).
\end{aligned}$$

Et donc, $\boxed{E(h(W)) \leqslant h(E(W)).}$

18.a. La fonction φ est dérivable sur $\mathbf{R}_+$, et $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x+2}\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x+2)}}$.
La fonction $x \mapsto (x+2)\sqrt{\ln(x+2)}$ est croissante[8] sur $\mathbf{R}_+$, donc φ' est décroissante (car inverse d'une fonction croissante).
On en déduit donc que $\boxed{\varphi \text{ est concave sur } \mathbf{R}_+.}$

[8] Car produit de fonctions croissantes et positives.

> **Concavité**
> Rappelons que pour une fonction dérivable, il n'est pas nécessaire d'étudier le signe de la dérivée seconde pour étudier la convexité/concavité : le sens de variation de la dérivée suffit.

18.b. Utilisons la concavité prouvée à la question précédente : pour tout $k \geqslant 1$, $\sqrt{\ln(k+2)} \leqslant \varphi(0) + \varphi'(0)k$.
Et donc $0 \leqslant \sqrt{\ln(k+2)}\dfrac{a^k}{k!} \leqslant \varphi(0)\dfrac{a^k}{k!} + \varphi'(0)\dfrac{a^k}{(k-1)!}$.

Mais la série de terme général $\dfrac{a^k}{k!}$ est une série exponentielle convergente, de même que celle de terme général $\dfrac{a^k}{(k-1)!} = a\dfrac{a^{k-1}}{(k-1)!}$.

Et donc, par domination, $\boxed{\text{la série de terme général } \sqrt{\ln(k+2)}\dfrac{a^k}{k!} \text{ converge.}}$

19.a. D'après l'inégalité obtenue à la question 16, et puisque $M_n \geqslant 0$, il suffit de prouver que $4\sqrt{2n}\sqrt{\ln(Z_n+2)}$ admet une espérance, c'est-à-dire que $\sqrt{\ln(Z_n+2)}$ admet une espérance. Puisque Z_n suit une loi de Poisson, d'après le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si la série suivante converge :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{\ln(k+2)}e^{-\lambda(n-1)}\frac{(\lambda(n-1))^k}{k!}.$$

Il s'agit alors, à la constante $e^{-\lambda(n-1)}$ près, de la série étudiée à la question 18.b, avec $a = \lambda(n-1)$.
Nous avons prouvé que cette série converge, donc $\sqrt{\ln(Z_n+2)}$ admet une espérance, et donc, par domination, il en est de même de M_n.

19.b. Toujours d'après la majoration obtenue à la question 16, on a

$$0 \leqslant E(M_n) \leqslant 4 + 4\sqrt{2n}E(\varphi(Z_n)).$$

Mais d'après la question 17.b, $E(\varphi(Z_n)) \leqslant \varphi(E(Z_n)) = \sqrt{\ln((n-1)\lambda+2)}$.
Et donc, pour $\beta > \dfrac{1}{2}$,

$$0 \leqslant \frac{E(M_n)}{n^\beta} \leqslant \frac{4+4\sqrt{2n}\sqrt{\ln((n-1)\lambda+2)}}{n^\beta}.$$

Il est clair que $\dfrac{4}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Montrons à présent que $\dfrac{\sqrt{2n}\sqrt{\ln((n-1)\lambda+2)}}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Posons alors $\alpha = \beta - \dfrac{1}{2} > 0$, de sorte que $\dfrac{\sqrt{2n}}{n^\beta} = \sqrt{2}\dfrac{1}{n^\alpha}$.
Pour n suffisamment grand, on a $(n-1)\lambda + 2 \leqslant n^2\lambda$ et donc

$$\ln((n-1)\lambda+2) \leqslant \ln(n^2\lambda) = \ln\lambda + 2\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Et donc, toujours pour n assez grand[9], on a donc

$$0 \leqslant \frac{\sqrt{\ln((n-1)\lambda+2)}}{n^\alpha} \leqslant \frac{\sqrt{\ln\lambda+2\ln n}}{n^\alpha} \leqslant \frac{\ln\lambda+2\ln n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc, il vient

$$0 \leqslant \frac{E(M_n)}{n^\beta} \leqslant \frac{4}{n^\beta} + 4\sqrt{2}\frac{\sqrt{\ln((n-1)\lambda+2)}}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{E(M_n)}{n^\beta} = 0.}$$

Rappel
Z_n suit une loi de Poisson de paramètre $(n-1)\lambda$, donc
$$E(Z_n) = (n-1)\lambda.$$

[9] On a $\sqrt{t} \leqslant t$ pour $t \geqslant 1$.

Interprétation
Cela signifie que le nombre moyen de racines d'un polynôme aléatoire (dont les coefficients suivent des lois de Poisson) est négligeable devant n^β pour tout $\beta > 1/2$. Cela laisse à penser qu'il est au maximum «de l'ordre de $\sqrt{n}$».
Il s'agit déjà d'un résultat remarquable, quand on pense qu'un tel polynôme possède au plus n racines : un polynôme aléatoire a en moyenne beaucoup moins de racines que son degré.

Extraits commentés du rapport du jury

> Certaines copies, qui se démarquaient par des qualités de rigueur, de probité scientifique ou encore par des initiatives inspirées se voyaient accorder un bonus inclus dans la note finale.

✐ De tels bonus n'existent probablement qu'aux parisiennes, mais témoignent que le nombre de questions traitées n'est pas le seul critère de notation sur ces épreuves difficiles : deux copies traitant les mêmes questions peuvent être départagées par la qualité de la rédaction et du raisonnement.

3 — Un nombre trop important de candidats écrit «F_{Y_1} étant continue et dérivable sauf peut-être en un nombre fini de points...» alors que F_{Y_1} est explicite et que, par conséquent, les points où cette fonction n'est pas dérivable le sont aussi.

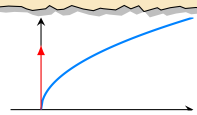
✎ Erreur classique sur les variables à densité : écrire cette formule magique témoigne d'une connaissance du cours, mais pas forcément de sa compréhension. Alors que mentionner explicitement que F_{Y_1} est $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 0 prouve qu'on sait faire le lien entre la définition d'une variable à densité et la variable qu'on est en train d'étudier.

4.a — En $+\infty$, la formule miracle est «$g(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissance comparée», ce qui, compte tenu de l'expression de g demandait à être précisé.

✎ Bien entendu, c'est souvent l'argument qui permet de prouver la convergence d'une intégrale en $+\infty$. Mais rappelons que les croissances comparées figurant dans le cours sont peu nombreuses, et que si $t^2 g(t)$ n'est pas une des croissances comparées usuelles, il faut alors procéder à un calcul de limite **soigneux et détaillé**.

5.a — Beaucoup trop de candidats affirment que $t \mapsto \sqrt{t}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^+$.

✎ La fonction racine n'est pas dérivable en 0 (elle y admet une tangente verticale).
Par conséquent, elle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et non sur $\mathbf{R}^+$, ce qui est suffisant pour procéder au changement de variable demandé.



18.b — Ceux qui écrivaient juste $\sqrt{\ln(k+2)}\frac{a^k}{k!} = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ n'étaient pas primés, il fallait justifier cette relation.

✎ Mêmes remarques qu'à la question 4.a.

5 ESSEC

ESSEC 2018

Non corrige

Sujet : Séries entières, fonctions génératrices

Moyen

Abordable en première année : ✓

Intérêt : ★★☆

Thèmes du programme abordés : fonctions d'une variable, séries, variables aléatoires discrètes

Notations et objectifs :

Lorsque r est un nombre réel strictement positif, on note :

$A(r) = \left\{(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \text{ telle que : } \forall k \in \mathbf{N}, \text{ la série } \sum n^k |a_n| r^n \text{ converge}\right\}$

et $B(r) = \{(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telle que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $0\}$. Et à toute suite $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $B(r)$, on associe, sous réserve d'existence, la fonction $f_a : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Dans la première partie, on étudie quelques propriétés des ensembles $A(r)$ et $B(r)$.

Dans la seconde partie, on étudie les propriétés de régularité des fonctions f_a.

Dans la troisième part, on obtient, dans le cas où $r > 1$, sous certaines hypothèses, une formule de réciprocité donnant la suite a en fonction de la suite $\left(f_a^{(n)}(1)\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

Enfin, dans la dernière partie, on utilise les résultats obtenus pour l'étude de variables aléatoires discrètes.

Partie I – Premières propriétés et premiers exemples.

1. Soit r un nombre réel strictement positif et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $A(r)$, montrer que, pour tout nombre réel x de $[-r, r]$ et pour tout entier naturel k, la série $\sum n^k |a_n||x|^n$ converge.
   En déduire que, pour tout réel r' tel que $r \leqslant r'$, on a : $A(r') \subset A(r)$.
2. Vérifier également que : $0 \leqslant r \leqslant r' \Rightarrow B(r') \subset B(r)$ et $A(r) \subset B(r)$.
3. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif r, $A(r)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
4. **Exemples :**
   a. On souhaite montrer que, pour tout r réel strictement positif, la suite $\alpha = \left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ appartient à $A(r)$. Pour cela, on pose pour tout entier naturel k : $u_n(k) = \dfrac{n^{k+2} r^n}{n!}$.
   En considérant le quotient $\dfrac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)}$, montrer que la suite $(u_n(k))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
   Conclure alors : $\alpha = \left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbf{N}} \in A(r)$.
   b. Pour λ réel strictement positif, on note $\beta(\lambda)$ la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbf{N}}$. Déterminer les réels strictement positifs r pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $B(r)$.
   Déterminer ensuite les réels r strictement positifs pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $A(r)$.
5. Soit ρ un réel strictement positif et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $B(\rho)$. Montrer que, pour tout réel r de $]0, \rho[$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dans $A(r)$.
   (On pourra penser à écrire : $n^k |a_n| r^n = |a_n| \rho^n n^k \left(\dfrac{r}{\rho}\right)^n$).

Partie II – Régularité de la fonction f_a.

Dans cette partie, R désigne un réel strictement positif et $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $B(R)$.

6. Vérifier que $f_a : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur $]-R, R[$ (on pourra utiliser la question 5).
7. **Continuité de f_a.**
   a. Soit r un réel de $]0, R[$, x dans $[-r, r]$ et h un réel tel que : $x + h \in [-r, r]$. Montrer que, pour tout entier naturel n : $|(x+h)^n - x^n| \leqslant n r^{n-1} |h|$.
   b. Justifier alors soigneusement que $|f_a(x+h) - f_a(x)| \leqslant \dfrac{1}{r}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n| r^n\right)|h|$.

c. Montrer alors que f_a est continue sur $[-r,r]$ puis sur $]-R,R[$.

8. **Caractère $\mathscr{C}^1$ de f_a.**

On considère ici un réel r de $]0,R[$ et x dans $[-r,r]$. Pour tout n de $\mathbf{N}$, on pose $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ et, sous réserve d'existence : $g_a : x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$.

a. Soit ρ dans $[r,R[$. Justifier que la suite $(na_n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartient à $B(\rho)$, en déduire que g_a est définie et continue sur $]-R,R[$.

b. Vérifier que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $S_n(x)=a_0+\int_0^x S_n'(t)\,dt$.

c. Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $\left|\int_0^x \left(g_a(t)-S_n'(t)\right)\,dt\right|\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}k|a_k|r^k$.

d. En déduire que : $f_a(x)=a_0+\int_0^x g_a(t)\,dt$.

e. Montrer alors que f_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R,R[$ et que : $f_a'=g_a$.

9. **Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de f_a :**

a. Soit r de $]0,R[$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartient à $A(r)$ si et seulement si, pour tout k de $\mathbf{N}$, la série $\sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}|a_n|r^{n-k}$ converge.

b. Montrer que f_a est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et tout k de $\mathbf{N}$: $f_a^{(k)}(x)=k!\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}a_nx^{n-k}\right)$.

c. Pour tout n de $\mathbf{N}$, exprimer a_n en fonction de $f_a^{(n)}(0)$.

10. **Exemples :**

a. On pose $\alpha=\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et $f_a : x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$. Donner une expression de $f_a(x)$ pour tout $x\in\mathbf{R}$. Pour tout k de $\mathbf{N}$, calculer $f_a^{(k)}(1)$.

b. Soit λ un réel strictement positif, β la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $f_\beta : x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda^nx^n$. Donner une expression de $f_\beta(x)$ pour tout x de $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[$.

En déduire que, pour tout k de $\mathbf{N}$ et tout x de $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[$, la série $\sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}(\lambda x)\,n-k$ converge et : $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}(\lambda x)^{n-k}=\frac{1}{(1-\lambda x)^{k+1}}$.

Partie III – Une formule de réciprocité.

Dans cette partie, R **désigne un réel strictement supérieur à** 1 et $a=(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de $B(R)$ telle que : $\forall n\in\mathbf{N}$, $a_n\geqslant 0$.

Pour tout n de $\mathbf{N}$, on note $b_n=\frac{f_a^{(n)}(1)}{n!}$ et on fait l'hypothèse (H) qu'il existe un réel ρ strictement supérieur à 1 tel que la suite $(b_n\rho^n)$ converge vers 0.

11. **Expression de a_0 :**

a. Montrer que : $\forall N\in\mathbf{N}$, $f_a(0)=\sum_{p=0}^{N}(-1)^pb_p+(-1)^{N+1}\int_0^1\frac{t^N}{N!}f_a^{(N+1)}(t)\,dt$.

b. Démontrer que : $\lim_{N\to+\infty}\int_0^1\frac{t^N}{N!}f_a^{(N+1)}(t)\,dt=0$.

c. En déduire que la série $\sum_{p\geqslant 0}(-1)^pb_p$ converge et que : $a_0=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^pb_p$.

12. **Généralisation :** on considère ici un entier naturel s fixé.

a. Montrer que : $\forall N\in\mathbf{N}$, $f_a^{(s)}(0)=\sum_{p=0}^{N}(-1)^p\frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!}+(-1)^{N+1}\int_0^1\frac{t^N}{N!}f_a^{(N+s+1)}(t)\,dt$.

b. Vérifier que : $\forall N \in \mathbf{N}, \left|\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)\,dt\right| \leqslant \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!}\rho^{N+s+1}\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!}\frac{1}{\rho^{N+s+1}}$.

c. Déterminer $\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)\,dt$.

d. Montrer alors que la série $\sum_{p\geqslant 0}(-1)^p\binom{p+s}{s}b_{p+s}$ converge et : $a_s = \sum_{n=s}^{+\infty}(-1)^{n-s}\binom{n}{s}b_n$.

13. **Cas particulier** : on suppose dans cette question que $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de réels positifs pour laquelle il existe un entier naturel d tel que : $\forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant d+1 \Rightarrow a_n = 0$.

a. Que peut-on dire de la fonction f_a ?

b. Montrer que la condition (H) est réalisée.

c. En déduire que, pour tout s de $[\![0,d]\!]$, $a_s = \sum_{n=s}^{d}(-1)^{n-s}\binom{n}{s}b_n$.

Partie IV – Application aux variables aléatoires discrètes.

Dans cette partie, les variables aléatoires seront discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbf{N}$. Pour une telle variable aléatoire X, on pourra utiliser, sans les rappeler, les notations suivantes :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = P(X=n),\ a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ et } G_X : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \text{ autrement dit : } G_X = f_a.$$

14. **Premiers résultats :**

a. Justifier que la suite a appartient à $B(1)$.

b. En déduire qu'il existe un réel R au moins égal à 1 tel que G_X soit définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$.

15. **Premier exemple :**

a. On suppose tout d'abord que X suit une loi de Poisson de paramètre 1. Déterminer la fonction G_X, vérifier qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et, pour tout s de $\mathbf{N}$, calculer $G_X^{(s)}(1)$.

b. On suppose maintenant que X est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que : $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et vérifiant : $G_X = f_a$ est définie sur $\mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et pour tout s de $\mathbf{N}$: $f_a^{(s)}(1) = 1$. Justifier que l'hypothèse (H) du III est réalisée et déterminer a_n pour tout n de $\mathbf{N}$. Quelle est la loi de X ?

16. **Deuxième exemple** : on considère ici un réel p dans $]0,1[$ et on note $q = 1-p$.

a. On suppose que $X+1$ suit une loi géométrique de paramètre p. Déterminer la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ puis la fonction G_X. Vérifier que G_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$. Enfin, pour tout s de $\mathbf{N}$, calculer $G_X^{(s)}(1)$.

b. On suppose maintenant que : $p > \frac{1}{2}$. Vérifier que : $\frac{q}{p} < 1$.

On considère X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que que : $X(\Omega) = \mathbf{N}$. On suppose de plus que $G_X = f_a$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, et pour tout s de $\mathbf{N}$: $\frac{f_a^{(s)}(1)}{s!} = \left(\frac{q}{p}\right)^s$. Justifier que l'hypothèse (H) du III est réalisée et déterminer a_n pour tout $n \in \mathbf{N}$. Quelle est la loi de $X+1$?

17. **Cas où X est une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.**
On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est inclus dans $[\![0,d]\!]$ où d est un entier de $\mathbf{N}^*$.
On note Pol_d le sous-espace des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à d. Pour s de $[\![0,d]\!]$, on note e_s la fonction $x \mapsto x^s$ et on rappelle que $(e_s)_{s\in[\![0,d]\!]}$ est une base de Pol_d.
On définit les fonctions de Pol_d :

$$H_0 : x \mapsto 1 \text{ et pour tout } s \text{ de } [\![1,d]\!],\ H_s : x \mapsto \frac{x(x-1)\cdots(x-s+1)}{s!} = \frac{1}{s!}\prod_{k=0}^{s-1}(x-k).$$

a. Montrer que la famille $(H_s)_{s\in[\![0,d]\!]}$ est une base de Pol_d.

On note Δ défini sur Pol_d par : $\forall P \in \mathrm{Pol}_d,\ \Delta(P) : x \mapsto P(x+1) - P(x)$.

b. Vérifier que Δ est un endomorphisme de Pol_d.

c. Montrer que : $\Delta(H_0) = 0$ et encore : $\forall s \in [\![1,d]\!],\ \Delta(H_s) = H_{s-1}$ et $H_s(0) = 0$.

d. Montrer que : $\forall P \in \text{Pol}_d,\ \forall x \in \mathbf{R},\ P(x) = \displaystyle\sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(P))(0)]\, H_s(x)$.

e. En déduire que, pour tout k de $[\![0, d]\!]$ et pour tout n de $\mathbf{N}$:

$$n^k = \sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)]\, H_s(n).$$

f. Montrer alors que, pour tout k de $[\![0, d]\!]$, l'espérance de X^k est :

$$E\left(X^k\right) = \sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)]\, b_s \text{ où } b_s = \frac{f_a^{(s)}(1)}{s!}.$$

g. **Exemple :** on suppose ici que : $d = 2$, $E(X) = 1$ et $E\left(X^2\right) = \dfrac{3}{2}$. Déterminer b_0, b_1 et b_2, puis a_0, a_1 et a_2. Reconnaître la loi de X.

ESSEC 2017

Sujet : Diamètre et points extrémaux de l'ensemble des matrices bistochastiques

Moyen

Abordable en première année : ✓ (parties I et III, sauf questions 5 et 12) **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire, produits scalaires

Notations et objectifs :

Soit E un espace vectoriel réel et A une partie non vide de A.
Soit a un élément de A, on dit que a est un point extrémal de A si :

$$\forall (x,y) \in A^2,\ \left(\frac{x+y}{2} = a\right) \Rightarrow (x = y = a).$$

Les parties 0 et I permettent de se familiariser avec la notion de point extrémal.
La partie II prouve que les points d'une partie donnant le diamètre de cette partie sont extrémaux.
Enfin, la partie III étudie des propriétés des matrices de permutation, en particulier de l'isobarycentre de ces matrices. On obtient finalement une preuve du fait que les points extrémaux de l'ensemble des matrices bistochastiques sont les matrices de permutation.

Partie 0 : Étude d'un premier exemple dans R.

1. On prend ici $E = \mathbf{R}$ et $A =]0,1[$, montrer qu'aucun point de A n'est extrémal.
2. On considère maintenant $E = \mathbf{R}$ et $A = [0,1]$, montrer que les points extrémaux de A sont 0 et 1.

Partie I : Étude d'un second exemple dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

Dans cette partie, on note A_2 l'ensemble $\left\{M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}),\ \alpha \in [0,1]\right\}$ et J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, I_2 désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

3. **Description et propriétés des éléments de A_2.**
   a. Vérifier que : $A_2 = \{\alpha I_2 + (1-\alpha)J,\ \alpha \in [0,1]\}$.
   b. Soient (α,β) de $[0,1]^2$ et (M_α, M_β) dans A_2^2, montrer que : $\frac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) \in A_2$.
   c. Déterminer les éléments de M_α de A_2 qui sont inversibles dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Pour ceux-ci, donner l'expression de $(M_\alpha)^{-1}$ et préciser pour quelles valeurs de α de $[0,1]$ $(M_\alpha)^{-1}$ appartient à A_2.
4. **Points extrémaux de A_2.**
   a. Montrer que I_2 et J sont des points extrémaux de A_2.
   b. Soit α dans $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, vérifier que : $M_\alpha = \frac{1}{2}(M_{2\alpha} + J)$: en déduire que M_α n'est pas un point extrémal.
   c. Par une méthode similaire, montrer que si α est dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, M_α n'est pas extrémal.
5. **Réduction simultanée des matrices de A_2.**
   a. Déterminer les valeurs propres et espaces propres de la matrice J.
   b. Montrer qu'il existe une matrice inversible P dans $GL_2(\mathbf{R})$ telle que, pour tout α de $[0,1]$, $P^{-1}M_\alpha P$ est une matrice diagonale D_α, on précisera P et D_α.
   c. On note u_α l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ représenté par la matrice M_α dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Déterminer les réels α de $]0,1]$ tels que u_α soit un projecteur de $\mathbf{R}^2$. On précisera l'image et le noyau du ou des projecteurs ainsi trouvés.

Partie II : Points extrémaux et diamètre d'une partie bornée d'un espace euclidien.

Dans cette partie, on suppose que E est un espace euclidien de dimension finie non nulle, muni d'un produit scalaire noté $\langle\ |\ \rangle$. On note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.
On considère A une partie non vide de E telle qu'il existe un réel R positif tel que, pour tout vecteur v de A, on ait : $\|v\| \leqslant R$.

6. Montrer que l'ensemble $\{\|v-w\|,\ (v,w) \in A^2\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$.
   Cet ensemble admet donc une borne supérieure.
   On note alors $\delta(A) = \sup\{\|v-w\|,\ (v,w) \in A^2\}$, $\delta(A)$ est appelé diamètre de A.

Dans la suite de cette partie, on suppose que la partie A vérifie la propriété (H) suivante :

$$(H)\ :\ \text{il existe } (a,b) \text{ dans } A^2 \text{ tels que } \delta(A)=\|b-a\|.$$

On se propose de démontrer que a est un point extrémal de A.

7. On considère donc (c,d) dans A^2 tel que $\dfrac{c+d}{2}=a$.

   a. Vérifier que : $\|a-b\|\leqslant \dfrac{1}{2}\left(\|c-b\|+\|d-b\|\right)\leqslant \|a-b\|$.
   En déduire que : $\|c-b\|=\|d-b\|=\delta(A)$.

   b. Vérifier que : $\|c-b\|^2=\|c-a\|^2+\|a-b\|^2+2\langle c-a|a-b\rangle$.
   En déduire que : $\|c-a\|^2=-2\langle c-a|a-b\rangle$.

   c. Montrer de même que : $\|d-a\|^2=-2\langle d-a|a-b\rangle$.

   d. Montrer alors que $c-d$ et $a-b$ sont orthogonaux.

   e. En déduire que a, c et d sont égaux et conclure.

Partie III : Étude de l'ensemble des matrices bistochastiques et de ses points extrémaux.
Dans toute la suite du problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et on note $E=\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$A_n=\left\{M=\left(m_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})/\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j}\geqslant 0,\ \forall i\in[\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^n m_{i,j}=1 \text{ et } \forall j\in[\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^n m_{i,j}=1\right\}$$

est l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

F_n est l'ensemble $\left\{M=\left(m_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})/\forall i\in[\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^n m_{i,j}=0 \text{ et } \forall j\in[\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^n m_{i,j}=0\right\}$.

On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.
Enfin, $\mathcal{B}_0=(e_1,\dots,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

8. **Premières propriétés de A_n.**

   a. Soit (M,M') dans A_n^2, montrer que : $\dfrac{1}{2}(M+M')\in A_n$, et que : ${}^tM\in A_n$ (${}^tM$ désigne la matrice transposée de M).

   On note $X_0=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ (toutes les composantes de X_0 sont égales à 1.)

   b. Soit M de A_n, montrer que : $MX_0=X_0$.

   c. Réciproquement, soit $M=\left(m_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j}\geqslant 0$, $MX_0=X_0$ et ${}^tMX_0=X_0$, montrer que : $M\in A_n$.

   d. Soit (M,M') de A_n^2, montrer que : $MM'\in A_n$.

9. **Endomorphismes et matrices de permutation.**
   On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ sur lui-même. Le cardinal de S_n est $n!$.
   Soit $\sigma\in S_n$, on note f_σ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ tel que : pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $f_\sigma(e_j)=e_{\sigma(j)}$.
   On note M_σ la matrice de f_σ dans la base $\mathcal{B}_0$, on dit que M_σ est la matrice de permutation associée à σ.

   a. Si σ est l'identité de $[\![1,n]\!]$ (pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\sigma(i)=i$), que sont f_σ et M_σ ?

   b. Si σ est une permutation de S_n, montrer que : $M_\sigma\in A_n$. Déterminer τ de S_n telle que ${}^tM_\sigma=M_\tau$.

   c. Soit (σ,σ') de $(S_n)^2$, montrer que $f_\sigma\circ f_{\sigma'}=f_{\sigma\circ\sigma'}$; en déduire que M_σ est inversible et déterminer $(M_\sigma)^{-1}$.

   d. Justifier que les matrices M_σ sont des matrices orthogonales.

   e. Justifier que les matrices M_σ sont exactement les matrices présentant sur chaque ligne et chaque colonne une fois la valeur 1 et $n-1$ fois la valeur 0.

10. Soit σ de S_n, montrer que M_σ est un point extrémal de A_n.

11. **Étude d'un projecteur** : on note $p=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n}f_\sigma$ et $P=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n}M_\sigma$.

    a. Soit τ fixé dans S_n, montrer que l'application $\varphi_\tau:\sigma\mapsto\tau\circ\sigma$ est une bijection de S_n dans lui-même. Montrer alors que : $f_\tau\circ p=p$.

    b. En déduire que p est un projecteur de $\mathbf{R}^n$.

c. Montrer que : $\mathrm{Im}(p) = \{x \in \mathbf{R}^n / \forall \sigma \in S_n, f_\sigma(x) = x\}$.

d. Montrer alors que : $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(x_0)$, où $x_0 = \sum_{i=1}^{n} e_i$.

e. Calculer ${}^tP$; en déduire que p est un projecteur orthogonal et déterminer P.

f. Vérifier que $P \in A_n$.

12. Diamètre de A_n.

a. Si $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $N = (n_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ sont deux matrices de E, calculer $\mathrm{tr}({}^tMN)$.

b. Montrer que l'application $(M, N) \mapsto \mathrm{tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur E.
Si (M, N) sont dans E, on note $(M|N) = \mathrm{tr}({}^tMN)$ et $\|M\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tMM)}$.

c. Soit σ de S_n, calculer $\|M_\sigma\|_2$.

d. Dans cette question seulement, on suppose que $n = 2$. Soit (α, β) dans $[0, 1]^2$ et (M_α, M_β) de A_2^2, calculer $\|M_\alpha - M_\beta\|_2$. Montrer alors que $\delta(A_2) = 2$.

e. On revient au cas général : $n \geqslant 2$. Soit M de A_n, montrer que $\|M\|_2^2 \leqslant n$.

f. Montrer alors que, pour tout (M, N) de A_n^2, $\|M - N\|_2 \leqslant \sqrt{2n}$.

g. Soit σ dans S_n, construire τ dans S_n tel que $(M_\sigma|M_\tau) = 0$.

h. En déduire le diamètre de A_n et retrouver que les matrices de permutation sont des points extrémaux de A_n.

13. Structure et dimension de F_n.

a. Vérifier que F_n est un sous-espace vectoriel de E.

b. Soit $\Phi : F_n \to \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$ qui, à toute matrice $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de F_n associe la matrice $\Phi(M) = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2}$.
Montrer que Φ est un isomorphisme de F_n dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$. En déduire la dimension de F_n.

14. On désire montrer que les matrices de permutation sont les seuls points extrémaux de A_n.
On raisonne par récurrence sur $n \geqslant 2$, on note $(\mathcal{P}_n)$ la proposition :

$(\mathcal{P}_n)$: si M est un point extrémal de A_n, M est une matrice de permutation.

a. Vérifier, à l'aide de la partie I, que la proposition $(\mathcal{P}_2)$ est réalisée.

On considère un entier naturel supérieur ou égal à 3 tel que $(\mathcal{P}_{n-1})$ soit réalisée et on se donne $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in E$ un point extrémal de A_n.
On suppose d'abord que la matrice M a au moins $2n$ coefficients non nuls : il existe $2n$ couples $(i_k, j_k)_{k\in[\![1,2n]\!]}$ deux à deux distincts tels que m_{i_k,j_k} est non nul.
On pose alors $H = \mathrm{Vect}\left(E_{i_k,j_k},\ k \in [\![1, 2n]\!]\right)$ où les matrices $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ sont les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, c'est-à-dire $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ayant $n^2 - 1$ coefficients nuls et un seul valant 1, placé en position (i, j).

b. Montrer que $H \cap F_n \neq \{0\}$.

c. On prend N dans $H \cap F_n$ avec $N \neq 0$ et, pour tout t réel, on note $Q_t = M + tN$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout t de $]-\varepsilon, \varepsilon[$, Q_t est dans A_n.

d. En considérant t de $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et les matrices Q_t et Q_{-t}, montrer que l'on aboutit à une contradiction.

On a donc prouvé que la matrice M au plus $2n - 1$ coefficients non nuls.

e. Montrer alors qu'il existe une colonne de M n'ayant qu'un terme non nul et que ce terme vaut 1.

On note s l'indice d'une telle colonne et r l'indice de la ligne telle que $m_{r,s} = 1$.

f. Justifier que la ligne d'indice r de M a tous ses coefficients nuls sauf $m_{r,s}$.

g. On considère alors la matrice M' obtenue à partir de M en lui enlevant la colonne d'indice s et la ligne d'indice r, montrer que M' est dans A_{n-1} et que M' est un point extrémal de A_{n-1}.

h. En déduire que M' est une matrice de permutation de A_{n-1} et que M est une matrice de permutation de A_n.

ESSEC 2017 : CORRIGÉ

Avant de commencer, attardons-nous un peu sur la définition de point extrémal : dire que x est un point extrémal de A signifie que x n'est pas le milieu d'un segment dont les extrémités sont dans A et distinctes[1] de x.

[1] Car bien évidemment, x est toujours le milieu du segment joignant x à lui-même (d'ailleurs, s'agit-il vraiment d'un segment ?)

Prenons comme exemple $A = [0,1]^2 \subset \mathbf{R}^2$, qui est un carré dessiné dans le plan.
Si x est un point situé à l'intérieur du carré, alors il est toujours possible de tracer un segment inclus dans A dont x est le milieu.
De même, si x est sur un côté de A, sans être un sommet, alors il est possible de tracer un segment inclus dans le même côté que x et dont x est le milieu.
En revanche, si x est un des quatre sommets du carré, alors tout segment dont x est le milieu aura au moins l'une de ses extrémités en dehors de A, et donc x est un point extrémal.
Ainsi, les points extrémaux de A sont les sommets du carré.

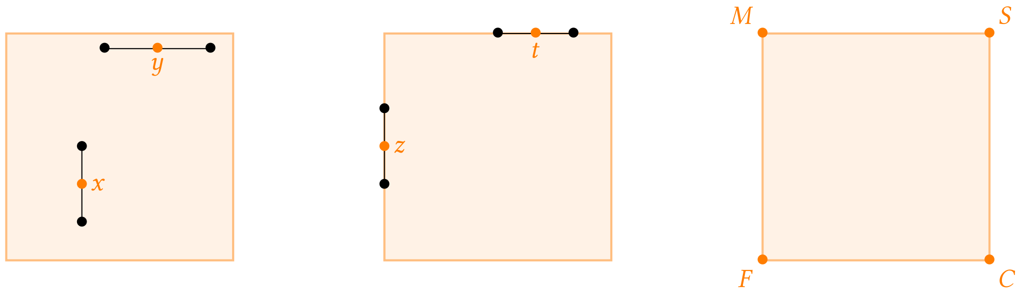
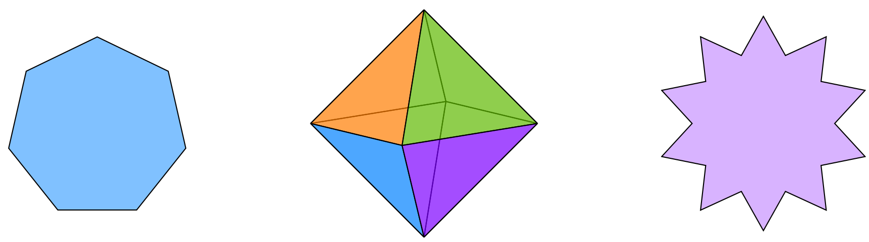


FIGURE 1 – x, y, z et t ne sont pas des points extrémaux de A. En revanche, F, C, S, M sont des points extrémaux de A.

De même, pour des polygones ou des polyèdres dans l'espace, les points extrémaux sont les sommets, comme on peut s'en convaincre sur les exemples ci-dessous.



Enfin, donnons un dernier exemple, moins trivial : celui d'un disque.
Alors tout point x à l'intérieur du disque n'est pas extrémal, car il est possible de tracer un segment inclus dans le disque dont x est le milieu. Mais tout point x sur le bord du disque (c'est-à-dire sur le cercle) est un point extrémal[2].
Nous avons donc un exemple de partie possédant une infinité de points extrémaux.
Et si l'on considère le disque ouvert (c'est-à-dire le disque privé du cercle), alors on a un exemple de partie ne possédant aucun point extrémal.

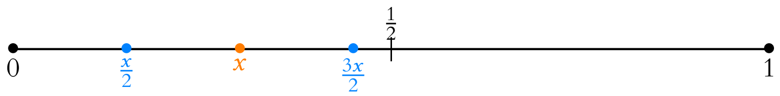
[2] Car un segment dont x est le milieu aura nécessairement au moins l'une de ses extrémités hors du disque.

FIGURE 2 – Le disque fermé possède une infinité de points extrémaux, le disque ouvert n'en a aucun.

Partie 0 : Étude d'un premier exemple dans R.

1. Soit $x \in]0,1[$. Distinguons deux cas :

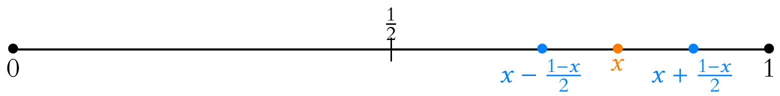
• Si $x \leqslant \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{\frac{x}{2} + \frac{3x}{2}}{2}$, où $\dfrac{x}{2}$ et $\dfrac{3x}{2}$ sont tous deux dans $]0,1[$, et distincts de x.
Donc x n'est pas un point extrémal.



> **Détails**
> $x/2$ est la moitié de la distance entre 0 et x.

• Si $x > \dfrac{1}{2}$. Alors $\dfrac{\left(x - \frac{1-x}{2}\right) + \left(x + \frac{1-x}{2}\right)}{2}$, où $x - \dfrac{1-x}{2}$ et $x + \dfrac{1-x}{2}$ sont tous deux dans $]0,1[$ et distincts de x.
Donc x n'est pas extrémal.

Ainsi, $\boxed{\text{aucun point de }]0,1[\text{ n'est extrémal.}}$



> **Détails**
> $\dfrac{1-x}{2}$ est la moitié de la distance entre x et 1.

Alternative : notons qu'on peut traiter les deux cas en même temps, mais que cela nécessite plus d'intuition : si $x \in]0,1[$, soit $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min(x, 1-x) > 0$.
Alors $x - \varepsilon$ et $x + \varepsilon$ sont dans $]0,1[$ et $x = \dfrac{(x+\varepsilon)+(x-\varepsilon)}{2}$, ce qui prouve que x n'est pas un point extrémal de $]0,1[$.

2. Le même raisonnement que dans la question précédente prouve qu'aucun point de $]0,1[$ n'est extrémal dans $[0,1]$.
Si $\dfrac{x+y}{2} = 0$, avec $(x,y) \in [0,1]^2$, alors nécessairement[3] $x = y = 0$.
Et donc 0 est un point extrémal de $[0,1]$.
Si $\dfrac{x+y}{2} = 1$, avec $(x,y) \in [0,1]^2$, alors $0 = \dfrac{(1-x)+(1-y)}{2}$.
Mais alors, $1-x$ et $1-y$ sont positifs, et on conclut comme précédemment qu'ils sont nécessairement nuls, et donc que $x = y = 1$.
Ainsi, $\boxed{\text{les points extrémaux de } [0,1] \text{ sont } 0 \text{ et } 1.}$

[3] Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul.

> **Alternative**
> On peut aussi raisonner par l'absurde et montrer que si x (ou y) est strictement inférieur à 1, alors $\dfrac{x+y}{2}$ est strictement inférieur à 1 (et donc ne peut valoir 1).

Partie I : Étude d'un second exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

3. Description et propriétés des éléments de A_2.

3.a. Pour $\alpha \in [0,1]$, on a

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1-\alpha)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha I_2 + (1-\alpha)J.$$

Et donc $A_2 = \{M_\alpha, \alpha \in [0,1]\} = \boxed{\{\alpha I_2 + (1-\alpha)J,\ \alpha \in [0,1]\}.}$

3.b. D'après ce qui précède,

$$\frac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) = \frac{1}{2}(\alpha I_2 + (1-\alpha)J + \beta I_2 + (1-\beta)J) = \frac{\alpha+\beta}{2} I_2 + \left(1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) J = M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Et puisque $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ est encore dans $[0,1]$, on en déduit que $\boxed{\dfrac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) \in A_2.}$

3.c. M_α n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est non nul, soit si et seulement si $\alpha^2 - (1-\alpha)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\boxed{\text{la seule matrice de } A_2 \text{ non inversible est } M_{1/2}.}$

De plus, pour $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$, on a alors

$$M_\alpha^{-1} = \frac{1}{\det M_\alpha}\begin{pmatrix} \alpha & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2\alpha-1} & \frac{\alpha-1}{2\alpha-1} \\ \frac{\alpha-1}{2\alpha-1} & \frac{\alpha}{2\alpha-1} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2\alpha-1} & 1 - \frac{\alpha}{2\alpha-1} \\ 1 - \frac{\alpha}{2\alpha-1} & \frac{\alpha}{2\alpha-1} \end{pmatrix}}.$$

> **Rappel**
> L'inverse d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ inversible est
> $$\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Alors $(M_\alpha)^{-1}$ est dans A_2 si et seulement si $\dfrac{\alpha}{2\alpha-1} \in [0,1]$.
C'est le cas si et seulement si $\alpha = 0$ ou si on a à la fois

$$\begin{cases} 2\alpha - 1 \geqslant 0 \\ \alpha \leqslant 2\alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \geqslant \frac{1}{2} \\ \alpha \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \geqslant 1.$$

> ⚠ Attention !
> N'oublions pas la première condition, qui est nécessaire pour que le quotient soit positif !

Par conséquent, $(M_\alpha)^{-1}$ est dans A_2 si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.

4. Points extrémaux de A_2.

4.a. Soient $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $I_2 = \dfrac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta)$. Alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & 1 - \frac{\alpha+\beta}{2} \\ 1 - \frac{\alpha+\beta}{2} & \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix}.$$

En particulier, $1 = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Or il a été prouvé à la question 2 que 1 est un point extrémal de $[0,1]$, donc $\alpha = \beta = 1$, de sorte que $M_\alpha = M_\beta = I_2$. Ainsi, $\boxed{I_2 \text{ est un point extrémal de } A_2.}$

De même, supposons que $J = \dfrac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta)$. Alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & 1 - \frac{\alpha+\beta}{2} \\ 1 - \frac{\alpha+\beta}{2} & \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix}.$$

Et en particulier, $0 = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Puisque 0 est un point extrémal de $[0,1]$, c'est que $\alpha = \beta = 0$ et donc $M_\alpha = M_\beta = J$: $\boxed{J \text{ est un point extrémal de } A_2.}$

4.b. Puisque $J = M_0$, le calcul effectué à la question 3.b prouve que

$$\frac{1}{2}(M_{2\alpha} + J) = \frac{1}{2}(M_{2\alpha} + M_0) = M_{\frac{2\alpha+0}{2}} = M_\alpha.$$

Et alors J et $M_{2\alpha}$ sont distincts de M_α, donc $\boxed{M_\alpha \text{ n'est pas un point extrémal de } A_2.}$

4.c. De même, pour $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$, on a

$$\frac{1}{2}(M_{2\alpha-1} + I_2) = \frac{1}{2}(M_{2\alpha-1} + M_1) = M_{\frac{2\alpha-1+1}{2}} = M_\alpha.$$

Et donc[4] $\boxed{M_\alpha \text{ n'est pas un point extrémal de } A_2.}$

[4] $I_2 \neq M_\alpha$.

5. Réduction simultanée des matrices de A_2.

5.a. $\lambda \in \mathbf{R}$ est valeur propre de J si et seulement si $J - \lambda I_2$ n'est pas inversible, c'est-à-dire si et seulement si $\det(J - \lambda I_2) = 0$. Soit encore si et seulement si $\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$.
Ainsi, $\boxed{\operatorname{Spec}(J) = \{-1, 1\}.}$

On a $J - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dont les colonnes sont liées par la relation $C_1 + C_2 = 0$.

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J, associé à la valeur propre 1.

> Remarque
> Si on n'aime pas utiliser les relations sur les colonnes, il est bien entendu possible de trouver le même résultat en résolvant un système.

Puisque J possède deux valeurs propres distinctes, ses sous-espaces propres sont de dimension 1, et donc $\boxed{E_1(J) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.}$

De même, $J + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dont les colonnes sont liées par la relation $C_1 - C_2 = 0$, et donc $\boxed{E_{-1}(J) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.}$

5.b. Soit $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$. D'après la question précédent, on a alors $P\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}=J$.
D'autre part, $I_2=PI_2P^{-1}$ et donc pour $\alpha\in[0,1]$,

$$M_\alpha=\alpha PI_2P^{-1}+(1-\alpha)P\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}P^{-1}=P\left(\alpha I_2+(1-\alpha)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)P^{-1}=P\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&2\alpha-1\end{pmatrix}}_{=D_\alpha}P^{-1}.$$

Soit encore $\boxed{P^{-1}M_\alpha P=D_\alpha.}$

Astuce — Pour toute matrice $P\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ inversible,
$$I_n=PI_nP^{-1}.$$

5.c. Nous venons de montrer que les M_α (et donc les u_α) sont diagonalisables. Pour que u_α soit un projecteur, il faut et il suffit que ses valeurs propres soient dans $\{0,1\}$.
Or, ces valeurs propres sont les coefficients diagonaux de M_α, c'est-à-dire 1 et $2\alpha-1$. Donc u_α est un projecteur si et seulement si $2\alpha-1=1\Leftrightarrow\alpha=1$ ou $2\alpha-1=0\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{1}{2}$.
Pour $\alpha=1$, $M_\alpha=I_2$ et donc $u_\alpha=\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2}$, qui a pour noyau $\{0_{\mathbf{R}^2}\}$ et pour image $\mathbf{R}^2$.
Pour $\alpha=\dfrac{1}{2}$, alors $M_\alpha=P\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}$, donc P est la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.
Et donc $E_1(M_{\frac12})=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $E_0(M_{\frac12})=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
Ainsi, $\mathrm{Im}\,u_{\frac12}=E_1(u_{\frac12})=\mathrm{Vect}((1,1))$ et $\mathrm{Ker}\,u_{\frac12}=E_0(u_{\frac12})=\mathrm{Vect}((1,-1))$.

Détails — $M_\alpha^2=M_\alpha$ si et seulement si $D_\alpha^2=D_\alpha$.
Or, une matrice diagonale est égale à son propre carré si et seulement si ses coefficients diagonaux sont égaux à leurs propres carrés.
Mais les seules solutions de $x^2=x$ sont $x=0$ et $x=1$.

Rappel — Pour un projecteur p, on a toujours $E_0(p)=\mathrm{Ker}\,p$ et $E_1(p)=\mathrm{Im}\,p$.

Partie II : Points extrémaux et diamètre d'une partie bornée d'un espace euclidien.

6. A est non vide par hypothèse, donc il existe $v\in A$.
Et alors $(v,v)\in A^2$, de sorte que $0=\|v-v\|\in\{\|v-w\|,\ (v,w)\in A^2\}$.
Ainsi, $\boxed{\{\|v-w\|,\ (v,w)\in A^2\}\text{ est non vide.}}$
D'autre part, pour $(v,w)\in A^2$, on a

$$\|v-w\|\leqslant\|v\|+\|w\|\leqslant 2R.$$

Et donc $\boxed{\{\|v-w\|,\ (v,w)\in A^2\}\text{ est une partie majorée de }\mathbf{R}.}$

Borne supérieure — Rappelons que toute partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$ admet une borne supérieure (résultat vu en première année, qui bien qu'intuitif est délicat à démontrer et a donc été admis).

Arrêtons-nous quelques instants pour dire quelques mots au sujet du diamètre d'une partie bornée A.
Il s'agit de «la plus grande distance» entre deux points de A. Par exemple si A est un disque, le plus grand segment que l'on puisse tracer entre deux points du disque correspond au cas où ces deux points sont diamétralement opposés. Et on retrouve ainsi la définition usuelle du diamètre d'un cercle.
Notons qu'il existe alors une infinité de paires de points du disques tels que $\|v-w\|$ soit égal au diamètre.
Si on prend pour A un disque ouvert de rayon r, quels que soient $(v,w)\in A^2$, $\|v-w\|<2r$.
Et pourtant, le diamètre est bien $2r$. C'est là la subtilité entre un maximum et une borne supérieure : il est possible de trouver des paires de points de A éloignés de d, pour tout[5] $d<2r$, mais pas de points éloignés de $2r$.
Enfin, si A est le carré $[0,1]^2$, la plus grande distance entre deux points est $\sqrt{2}$, qui est atteinte pour deux sommets opposés.

[5] Et en particulier pour d aussi proche de $2r$ que l'on souhaite.

FIGURE 3 – Il existe une infinité de paires de points du cercle dont la distance est le diamètre. En revanche, pour le carré, il n'y a que deux moyens de réaliser le diamètre : en prenant deux paires de sommets opposés.

7. *Dans cette question, nous supposons donc qu'il existe deux points de A dont la distance est égale au diamètre. Comme nous venons de le voir sur l'exemple du disque ouvert, ce n'est pas le cas pour toutes les parties bornées.*

7.a. On a $a-b = \dfrac{c+d}{2} - b = \dfrac{c-b}{2} + \dfrac{d-b}{2}$. Et donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\|a-b\| \leqslant \left\|\frac{c-b}{2}\right\| + \left\|\frac{d-b}{2}\right\| \leqslant \frac{1}{2}\|c-b\| + \frac{1}{2}\|d-b\|.$$

Et alors, puisque $\|a-b\| = \max\{\|v-w\|, (v,w) \in A^2\}$, $\|c-b\| \leqslant \|a-b\|$ et de même $\|d-b\| \leqslant \|a-b\|$.
Ainsi, $\frac{1}{2}(\|c-b\| + \|d-b\|) \leqslant \frac{1}{2}2\|a-b\| \leqslant \|a-b\|$.
Les inégalités sont donc des égalités : $\frac{1}{2}(\|c-b\| + \|d-b\|) = \|a-b\|$.
Or, on a à la fois $\|c-b\| \leqslant \|a-b\|$ et $\|c-d\| \leqslant \|a-b\|$. Si l'une de ces inégalités était stricte, on aurait

$$\frac{1}{2}(\|c-b\| + \|d-b\|) < \|a-b\|$$

contredisant ce qui a été dit plus haut.
On en déduit que $\boxed{\|c-b\| = \|d-b\| = \|a-b\| = \delta(A).}$

7.b. On a $c-b = (c-a)+(a-b)$ et donc, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\|c-b\|^2 = \langle (c-a)+(a-b) | (c-a)+(a-b)\rangle = \boxed{\|c-a\|^2 + \|a-b\|^2 + 2\langle c-a|a-b\rangle.}$$

Rappel

Si u et v sont deux vecteurs de E, alors

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u|v\rangle$.

Puisque $\|c-b\|^2 = \delta(A)^2 = \|a-b\|^2$, alors il vient

$$0 = \|c-a\|^2 + 2\langle c-a|a-b\rangle \Leftrightarrow \boxed{\|c-a\|^2 = -2\langle c-a|a-b\rangle.}$$

7.c. De même, on a $d-b = (d-a)+(a-b)$ et donc

$$\underbrace{\|d-b\|^2}_{=\delta(A)^2} = \|d-a\|^2 + \underbrace{\|a-b\|^2}_{=\delta(A)^2} + 2\langle d-a|a-b\rangle$$

puis $\boxed{\|d-a\|^2 = -2\langle d-a|a-b\rangle.}$

7.d. On a

$$\begin{aligned}
\langle c-d|a-b\rangle &= \langle (c-a)+(a-d)|a-b\rangle \\
&= \langle c-a|a-b\rangle + \langle a-d|a-b\rangle \\
&= -2\|c-a\|^2 + 2\|d-a\|^2 \\
&= -2\left\|c - \frac{c+d}{2}\right\|^2 + 2\left\|d - \frac{c+d}{2}\right\|^2 \\
&= -2\left\|\frac{c-d}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{d-c}{2}\right\|^2 = 0.
\end{aligned}$$

$a = \frac{c+d}{2}$.

$\|-u\| = \|u\|$.

Et donc $\boxed{c-d \text{ et } a-b \text{ sont orthogonaux.}}$

7.e. On a $\|c-a\|^2 = -2\langle c-a|a-b\rangle = -2\left\langle \dfrac{c-d}{2} \middle| a-b\right\rangle = -\langle c-d|a-b\rangle = 0$.
Et donc $\|c-a\| = 0 \Leftrightarrow c-a = 0 \Leftrightarrow c = a$.
On en déduit donc que $d = 2a - c = 2a - a = a$.

Rappel

Seul le vecteur nul est de norme nulle.

Nous venons donc de prouver que $\boxed{a \text{ est un point extrémal de } A.}$ Puisque a et b jouent des rôles symétriques, il en découle que b est également un point extrémal de A.
Remarque *: nous venons de prouver que si $\|a-b\| = \delta(A)$, alors a et b sont extrémaux, mais la réciproque est fausse.*
Par exemple, si a et b sont deux sommets adjacents du carré $A = [0,1]^2$, ce sont des points extrémaux de A, mais $\|a-b\| = 1 < \delta(A)$.

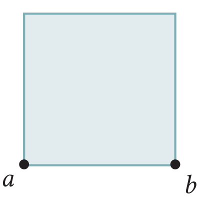


FIGURE 4– a et b sont extrémaux, mais $\|a-b\| \neq \delta(A)$.

Partie III : Étude de l'ensemble des matrices bistochastiques et de ses points extrémaux.

8. Premières propriétés de A_n.
Notons que A_n est l'ensemble des matrices à coefficients positifs telles que la somme des coefficients de chaque ligne et la somme des coefficients de chaque colonne soient égales à 1.

8.a. Soient $M=(m_{i,j}), M'=(m'_{i,j})\in A_n$. Il est évident que $\dfrac{1}{2}(M+M')$ est à coefficients positifs.
D'autre part, pour tout $i\in [\![1,n]\!]$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(m_{i,j}+m'_{i,j}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}+\sum_{j=1}^{n}m'_{i,j}\right)=\frac{1}{2}(1+1)=1.$$

Et de même, pour $j\in[\![1,n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(m_{i,j}+m'_{i,j}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}m_{i,j}+\sum_{i=1}^{n}m'_{i,j}\right)=\frac{1}{2}(1+1)=1.$$

Ainsi, $\boxed{\frac{1}{2}(M+M')\in A_n.}$

De même, les coefficients de ${}^tM$ sont positifs puisque ceux de M le sont. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n}({}^tM)_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}m_{j,i}=1.$$

De même, pour $j\in[\![1,n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{n}({}^tM)_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}m_{j,i}=1.$$

Ainsi, $\boxed{{}^tM\in A_n.}$

Explication
Ceci se comprend bien sans calcul : les lignes de ${}^tM$ sont les colonnes de M, et donc la somme des coefficients d'une ligne de ${}^tM$ est égale à 1.

8.b. On a

$$MX_0=\begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n m_{1,j}\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n m_{n,j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\boxed{X_0.}$$

Remarque
Puisque ${}^tM\in A_n$, ceci implique également que ${}^tMX_0=X_0$.

8.c. Le calcul de la question précédente reste valable, et donc

$$MX_0=X_0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n m_{1,j}\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n m_{n,j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\forall i\in[\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n}m_{i,j}=1.$$

D'autre part, on a

$${}^tMX_0=\begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ m_{1,n} & \dots & m_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n m_{i,1}\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^n m_{i,n}\end{pmatrix}.$$

Et donc ${}^tMX_0=X_0\Leftrightarrow\forall j\in[\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}m_{i,j}=1.$

Ainsi, si M est à coefficients positifs et vérifie $MX_0=X_0$ et ${}^tMX_0=X_0$, alors $\boxed{M\in A_n.}$

8.d. Soient $M=(m_{i,j})$ et $M'=(m'_{i,j})\in A_n$.

Alors le coefficient situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de MM' est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}m_{i,k}m'_{k,j}\geqslant 0$.

De plus, $MM'X_0=M(M'X_0)=MX_0=X_0$.
Et de même, ${}^t(MM')X_0={}^tM'\,{}^tMX_0={}^tM'({}^tMX_0)={}^tM'X_0=X_0$.
D'après le résultat de la question précédente, $\boxed{MM'\in A_n.}$

9. **Endomorphismes et matrices de permutations.**
Commençons par quelques mots sur S_n et sur les matrices M_σ.
Si $\sigma\in S_n$, alors σ est bijectif, et donc tout élément de $[\![1,n]\!]$ possède un antécédent et un seul par σ.
En particulier, $\{\sigma(1),\dots,\sigma(n)\}=[\![1,n]\!]$.
Et donc l'image de la base $(e_1,\dots,e_n)$ par f_σ est encore une base : il s'agit des mêmes

vecteurs, dont on a simplement permuté l'ordre.

Par exemple, soit $\sigma \in S_4$ définie par $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 1$.
Alors on a $f_\sigma(e_1) = e_{\sigma(1)} = e_3$, $f_\sigma(e_2) = e_2$, $f_\sigma(e_3) = e_4$, $f_\sigma(e_4) = e_1$. Et donc

$$M_\sigma = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f_\sigma(e_1) & f_\sigma(e_2) & f_\sigma(e_3) & f_\sigma(e_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}.$$

9.a. Si $\sigma = \mathrm{id}$, alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)} = e_j$.
Et donc $\boxed{M_\sigma \text{ est la matrice identité, ce qui signifie que } f_\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}.}$

9.b. On a $f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)} = e_{\sigma(j)} + \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\sigma(j)}}^{n} 0 \times e_i$.

Par conséquent, si on note $M_\sigma = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, alors $m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc déjà, les $m_{i,j}$ sont tous positifs.

De plus, pour $j \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = m_{\sigma(j),j} = 1$.

Enfin, notons que $m_{i,j} = 1$ si et seulement si $i = \sigma(j)$, si et seulement si $j = \sigma^{-1}(i)$.

Et donc pour $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = m_{i,\sigma^{-1}(i)} = 1$.

Et donc $\boxed{M_\sigma \text{ est bien un élément de } A_n.}$

D'autre part, le coefficient (i,j) de ${}^tM_\sigma$ est $m_{j,i}$, qui vaut 1 si $i = \sigma^{-1}(j)$ et 0 sinon.

Mais si on pose $\tau = \sigma^{-1}$, et si $M_\tau = (n_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, alors $n_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \tau(j) = \sigma^{-1}(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Et donc ${}^tM_\sigma = M_\tau = \boxed{M_{\sigma^{-1}}.}$

9.c. Pour montrer que deux endomorphismes sont égaux, il suffit de prouver qu'il coïncident sur une base. Or, pour $j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$f_\sigma \circ f_{\sigma'}(e_j) = f_\sigma(e_{\sigma'(j)}) = e_{\sigma(\sigma'(j))} = e_{(\sigma\circ\sigma')(j)}.$$

Et d'autre part,

$$f_{\sigma\circ\sigma'}(e_j) = e_{(\sigma\circ\sigma')(j)}.$$

On en déduit donc que $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma\circ\sigma'}$.
Notons que matriciellement, ceci se traduit par $M_\sigma M_{\sigma'} = M_{\sigma\circ\sigma'}$.
En particulier, $M_\sigma \circ M_{\sigma^{-1}} = M_{\sigma\circ\sigma^{-1}} = M_{\mathrm{id}} = I_n$.
Et donc $\boxed{M_\sigma \text{ est inversible, et son inverse est } M_{\sigma^{-1}}.}$

Détails
En effet, si f et g coïncident sur une base, alors ils ont la même matrice dans cette base, et donc sont égaux.

9.d. Puisque nous avons déjà prouvé à la question 9.b que $M_{\sigma^{-1}} = {}^tM_\sigma$, nous avons donc $(M_\sigma^{-1}) = {}^tM_\sigma$: $\boxed{M_\sigma \text{ est une matrice orthogonale.}}$
Alternative : sans la question 9.b, il serait sûrement bien plus simple de noter que M_σ est la matrice de passage de la base orthonormée[6] $(e_1, \dots, e_n)$ à la base $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$, qui est encore orthonormée puisque formée des mêmes vecteurs que $\mathscr{B}_0$.
Et donc, comme toute matrice de passage entre bases orthonormées, elle est orthogonale.
En couplant ceci à la question 9.b, on retrouve que ${}^tM_\sigma = (M_\sigma)^{-1} = M_{\sigma^{-1}}$.

[6] Pour le produit scalaire canonique.

9.e. Soit $M_\sigma = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}$ une matrice de permutation. Alors nous avons prouvé que

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, pour $j \in [\![1,n]\!]$ fixé, il existe un seul i (égal à $\sigma(j)$) pour lequel $m_{i,j}$ est non nul, et il vaut alors 1.

Et donc sur chaque colonne se trouve un coefficient égal à 1 et $n-1$ coefficients nuls.
Puisque d'autre part les lignes de M_σ sont les colonnes de ${}^tM_\sigma = M_{\sigma^{-1}}$, sur chaque ligne de M_σ se trouve un coefficient égal à 1 et $n-1$ coefficients nuls.

> **Détails**
> Et plus précisément, le coefficient non nul de la $i^{\text{ème}}$ ligne de M_σ est celui de la colonne $\sigma^{-1}(i)$.
> On pourra s'en convaincre sur l'exemple donné plus haut (avant la question 9).

Inversement, soit $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice qui sur chaque ligne et chaque colonne possède un coefficient égal à 1 et $n-1$ coefficients nuls.
Alors, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, il existe un unique $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $m_{i,j} = 1$. Notons alors $\sigma(j) = i$ le numéro de la ligne en question.
Nous définissons ainsi une application $\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$.
Supposons que $\sigma(j) = \sigma(j') = i$. Cela signifie que $m_{i,j} = 1$ et $m_{j,i} = 1$. Mais sur la $i^{\text{ème}}$ ligne de M se trouve un unique coefficient égal à 1. Si celui-ci se trouve à la fois sur la $j^{\text{ème}}$ colonne et sur la $j'^{\text{ème}}$, nécessairement $j = j'$. Ainsi, σ est injective.
D'autre part, pour i fixé, la $i^{\text{ème}}$ ligne de M possède exactement un coefficient égal à 1. Et donc il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $m_{i,j} = 1 \Leftrightarrow i = \sigma(j)$.
Et donc σ est surjective, et donc bijective. Par conséquent, $\sigma \in S_n$. Et alors $M = M_\sigma$.

Nous venons donc de prouver que les matrices de permutation sont exactement les matrices possédant $n-1$ coefficients nuls et un coefficient égal à 1 sur chaque ligne et chaque colonne.

10. Supposons que $M_\sigma = \dfrac{A+B}{2}$, avec $A, B \in A_n$.
Notons $M_\sigma = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.
Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}+b_{i,j}}{2}$.
Si $i \neq \sigma(j)$, alors $0 = \dfrac{a_{i,j}+b_{i,j}}{2}$. Mais puisque $a_{i,j} \geqslant 0$ et $b_{i,j} \geqslant 0$, nécessairement $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$.
Si $i = \sigma(j)$, alors $1 = \dfrac{a_{i,j}+b_{i,j}}{2}$.
Mais les $a_{i,j}$ sont positifs, et $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{i,k} = 1$, donc $a_{i,j} = 1 - \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n a_{i,k} \leqslant 1$.
Ainsi, $a_{i,j} \in [0,1]$. Et de même $b_{i,j} \in [0,1]$.
Mais comme prouvé à la question 2, si $\dfrac{a_{i,j}+b_{i,j}}{2} = 1$, alors nécessairement, $a_{i,j} = b_{i,j} = 1$.
Et donc nous venons de prouver que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = b_{i,j} = m_{i,j}$.
Et donc $A = B = M_\sigma$: $\boxed{M_\sigma \text{ est un point extrémal de } A_n.}$

> **Remarque**
> Nous avons tout justifié ici, mais est-il vraiment besoin d'expliquer que si des nombres positifs ont une somme égale à 1, alors tous sont plus petits que 1 ?

11. Étude d'un projecteur.

11.a. La composée de deux bijections de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même est encore une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Donc φ_τ est à valeurs dans S_n.
Si $\varphi_\tau(\sigma) = \varphi_\tau(\sigma')$, alors en composant à gauche par τ^{-1}, il vient

$$\tau^{-1} \circ (\tau \circ \sigma) = \tau^{-1} \circ (\tau \circ \sigma) \Leftrightarrow \sigma = \sigma'.$$

> **Injectivité**
> Rappelons que la définition de l'injectivité est
> $$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Ceci prouve donc que φ_τ est injective.
D'autre part, si $\sigma \in S_n$, alors $\sigma = \tau \circ \underbrace{(\tau^{-1} \circ \sigma)}_{\in S_n} = \varphi_\tau(\tau^{-1} \circ \sigma)$.

Et donc φ_τ est surjective : $\boxed{\varphi_\tau \text{ est une bijection de } S_n \text{ sur lui-même.}}$
On a alors

$$f_\tau \circ p = f_\tau \circ \left(\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma\right) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_\tau \circ f_\sigma = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_{\tau\circ\sigma}.$$

Mais d'après la question précédente, lorsque σ parcourt S_n, $\tau \circ \sigma$ parcourt S_n et prend une seule fois chaque valeur. Et donc

$$\sum_{\sigma\in S_n} f_{\tau\circ\sigma} = \sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma.$$

Et donc

$$f_\tau \circ p = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma = \boxed{p.}$$

11.b. On a

$$p\circ p=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma\circ p=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} p=\frac{1}{n!}\Big(\underbrace{p+p+\cdots+p}_{n!\text{ fois}}\Big)=p.$$

Et donc $\boxed{p \text{ est un projecteur de } \mathbf{R}^n.}$

11.c. Raisonnons par double inclusion.
Soit $x\in\mathbf{R}^n$ tel que pour tout $\sigma\in S_n$, $f_\sigma(x)=x$.
Alors $p(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma(x)=\dfrac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} x=x.$
Et donc $x\in\mathrm{Im}(p)$. Ainsi, $\{x\in\mathbf{R}^n\,/\,\forall\sigma\in S_n, f_\sigma(x)=x\}\subset\mathrm{Im}(p)$.

Rappel
Pour un projecteur p, $\mathrm{Im}(p)=E_1(p)$, et donc

$$x\in\mathrm{Im}(p)\Leftrightarrow p(x)=x.$$

Inversement, soit $x\in\mathrm{Im}(p)$. Alors $p(x)=x$.
Ainsi, pour $\sigma\in S_n$, on a

$$f_\sigma(x)=f_\sigma(p(x))=\Big(\underbrace{f_\sigma\circ p}_{=p}\Big)(x)=p(x)=x.$$

Et donc $\mathrm{Im}(p)\subset\{x\in\mathbf{R}^n\,/\,\forall\sigma\in S_n,\ f_\sigma(x)=x\}$.
Par double inclusion, on en déduit donc que

$$\boxed{\mathrm{Im}(p)=\{x\in\mathbf{R}^n\,/\,\forall\sigma\in S_n,\ f_\sigma(x)=x\}.}$$

11.d. D'une part, nous avons, pour $\sigma\in S_n$,

$$f_\sigma(x_0)=f_\sigma\left(\sum_{i=1}^n e_i\right)=\sum_{i=1}^n f_\sigma(e_i)=\sum_{i=1}^n e_{\sigma(i)}.$$

Mais σ réalise une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur lui-même, donc $\{e_{\sigma(i)}, i\in[\![1,n]\!]\}=\{e_i,\ i\in[\![1,n]\!]\}$, et chaque valeur n'est prise qu'une seule fois.
Et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^n e_{\sigma(i)}=\sum_{i=1}^n e_i=x_0.$
Ainsi, pour tout $\sigma\in S_n$, $f_\sigma(x_0)=x_0$, ce qui prouve que $x_0\in\mathrm{Im}(p)$, et donc $\mathrm{Vect}(x_0)\subset\mathrm{Im}(p)$.

Inversement, soit $x=\displaystyle\sum_{i=1}^n a_ie_i\in\mathrm{Im}(p)$.
Alors pour tout $\sigma\in S_n$, on a

$$\sum_{i=1}^n a_ie_i=x=f_\sigma(x)=\sum_{i=1}^n a_ie_{\sigma(i)}=\sum_{j=1}^n a_{\sigma^{-1}(j)}e_j$$

Chgt d'indice
On posé $j=\sigma(i)\Leftrightarrow i=\sigma^{-1}(i)$.

Mais alors, par unicité de la décomposition de x dans la base $\mathscr{B}_0$, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $a_i=a_{\sigma^{-1}(i)}$ et ce pour tout $\sigma\in S_n$.
Soient donc $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $i\neq j$. Alors il existe $\sigma\in S_n$ tel que $j=\sigma^{-1}(i)$.
Et alors, $a_i=a_{\sigma^{-1}(i)}\Leftrightarrow a_i=a_j$.
Nous avons donc prouvé que tous les a_i sont égaux, et donc sont égaux à a_1.
Ainsi, $x=\displaystyle\sum_{i=1}^n a_1e_i=a_1\sum_{i=1}^n e_i=a_1x_0\in\mathrm{Vect}(x_0).$
On en déduit donc que $\mathrm{Im}(p)\subset\mathrm{Vect}(x_0)$, et par double inclusion, que $\boxed{\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Vect}(x_0).}$

Détails
Prendre pour σ la permutation de $[\![1,n]\!]$ qui échange i et j et qui envoie tous les autres éléments de $[\![1,n]\!]$ sur eux-mêmes.

11.e. Par linéarité de la transposée, on a

$${}^tP=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}{}^tM_\sigma=\frac{1}{n}\sum_{\sigma\in S_n}M_{\sigma^{-1}}=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}M_\sigma=P.$$

Nous avons remplacé σ^{-1} par σ ci-dessus, puisque lorsque σ parcourt S_n, $\sigma-1$ écrit aussi tout S_n. En d'autres termes, $\sigma\mapsto\sigma-1$ est une bijection de S_n sur S_n.

Puisque la base canonique est orthonormée, p est un endomorphisme symétrique. Mais un projecteur est symétrique si et seulement si il est orthogonal : p est un projecteur orthogonal. Et d'après la question précédente, c'est même le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(x_0)$.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Alors $p(e_j) \in \mathrm{Vect}(x_0)$, et donc il existe $\lambda_j \in \mathbf{R}$ tel que $p(e_j) = \lambda_j x_0$. Puisque p est un projecteur orthogonal, $e_j - p(e_j) \in \mathrm{Vect}(x_0)^\perp$, de sorte que

$$\langle e_j - \lambda_j x_0 | x_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle e_j | x_0 \rangle - \lambda \|x_0\|^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda n = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{n}.$$

Et donc $f(e_j) = \frac{1}{n} x_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} e_i$.
On en déduit donc que

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(p) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} p(e_1) & p(e_2) & \dots & p(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array} = \boxed{\frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.}$$

Alternative
Il aurait également été possible de calculer $\|x_0\|$, et de trouver $p_F(e_j)$ à l'aide de la formule

$$p_F(e_j) = \left\langle e_j, \frac{x_0}{\|x_0\|} \right\rangle \frac{x_0}{\|x_0\|}.$$

11.f. Puisque nous venons de déterminer P, il est très facile de voir que tous ses coefficients sont positifs, que la somme des coefficients de chaque ligne vaut $n \times \frac{1}{n} = 1$ et que la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1. Et donc que $\boxed{P \in A_n.}$

12. Diamètre de A_n.

12.a. On a

$$\mathrm{tr}({}^t MN) = \sum_{i=1}^{n} ({}^t MN)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ({}^t M)_{i,j} n_{j,i} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} n_{i,j}.}$$

12.b. Soient $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Alors

$$(M|N) = \mathrm{tr}({}^t MN) = \mathrm{tr}({}^t({}^t MN)) = \mathrm{tr}({}^t NM) = (N|M).$$

Une matrice a même trace que sa transposée.

Donc $(\cdot|\cdot)$ est symétrique.
Soient $M, N, P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$(\lambda M + N|P) = \mathrm{tr}({}^t(\lambda M + N)P) = \mathrm{tr}((\lambda {}^t M + N)P) = \lambda \mathrm{tr}({}^t MP) + \mathrm{tr}({}^t NP) = \lambda(M|P) + (N|P).$$

Donc $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à gauche, et étant symétrique, est bilinéaire.
Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Alors par le calcul de la question précédente,

$$(M|M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 \geqslant 0.$$

Enfin, une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul, donc

$$(M|M) = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ m_{i,j}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ m_{i,j} = 0 \Leftrightarrow M = 0.$$

Et donc $\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).}$

12.c. Soit $\sigma \in S_n$. Alors $\|M_\sigma\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}^2$.
Or, tous les $m_{i,j}$ valent soit 0 soit 1, et donc $m_{i,j}^2 = m_{i,j}$.
Ainsi,

$$\|M_\sigma\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Et donc $\boxed{\|M_\sigma\|_2 = \sqrt{n}.}$

12.d. On a

$$M_\alpha - M_\beta = \begin{pmatrix} \alpha-\beta & \beta-\alpha \\ \alpha-\beta & \beta-\alpha \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\|M_\alpha - M_\beta\|_2 = \sqrt{4(\alpha-\beta)^2} = 2|\alpha-\beta|.$$

En particulier, on a $\|M_\alpha - M_\beta\|_2 \leqslant 2$, de sorte que $\delta(A_2) \leqslant 2$.
D'autre part, pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, on a

$$\|M_\alpha - M_\beta\|_2 = \|J - I_2\|_2 = 2|1-0| = 2.$$

Et donc $\delta(A_2) \geqslant 2$ ce qui prouve que $\boxed{\delta(A_2) = 2.}$

Remarque Notons que, conformément au résultat prouvé à la question 7, on a montré que le diamètre de A_2 est atteint pour les points extrémaux de A_2, qui sont J et I_2.

12.e. Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Alors $\|M\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2$.
Mais les $m_{i,j}$ sont tous[7] dans $[0,1]$, et donc $m_{i,j}^2 \leqslant m_{i,j}$. Ainsi

$$\|M\|_2^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} = \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

[7] Ils sont positifs et la somme de chaque ligne vaut 1.

12.f. Soient $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $N = (n_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ deux matrices de A_n. Alors

$$\|M-N\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (m_{i,j}-n_{i,j})^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (m_{i,j}^2 - 2m_{i,j}n_{i,j} + n_{i,j}^2) \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (m_{i,j}+n_{i,j}) \leqslant \sum_{i=1}^n 2 \leqslant 2n.$$

Et donc $\boxed{\|M-N\|_2^2 \leqslant \sqrt{2n}.}$

12.g. Notons $M_\sigma = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $M_\tau = (n_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.
Rappelons que

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et de même } n_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \tau(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi,

$$(M_\sigma|M_\tau) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{i,j} n_{i,j} = \sum_{j=1}^n n_{\sigma(j),j}.$$

Détails À j fixé, tous les $m_{i,j}$ sont nuls, sauf pour $i = \sigma(j)$ car alors

$$m_{\sigma(j),j} = 1.$$

Ce produit scalaire sera nul si et seulement si tous les $n_{\sigma(j),j}$ sont nuls, c'est-à-dire si pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(j) \neq \tau(j)$.

Notons $\tau_1 : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ la permutation de $[\![1,n]\!]$ définie par $\tau_1(i) = \begin{cases} i+1 & \text{si } i \in [\![1,n-1]\!] \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}$

Alors il est évident que $\tau_1 \in S_n$, et pour tout i, $\tau_1(i) \neq i$.
Posons $\tau = \tau_1 \circ \sigma$, qui est alors un élément de S_n et tel que pour tout j, $\tau(j) = \tau_1(\sigma(j)) \neq \sigma(j)$.
D'après ce qui précède, on a alors, $\boxed{(M_\sigma|M_\tau) = 0.}$

12.h. D'une part, d'après la question 12.f, $\delta(A_n) \leqslant \sqrt{2n}$.
D'autre part, soient σ et τ dans S_n telles que $(M_\sigma|M_\tau) = 0$. Alors

$$\|M_\sigma - M_\tau\|_2^2 = \|M_\sigma\|_2^2 + \|M_\tau\|_2^2 + 2(M_\sigma|M_\tau) = 2n.$$

Détails La formule prouvée à la question précédente prouve en particulier que pour $\sigma \in S_n$,

$$\|M_\sigma\|^2 = (M_\sigma|M_\sigma) = n.$$

Et donc $\|M_\sigma - M_\tau\|_2 = \sqrt{2n}$, de sorte que $\boxed{\delta(A_n) = \sqrt{2n}.}$
De plus, les calculs précédents prouvent que quel que soit $\sigma \in S_n$, il existe $\tau \in S_n$ tel que $\|M_\sigma - M_\tau\|_2 = \delta(A_n)$. Et alors, d'après la question 7, $\boxed{M_\sigma \text{ est un point extrémal de } A_n.}$

13. **Structure et dimension de F_n.**

13.a. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons φ la forme linéaire définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par $\varphi_i(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$.

De même, pour $j \in [\![1, n]\!]$, soit ψ_j la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui à M associe $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}$.

Alors les $\operatorname{Ker}(\varphi_i)$ et $\operatorname{Ker}(\psi_j)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et

$$F = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(\varphi_i) \cap \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker}(\psi_j).$$

Et donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$

Linéarité

La linéarité de φ_i serait à prouver, mais elle est quasiment évidente.

13.b. La linéarité de Φ est évidente, ne perdons pas de temps à la vérifier.
Pour montrer la bijectivité de Φ, nous allons utiliser le fait qu'une matrice de F_n est entièrement déterminée par la donnée de ses coefficients hors de la dernière ligne et de la dernière colonne.
En effet, la somme des coefficients de chaque ligne est nulle, donc si on connaît les $n-1$ premiers coefficients d'une ligne, le dernier est automatiquement l'opposé de la somme des $n-1$ premiers.
De même, il suffit de connaître les $n-1$ premiers coefficients d'une colonne pour connaître le dernier.
Et enfin, le coefficient (n, n) est déterminé par le fait que la somme des coefficients de la dernière ligne vaut 0 : c'est l'opposé de la somme des $(n-1)$ premiers coefficients de cette dernière ligne, c'est-à-dire

$$m_{n,n} = -\sum_{j=1}^{n-1}\left(-\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}.$$

Autrement dit, une matrice $M \in F_n$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n-1} & -\sum_{j=1}^{n-1} m_{1,j} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,n-1} & -\sum_{j=1}^{n-1} m_{2,j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \cdots & m_{n-1,n-1} & -\sum_{j=1}^{n-1} m_{n-1,j} \\ -\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,1} & -\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,2} & \cdots & -\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,n-1} & \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit

Une matrice de F_n est entièrement déterminée par ses coefficients des $n-1$ premières lignes et $n-1$ premières colonnes (les coefficient colorés sur le dessin ci-contre).

Soyons un peu plus rigoureux[8], et formalisons tout ceci.
Soient donc $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ deux matrices de F_n telles que $\Phi(M) = \Phi(N)$.
Ceci signifie donc que pour tout $(i, j) \in [\![1, n-1]\!]^2$, $m_{i,j} = n_{i,j}$.
Puisque M et N sont dans F_n pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} n_{i,j} = 0$$

de sorte que

$$m_{i,n} = -\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j} = -\sum_{j=1}^{n-1} n_{i,j} = n_{i,n}.$$

De même, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$,

$$m_{n,j} = -\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,j} = -\sum_{i=1}^{n-1} n_{i,j} = n_{n,j}.$$

[8] Même si une explication «avec les mains» comme on vient de faire vaudrait la majorité (voire la totalité) des points dans une copie rédigée en temps limité.

Et pour finir, puisque la somme des coefficients de la dernière ligne de M (resp. N) est nulle,

$$m_{n,n} = -\sum_{j=1}^{n-1} m_{n,j} = -\sum_{j=1}^{n-1} n_{n,j} = n_{n,n}.$$

Nous avons donc prouvé que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j} = n_{i,j}$ et donc $M = N$. Ainsi, Φ est injective.

Soit à présent $M = \left(m_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$.
Définissons alors une matrice $N = \left(n_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par

$$n_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i \leqslant n-1 \text{ et } j \leqslant n-1 \\ -\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j} & \text{si } i \leqslant n-1 \text{ et } j = n \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,j} & \text{si } j \leqslant n-1 \text{ et } i = n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j} & \text{si } i = n \text{ et } j = n \end{cases}$$

Alors, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} n_{i,j} = \sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j} + n_{i,n} = \sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j} - \sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j} = 0.$$

Détails
Nous avons tout fait pour que ceci soit vrai, puisque le coefficient (i, n) de N a été défini de façon à ce que la somme des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de N soit nulle.

De la même manière, on prouve que pour $j \in [\![1,n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} n_{i,j} = 0$.

Enfin, on a

$$\sum_{j=1}^{n} n_{n,j} = \sum_{j=1}^{n-1} n_{n,j} + n_{n,n} = -\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,j} + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,j} = 0.$$

Et donc la somme des coefficients de la dernière ligne de N est nulle, et on prouve de la même manière que la somme des coefficients de la dernière colonne de N est nulle.
Ceci prouve donc que $N \in F_n$. Et alors il est aisé de voir que $M = \Phi(N)$, ce qui prouve que Φ est surjective.
Nous avons donc prouvé que Φ réalise une bijection de F_n sur $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$, et donc est un $\boxed{\text{isomorphisme entre } F_n \text{ et } \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R}).}$

En particulier, ceci signifie que $\boxed{\dim F_n = \dim \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R}) = (n-1)^2.}$

Dimensions
Rappelons cette conséquence du théorème du rang : s'il existe un isomorphisme φ entre E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, alors

$$\dim E = \dim F.$$

14.a. À la question 4, il a été prouvé que les seuls points extrémaux de A_2 sont I_2 et J. Or, I_2 et J possèdent, sur chaque ligne et chaque colonne un coefficient égal à 1 et un coefficient égal à 0. Par la question 9.e, ce sont donc des matrices de permutation.
Ainsi, $(\mathcal{P}_2)$ est vérifiée.

14.b. Nous savons que $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et en particulier est une famille libre.
Puisque les (i_k, j_k) sont deux à deux distincts, $\{E_{i_k,j_k},\ k \in [\![1,2n]\!]\}$ est une famille libre, et donc une base de H, qui est alors de dimension $2n$.

Supposons par l'absurde que $H \cap F_n = \{0\}$. Ceci signifie donc que H et F_n sont en somme directe, et donc que $\dim(F_n + H) = \dim F_n + \dim H = (n-1)^2 + 2n = n^2 + 1$.
Mais $H + F_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, qui ne peut donc pas être de dimension supérieure à n^2.
Ainsi, $\boxed{H \cap F_n \neq \{0\}.}$

Dimensions
Rappelons que F et G sont en somme directe si et seulement si

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G.$$

14.c. Notons $m_{i,j}$ les coefficients de M et $n_{i,j}$ ceux de N.
Alors pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n}(M+tN)_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}(m_{i,j} + t n_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} + t\sum_{j=1}^{n} n_{i,j} = 1 + t \times 0 = 1.$$

Détails
La somme des coefficients d'une ligne de M vaut 1 et la somme des coefficients d'une ligne de N est nulle.

De même, pour $j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} (M+tN)_{i,j} = 1$.
Pour que $M+tN$ soit dans A_n, il faut encore s'assurer que ses coefficients sont positifs.
Puisque $N \in H$, si (i,j) n'est pas l'un des (i_k, j_k), alors $n_{i,j} = 0$, et donc $(M+tN)_{i,j} = m_{i,j} \geqslant 0$.
De même, si $n_{i_k,j_k} = 0$, alors $(M+tN)_{i_k,j_k} = m_{i_k,j_k} \geqslant 0$.
Quitte à renuméroter les (i_k, j_k), supposons donc que les n_{i_k,j_k} sont non nuls pour $k \leqslant r$ et sont nuls pour $k > r$.
Posons alors $\delta = \min\left\{\frac{m_{i_k,j_k}}{|n_{i_k,j_k}|},\ k \in [\![1,r]\!]\right\} > 0$.
Alors, pour $k \in [\![1,r]\!]$, et $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on a

$$(M+rN)_{i_k,j_k} = m_{i_k,j_k} + tn_{i_k,j_k} \geqslant m_{i_k,j_k} - \varepsilon |n_{i_k,j_k}|.$$

Mais par définition, $\varepsilon \leqslant \dfrac{m_{i_k,j_k}}{|n_{i_k,j_k}|} \Leftrightarrow m_{i_k,j_k} \geqslant \varepsilon |n_{i_k,j_k}|$.
Et donc $(M+tN)_{i_k,j_k} \geqslant 0$.
Nous venons donc de prouver que pour $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, les coefficients de $M+tN$ sont positifs, ce qui suffit donc à garantir que $\boxed{M+tN \in A_n.}$

14.d. Soit $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ non nul. Alors

$$\frac{Q_t + Q_{-t}}{2} = \frac{M+tN+M-tN}{2} = M.$$

Puisque Q_t et Q_{-t} sont dans A_n et que M est un point extrémal de A_n, on en déduit donc que $M = Q_t = Q_{-t}$.
Mais alors $0 = tN$, alors que $t \neq 0$ et $N \neq 0$. Nous obtenons donc une contradiction, ce qui signifie que l'hypothèse de départ était fausse : M possède au plus $2n-1$ coefficients non nuls.

14.e. Puisque la somme des coefficients de chaque colonne de M doit valoir 1, chaque colonne comporte au moins un terme non nul.
Si toutes les colonnes comportaient au moins deux termes non nuls, alors M posséderait au moins $2 \times n = 2n$ coefficients non nuls, ce qui n'est pas le cas par la question précédente.
Donc l'une des colonnes ne comporte qu'un seul coefficient non nul, et puisque la somme de cette colonne doit valoir 1, le coefficient non nul vaut nécessairement 1.

14.f. On a $\sum_{j=1}^{n} m_{r,j} = 1$, et $m_{r,s} = 1$. Donc $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n} m_{r,j} = 0$.
Or, les $m_{r,j}$ sont positifs, et une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul.
Donc $\boxed{\text{les } m_{r,j}, j \neq s \text{ sont tous nuls.}}$

14.g. Les coefficients de M' sont des coefficients de M, donc ils sont évidemment positifs.
D'autre part, si on a

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,s-1} & 0 & m_{1,s+1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{r-1,1} & m_{r-1,2} & \dots & m_{r-1,s-1} & 0 & m_{r-1,s+1} & \dots & m_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{r+1,1} & m_{r+1,2} & \dots & m_{r,s-1} & 0 & m_{r+1,s+1} & \dots & m_{r+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,s-1} & 0 & m_{n,s+1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

alors M' est la matrice obtenue en ne conservant que les coefficients colorés sur la matrice M ci-dessus. C'est-à-dire

$$M' = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,s-1} & m_{1,s+1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{r-1,1} & m_{r-1,2} & \dots & m_{r-1,s-1} & m_{r-1,s+1} & \dots & m_{r-1,n} \\ m_{r+1,1} & m_{r+1,2} & \dots & m_{r,s-1} & m_{r+1,s+1} & \dots & m_{r+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,s-1} & m_{n,s+1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbf{R}).$$

Puisque la somme des coefficients de chaque ligne (respectivement chaque colonne) de M vaut 1, et que sur chaque ligne (resp. chaque colonne) le coefficient retiré était nul, il est aisé de constater que la somme de chaque ligne (resp. colonne) de M' vaut 1.
Et alors, $\boxed{M' \in A_{n-1}.}$

Supposons donc que $M' = \dfrac{A'+B'}{2}$, avec $A', B' \in A_{n-1}$.
Notons $A' = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2}$ et $B' = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2}$, et définissons alors deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,s-1} & 0 & a_{1,s} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1} & \dots & a_{r-1,s-1} & 0 & a_{r-1,s} & \dots & a_{r-1,n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,s-1} & 0 & a_{r,s} & \dots & a_{r,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,s-1} & 0 & a_{n-1,s} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,s-1} & 0 & b_{1,s} & \dots & b_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r-1,1} & \dots & b_{r-1,s-1} & 0 & b_{r-1,s} & \dots & b_{r-1,n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{r,1} & \dots & b_{r,s-1} & 0 & b_{r,s} & \dots & b_{r,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,s-1} & 0 & b_{n-1,s} & \dots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Puisque A' et B' sont dans A_{n-1}, il est facile de se convaincre que A et B sont dans A_n.
Et alors

$$\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \dots & a_{1,s-1}+b_{1,s-1} & 0 & a_{1,s}+b_{1,s} & \dots & a_{1,n-1}+b_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r-1,1}+b_{r-1,1} & \dots & a_{r-1,s-1}+b_{r-1,s-1} & 0 & a_{r-1,s}+b_{r-1,s} & \dots & a_{r-1,n-1}+b_{r-1,n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1+1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{r,1}+b_{r,1} & \dots & a_{r,s-1}+b_{r,s-1} & 0 & a_{r,s}+b_{r,s} & \dots & a_{r,n-1}+b_{r,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1}+b_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,s-1}+b_{n-1,s-1} & 0 & a_{n-1,s}+b_{n-1,s} & \dots & a_{n-1,n-1}+b_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

Mais puisque $A' + B' = 2M'$, les coefficients encadrés sont précisément ceux de $2M'$. Et donc

$$\frac{A+B}{2} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,s-1} & 0 & m_{1,s+1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{r-1,1} & m_{r-1,2} & \dots & m_{r-1,s-1} & 0 & m_{r-1,s+1} & \dots & m_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{r+1,1} & m_{r+1,2} & \dots & m_{r,s-1} & 0 & m_{r+1,s+1} & \dots & m_{r+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,s-1} & 0 & m_{n,s+1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix} = M.$$

Or, par hypothèse, M est un point extrémal de A_n, et donc $A = B = M$.
Par conséquent, en supprimant la $r^{\text{ème}}$ ligne et la $s^{\text{ème}}$ colonne, $A' = B' = M'$.
Ceci prouve donc que $\boxed{M' \text{ est un point extrémal de } A_{n-1}.}$

14.h. Puisque $(\mathscr{P}_n)$ est vérifiée par hypothèse de récurrence, M' est une matrice de permutation, et donc sur chaque ligne et chaque colonne de M' se trouvent un coefficient égal à 1 et $n-1$ coefficients nuls.
Par conséquent, sur chaque ligne et chaque colonne de M se trouvent un coefficient égal à 1 et $n-1$ coefficients nuls.
D'après la question 9.e, ceci signifie donc que M est une matrice de permutation.
Ainsi, $(\mathscr{P}_n)$ est vérifiée, et par le principe de récurrence, $\boxed{(\mathscr{P}_n) \text{ est vraie pour tout } n \geqslant 2.}$

Détails
Les lignes de M, à l'exception de la $r^{\text{ème}}$ sont des lignes de M' auxquelles on a rajouté un 0.
Et nous savons déjà que la $r^{\text{ème}}$ ligne de M contient un 1 et $n-1$ zéros.
Le même raisonnement est valable pour les colonnes de M.

Extraits commentés du rapport du jury

L'introduction (Partie 0) a eu peu de succès. Seuls quelques candidats comprennent la question 1, beaucoup avancent de mauvais arguments. À l'inverse, le jury a apprécié que certaines copies illustrent un raisonnement clair à l'aide d'un dessin.

✎ Si un dessin n'est pas toujours une preuve en soi, il est souvent bienvenu, en particulier dans les épreuves de parisiennes. D'ailleurs si un dessin vous aide au brouillon à répondre à la question, il aidera probablement tout autant le correcteur à suivre votre raisonnement.
Regardez d'ailleurs la réponse donnée ci-dessus à la question 1. La comprendriez-vous aussi bien sans le dessin ?

ESSEC 2016

Sujet : Développements en série et en produits eulériens de fonctions trigonométriques **Facile**
Abordable en première année : ✓ (sauf questions 6 et 7.) **Intérêt** : ★★★
Thèmes du programme abordés : séries numériques, fonctions d'une variable, diagonalisation.
Commentaires : sujet très long, calculatoire, comportant quelques questions difficiles, mais aussi de nombreuses questions classique pour le candidat capable de mener des calculs un peu compliqués et offrant de nombreuses occasions de «raccrocher».

Notations et objectifs :

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles.

Sous réserve d'existence, on note $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{n^2-x^2}$ et $\psi : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x}{n^2-x^2}$.

Le but du problème est d'obtenir, à l'aide des fonctions φ et ψ, des expressions des fonctions sin, $\dfrac{1}{\sin}$ et $\dfrac{\cos}{\sin}$ comme somme de séries ou de produit infini (on parle de développements eulériens.)
Plus précisément, dans la partie I, on étudie les premières propriétés de la fonction φ ; dans la seconde partie, on introduit et on étudie l'opérateur T défini sur E par : $\forall f \in E, \forall x \in [0,1], [T(f)](x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.

On en déduit une expression de la fonction $\dfrac{\cos}{\sin}$, puis, dans la partie III, de la fonction sinus. Enfin, dans la partie IV, l'étude de la fonction ψ permet d'obtenir une expression de $\dfrac{1}{\sin}$.

Partie I : Étude de la fonction φ.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x qui n'est pas un entier relatif, la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{2x}{n^2-x^2}$ est convergente.
   Dans la suite, on notera D l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs.
   La fonction φ est donc définie sur D.
2. **Imparité et périodicité de φ :**
   a. Justifier que φ est impaire.
   b. Vérifier que pour x dans D : $\dfrac{2x}{n^2-x^2} = \dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x}$.
   c. Montrer que pour x dans D : $\varphi(x+1) = \varphi(x)$.
   La fonction φ est donc périodique de période 1.
3. **Continuité de φ :**
   a. Justifier pour x dans l'ensemble $D \cup \{0,1\}$ l'existence de :
   $$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right).$$
   b. Vérifier que : $\forall x \in D, \varphi(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} - g(x)$.
   c. Soit h un nombre réel de $\left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$, montrer que : $\forall x \in [0,1], |g(x+h)-g(x)| \leqslant C|h|$ où $C = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{2}{(n-1)\left(n-\frac{3}{2}\right)}$.
   d. En déduire que g est continue sur $[0,1]$ puis que φ est continue sur $]0,1[$.
   La fonction φ est donc continue sur D.
4. **Étude de φ en 0 et en 1 :**
   a. Montrer que : $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et que : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\varphi(x) - \dfrac{1}{x}\right) = 0$.
   b. Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

Partie II : Étude de l'opérateur T.

On rappelle que E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles.

T est l'application définie sur E par : $\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ [T(f)](x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.

On note, pour tout entier naturel k, e_k l'élément de E défini par : $\forall x \in [0,1],\ e_k(x) = x^k$ et pour tout entier naturel n, F_n le sous-espace vectoriel de E dont une base est $\mathscr{B}_n = (e_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$.

5. Vérifier que T est un endomorphisme de E.
6. **Étude de T sur F_n :**
   a. Vérifier que : $\forall f \in F_n,\ T(f) \in F_n$.
   On note T_n l'endomorphisme de F_n défini par : $\forall f \in F_n,\ T_n(f) = T(f)$.
   b. Déterminer la matrice de T_n dans la base $\mathscr{B}_n$.
   c. Quelles sont les valeurs propres de T_n ? T_n est-il diagonalisable ?
7. **Étude du noyau de l'endomorphisme** $(T - 2\mathrm{id}_E)$ **:**
   a. Montrer que $\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

   Soit f un élément de $\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{id}_E)$. On note $m = \min\limits_{x \in [0,1]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x \in [0,1]} f(x)$. On fixe x_0 dans $[0,1]$ tel que $m = f(x_0)$ et x_1 dans $[0,1]$ tel que $f(x_1) = M$.

   b. Montrer que : $f\left(\dfrac{x_0}{2}\right) = m$.
   c. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N},\ f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = m$.
   d. En déduire que : $m = f(0)$.
   e. Faire une étude similaire pour M.
   f. Montrer alors que f est constante.
8. **Étude de la fonction** cot **:**
   Pour tout x dans l'ensemble D, on note $\cot(x) = \pi \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.
   a. Vérifier que cot est définie et continue sur D, qu'elle est impaire et périodique de période 1.
   b. Montrer que : $\cot(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et que : $\cot(x) - \dfrac{1}{x} \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{\pi^2}{3} x$.
   c. Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.
   d. Démontrer que, pour tout nombre réel x dans D, on a : $\dfrac{x}{2} \in D$, $\dfrac{x+1}{2} \in D$ et $\cot\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cot\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x)$.
9. **Calcul de φ :**
   a. Vérifier que, pour tout nombre réel x dans D, $\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right) + \varphi\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)$.
   b. Montrer que $\varphi - \cot$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$.
   c. Démontrer alors que $\varphi = \cot$.

Autrement dit : $\forall x \in D,\ \pi \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \dfrac{1}{x} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$.

10. **Première application :**
    a. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - x\cot(x)}{2x^2}$.

    Pour tout nombre réel x dans $]0,1[$, on pose $\delta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

    b. Vérifier que $\left|\delta(x) - \dfrac{x^2}{1 - x^2}\right| \leqslant x^2 \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 1)}$.
    c. En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
    d. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie III : Développement eulérien de la fonction sinus.

Pour tout n entier naturel non nul et tout nombre réel x dans $[0,1[$, on pose $\alpha_n(x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ et $\beta_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)$.

11. Montrer que, pour tout nombre réel x dans $[0,1[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n(x)$ converge. On note alors $\beta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x)$.

12. **Explicitation de β :** on fixe un nombre réel x dans $]0,1[$.

 a. Pour N entier naturel non nul, calculer $\displaystyle\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-2t}{n^2-t^2}\right) dt$ en fonction de $\beta_N(x)$.

 b. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt$.

 c. Montrer que : $\displaystyle\left|\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-2t}{n^2-t^2}\right) dt\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

 d. En déduire que : $\displaystyle\beta(x) = \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt$.

 e. Montrer alors que, pour tout nombre réel x dans $]0,1[$, $\beta(x) = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$.

13. Pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel non nul n, on pose $P_n(x) = \pi x \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$.

 a. Montrer que, pour tout nombre réel x de $[0,1[$, la suite $(P_n(x))_{n\geqslant 1}$ est convergente.

 Dans la suite, on pose $P(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$ et on note $P(x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.

 b. Vérifier que, pour tout nombre réel x de $[0,1[$, $P(x) = \pi x \exp(\beta(x)) = \sin(\pi x)$.

 c. Montrer que la suite $(P_n(x))_{n\geqslant 1}$ est en fait convergente pour tout nombre réel x. On note encore $P(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$.

 d. Soient n un entier naturel non nul et x un nombre réel dans $]-n,n[$, montrer que $P_n(x+1) = -\left(\frac{n+1+x}{n-x}\right) P_n(x)$.

 e. En déduire que, pour tout nombre réel x : $P(x+1) = -P(x)$. Vérifier alors que P est 2-périodique sur $\mathbf{R}$.

 f. Montrer alors que, pour tout nombre réel x, $P(x) = \sin(\pi x)$.

 Finalement, on obtient ainsi : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.

Partie IV : Un autre développement du sinus

Dans cette partie, pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x dans $D \cup \{0\}$, on pose

$$\lambda_n(x) = \int_0^{\pi} \cos(xt)\cos(nt)\,dt \text{ et } v_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{x}{n^2-x^2}.$$

14. Montrer que, pour tout nombre réel x dans $D \cup \{0\}$, la série de terme général $v_n(x)$ est convergente.
 La fonction ψ est donc définie sur $D \cup \{0\}$

15. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout nombre réel x dans $D \cup \{0\}$,
 $\lambda_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1} x \sin(\pi x)}{n^2 - x^2} = \sin(\pi x) v_n(x)$.
 Pour cela, on pourra utilise sans la démontrer la formule trigonométrique $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

16. Pour tout nombre réel t et tout entier naturel non nul n, on pose $C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$.

 a. Vérifier que lorsque t n'est pas de la forme $2p\pi, p \in \mathbf{Z}$, $C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

 b. Expliciter $C_n(t)$ lorsque t s'écrit $2p\pi$ avec p dans $\mathbf{Z}$.

 c. Donner la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} C_n(t)\,dt$.

17. Soit F une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^\pi F(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt\right)=0.$$

18. Pour x élément de D, on définit la fonction Φ_x sur $[0,\pi]$ par :

$$\Phi_x(t)=\begin{cases}\dfrac{\cos(xt)-1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t\in]0,\pi]\\ 0 & \text{si } t=0\end{cases}$$

a. Montrer que Φ_x est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

b. Vérifier que :

$$\forall t\in[0,\pi],\ C_n(t)\left(\cos(xt)-1\right)=-\frac{1}{2}\left(\cos(xt)-1\right)+\frac{1}{2}\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right).$$

c. En déduire que :

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ \forall x\in D,\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x)=-\frac{1}{2}\frac{\sin(\pi x)}{x}+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\int_0^\pi\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt+I_n.$$

19. Application :

a. Démontrer, à l'aide des questions précédentes, que pour tout x élément de D,

$$\psi(x)\sin(\pi x)=-\frac{1}{2}\frac{\sin(\pi x)}{x}+\frac{\pi}{2}.$$

b. En déduire que, pour tout x élément de D, $\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}=\dfrac{1}{x}+2x\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-x^2}$.

ESSEC 2016 : CORRIGÉ

Partie I : Étude de la fonction φ.

1. Si $x \notin \mathbf{Z}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n(x) = \dfrac{2x}{n^2 - x^2}$ est bien défini.

On a alors $|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2|x|}{n^2}$. Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, puisque $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ étant convergente, il en est de même de $\sum\limits_{n\geqslant 1} |u_n(x)|$.

Ainsi, la série de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente, $\boxed{\text{donc convergente.}}$

> **Signes**
> Ne pas oublier que le critère des équivalents nécessite des séries de signe constant, ce qui n'est pas le cas de $u_n(x)$, dont le signe peut changer suivant la valeur de n. L'emploi de la valeur absolue permet d'éviter ce problème.
> Il serait également possible de remarquer que pour n assez grand, $u_n(x)$ est de signe constant.

2. **Imparité et périodicité de φ.**

2.a. Si $x \in D$, alors $x \notin \mathbf{Z}$ et donc $-x \notin \mathbf{Z}$, de sorte que $-x \in D$. Le domaine de définition de φ est donc symétrique par rapport à 0, et il est donc pertinent de s'intéresser à la parité de φ.
Pour $x \in D$, on a alors

$$\varphi(-x) = \frac{1}{-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{n^2-(-x)^2} = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2} = -\varphi(x).$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est une fonction impaire.}}$

2.b. Pour $x \in D$, $\dfrac{1}{n-x}$ et $\dfrac{1}{n+x}$ sont bien définis et

$$\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{n+x}{n^2-x^2} - \frac{n-x}{n^2-x^2} = \boxed{\frac{2x}{n^2-x^2}.}$$

2.c. Pour $x \in D$, on a

$$\varphi(x+1) = \frac{1}{x+1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2(x+1)}{n^2-(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-(x+1)} - \frac{1}{n+(x+1)}\right).$$

> **⚠Danger !**
> La tentation est grande de séparer la somme de la série en deux sommes, mais $\sum \dfrac{1}{n+x+1}$ et $\sum \dfrac{1}{n-x-1}$ ne convergent pas !

Pour $N \geqslant 1$, on a alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n-(x+1)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+x+1} &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-1)-x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)+x} \\
&= \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k-x} + \sum_{\ell=1}^{N+1} \frac{1}{k+x} \\
&= \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1}{k-x} - \frac{1}{k+x}\right) + \frac{1}{N+x} + \frac{1}{N+1+x} \\
&\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right) = \varphi(x).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\varphi(x+1) = \varphi(x).}$

3. **Continuité de φ.**

3.a. Pour $x \in D$, nous avons prouvé à la question 1 que la série de terme général $u_n(x)$ converge, donc en particulier, $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n(x)$ converge.

Pour $x = 0$ ou $x = 1$, la preuve est la même, il suffit juste de remarquer que pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{2x}{n^2-x^2}$ est bien défini car son dénominateur ne s'annule pas.

3.b. Soit $x \in D$.

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right) = \boxed{\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x).}$$

3.c. Pour $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, posons $g_n(t) = \dfrac{2t}{n^2-t^2} = \dfrac{1}{n-t} - \dfrac{1}{n+t}$.

Pour $x \in [0,1]$ et $h \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on a

$$\begin{aligned} g_n(x+h) - g_n(x) &= \frac{1}{n-x-h} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n-x} + \frac{1}{n+x} \\ &= \frac{1}{n-x-h} - \frac{1}{n-x} + \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+h} \\ &= \frac{h}{(n-x)(n-x-h)} + \frac{h}{(n+x+h)(n+x)}. \end{aligned}$$

Or, $n - x \geqslant n-1$ et $n-x-h \geqslant n - \dfrac{3}{2}$ et donc

$$0 \leqslant \frac{1}{(n-x)(n-x-h)} \leqslant \frac{1}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}.$$

Et de même $n+x \geqslant n$ et $n+x+h \geqslant n - \dfrac{1}{2}$ donc

$$0 \leqslant \frac{1}{(n+x+h)(n+x)} \leqslant \frac{1}{(n-\frac{1}{2})n} \leqslant \frac{1}{(n-1)\left(n-\frac{3}{2}\right)}.$$

On en déduit que

$$|g_n(x+h) - g_n(x)| \leqslant \frac{2h}{(n-1)\left(n-\frac{3}{2}\right)}.$$

Il vient enfin :

$$\begin{aligned} |g(x+h) - g(x)| &= \left|\sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x+h) - \sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x)\right| \\ &= \left|\sum_{n=2}^{+\infty} (g_n(x+h) - g_n(x))\right| \qquad \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} |g_n(x+h) - g_n(x)| \\ &\leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2|h|}{(n-1)\left(n-\frac{3}{2}\right)} \\ &\leqslant |h| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)\left(n-\frac{3}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Sous réserve de convergence.

La convergence est établie car cette série est équivalente à une série de Riemann convergente.

3.d. Pour $x \in [0,1]$ fixé, par le théorème des gendarmes on a $\lim\limits_{h\to 0} |g(x+h) - g(x)| = 0$ et donc $\lim\limits_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$.

Ainsi, g est continue en x, et donc $\boxed{\text{est continue sur } [0,1].}$

Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sont continues sur $]0,1[$, et donc φ est continue sur $]0,1[$ car somme de fonctions continues.

4. Étude de φ en 0 et en 1.

4.a. On a $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{1-x^2} - g(x)$.

Or, au voisinage de 0, on a $\dfrac{2x}{1-x^2} + g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 + g(0) = 0$ et $\dfrac{1}{1-x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\dfrac{2x}{1-x^2} + g(x) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On en déduit que $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et donc $\boxed{\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}}.$

D'autre part, nous venons de prouver que $\varphi(x) - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{2x}{1-x^2} - g(x) \boxed{\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.}$

4.b. De même, on a

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x).$$

Et puisque $\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x}-g(x)\underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1+\frac{1}{2}-g(1)$, on a $\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-g(x)\underset{x\to 1}{=} o\left(\frac{1}{1-x}\right)$ et donc

$$\boxed{\varphi(x)\underset{x\to 1}{\sim} -\frac{1}{1-x}.}$$

Et $\boxed{\varphi(x)-\frac{1}{1-x}\underset{x\to 1}{\longrightarrow}\frac{3}{2}-g(1).}$

Or $g(1)=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$.

Pour calculer cette somme[1], repassons par les sommes partielles : pour $N\geqslant 2$, on a

$$\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1}-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{3}{2}.$$

Et donc $\boxed{\lim_{x\to 1}\left(\varphi(x)-\frac{1}{x-1}\right)=0.}$

[1] On aura reconnu une somme télescopique.

Partie II : Étude de l'opérateur T.

5. Si $f\in E$, alors les fonctions $x\mapsto f\left(\frac{x}{2}\right)$ et $x\mapsto f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ sont continues sur $[0,1]$ par composition de fonctions continues. Et donc $T(f)$ est continue, par somme de fonctions continues, de sorte que $T(f)\in E$.
Soient $f,g\in E$ et $\lambda\in\mathbf{R}$. Alors, pour tout $x\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}[T(\lambda f+g)](x)&=(\lambda f+g)\left(\frac{x}{2}\right)+(\lambda f+g)\left(\frac{x+1}{2}\right)\\&=\lambda\left(f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+\left(g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)=\lambda[T(f)](x)+[T(g)](x).\end{aligned}$$

Et donc $T(\lambda f+g)=\lambda T(f)+T(g)$: T est linéaire, et donc $\boxed{\text{est un endomorphisme de } E.}$

> **Méthode**
> Prouver que deux fonctions sont égales, c'est prouver qu'elles prennent la même valeur en tout point de leur ensemble de définition.

6. **Étude de T sur F_n.**

6.a. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ et tout $x\in[0,1]$, on a

$$[T(e_k)](x)=\left(\frac{x}{2}\right)^k+\left(\frac{1+x}{2}\right)^k=\frac{x^k}{2^k}+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{x^i}{2^k}$$

de sorte que $T(e_k)=\frac{e_k}{2^k}+\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{e_i}{2^k}\in F_n$.

Et alors, si $f=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k e_k\in F_n$, par linéarité de T, il vient $T(f)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k T(e_k)\in F_n$.

Ainsi, $\boxed{\forall f\in F_n,\ T(f)\in F_n.}$

> **Astuce**
> Pour prouver qu'un sous-espace vectoriel F est stable par un endomorphisme f, il suffit de prouver, pour une base $(e_1,\dots,e_n)$ de F que pour tout i, $f(e_i)\in F$.

6.b. D'après la question précédente, on a

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ T_n(e_k)=\frac{e_n}{2^{n-1}}+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\binom{k}{i}}{2^k}e_i.$$

La matrice de T_n dans la base $\mathscr{B}_n$ est donc donnée par

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n}(T_n)=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}T_n(e_0)&T_n(e_1)&\dots&T_n(e_{n-1})&T_n(e_n)\end{array}\\ \begin{pmatrix}2&\frac{1}{2}&\dots&\frac{1}{2^{n-1}}&\frac{1}{2^n}\\0&1&&&\frac{n}{2^n}\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\frac{1}{2^{n-2}}&\frac{n}{2^n}\\0&\dots&\dots&0&\frac{1}{2^{n-1}}\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\e_0\\e_1\\\vdots\\e_{n-1}\\e_n\end{array}.}$$

6.c. La matrice de T_n dans la base $\mathscr{B}_n$ est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres[2] sont ses coefficients diagonaux : $\boxed{\mathrm{Spec}(T_n) = \left\{\frac{1}{2^{k-1}}, k \in [\![0,n]\!]\right\}}$.

Ainsi, T_n possède $n+1 = \dim F_n$ valeurs propres distinctes, donc $\boxed{\text{est diagonalisable.}}$

[2] Qui sont également les valeurs propres de T_n.

7. Étude du noyau de l'endomorphisme $(T - 2\mathrm{id}_E)$**.**

7.a. On a $T(e_0) = 2e_0$, et donc $e_0 \in \mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{id}_E)$. Puisque $e_0 \neq 0_E$, on a donc $\boxed{\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}.}$

7.b. Puisque $\frac{x_0}{2} \in [0,1]$, nécessairement $f\left(\frac{x_0}{2}\right) \geqslant m$.
Et de même, $\frac{x_0+1}{2} \in [0,1]$ et donc $f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \geqslant m$.
De plus, $T(f) = 2f$, de sorte que $f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2f(x_0) = 2m$.
Si on avait $f\left(\frac{x_0}{2}\right) > m$, alors nécessairement

$$2m = 2f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \geqslant f\left(\frac{x_0}{2}\right) + m > 2m.$$

Ceci est impossible, donc $\boxed{f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m.}$

7.c. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$.
Pour $n = 0$, c'est la définition de x_0.
Supposons donc que $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$.
Le raisonnement de la question précédente prouve que quel que soit $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = m$, alors $f\left(\frac{x}{2}\right) = m$.
En particulier, $f\left(\frac{1}{2}\frac{x_0}{2^n}\right) = m$, donc $f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = 0$.
Et alors par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m.}$

7.d. Lorsque $n \to +\infty$, $\frac{x_0}{2^n} \to 0$, et donc par continuité de f, on a $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$.
D'autre part, $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m$, donc par unicité de la limite, $\boxed{m = f(0).}$

7.e. Sur le même principe, on prouve que $f\left(\frac{x_1}{2}\right) = M$, puis que $\forall n \in \mathbf{N}, f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = M$, et donc, par le même argument de limite, que $\boxed{\mathrm{f(0) = M}}$.

7.f. Pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(0) = m \leqslant f(x) \leqslant M = f(0)$, donc $\forall x \in [0,1], f(x) = f(0)$: la fonction $\boxed{f \text{ est constante sur } [0,1].}$

8. Étude de la fonction cot**.**

8.a. Pour $x \in D$, on a $\pi x \notin \pi\mathbf{Z}$, et donc $\sin(\pi x) \neq 0$, de sorte que $\cot(x)$ est bien défini.
La fonction cosinus est paire, et la fonction sinus est impaire, de sorte que

$$\forall x \in D,\ \cot(-x) = \frac{\pi\cos(-\pi x)}{\sin(-\pi x)} = -\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = -\cot(x)$$

donc $\boxed{\cot \text{ est impaire.}}$
Enfin, pour $x \in D$, on a

$$\cot(x+1) = \frac{\pi\cos(\pi(x+1))}{\sin(\pi(x+1))} = \frac{\pi\cos(\pi x + \pi)}{\sin(\pi x + \pi)} = \frac{-\pi\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = \cot(x)$$

donc $\boxed{\cot \text{ est 1-périodique.}}$

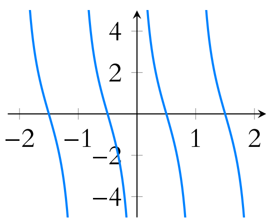


FIGURE 1– La fonction cot.

Périodicité
Si $x \in D$, alors $x+1 \in D$, et donc cela a bien un sens de s'intéresser à la 1-périodicité de cot.

8.b. On a $\cos(\pi x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $\sin(\pi x) \underset{x\to 0}{\sim} \pi x$, de sorte que $\cot(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\pi}{\pi x} = \dfrac{1}{x}$.
De plus, on a, pour $x \in D$,

$$\begin{aligned}
\cot(x) - \frac{1}{x} &= \frac{\pi x\cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x\sin(\pi x)} \\
&= \frac{\pi x\left(1 - \frac{\pi^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) - \left(\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3)\right)}{\pi x^2 + o(x^2)} \\
&= \frac{-\frac{\pi^3 x^3}{3} + o(x^3)}{\pi x^2 + o(x^2)} \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\pi^3 x^3}{3\pi x^2} = \boxed{-\frac{\pi^2 x}{3}.}
\end{aligned}$$

8.c. En utilisant la 1-périodicité de cot, on obtient, en posant $X = x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$

$$\cot(x) = \cot(x-1) = \cot(X) \sim \frac{1}{X} = \frac{1}{x-1}$$

et de même $\boxed{\cot(x) - \dfrac{1}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} -\dfrac{\pi^2}{3}(x-1).}$

8.d. Soit $x \in D$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\dfrac{x}{2} \notin D$. Alors $\dfrac{x}{2} \in \mathbf{Z}$ et donc $x = 2\dfrac{x}{2} \in \mathbf{Z}$, ce qui n'est pas possible. Donc $\boxed{\dfrac{x}{2} \in D.}$

De même, si $\dfrac{x+1}{2} \in \mathbf{Z}$, alors $x = 2\dfrac{x+1}{2} - 1 \in \mathbf{Z}$, ce qui est impossible, donc $\boxed{\dfrac{x+1}{2} \in D.}$

Pour $x \in D$, on a alors

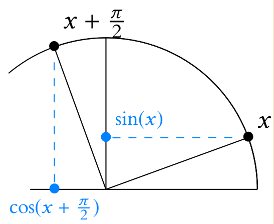
$$\begin{aligned}
\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{\pi\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \frac{\pi\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{\pi\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \frac{-\pi\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \\
&= \pi\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \\
&= \pi\frac{2\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \boxed{2\cot(x).}
\end{aligned}$$

Trigo

Comme (presque) toutes les formules de trigonométrie, la formule

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

peut se retrouver sur un dessin



Trigo

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

9. Calcul de φ.

9.a. Pour $x \in D$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{2}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n - \frac{x}{2}} - \frac{1}{n + \frac{x}{2}}\right) + \frac{2}{x+1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n - \frac{x+1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{x+1}{2}}\right) \\
&= \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{2n-x} - \frac{2}{2n+x} - \frac{2}{2n-1-x} + \frac{2}{2n+1+x}\right)
\end{aligned}$$

Mais pour $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{2n-x} - \frac{2}{2n+x} - \frac{2}{2n-1-x} + \frac{2}{2n+1+x}\right) &= \sum_{\substack{k=2\\ k\text{ pair}}}^{2N}\left(\frac{2}{k-x} - \frac{2}{k+x}\right) + \sum_{n=1}^{N}\frac{2}{2n-1-x} - \sum_{n=1}^{N}\frac{2}{2n+1+x} \\
&= \sum_{\substack{k=2\\ k\text{ pair}}}^{2N}\left(\frac{2}{k-x} - \frac{2}{k+x}\right) + \sum_{\substack{k=1\\ k\text{ impair}}}^{2N-1}\frac{2}{k-x} - \sum_{\substack{k=3\\ k\text{ impair}}}^{2N+1}\frac{2}{k+x} \\
&= \sum_{\substack{k=2\\ k\text{ pair}}}^{2N}\left(\frac{2}{k-x} - \frac{2}{k+x}\right) + \sum_{\substack{k=1\\ k\text{ impair}}}^{2N+1}\frac{2}{k-x} - \frac{2}{2N+1-x} - \sum_{\substack{k=1\\ k\text{ impair}}}^{2N+1}\frac{2}{k+x} + \frac{2}{1+x}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{2N+1}\left(\frac{2}{k-x}-\frac{2}{k+x}\right)-\frac{2}{2N+1-x}+\frac{2}{x+1}$$
$$\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-x}-\frac{1}{k+x}\right)+\frac{2}{x+1}.$$

Et donc, par unicité de la limite[3]

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x+1}-2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-x}-\frac{1}{k+x}\right)-\frac{2}{x+1}$$
$$=\frac{2}{x}-2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-x}-\frac{1}{k+x}\right)=\boxed{2\varphi(x).}$$

[3] La somme que nous venons de calculer converge également, lorsque N tend vers $+\infty$ vers $\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)-\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}$.

9.b. La fonction $\varphi - \cot$ est continue sur $]0,1[$ car somme de fonctions continues.
De plus, en utilisant les résultats des questions 4.a et 8.b, on a

$$\lim_{x\to 0^+}(\varphi(x)-\cot(x))=\lim_{x\to 0^+}\left(\varphi(x)-\frac{1}{x}\right)-\lim_{x\to 0^+}\left(\cot(x)-\frac{1}{x}\right)=0-0=0.$$

Donc $\varphi-\cot$ est prolongeable par continuité en 0.
De même, on a

$$\lim_{x\to 1^-}(\varphi(x)-\cot(x))=\lim_{x\to 1^-}\left(\varphi(x)-\frac{1}{x-1}\right)-\lim_{x\to 1^-}\left(\cot(x)-\frac{1}{x-1}\right)=0-0=0.$$

Et donc $\varphi-\cot$ est également prolongeable par continuité en 1.
Ainsi, $\boxed{\varphi-\cot \text{ se prolonge en une fonction continue sur } [0,1].}$

9.c. Soit $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ la fonction obtenue par prolongement par continuité de $\varphi-\cot$.
Alors, d'après les questions 8.d et 9.a, pour tout $x\in]0,1[$,

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-\cot\left(\frac{x}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)-\cot\left(\frac{x+1}{2}\right)=2\varphi(x)-2\cot(x)=2f(x).$$

Prolongement
D'après les calculs qui précèdent, on a donc

$$f(0)=f(1)=0.$$

Par continuité de f, en faisant tendre x vers 0, on obtient également

$$f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2f(0).$$

Et en faisant tendre x vers 1, on a $f(1)+f\left(\frac{1+1}{2}\right)=2f(1)$.

Ainsi, pour tout $x\in[0,1]$, $f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=2f(x)$: la fonction f, qui est continue sur $[0,1]$, vérifie $T(f)=2f$ et donc appartient à $\mathrm{Ker}(T-2\mathrm{id}_E)$.
D'après la question 7.f, la fonction f est donc constante sur $[0,1]$. Puisqu'elle s'annule en 0, il vient : $\forall x\in[0,1]$, $f(x)=0$.
En particulier, pour $x\in]0,1[$, $\varphi(x)=\cot(x)$.

Et si $x\in D$, alors $x-\lfloor x\rfloor\in]0,1[$, de sorte que par 1-périodicité,

$$\varphi(x)=\varphi(x-\lfloor x\rfloor\times 1)=\cot(x-\lfloor x\rfloor\times 1)=\cot(x).$$

On en déduit que $\boxed{\varphi=\cot.}$

10. Première application

10.a. À l'aide de l'équivalent obtenu en 8.b, il vient $1-x\cot(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\pi^2}{3}x^2$ et donc

$$\frac{1-x\cot(x)}{2x^2}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{\pi^2}{6}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\boxed{\frac{\pi^2}{6}.}$$

10.b. On a

$$\begin{aligned}\left|\delta(x)-\frac{x^2}{1-x^2}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-x^2}-\frac{x^2}{1-x^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right|\\ &= \left|\underbrace{\frac{1}{1-x^2}-\frac{x^2}{1-x^2}}_{=1}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-x^2}-1-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right|\\ &= \left|\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2-x^2}-\frac{1}{n^2}\right)\right|\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^2}{(n^2-x^2)n^2}\\ &\leqslant \boxed{x^2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-1)n^2}.}\end{aligned}$$

La valeur absolue n'était pas utile car il s'agit clairement d'une quantité positive.

Puisque $x\in]0,1[$,

$$n^2-x^2\geqslant n^2-1.$$

10.c. Puisque $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n^2-1)}$ est une constante, lorsque $x\to 0$, on a $\displaystyle x^2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n^2-1)}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$.

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\delta(x)-\frac{x^2}{1-x^2}\right)=0$. Et donc

$$\lim_{x\to 0}\delta(x)=\lim_{x\to 0}\left(\delta(x)-\frac{x^2}{1-x^2}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-x^2}=0+0=0.$$

Soit $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.}$

10.d. En utilisant $\varphi=\cot$, il vient, pour $x\in D$, $\displaystyle 1-x\cot x=1-1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{n^2-x^2}$ et donc $\displaystyle\frac{1-x\cot(x)}{2x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-x^2}.$

Ainsi, en utilisant 10.a et 10.c, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x\cot(x)}{2x^2}=\boxed{\frac{\pi^2}{6}.}$$

Partie III ; Développement eulérien de la fonction sinus.

11. Lorsque $n\to+\infty$, $\dfrac{x^2}{n^2}\to 0$, de sorte que $\displaystyle\alpha_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{x^2}{n^2}$.

Or, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}-\frac{x^2}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc par critère de comparaison pour les séries de signe constant[4], $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n(x)\text{ converge.}}$

[4] Ici négatif.

12. **Explicitation de β.**

12.a. On a

$$\begin{aligned}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{-2t}{n^2-t^2}\right)dt &= \sum_{n=1}^{N}\int_0^x\frac{-2t}{n^2-t^2}\,dt=\sum_{n=1}^{N}\left[\ln(n^2-t^2)\right]_0^x=\sum_{n=1}^{N}\left(\ln(n^2-x^2)-\ln(n^2)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{n^2-x^2}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=\boxed{\beta_N(x).}\end{aligned}$$

12.b. La fonction $t\mapsto\varphi(t)-\dfrac{1}{t}$ est continue sur $]0,x]$, donc l'intégrale est impropre en 0.

Mais d'après 4.a, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\varphi(x)-\frac{1}{x}\right)=0$, de sorte que l'intégrale est faussement impropre, et donc convergente.

12.c. Pour $t\in]0,x[$, on a $\varphi(t)-\frac{1}{t}-\sum_{n=1}^{N}\frac{-2t}{n^2-t^2}=\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{-2t}{n^2-t^2}$, de sorte que

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{-2t}{n^2-t^2}\right|=\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{2t}{n^2-t^2}\leqslant 2t\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}.$$

Et alors, il vient

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x\left(\varphi(t)-\frac{1}{t}\right)dt-\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{-2t}{n^2-t^2}\right)dt\right|&=\left|\int_0^x\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{-2t}{n^2-t^2}\right)dt\right|\\&\leqslant\int_0^x\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{-2t}{n^2-t^2}\right|dt\\&\leqslant\int_0^x 2t\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}\,dt\\&\leqslant\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}\int_0^x 2t\,dt\\&\leqslant\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}\times x^2\\&\leqslant\boxed{\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}.}\end{aligned}$$

Inégalité triangulaire.

12.d. Lorsque $N\to+\infty$, on a $\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}\to 0$.
Et donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^x\left(\varphi(t)-\frac{1}{t}\right)dt-\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{-2t}{n^2-t^2}\right)dt=\lim_{N\to+\infty}\left(\int_0^x\left(\varphi(t)-\frac{1}{t}\right)dt-\beta_N(x)\right)=0.$$

Rappel
Le reste d'ordre N d'une série convergente tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$.

On en déduit que

$$\beta(x)=\lim_{N\to+\infty}\beta_N(x)=\lim_{N\to+\infty}\left(\beta_N(x)-\int_0^x\left(\varphi(t)-\frac{1}{t}\right)dt\right)+\int_0^x\left(\varphi(t)-\frac{1}{t}\right)dt=\boxed{\int_0^x\left(\varphi(t)-\frac{1}{t}\right)dt.}$$

12.e. On a $\int_0^x\left(\varphi(t)-\frac{1}{t}\right)dt=\lim_{A\to0^+}\int_A^x\left(\varphi(t)-\frac{1}{t}\right)dt=\lim_{A\to0^+}\int_A^x\left(\cot(t)-\frac{1}{t}\right)dt$. Mais

$$\int_A^x\left(\cot(t)-\frac{1}{t}\right)dt=[\ln(\sin(\pi t))-\ln(t)]_A^x=\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)-\ln\left(\frac{\sin(\pi A)}{A}\right).$$

Lorsque $A\to0^+$, alors $\sin(\pi A)\sim\pi A$ et donc $\frac{\sin(\pi A)}{A}\underset{A\to0^+}{\sim}\frac{\pi A}{A}\underset{A\to0^+}{\longrightarrow}\pi$.
Par continuité[5] de la fonction logarithme, on a alors

$$\lim_{A\to0^+}\ln\left(\frac{\sin(\pi A)}{A}\right)=\ln(\pi)$$

de sorte que

$$\beta(x)=\int_0^x\left(\cot(t)-\frac{1}{t}\right)dt=\lim_{A\to0}\left(\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)-\ln\left(\frac{\sin(\pi A)}{A}\right)\right)=\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right)-\ln(\pi)=\boxed{\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right).}$$

[5] Qui est nécessaire pour composer les limites.

13.a. Notons que $P_n(x)\geqslant 0$ car produit de nombre positifs.
De plus, pour $x\in[0,1[$ et $n\geqslant1$, on a

$$\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}=1-\frac{x^2}{(n+1)^2}\leqslant 1$$

et donc $(P_n(x))_{n\geqslant1}$ est une suite décroissante. Étant décroissante et minorée[6], d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle est convergente.}}$

[6] Par 0.

13.b. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$P_n(x) = \pi x \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right) = \pi x \exp(\beta_n(x)).$$

Mais $\beta_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta(x)$ et donc, par continuité de la fonction exponentielle,

$$\exp(\beta_n(x)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(\beta(x)) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Et donc, par unicité de la limite,

$$P(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \pi x \exp(\beta_n(x)) = \pi x \exp(\beta(x)) = \pi x \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \boxed{\sin(\pi x).}$$

Convergence

Étudier la convergence d'une suite, c'est étudier son comportement «à l'infini», et donc les premiers termes (les deux premiers, les 10 premiers ou les 1000 premiers) n'ont aucune influence sur la convergence. Ainsi, pour appliquer le théorème de la limite monotone, il suffit qu'une suite soit monotone **à partir d'un certain rang**, ce qui est le cas ici.

13.c. Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. Alors, pour tout n, $P_n(x) \geqslant 0$, et pour $n \geqslant |x|$, on a

$$\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = 1 - \frac{x^2}{(n+1)^2} \leqslant 1.$$

Ainsi, la suite $(P_n(x))_{n\geqslant \lfloor |x| \rfloor + 1}$ est décroissante, et comme précédemment, elle converge.
Et donc nécessairement, $\boxed{\text{la suite } (P_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ converge}}$ également.

13.d. Pour $x \in]-n, n[$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(x+1)}{P_n(x)} &= \frac{x+1}{x} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2 - (x+1)^2}{k^2 - x^2}\right) \\
&= \frac{x+1}{x} \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2 - x^2 - 2x - 1}{(k-x)(k+x)} \\
&= \frac{x+1}{x} \prod_{k=1}^{n} \frac{((k+1)+x)((k-1)-x)}{(k-x)(k+x)} \\
&= \frac{x+1}{x} \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1+x}{k+x} \prod_{k=1}^{n} \frac{((k-1)-x)}{k-x} \\
&= \frac{x+1}{x} \frac{n+1+x}{1+x} \frac{-x}{n-x} \\
&= -\frac{n+1+x}{n-x}.
\end{aligned}$$

Factorisation

Pour k fixé,

$$k^2 - x^2 - 2x - 1$$

est un polynôme du second degré en x, de discriminant égal à $4k^2 > 0$. Il possède donc deux racines. Après calcul, ces racines sont $-k-1$ et $k-1$.
On prendra garde à ne pas oublier le coefficient dominant (ici -1) lors de la factorisation en produit de polynômes de degré 1.

Et donc $\boxed{P_n(x+1) = -\left(\frac{n+1+x}{n-x}\right) P_n(x).}$

13.e. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors pour $n \geqslant |x|$, on a $x \in]-n, n[$, de sorte que $P_n(x+1) = -\left(\frac{n+1+x}{n-x}\right) P_n(x)$.
Lorsque $n \to +\infty$, on a $P_n(x+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P(x+1)$, $P_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P(x)$ et $\left(\frac{n+1+x}{n-x}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
de sorte que, par unicité de la limite, $\boxed{P(x+1) = -P(x).}$
Alors, quel que soit $x \in \mathbf{R}$, on a $P(x+2) = P((x+1)+1) = -P(x+1) = -(-P(x)) = P(x)$.
Ainsi, $\boxed{P \text{ est 2-périodique.}}$

13.f. Le résultat a déjà été prouvé à la question 13.b pour $x \in [0, 1]$.
Soit à présent $x \in [1, 2[$. Alors

$$P(x) = -P(x-1) = -\sin(\pi(x-1)) = -\sin(\pi x - \pi) = \sin(\pi x).$$

Enfin, pour $x \in \mathbf{R}$ quelconque, soit $n = 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ le plus grand entier **pair** inférieur ou égal à x.
Alors $P(x) = P(x-n)$, avec $x - n \in [0, 2[$, et donc
$P(x-n) = \sin(\pi(x-n)) = \sin(\pi x - n\pi) = \sin(\pi x)$ car n est pair.
Ainsi, pour tout $\boxed{x \in \mathbf{R},\ P(x) = \sin(\pi x).}$

Partie IV : Un autre développement du sinus.

14. Soit $x \in D \cup \{0\}$. Alors $|v_n(x)| = \dfrac{|x|}{n^2 - x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|x|}{n^2}$.
Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |v_n(x)|$ est convergente.
Ainsi, $\boxed{\sum v_n(x) \text{ est absolument convergente, donc convergente.}}$

15. Utilisons la formule trigonométrique fournie par l'énoncé[7] :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in [0,\pi], \cos(xt)\cos(nt) = \frac{1}{2}\left(\cos((n+x)t) + \cos((n-x)t)\right).$$

[7] Formule qui n'est pas très difficile à prouver : il s'agit d'ajouter les formules classiques donnant $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.

Et donc

$$\begin{aligned}
\lambda_n(x) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+x)t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n-x)t)\,dt\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+x)t)}{n+x}\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-x)t)}{n-x}\right]_0^\pi\\
&= \frac{1}{2}\frac{\sin((n+x)\pi)}{n+x} + \frac{1}{2}\frac{\sin((n-x)\pi)}{n-x}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\sin(x\pi + n\pi)}{n+x} + \frac{1}{2}\frac{\sin(n\pi - x\pi)}{n-x}\\
&= \frac{1}{2}\frac{(-1)^n\sin(x\pi)}{n+x} - \frac{1}{2}\frac{(-1)^n\sin(x\pi)}{n-x}\\
&= \frac{(-1)^n\sin(\pi x)}{2}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x}\right)\\
&= \frac{(-1)^n\sin(\pi x)}{2}\frac{-2x}{n^2-x^2} = \boxed{\frac{(-1)^{n-1}x\sin(\pi x)}{n^2-x^2}.}
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$,
$$\sin(x+n\pi) = (-1)^n\sin(x).$$

16.a. Pour tout réel t qui n'est pas de la forme $2p\pi$, $p \in \mathbf{Z}$, on a

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}\left(e^{ikt}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n e^{ikt}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\right).$$

L'hypothèse faite sur t implique que $e^{it} \neq 1$.

Mais $e^{it}\dfrac{1-e^{int}}{1-e^{it}} = e^{it/2}\dfrac{1-e^{int}}{e^{-it/2}-e^{it/2}}$.
Nous savons que $e^{-it/2} - e^{it/2} = -2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)$, de sorte que

Formule d'Euler

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \sin(x).$$

$$\begin{aligned}
C_n(t) &= \operatorname{Re}\left(e^{it/2}\frac{1-e^{int}}{-2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(i\frac{e^{it/2}-e^{i(2n+1)\frac{t}{2}}}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\\
&= -\operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-(2n+1)\frac{t}{2}}}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\\
&= -\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\\
&= \boxed{-\frac{1}{2} + \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.}
\end{aligned}$$

$\frac{1}{i} = -i.$

Pour tout complexe z, on a $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$.

16.b. Si $t = 2p\pi$, $p \in \mathbf{Z}$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\cos(kt) = 1$, de sorte que $\boxed{C_n(t) = n.}$

16.c. On a

$$I_n = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kt)\,dt = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\pi)}{k} = \boxed{0.}$$

17. Procédons à une intégration par parties sur le segment $[0,\pi]$, en posant $u(t) = F(t)$ et $v(t) = -\frac{2}{2n+1}\cos\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors

$$\int_0^\pi F(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt = \left[-F(t)\frac{2}{2n+1}\cos\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\right]_0^\pi + \int_0^\pi F'(t)\frac{2}{2n+1}\cos\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt$$
$$= \frac{2}{2n+1}\left(F(0) - F(\pi)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\right) + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi F'(t)\cos\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt.$$

Mais $\left|F(0) - F(\pi)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\right| \leqslant |F(\pi)| + |F(0)|$, de sorte que

$$\left|\frac{2}{2n+1}\left(F(\pi)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)\right)\right| \leqslant \frac{2}{2n+1}(|F(\pi)| + |F(0)|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, la fonction F' étant continue sur le segment $[0,\pi]$, elle y est bornée : il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [0,\pi]$, $|F'(t)| \leqslant M$. Et donc

$$\left|\int_0^\pi F'(t)\cos\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt\right| \leqslant \int_0^\pi M\,dt = \pi M.$$

Ainsi, $\frac{2}{2n+1}\left|\int_0^\pi F'(t)\cos\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt\right| \leqslant \frac{2}{2n+1}M\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc on a bien

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^\pi F(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\right)dt = 0.}$$

18.a. Il est évident que Φ_x est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$ car quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
Au voisinage de 0, on a $\cos(xt) - 1 \sim -\frac{x^2t^2}{2}$ et $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \sim \frac{t}{2}$, de sorte que

$$\Phi_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} -x^2 t \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0 = \Phi_x(0).$$

La fonction Φ_x est donc continue en 0.
Pour $x \in]0,\pi]$, on a

$$\frac{\Phi_x(t) - \Phi_x(0)}{t} = \frac{\Phi_x(t)}{t} \underset{t\to 0^+}{\sim} -x^2 \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} -x^2.$$

Donc Φ_x est dérivable[8] en 0, et $\Phi_x'(0) = -x^2$.

[8] À droite.

Enfin, pour $t \in]0,\pi]$, on a $\Phi_x'(t) = \dfrac{-x\sin(xt)\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)(\cos(xt) - 1)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$.
Un développement limité du numérateur nous donne alors

$$-x\sin(xt)\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)(\cos(xt)-1) = -x\left(xt + o(t^2)\right)\left(\frac{t}{2} + o(t^2)\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t^2}{8} + o(t^2)\right)\left(-\frac{x^2t^2}{2} + o(t^2)\right)$$
$$= -\frac{x^2t^2}{2} + \frac{x^2t^2}{4} + o(t^2)$$
$$\underset{t\to 0}{\sim} -\frac{x^2t^2}{4}.$$

Méthode
Rappelons que lorsqu'on fait le produit de deux développements limités d'ordre 2, tous les termes d'ordre supérieur à 2 sont «cachés» dans le $o(t^2)$.

Puisque $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{4}$, on a donc $\Phi_x'(t) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -x^2 = \Phi_x'(0)$.
Donc Φ_x' est continue en 0 et donc sur $[0,\pi]$.
Ainsi, $\boxed{\Phi_x \text{ est une fonction de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\pi].}$

18.b. Pour $t \in]0,\pi]$, on a

$$C_n(t)(\cos(xt)-1) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)(\cos(xt)-1) = -\frac{1}{2}(\cos(xt)-1) + \frac{1}{2}\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right).$$

Et pour $t=0$, on a $C_n(0)=n$ et $\cos(xt)-1=0$, de sorte que

$$C_n(0)(\cos(x\times 0)-1)=0=-\frac{1}{2}(\cos(x\times 0)-1)+\frac{1}{2}\Phi_x(0)\sin\left((2n+1)\frac{0}{2}\right).$$

Et donc,

$$\boxed{\forall x\in[0,\pi],\ C_n(t)(\cos(xt)-1)=-\frac{1}{2}(\cos(xt)-1)+\frac{1}{2}\Phi_x(t)(\cos(xt)-1).}$$

18.c. En utilisant les résultats des questions précédentes, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x)&=\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\cos(xt)\cos(kt)\,dt=\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right)\cos(xt)\,dt\\&=\int_0^{\pi}C_n(t)\cos(xt)\,dt=\int_0^{\pi}C_n(t)(\cos(xt)-1)\,dt+\int_0^{\pi}C_n(t)\,dt\\&=\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{2}(\cos(xt)-1)+\frac{1}{2}\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\right)dt+I_n\\&=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(xt)\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}dt+\int_0^{\pi}\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt+I_n\\&=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(xt)}{x}\right]_0^{\pi}+\frac{\pi}{2}+\int_0^{\pi}\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt+I_n\\&=\boxed{-\frac{1}{2}\frac{\sin(\pi x)}{x}+\frac{\pi}{2}+\int_0^{\pi}\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt+I_n.}\end{aligned}$$

19. Application :

19.a. Pour $x\in D$, on a $\psi(x)\sin(\pi x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(x)\sin(\pi x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x)$.
En utilisant le résultat de la question 18.c, il vient alors

$$\psi(x)\sin(\pi x)=-\frac{1}{2}\frac{\sin(\pi x)}{x}+\frac{\pi}{2}+\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt+\underbrace{I_n}_{=0}.$$

Mais la fonction Φ_x étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, d'après la question 17, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\Phi_x(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt=0$$

et donc $\boxed{\psi(x)\sin(\pi x)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(\pi x)}{x}+\dfrac{\pi}{2}.}$

19.b. Pour $x\in D$, $\sin(\pi x)\neq 0$, et donc en divisant la relation précédemment obtenue par $\dfrac{\sin(\pi x)}{2}$, il vient

$$2\psi(x)=-\frac{1}{x}+\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\Leftrightarrow\boxed{\frac{\pi}{\sin(\pi x)}=\frac{1}{x}+2\psi(x)=\frac{1}{x}+2x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-x^2}.}$$

ESSEC 2015

Sujet : Étude de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux. **Moyen**
Abordable en première année : ✓ (questions 1 à 6) **Intérêt** : ★★☆
Thèmes du programme abordés : fonctions d'une variable réelle, produits scalaire, diagonalisation.

Dans tout le problème, on adopte les notations suivantes :

- $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.
- Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, $\mathscr{C}^k([0,1],\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur le segment $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ et dont les dérivées successives jusqu'à la k-ème sont continues.
- Si f est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, on note $\|f\|_\infty$ le nombre réel $\max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
- Si q est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, on note $F(q)$ l'ensemble défini par : $F(q) = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbf{R}) / \forall t \in [0,1],\ f''(t) = q(t)f(t)\}$.

Introduction

1. a. Montrer que $F(q)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.

   b. Pour toute fonction f de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ on définit la fonction $\Phi(f)$ par
   $$\Phi(f) : t \in [0,1] \mapsto \int_0^t (t-u)q(u)f(u)\,du.$$
   Vérifier que l'application Φ, qui à f associe $\Phi(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.

   c. Montrer que $\Phi(f)$ appartient à $\mathscr{C}^2([0,1],\mathbf{R})$ et calculer $[\Phi(f)]'$ et $[\Phi(f)]''$.

   d. En déduire pour toute fonction f de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$:
   $\big(f$ appartient à $F(q)$ et vérifie : $f(0) = f'(0) = 0\big)$ si et seulement si $\big(\Phi(f) = f\big)$.

2. Soit f dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $f_0 = f$ et pour tout n entier naturel, $f_{n+1} = \Phi(f_n)$.

   a. Montrer que : $\forall t \in [0,1],\ |f_n(t)| \leqslant \|q\|_\infty^n \|f_0\|_\infty \dfrac{t^n}{n!}$.

   b. En déduire que, pour tout t de $[0,1]$, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

   c. Montrer alors que si f appartient à $F(q)$ et vérifie : $f(0) = f'(0) = 0$, alors f est nulle.

   d. Montrer que l'application $\Delta : \begin{cases} F(q) & \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ f & \longmapsto (f(0), f'(0)) \end{cases}$ est linéaire et injective. Que peut-on en déduire pour la dimension de $F(q)$?

Partie I : l'espace $E_a(\omega)$.

Soient ω une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles strictement positives et a un nombre réel. On note :
$$E_a(\omega) = \left\{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbf{R}) \,/\, \forall t \in [0,1],\ f''(t) = -a\omega(t)f(t) \text{ et } f(0) = f(1) = 0\right\}.$$

3. a. Montrer que $E_a(\omega)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.

   b. Un exemple élémentaire : le cas $a = 0$. Décrire $E_0(\omega)$.

4. Un exemple constructif : le cas où ω est la fonction constante égale à 1.

   a. Pour a strictement négatif, remarquer que $t \mapsto \exp\left(\left(\sqrt{-a}\right)t\right)$ et $t \mapsto \exp\left(-\left(\sqrt{-a}\right)t\right)$ sont dans $F(-a)$. En déduire $E_a(1)$ pour a strictement négatif.

   b. Pour a strictement positif, remarquer que $t \mapsto \cos\left(\left(\sqrt{a}\right)t\right)$ et $t \mapsto \sin\left(\left(\sqrt{a}\right)t\right)$ sont dans $F(-a)$. Décrire $E_a(1)$ pour a strictement positif, en discutant suivant la nature du nombre réel $\sqrt{a}/\pi$.

5. On revient au cas général, montrer que : $\dim(E_a(\omega)) \leqslant 1$. On pourra faire intervenir encore l'application Δ.

6. Montrer que : si $E_a(\omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, alors a est strictement positif (on pourra introduire $\displaystyle\int_0^1 (f'(t))^2\,dt$).

7. Lorsque f et g sont deux fonctions continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$, on pose : $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\omega(t)\,dt$.
   Vérifier que cela définit bien un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.

Dans toute la suite du problème, l'espace $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ est muni de ce produit scalaire.

Pour f dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$, on note $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f|f\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2\,\omega(t)\,dt}$.

8. Si a et b sont deux nombres réels distincts, montrer que $E_a(\omega)$ et $E_b(\omega)$ sont orthogonaux.

Partie II : l'exemple $\omega = 1$.

Dans cette partie, ω est la fonction constante 1 et p est un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout k entier naturel non nul, on note ψ_k la fonction définie par : $\psi_k : t \in [0,1] \mapsto \sqrt{2}\sin(k\pi t)$.

9. a. Vérifier qu'il existe un nombre réel a strictement positif tel que ψ_k appartienne à $E_a(1)$.

   b. Pour tout couple (k,ℓ) dans $(\mathbf{N}^*)^2$, calculer : $\langle\psi_k|\psi_\ell\rangle = \int_0^1 \psi_k(t)\psi_\ell(t)\,dt$.

   c. On note G le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ engendré par $(\psi_1,\ldots,\psi_p)$. Vérifier que $C = (\psi_1,\ldots,\psi_p)$ est une base orthonormée de G.

10. Pour g élément de G, on définit la fonction $u(g)$ par : pour tout $t \in [0,1]$,

$$(u(g))(t) = 2\cos(\pi t)g(t) - \left(\int_0^1 g(x)\psi_p(x)\,dx\right)\psi_{p+1}(t).$$

   a. Montrer que $u : g \mapsto u(g)$ est un endomorphisme de G.

   b. Écrire la matrice de u dans la base C. Justifier que u est diagonalisable.

11. a. Vérifier que, pour g élément de G : $\langle g|u(g)\rangle = 2\int_0^1 \cos(\pi t)g^2(t)\,dt$.

   b. Soit λ une valeur propre de u, montrer d'abord que λ appartient au segment $[-2,2]$.
   Vérifier ensuite que λ ne vaut ni 2 ni -2 (on pourra raisonner par l'absurde).

12. Soient λ une valeur propre de u et θ un nombre réel de $]0,\pi[$ tel que : $\lambda = 2\cos(\theta)$, on note ψ un vecteur propre associé. Il existe un p-uplet de nombre réels $(x_1,\ldots,x_p)$ tel que : $\psi = \sum_{k=1}^{p} x_k\psi_k$. On pose $x_0 = x_{p+1} = 0$.

   a. Vérifier que, pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, $x_{k+1} - 2\cos(\theta)x_k + x_{k-1} = 0$.

   b. En déduire l'existence d'un couple (A,B) de nombres réels tel que, pour tout k dans $[\![0,p+1]\!]$, $x_k = A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta)$.

   c. Justifier que A est nul et qu'il existe s dans $[\![1,p]\!]$ tel que : $\theta = \dfrac{s\pi}{p+1}$.

   d. En déduire les valeurs propres de u et une base de vecteurs propres de u.

Partie III : l'hypothèse (H_ω).

On revient au cas général : ω est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles strictement positives. On note (H_ω) l'hypothèse : il existe une suite bornée $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels strictement positifs, deux à deux distincts, telle que, pour tout entier n, $E_{a_n}(\omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

13. L'hypothèse (H_ω) est-elle vérifiée si ω est la fonction constante égale à 1 ? Justifier la réponse.

On se propre de démontrer, par l'absurde, que cette hypothèse n'est jamais réalisée.

Ainsi, on suppose qu'il existe ω une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles strictement positives telle que l'hypothèse (H_ω) est réalisée : on note a un nombre réel positif et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels deux à deux distincts, tels que, pour tout entier n : $E_{a_n}(\omega) \neq \{0\}$ et $0 < a_n \leqslant a$.

14. Justifier l'existence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ vérifiant : $\forall n \in \mathbf{N}$, $f_n \in E_{a_n}(\omega)$ et $\int_0^1 (f_n(t))^2\,\omega(t)\,dt = 1$. Une telle suite est ainsi fixée jusqu'à la fin du problème.

15. Soit φ dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$. Pour tout n entier naturel, on note :

$$c_n(\varphi) = \int_0^1 f_n(t)\varphi(t)\omega(t)\,dt \text{ et } S_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi)f_k.$$

   a. Que représente $S_n(\varphi)$?

   b. Vérifier que, pour tout n entier naturel : $\|S_n(\varphi)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n}(c_k(\varphi))^2$ et $\sum_{k=0}^{n}(c_k(\varphi))^2 \leqslant \|\varphi\|_2^2$.

   c. Que peut-on dire de la série $\sum_{n\geqslant 0}(c_n(\varphi))^2$?

d. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\varphi(t)\omega(t)\,dt = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n''(t)\varphi(t)\,dt = 0$.

16. **a.** Soit x un nombre réel fixé dans le segment $[0,1]$. On définit la fonction φ_x par :

$$\varphi_x(t) : t\in[0,1]\mapsto \begin{cases} t(x-1) & \text{si } t\in[0,x] \\ x(t-1) & \text{si } t\in]x,1] \end{cases}$$

Vérifier que φ_x est un élément de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.

b. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à f_n à l'ordre 1 entre 0 et x.

Vérifier que : $f_n(x) = xf_n'(0) + \int_0^x (x-t)f_n''(t)\,dt$, puis : $f_n'(0) = -\int_0^1 (1-t)f_n''(t)\,dt$.

c. En déduire : $f_n(x) = \int_0^1 \varphi_x(t)f_n''(t)\,dt$ et conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

d. Remarquer : $f_n(x) = -a_n\langle\varphi_x|f_n\rangle$, en déduire : $|f_n(x)| \leqslant a\|\varphi_x\|_2$.

e. Calculer $\int_0^1 (\varphi_x(t))^2\,dt$, en déduire : $|f_n(x)| \leqslant ax(1-x)\sqrt{\dfrac{\|\omega\|_\infty}{3}}$.

f. Justifier : $|f_n'(0)| \leqslant a\dfrac{\sqrt{\|\omega\|_\infty}}{\sqrt{3}}$.

g. Rappeler pourquoi on a : $f_n'(x) = f_n'(0) - a_n\int_0^x \omega(t)f_n(t)\,dt$ et en déduire alors : $|f_n'(x)| \leqslant a\sqrt{\dfrac{\|\omega\|_\infty}{3}}\left(1+\dfrac{a}{4}\|\omega\|_\infty\right)$.

17. On note $C = a\sqrt{\dfrac{\|\omega\|_\infty}{3}}\left(1+\dfrac{a}{4}\|\omega\|_\infty\right)$ (on remarque que C est un nombre réel strictement positif).

Déduire des questions précédentes : $\forall(x,y)\in[0,1]^2$, $\forall n\in\mathbf{N}$, $|f_n(x)-f_n(y)| \leqslant C|x-y|$.

18. Soit ε un nombre réel strictement positif, on choisit N un entier naturel non nul tel que : $\dfrac{1}{N} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2C}$ et on pose, pour k dans $[\![0,N]\!]$: $\alpha_k = \dfrac{k}{N}$.

a. Justifier qu'il existe un entier naturel p tel que : $\forall n\geqslant p$, $\forall k\in[\![0,N]\!]$, $|f_n(\alpha_k)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

b. Soit alors x un nombre réel fixé dans le segment $[0,1]$. En introduisant un entier k de $[\![0,N-1]\!]$ tel que $x\in[\alpha_k,\alpha_{k+1}]$, montrer que : $\forall n\geqslant p$, $|f_n(x)| < \varepsilon$.

c. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n\|_\infty = 0$.

d. Montrer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 (f_n(t))^2\,\omega(t)\,dt = 0$ et conclure.

ESSEC 2015 : Corrigé

Introduction

1.a. Il est clair que $F(q) \subset \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$, et la fonction nulle appartient à $F(q)$.
Soient $f, g \in F(q)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.
Alors $\lambda f + g$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1]$,

$$(\lambda + g)''(t) = \lambda f''(t) + g''(t) = \lambda q(t)f(t) + q(t)g(t) = q(t)(\lambda f(t) + g(t)).$$

Et donc $\lambda f + g \in F(q)$.
Ainsi, $\boxed{F(q) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R}).}$

1.b. Pour $t \in [0,1]$, on a $[\Phi(f)](t) = t\int_0^t q(u)f(u)\,du - \int_0^t uq(u)f(u)\,du$.
Mais les fonctions $u \mapsto q(u)f(u)$ et $u \mapsto uq(u)f(u)$ étant continues sur $[0,1]$, les deux fonctions $t \mapsto \int_0^t q(u)f(u)\,du$ et $t \mapsto \int_0^t uq(u)f(u)\,du$ sont $\mathscr{C}^1$, et donc continues sur $[0,1]$.
Et donc $\Phi(f)$ est continue car somme et produit de fonctions continues sur $[0,1]$.
D'autre part, pour $f, g \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
[\Phi(\lambda f + g)](t) &= \int_0^t (t-u)q(u)(\lambda f(u) + g(u))\,du \\
&= \lambda \int_0^t (t-u)q(u)f(u)\,du + \int_0^t (t-u)q(u)g(u)\,du \\
&= \lambda[\Phi(f)](t) + [\Phi(g)](t).
\end{aligned}$$

Et donc[1] $\Phi(\lambda f + g) = \lambda\Phi(f) + \Phi(g)$: Φ est linéaire et donc est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.

Remarque
C'est le théorème fondamental de l'analyse.

Notations
Attention au fait que $\Phi(f)$ est une fonction définie sur $[0,1]$.
Et donc $[\Phi(f)](t)$ est la valeur de la fonction $\Phi(f)$ en t.

[1] Deux fonctions définies sur $[0,1]$ sont égales si et seulement si elles prennent les mêmes valeurs en tout $t \in [0,1]$.

1.c. Nous avons déjà prouvé que $\Phi(f)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Sa dérivée vaut alors

$$\begin{aligned}
[\Phi(f)]'(t) &= \left(t\int_0^t q(u)f(u)\,du\right)' - \left(\int_0^t uq(u)f(u)\,du\right)' \\
&= 1 \times \int_0^t q(u)f(u)\,du + t \times q(t)f(t) - tq(t)f(t) = \boxed{\int_0^t q(u)f(u)\,du.}
\end{aligned}$$

Cette dérivée est alors elle-même $\mathscr{C}^1$ comme mentionné précédemment, et donc $\Phi(f)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.
Et alors, en dérivant de nouveau, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\boxed{[\Phi(f)]''(t) = q(t)f(t).}$$

$\mathscr{C}^1/\mathscr{C}^2$
Une fonction dérivable est $\mathscr{C}^2$ si et seulement si sa dérivée est $\mathscr{C}^1$.

1.d. Supposons que $f \in F(q)$ vérifie $f(0) = f'(0) = 0$.
Alors, par la formule de Taylor avec reste intégral, qui s'applique car f est $\mathscr{C}^2$, il vient $\forall t \in [0,1]$,

$$f(t) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{f'(0)}_{=0}t + \int_0^t (t-u)f''(u)\,du = \int_0^t (t-u)q(u)f(u)\,du = [\Phi(f)](t).$$

Et donc $f = \Phi(f)$.

Inversement, supposons que $\Phi(f) = f$.
Puisque $[\Phi(f)](0) = [\Phi(f)]'(0) = 0$, nécessairement $f(0) = f'(0) = 0$.
Et alors pour tout $t \in [0,1]$, $f''(t) = [\Phi(f)]''(t) = q(t)f(t)$, de sorte que $f \in F(q)$.

Ainsi, on a bien (f appartient à $F(q)$ et vérifie : $f(0) = f'(0) = 0$) si et seulement si ($\Phi(f) = f$).

Détails
On a bien

$$[\Phi(f)](0) = [\Phi(f)]'(0) = 0$$

car il s'agit d'intégrales entre 0 et 0.

2.a. Montrons le résultat par récurrence sur n.
Pour $n = 0$, c'est immédiat par définition de $\|f\|_\infty$.
Supposons donc que pour tout $t \in [0,1]$, $|f_n(t)| \leqslant \|q\|_\infty^n \|f_0\|_\infty \dfrac{t^n}{n!}$.
Alors pour $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
|f_{n+1}(t)| &= \left|\int_0^t (t-u)q(u)f_n(u)\,du\right| \\
&\leqslant \int_0^t (t-u)|q(u)||f_n(u)|\,du \\
&\leqslant \int_0^t \|q\|_\infty \|q\|_\infty^n \|f_0\|_\infty \frac{u^n}{n!}\,du \\
&\leqslant \|q\|_\infty^{n+1}\|f_0\|_\infty \int_0^t \frac{u^n}{n!}\,du \\
&\leqslant \|q\|_\infty^{n+1}\|f_0\| \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Inégalité triangulaire.

Puisque $t \in [0,1]$, pour tout $u \in [0,t]$, $t-u \leqslant 1$.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $t \in [0,1]$, $\boxed{|f_n(t)| \leqslant \|q\|_\infty^n \|f_0\|_\infty \dfrac{t^n}{n!}.}$

2.b. Par croissances comparées, nous savons que pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{(\|q\|_\infty t)^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0.}$

Remarque
En cas de doutes sur les croissances comparées, notons qu'on a affaire au terme général d'une série exponentielle, qui est donc convergente.
Et donc ce terme général tend vers 0.

2.c. D'après 1.d, on a $\Phi(f) = f$. Et donc $f_1 = \Phi(f) = f$, puis $f_2 = \Phi(f_1) = f$, etc. Une récurrence immédiate prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n = f$.
Mais alors pour tout $t \in [0,1]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$.

Et donc $\boxed{f \text{ est la fonction nulle.}}$

2.d. Montrons que Δ est linéaire : soient $f, g \in F(q)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\Delta(\lambda f+g) = ((\lambda f+g)(0), (\lambda f+g)'(0)) = (\lambda f(0)+g(0), \lambda f'(0)+g'(0)) = \lambda(f(0), f'(0)) + (g(0), g'(0)) = \lambda\Delta(f)+\Delta(g).$$

Ainsi, $\boxed{\Delta \text{ est linéaire.}}$

Soit $f \in \operatorname{Ker}\Delta$. Alors, $f(0) = f'(0) = 0$, et donc par la question précédente, $f = 0$.
Donc $\operatorname{Ker}\Delta = \{0\}$ et donc $\boxed{\Delta \text{ est injective.}}$

Par le théorème du rang, on a

$$\dim F(q) = \dim \operatorname{Ker}\Delta + \dim \operatorname{Im}\Delta = \dim \operatorname{Im}\Delta.$$

Mais $\operatorname{Im}\Delta \subset \mathbf{R}^2$, de sorte que $\dim \operatorname{Im}\Delta \leqslant \dim \mathbf{R}^2 = 2$.
On en déduit donc que $\boxed{F(q) \text{ est de dimension inférieure ou égale à 2.}}$

Partie I : l'espace $E_a(\omega)$.

3.a. Il est évident que $E_a(\omega) \subset \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ et que la fonction nulle est dans $E_a(\omega)$.
Soient $f, g \in E_a(\omega)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $\lambda f + g$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ avec

$$(\lambda f+g))''(t) = \lambda f''(t) + g''(t) = -\lambda a\omega(t)f(t) - a\omega(t)g(t) = -a\omega(t)(\lambda f+g)(t).$$

De plus, $(\lambda f+g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0$ et de même

$$(\lambda f+g)(1) = \lambda f(1) + g(1) = 0.$$

Ainsi, $\lambda f + g \in E_a(\omega)$, et donc $\boxed{E_a(\omega) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R}).}$

3.b. Soit $f \in E_0(\omega)$. Alors pour tout $t \in [0,1]$, $f''(t) = 0$.
Ainsi, f' est constante c, donc il existe une constante b telle que $f(t) = ct+b$. En particulier, f est un polynôme de degré au plus 1.
Mais $f(0) = f(1)$, donc f possède strictement plus de racines que son degré : $f = 0$.
On en déduit donc que $\boxed{E_0(\omega) = \{0\}.}$

Plus généralement
Une fonction dont la dérivée $n^{\text{ème}}$ est identiquement nulle est un polynôme de degré au plus n.

4.a. Notons $f_1 : t \mapsto \exp\left(\sqrt{-a}t\right)$ et $f_2 : t \mapsto \exp\left(-\sqrt{-a}t\right)$.
Alors f_1 et f_2 sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, et leurs dérivées sont données par

$$f_1'(t) = \sqrt{-a}f_1(t),\ f_1''(t) = -af_1(t),\ f_2'(t) = -\sqrt{-a}f_2(t),\ f_2''(t) = -af_2(t).$$

Donc déjà $f_1'' = -af_1$ et $f_2'' = -af_2$: f_1 et f_2 sont dans $F(-a)$.
Montrons que f_1, f_2 est une famille libre de $F(-a)$: soient λ, μ des réels tels que $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$.
Alors pour $t = 0$, il vient $\lambda + \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = -\lambda$.
Et pour $t = 1$, il vient $\lambda e^{\sqrt{-a}} - \lambda e^{-\sqrt{-a}} = 0 \Leftrightarrow \lambda\left(e^{\sqrt{-a}} - e^{-\sqrt{-a}}\right) = 0$.
Mais $a < 0$, de sorte que $\sqrt{-a} \neq -\sqrt{-a}$ et donc, par injectivité de la fonction exponentielle, $e^{\sqrt{-a}} - e^{-\sqrt{-a}} \neq 0$.
On en déduit que $\lambda = 0$, et donc $\mu = 0$.
Ainsi, la famille (f_1, f_2) est une famille libre de $F(-a)$, qui est de dimension au plus[2] 2 : c'est donc une base de $F(-a)$.

[2] C'est le résultat de la question 2.d.

Soit $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in F(-a)$. Alors $F \in E_a(1)$ si et seulement si $f(0) = f(1) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 e^{\sqrt{-a}} + \lambda_2 e^{-\sqrt{-a}} = 0 \end{cases}$
Nous reconnaissons alors le même système que précédemment : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
$\boxed{\text{Et donc } E_a(1) = \{0\}.}$

Remarque
Notons que l'énoncé de la question 6 laisse deviner que $E_a(1) = \{0\}$.

4.b. Notons $g_1 : t \mapsto \cos(\sqrt{a}t)$ et $g_2 : t \mapsto \sin(\sqrt{a}t)$.
Alors g_1 et g_2 sont de classe $\mathscr{C}^2$ et pour tout $t \in [0,1]$,

$$g_1'(t) = -\sqrt{a}\sin(\sqrt{a}t),\ g_1''(t) = -a\cos(\sqrt{a}t),\ g_2'(t) = \sqrt{a}\cos(\sqrt{a}t),\ g_2''(t) = -a\sin(\sqrt{a}t).$$

Donc déjà $g_1, g_2 \in F(-a)$.
De plus, (g_1, g_2) forme une famille libre car si $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 = 0$, en évaluant en $t = 0$, on a immédiatement $\lambda_1 = 0$.
Il reste donc $\lambda_2 \sin(\sqrt{a}t)$ puis en évaluant en $t \in [0,1]$ tel que $\sqrt{a}t \notin \pi\mathbf{Z}$, il vient $\lambda_2 \underbrace{\sin(\sqrt{a}t)}_{\neq 0} = 0$ et donc $\lambda_2 = 0$.
Donc (g_1, g_2) est une famille libre de $F(-a)$, qui est de dimension inférieure ou égale à 2 : c'est une base de $F(-a)$.

Une fonction $f = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \in F(-a)$ est dans $E_a(1)$ si et seulement si

$$f(0) = f(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1\cos(\sqrt{a}) + \lambda_2\sin(\sqrt{a}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2\sin(\sqrt{a}) = 0 \end{cases}$$

• Si $\dfrac{\sqrt{a}}{\pi} \in \mathbf{Z}$, alors $\sin(\sqrt{a}) = 0$, et donc la seconde équation est vérifiée quel que soit λ_2.
Dans ce cas, on a $\boxed{E_a(1) = \{\lambda_2 g_2,\ \lambda_2 \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}(g_2).}$

• Si $\dfrac{\sqrt{a}}{\pi} \notin \mathbf{Z}$, alors $\sin(\sqrt{a}) \neq 0$ et donc l'unique solution au système précédent est $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Et donc $\boxed{E_a(1) = \{0\}.}$

5. **<u>Première méthode</u> : en utilisant Δ.**
Utilisons l'indication fournie dans l'énoncé, et utilisons l'application linéaire Δ définie à la question 2.d.
Plus précisément, regardons la restriction de Δ à $E_a(1)$, c'est-à-dire l'application $\Delta_{|E_a(1)} : E_a(1) \to \mathbf{R}^2$ qui à f associe $(f(0), f'(0))$.
Alors $\Delta_{|E_a(1)}$ est toujours linéaire et injective, et son image est incluse dans

$$F = \{(0,x),\ x \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}(0,1).$$

Détails
Si $f \in E_a(1)$, alors $f(0) = 0$.

Or $\dim F = 1$, et donc par le théorème du rang,

$$\dim E_a(1) = \underbrace{\dim \mathrm{Ker}\,\Delta_{|E_a(1)}}_{=0} + \dim \mathrm{Im}\,\Delta_{|E_a(1)} \leqslant \dim F = 1.$$

Seconde méthode : en imitant Δ.
Définissons une application $\Delta_1 : E_a(1) \to \mathbf{R}$ par $\Delta_1(f) = f'(0)$.
Alors il est aisé de voir que f est linéaire.
Soit $f \in \operatorname{Ker}(\Delta_1)$. Alors $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, de sorte que le résultat de la question 2.c s'applique : $f = 0$.
Ainsi, $\operatorname{Ker}(\Delta_1) = \{0\}$: Δ_1 est injective.
Et donc par le théorème du rang,

$$\dim E_a(1) = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} \Delta_1}_{=0} + \dim \operatorname{Im} \Delta_1 \leqslant 1.$$

6. Supposons que $E_a(1)$ ne soit pas réduit à $\{0\}$ et soit f un élément non nul[3] de $E_a(1)$. Alors f' est non nulle sur $[0,1]$ car sinon f serait constante sur $[0,1]$, égale à $f(0) = 0$. Et donc f'^2 est une fonction continue sur $[0,1]$, positive et non identiquement nulle[4], de sorte que $\displaystyle\int_0^1 (f'(t))^2\,dt > 0$.
Mais une intégration par parties nous donne

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f'(t))^2\,dt &= \int_0^1 f'(t)f'(t)\,dt = [f(t)f'(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)f''(t)\,dt\\ &= \underbrace{f(1)}_{=0} f'(1) - \underbrace{f(0)}_{=0} f'(0) + \int_0^1 a\omega(t)f(t)^2\,dt\\ &= a\int_0^1 \omega(t)f^2(t)\,dt.\end{aligned}$$

Or la fonction $t \mapsto \omega(t)f^2(t)$ est continue sur $[0,1]$, positive et non identiquement nulle[5], et donc $\displaystyle\int_0^1 \omega(t)f^2(t)\,dt > 0$.
On en déduit donc que $a = \dfrac{\int_0^1 (f'(t))^2\,dt}{\int_0^1 \omega(t)f^2(t)\,dt} > 0$.

7. Soient f et g deux éléments de $\mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$. Alors

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\omega(t)\,dt = \int_0^1 g(t)f(t)\omega(t)\,dt = \langle g|f\rangle.$$

Ainsi, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est symétrique.
Soient $f, g, h \in \mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\langle \lambda f + g|h\rangle &= \int_0^1 (\lambda f(t) + g(t))\,h(t)\omega(t)\,dt\\ &= \lambda\int_0^1 f(t)h(t)\omega(t)\,dt + \int_0^1 g(t)h(t)\omega(t)\,dt\\ &= \lambda\langle f|h\rangle + \langle g|h\rangle.\end{aligned}$$

Donc $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est linéaire à gauche, et étant symétrique, est bilinéaire.
Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$. Alors $\langle f|f\rangle = \int_0^1 (f(t))^2\omega(t)\,dt$.
Mais ω étant à valeurs positives, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t)^2\omega(t) \geqslant 0$ et donc par positivité de l'intégrale, $\langle f|f\rangle \geqslant 0$.
De plus, $t \mapsto f(t)^2\omega(t)$ est continue et positive, donc $\langle f|f\rangle = 0$ si et seulement si pour tout $t \in [0,1]$, $f(t)^2\omega(t) = 0$.
Puisque ω ne s'annule pas sur $[0,1]$, ceci est équivalent à :

$$\forall t \in [0,1],\ f(t)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0,1],\ f(t) = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Et donc $\boxed{\langle\cdot|\cdot\rangle \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathscr{C}([0,1],\mathbf{R}).}$

8. Soient donc $a \neq b$, soit $f \in E_a(\omega)$ et $g \in E_b(\omega)$. D'après la question précédente, si $a \leqslant 0$ ou $b \leqslant 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$ et donc $\langle f|g\rangle = 0$.
Supposons donc $a > 0$ et $b > 0$. On a alors

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\omega(t)\,dt$$

[3] Il en existe au moins un puisque $E_a(1) \neq \{0\}$.

[4] ω ne s'annule jamais sur $[0,1]$ et f n'est pas la fonction nulle.

[5] Car ω ne s'annule pas sur $[0,1]$ par hypothèse et f est non nulle.

Méthode
Rappelons qu'a priori, pour prouver la bilinéarité de $\langle\cdot|\cdot\rangle$, il faudrait prouver la linéarité à gauche **et** la linéarité à droite.
Mais si on commence par prouver la symétrie, il suffit alors de prouver soit la linéarité à gauche, soit la linéarité à droite.

$$= \int_0^1 \frac{-f''(t)}{a} g(t)\,dt$$
$$= -\frac{1}{a}\left[f'(t)g(t)\right]_0^1 + \frac{1}{a}\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt.$$

$f'' = -a\omega f$.

Intégration par parties
On a procédé à une intégration par parties en dérivant g et en intégrant f''.

D'autre part, le même calcul en utilisant cette fois $g'' = -b\omega g$ conduirait à $\langle f|g\rangle = \frac{1}{b}\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$.
Et donc $a\langle f|g\rangle = b\langle f|g\rangle$. Puisque a et b sont distincts, $\langle f|g\rangle = 0$.
On en déduit donc que $\boxed{E_a(\omega) \text{ et } E_b(\omega) \text{ sont orthogonaux.}}$

Rappel
Deux sous-espaces F et G sont orthogonaux si pour tout $f \in F$ et tout $g \in G$,
$$\langle f|g\rangle = 0.$$

Partie II : l'exemple $\omega = 1$.

9.a. La fonction ψ_k est évidemment de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, avec $\psi_k(0) = \psi_k(1) = 0$ et

$$\psi_k'(t) = \sqrt{2}k\pi\cos(k\pi t),\ \psi_k''(t) = -k^2\pi^2\sqrt{2}\sin(k\pi t) = -k^2\pi^2\psi_k(t).$$

Donc $\boxed{\psi_k \in E_{k^2\pi^2}(1).}$

9.b. Si $k \neq \ell$, alors $\psi_k \in E_{k^2\pi^2}(1)$ et $\psi_\ell \in E_{\ell^2\pi^2}(1)$, avec $k^2\pi^2 \neq \ell^2\pi^2$.
Donc d'après la question 8,

$$\langle \psi_k, \psi_\ell\rangle = \int_0^1 \psi_k(t)\psi_\ell(t)\,dt = 0.$$

Si $k = \ell$, alors

$$\int_0^1 \psi_k(t)\psi_k(t)\,dt = 2\int_0^1 \sin^2(k\pi t)\,dt$$
$$= 2\int_0^1 \frac{1-\cos(2k\pi t)}{2}\,dt$$
$$= 1 - \left[-\frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi}\right]_0^1$$
$$= 1 - \sin(0) + \sin(2k\pi)$$
$$= 1.$$

Linéarisation
On a pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$
et donc
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$
Notons que ce résultat peut également s'obtenir à l'aide des formules d'Euler :
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

Et donc $\boxed{\text{pour tout } (k,\ell) \in (\mathbf{N}^*)^2,\ \langle \psi_k|\psi_\ell\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ 1 & \text{si } k = \ell \end{cases}}$

9.c. Par définition de G, $(\psi_1, \dots, \psi_p)$ en est une famille génératrice.
D'autre part, le résultat de la question 9.b prouve qu'il s'agit d'une famille orthonormée, et donc nécessairement libre.
Et donc $\boxed{(\psi_1, \dots, \psi_p) \text{ est une base orthonormée de } G.}$

10.a. Soit $g \in G$. Alors il existe des réels $a_1, \dots, a_p$ tels que[6] $g = \sum_{k=1}^p a_k\psi_k$. Et alors, pour $t \in [0,1]$,

[6] De manière unique.

$$u(g)(t) = 2\cos(\pi t)\sum_{k=1}^p a_k\psi_k(t) - \left\langle \sum_{k=1}^p a_k g_k \middle| \psi_p\right\rangle \psi_{p+1}(t)$$
$$= 2\sum_{k=1}^p a_k\sqrt{2}\cos(\pi t)\sin(k\pi t) - \sum_{k=1}^p a_k\langle\psi_k|\psi_p\rangle\psi_{p+1}(t)$$
$$= \sqrt{2}\sum_{k=1}^p 2\cos(\pi t)\sin(k\pi t) - a_p\psi_{p+1}(t)$$
$$= \sqrt{2}\sum_{k=1}^p a_k\left(\sin((k+1)\pi t) + \sin((k-1)\pi t)\right) - a_p\psi_{p+1}(t)$$

Linéarité à gauche de $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

$\langle\psi_k|\psi_p\rangle = 0$ si $k \neq p$.

$2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

$$= a_2\psi_1(t) + \sum_{k=2}^{p-1}(a_{k-1}+a_{k+1})\sqrt{2}\sin(k\pi t) + a_{p-1}\sqrt{2}\sin(p\pi t) + a_p\underbrace{\sqrt{2}\sin((p+1)\pi t)}_{=\psi_{p+1}(t)} - a_p\psi_{p+1}(t)$$

$$= a_2\psi_1(t) + \sum_{k=2}^{p-1}(a_k + a_{k-1})\psi_k(t) + a_{p-1}\psi_p(t).$$

Et donc on a $u(g) = a_1\psi_2 + \sum_{k=2}^{p-1}(a_k + a_{k-1})\psi_k + a_p p - 1\psi_p \in \mathrm{Vect}(\psi_1,\dots,\psi_p) = G$.
Ainsi u est bien à valeurs dans G.
D'autre part, u est linéaire car si $g_1, g_2 \in G$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} u(\lambda g_1 + g_2)(t) &= 2\cos(\pi t)(\lambda g_1(t) + g_2(t)) - \langle \lambda g_1 + g_2 | \psi_p\rangle \psi_{p+1}(t) \\ &= 2\lambda\cos(\pi t) g_1(t) + 2\cos(\pi t) g_2(t) - \lambda\langle g_1|\psi_p\rangle\psi_{p+1}(t) - \langle g_2|\psi_p\rangle\psi_{p+1}(t) \\ &= \lambda\left(2\cos(\pi t)g_1(t) - \langle g_1|\psi_p\rangle\psi_{p+1}(t)\right) + \left(2\cos(\pi t)g_2(t) - \langle g_2|\psi_p\rangle\psi_{p+1}(t)\right) \\ &= \lambda u(g_1)(t) + u(g_2)(t). \end{aligned}$$

Et donc $u(\lambda g_1 + g_2) = \lambda u(g_1) + u(g_2)$: $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } G.}$

10.b. Le calcul précédent prouve que $u(\psi_1) = \psi_2$, $u(\psi_p) = \psi_{p-1}$ et pour tout $i \in [\![2, p-1]\!]$, $u(\psi_i) = \psi_{i-1} + \psi_{i+1}$.
Donc la matrice de u dans la base C est

$$\mathrm{Mat}_C(u) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} u(\psi_1) & u(\psi_2) & u(\psi_3) & \dots & u(\psi_{p-1}) & u(\psi_p) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{p-1} \\ \psi_p \end{matrix} \end{array}$$

En particulier, $\mathrm{Mat}_C(u)$ est symétrique, à coefficients réels, donc diagonalisable. Et par conséquent, $\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$

> **Mieux**
> Puisque C est une base orthonormée de G, et que $\mathrm{Mat}_C(u)$ est symétrique, u est un endomorphisme symétrique de G. Il est donc diagonalisable et il existe une base orthonormée de G formée de vecteurs propres de u.

11.a. Soit $g \in G$. Alors

$$\begin{aligned} \langle g|u(g)\rangle &= \int_0^1 g(t)\left(2\cos(\pi t)g(t) - \left(\int_0^1 g(x)\psi_p(x)\,dx\right)\psi_{p+1}(t)\right)dt \\ &= \int_0^1 2\cos(\pi t)g(t)^2\,dt - \left(\int_0^1 g(t)\psi_{p+1}(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 g(x)\psi_p(x)\,dx\right). \end{aligned}$$

Or, g s'écrit de manière unique $\sum_{i=1}^{p} a_i\psi_i$, de sorte que

$$\int_0^1 g(t)\psi_{p+1}(t)\,dt = \langle g|\psi_{p+1}\rangle = \sum_{i=1}^{p} a_i\langle\psi_i|\psi_{p+1}\rangle = 0.$$

> **Détails**
> Les ψ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$ sont orthogonaux à ψ_{p+1}.

Et donc

$$\boxed{\langle g|u(g)\rangle = 2\int_0^1 \cos(\pi t)g(t)^2\,dt.}$$

11.b. Soit λ une valeur propre de u, et soit g un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Alors

$$\langle g|u(g)\rangle = \langle g|\lambda g\rangle = \lambda\|g\|^2 = \lambda\int_0^1 g(t)^2\,dt.$$

Mais pour tout $t \in [0,1]$, $|\cos(\pi t)g(t)^2| \leqslant g(t)^2$, de sorte que, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^1 \cos(\pi t)g(t)^2\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |\cos(\pi t)g(t)^2|\,dt \leqslant \int_0^1 g(t)^2\,dt.$$

Autrement dit,
$$|\langle g|u(g)\rangle| \leqslant 2\|g\|^2.$$
Ainsi, $|\lambda|\cdot\|g\|^2 \leqslant 2\|g\|^2$, et puisque $g\neq 0$, $\|g\|^2>0$, de sorte que $|\lambda|\leqslant 2$.
Nous venons donc de prouver que toutes les valeurs propres de u sont dans $[-2,2]$.

Supposons que 2 soit valeur propre de u, et soit g un vecteur propre de u associé à la valeur propre 2.
Alors $\langle g|u(g)\rangle = 2\|g\|^2$, et donc
$$\int_0^1 \cos(\pi t)g(t)^2\,dt = \int_0^1 g(t)^2\,dt \Leftrightarrow \int_0^1 (1-\cos(\pi t))g(t)^2\,dt = 0$$
Mais la fonction $t\mapsto (1-\cos(\pi t))g(t)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, si son intégrale est nulle, c'est donc qu'elle est nulle : pour tout $t\in[0,1]$, $(1-\cos(\pi t))g(t)^2=0$.
Puisque $1-\cos(\pi t)\neq 0$ si $t\in]0,1]$, on a donc $g(t)=0$ pour tout $t\in]0,1]$. Et puisque g est continue en 0, $g(0)=0$.
Ceci prouve donc que $g=0$, contredisant le fait que g est un vecteur propre[7] de u.
Donc $\boxed{\text{2 n'est pas valeur propre de } u.}$

[7] Et donc non nul par définition.

On prouve de la même manière que -2 n'est pas valeur propre, faisant apparaître cette fois $\displaystyle\int_0^1 (1+\cos(\pi t))g(t)^2\,dt$. On remarque alors cette fois que $t\mapsto 1+\cos(\pi t)$ est positive sur $[0,1]$, et non nulle si $t\neq 1$.

12.a. Nous avons prouvé précédemment que
$$u(\psi) = x_2\psi_1 + \sum_{k=2}^{p-1}(x_{k-1}+x_{k+1})\psi_k + x_{p-1}\psi_p.$$
Mais d'autre part, $u(\psi)=\lambda\psi = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} 2\cos(\theta)x_k\psi_k$.
Par unicité de la décomposition de $u(\psi)$ dans la base $(\psi_1,\dots,\psi_p)$, en identifiant la composante suivant ψ_1, il vient
$$x_2 = 2\cos(\theta)x_1 \Leftrightarrow x_2 - 2\cos(\theta)x_1 + \underbrace{x_0}_{=0}.$$
De même, pour $k\in[\![2,p-1]\!]$, en identifiant, la composante suivant ψ_k, on a
$$2\cos(\theta)x_k = x_{k-1}+x_{k+1} \Leftrightarrow x_{k+1}-2\cos(\theta)x_k + x_{k-1} = 0.$$
Et enfin, en identifiant la composante suivant ψ_p, on a
$$2\cos(\theta)x_p = x_{p-1} \Leftrightarrow \underbrace{x_{p+1}}_{=0} -2\cos(\theta)x_p + x_{p-1} = 0.$$
Et donc, $\boxed{\forall k\in[\![1,p]\!],\ x_{k+1}-2\cos(\theta)x_k + x_{k-1}=0.}$

12.b. Notons $(x'_k)_{k\geqslant 0}$ la suite définie par $x'_0=x_0=0$, $x'_1=x_1$ et pour tout $k\in\mathbf{N}^*$,
$$x'_{k+2} = 2\cos(\theta)x'_k - x'_{k-1}.$$
Alors $(x'_k)_k$ est une suite récurrence linéaire d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique vaut $X^2-2\cos(\theta)X+1$.
Son discriminant est $\Delta = 4\cos^2(\theta)-4 = 4(\cos^2(\theta)-1)<0$.
Les deux racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique sont alors
$$r_1 = \frac{2\cos(\theta)+i\sqrt{4(1-\cos^2(\theta))}}{2} = \cos(\theta)+i\sin(\theta) = e^{i\theta} \text{ et } r_2 = \overline{r_1} = e^{-i\theta}.$$

Sinus
Puisque $\theta\in]0,\pi[$, on a $\sin(\theta)\geqslant 0$. Et donc
$$\sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \sqrt{\sin^2\theta} = \sin(\theta).$$

Et donc il existe deux réels A et B tels que pour tout $k\in\mathbf{N}$,
$$x'_k = A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta).$$
D'autre part, pour tout $k\in[\![0,p+1]\!]$, on a[8] $x_k=x'_k$, on a donc
$$\boxed{\forall k\in[\![0,p+1]\!],\ x_k = A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta).}$$

[8] Une récurrence (double) pourrait le prouver, mais c'est en fait relativement évident : x_k et x'_k vérifient la même relation de récurrence (pour $k\leqslant p$) et on les deux mêmes premiers termes.

12.c. On a $x_0 = A$ et donc $A = 0$.
Par conséquent, $0 = x_{p+1} = B\sin((p+1)\theta)$.
Mais B est non nul car sinon $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$, contredisant le fait que $\psi \neq 0$.
Ainsi, $\sin((p+1)\theta) = 0$, et donc il existe $s \in \mathbf{N}$ tel que $(p+1)\theta = s\pi \Leftrightarrow \theta = \dfrac{s\pi}{p+1}$.
Et puisque $\theta \in]0,\pi[$, nécessairement, $s \in [\![1,p]\!]$.

Rappel
La fonction sinus ne s'annule qu'en les $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
Un dessin permet de retrouver ce résultat rapidement.

12.d. Nous venons de prouver que les seules valeurs propres possibles de u sont les $2\cos\left(\dfrac{s\pi}{p+1}\right)$, avec $s \in [\![1,p]\!]$.
Montrons que ce sont bien des valeurs propres de u.
Soit donc $s \in [\![1,p]\!]$ fixé. Alors, pour $\psi = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i\psi_i$, on a $u(\psi) = 2\cos\left(\dfrac{s\pi}{p+1}\right)\psi$ si et seulement si[9]

$$\forall k \in [\![1,p]\!]\ x_{k+1} - 2\cos\left(\frac{s\pi}{p+1}\right)x_k + x_{k-1} = 0.$$

Mais d'après les calculs de la question 2.b, c'est le cas si et seulement si il existe une constante $B \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ x_k = B\sin\left(k\frac{s\pi}{p+1}\right).$$

Mais notons qu'alors, pour $k = 1$, on obtient $B = \dfrac{x_1}{\sin\left(\frac{s\pi}{p+1}\right)}$. Et donc

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ x_k = x_1\frac{\sin\left(k\frac{s\pi}{p+1}\right)}{\sin\left(\frac{s\pi}{p+1}\right)}.$$

[9] En posant encore $x_0 = x_{p+1} = 0$.

Ceci prouve donc que $\lambda_s = 2\cos\left(\dfrac{s\pi}{p+1}\right)$ est valeur propre de u et que

$$E_{\lambda_s}(u) = \mathrm{Vect}\left(\sum_{k=1}^{p}\sin\left(k\frac{s\pi}{p+1}\right)\psi_p\right).$$

Remarque
On retrouve en particulier le fait que tous les sous-espaces propres de u sont de dimension 1, ce qui est logique puisque u possède p valeurs propres distinctes.

En notant $f_s = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\sin\left(k\frac{s\pi}{p+1}\right)\psi_p$, $\boxed{\text{une base de } G \text{ formée de vecteurs propres de } u \text{ est alors } (f_1, f_2, \dots, f_p).}$

Partie III : l'hypothèse (H_ω).

13. Si ω est la fonction constante égale à 1, il a été prouvé à la question 4.b que pour a strictement positif, $E_a(\omega)$ est non réduit à $\{0\}$ si et seulement si $\dfrac{\sqrt{a}}{\pi} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow a = \pi^2k^2, k \in \mathbf{N}$.
Or, si $M > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de réels de la forme π^2k^2 inférieurs à M.
Et en particulier, il n'existe pas de suite (a_n) formée de réels positifs de la forme $k^2\pi^2$, deux à deux distincts, et bornée par M.
Et par conséquent, l'hypothèse (H_ω) n'est pas vérifiée lorsque ω est la fonction constante égale à 1.

14. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E_{a_n}(\omega) \neq \{0\}$.
Soit donc g_n un élément non nul de $E_{a_n}(\omega)$, et soit $f_n = \dfrac{g_n}{\|g_n\|_2}$.
Alors nous savons que $\|f_n\|_2 = 1$ et donc $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)^2\omega(t)\,dt = 1$.
Et donc il existe bien une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n \in E_{a_n}(\omega)$ et $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)2\omega(t)\,dt = 1$.

15.a. Puisque les a_n sont deux à deux distincts et que pour tout k, $f_k \in E_{a_k}(\omega)$, d'après la question 8, $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est une famille orthogonale.
Comme de plus, nous avons supposé que $\|f_k\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 f_k(t)^2\omega(t)\,dt} = 1$, c'est donc une

famille orthonormée de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.
Et donc c'est une base orthonormée de $F_n = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_n)$.
D'autre part, $c_k(\varphi) = \displaystyle\int_0^1 f_k(t)\omega(t)\,dt = \langle \varphi | f_k\rangle$ et donc

$$S_n(\varphi) = \sum_{k=0}^n \langle \varphi, f_k\rangle f_k.$$

Nous reconnaissons là l'expression du $\boxed{\text{projeté orthogonal de } \varphi \text{ sur } F_n.}$

15.b. Puisque $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est orthonormée, on a

$$\|S_n(\varphi)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n \langle \varphi | f_k\rangle^2 = \sum_{k=0}^n c_k(\varphi)^2.$$

D'autre part, nous savons que $\varphi - S_n(\varphi) \in F_n^\perp$ et en particulier, $S_n(\varphi)$ et $\varphi - S_n(\varphi)$ sont orthogonaux.
Par le théorème de Pythagore, on a donc

$$\|\varphi\|_2^2 = \|\varphi + (\varphi - S_n(\varphi))\|_2^2 = \|S_n(\varphi)\|_2^2 + \|\varphi - S_n(\varphi)\|_2^2 \geqslant \|S_n(\varphi)\|_2^2.$$

Et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^n c_k(\varphi)^2 = \|S_n(\varphi)\|_2^2 \leqslant \|\varphi\|_2^2.}$$

15.c. La série de terme général $c_n(\varphi)^2$ est à termes positifs, et ses sommes partielles sont majorées par $\|\varphi\|_2^2$, qui est bien indépendant de n.
Par conséquent, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} c_n(\varphi)^2 \text{ converge.}}$

15.d. Puisque la série de terme général $c_n(\varphi)^2$ converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n(\varphi)^2 = 0$.
Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n(\varphi) = 0$.
Autrement dit,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\varphi(t)\omega(t)\,dt = 0.}$$

D'autre part, nous savons[10] que pour tout $t \in [0,1]$, $f_n''(t) = -a_n f_n(t)\omega(t)$.
Et donc

$$\int_0^1 f_n(t)''\varphi(t)\,dt = -a_n \int_0^1 f_n(t)\omega(t)\varphi(t)\,dt.$$

Mais par hypothèse, la suite (a_n) est bornée, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n''(t)\varphi(t)\,dt = 0.$$

16.a. Il est évident que φ_x est continue sur $[0,x]$ et sur $]x,1]$, car fonction polynomiale.
De plus, on a $\lim\limits_{t\to x^+} \varphi_x(t) = \lim\limits_{t\to x^+} x(t-1) = x(x-1) = \varphi_x(x)$.
Donc φ_x est continue en x, et donc $\boxed{\text{est continue sur } [0,1] \text{ tout entier.}}$

16.b. Puisque f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, la formule de Taylor s'applique bien et

$$f_n(x) = f_n(0) + f_n'(0)x + \int_0^x f_n''(t)(x-t)\,dt = f_n'(0)x + \int_0^x f_n''(t)(x-t)\,dt.$$

D'autre part, une intégration par parties prouve que

$$\int_0^1 (1-t)f_n''(t)\,dt = \left[(1-t)f_n'(t)\right]_0^1 + \int_0^1 f_n'(t)\,dt = -f_n'(0) + [f_n(t)]_0^1 = -f_n'(0) + \underbrace{f_n(1)}_{=0} - \underbrace{f_n(0)}_{=0} = -f_n'(0).$$

Et donc on a bien

$$\boxed{f_n'(0) = -\int_0^1 (1-t)f_n''(t)\,dt.}$$

Liberté
Rappelons qu'une famille orthonormée est automatiquement libre, et donc $(f_0, \dots, f_n)$ est bien une famille libre.

Dimension
Le programme ne considère les projecteurs orthogonaux que dans des espaces euclidiens, c'est-à-dire de dimension finie, ce qui n'est pas le cas de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$.
C'est toutefois le cas de

$$E_n(\varphi) = \mathrm{Vect}(f_0, \dots, f_n, \varphi),$$

auquel appartiennent les f_k et φ.

Rappel
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
C'est une conséquence du théorème de la limite monotone : la suite des sommes partielles est croissante (car le terme général de la série est positif), et donc elle converge si et seulement si elle est majorée.

[10] Car par hypothèse,

$$f_n \in E_{a_n}(\omega).$$

Continuité à gauche
Lorsqu'on dit que φ_x est continue sur $[0,x]$, cela implique notamment sa continuité à gauche en x, qui n'est donc pas à vérifier.
Pour prouver qu'elle est continue en x, il suffit de vérifier sa continuité à droite en x.

16.c. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= x f_n'(0) + \int_0^x f_n''(t)(x-t)\,dt && \text{D'après 16.b.}\\
&= -x\int_0^1 (1-t)f_n''(t)\,dt + \int_0^x (x-t)f_n''(t)\,dt && \text{D'après 16.c.}\\
&= -x\int_0^x (1-t)f_n''(t)\,dt - x\int_x^1 (1-t)f_n''(t)\,dt + \int_0^x (x-t)f_n''(t)\,dt && \text{Relation de Chasles.}\\
&= \int_0^x ((x-t)-x(1-t))\,f_n''(t)\,dt - \int_x^1 x(1-t)f_n''(t)\,dt\\
&= \int_0^x (xt-t)\,f_n''(t)\,dt - \int_x^1 x(1-t)f_n''(t)\,dt\\
&= \int_0^x \varphi_x(t)f_n''(t)\,dt + \int_x^1 \varphi_x(t)f_n''(t)\,dt\\
&= \boxed{\int_0^1 \varphi_x(t)f_n''(t)\,dt.}
\end{aligned}$$

Puisque φ_x est continue sur $[0,1]$, le résultat de la question 15.d s'applique :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n''(t)\varphi_x(t)\,dt = 0.$$

Et donc on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.}$

16.d. Nous savons que $f_n \in E_{a_n}(\omega)$ et donc $\forall t\in[0,1],\ f_n''(t) = -a_n f_n(t)\omega(t)$.
Par conséquent,

$$f_n(x) = \int_0^1 \varphi_x(t)f_n''(t)\,dt = -a_n\int_0^1 \varphi_x(t)f_n(t)\omega(t)\,dt = \boxed{-a_n\langle f_n|\varphi_x\rangle.}$$

En reprenant les notations de la question 15, on a $\langle\varphi_x|f_n\rangle = c_n(\varphi_x)$.
Or, il a été prouvé à la question 15.b que $c_n(\varphi_x)^2 \leqslant \sum_{k=0}^n c_k(\varphi_x)^2 \leqslant \|\varphi_x\|_2^2$.
Et donc $|\langle\varphi_x|f_n\rangle| \leqslant \|\varphi_x\|_2$.
Comme d'autre part, $|-a_n| = a_n \leqslant a$, on a donc

$$|f_n(x)| = |-a_n|\times|\langle\varphi_x|f_n\rangle| \leqslant \boxed{a\|\varphi_x\|_2.}$$

16.e. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_x(t)^2\,dt &= \int_0^x t^2(x-1)^2\,dt + \int_x^1 x^2(t-1)^2\,dt\\
&= (x-1)^2\int_0^x t^2\,dt + x^2\int_0^1 (t-1)^2\,dt\\
&= (x-1)^2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x + x^2\left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_x^1\\
&= (x-1)^2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2(x-1)^3}{3}\\
&= \frac{1}{3}x^2(1-x)^2(x+1-x) = \boxed{\frac{1}{3}x^2(1-x)^2.}
\end{aligned}$$

Pour tout $t\in[0,1]$, on a

$$\varphi_x(t)^2\omega(t) \leqslant \|\omega\|_\infty\varphi_x(t)^2.$$

Et donc

$$\|\varphi_x\|_2^2 = \int_0^1 \varphi_x(t)^2\omega(t)\,dt \leqslant \|\omega\|_\infty\int_0^1 \varphi_x(t)^2\,dt = \|\omega\|_\infty\frac{1}{3}x^2(1-x)^2.$$

En combinant cette majoration avec l'inégalité de la question précédente, on a donc

$$|f_n(x)| \leqslant a\sqrt{\frac{1}{3}x^2(1-x)^2\|\omega\|_\infty} = \boxed{ax(1-x)\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}.}$$

16.f. Pour $h \in]0,1[$, on a

$$\left|\frac{f_n(h) - \overbrace{f_n(0)}^{=0}}{h}\right| = \left|\frac{f_n(h)}{h}\right| \leqslant a(1-h)\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}.$$

Dérivée

Rappelons que par définition,

$$f_n'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_n(h) - f_n(0)}{h}.$$

Et donc en faisant tendre h vers 0, il vient donc

$$\boxed{|f_n'(0)| \leqslant a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}.}$$

16.g. Nous savons que $f_n'(x) - f_n'(0) = \displaystyle\int_0^x f_n''(t)\,dt$.
Or, $f_n'' = -a_n f_n \omega$, de sorte que

$$f_n'(x) = f_n'(0) - a_n \int_0^x f_n(t)\omega(t)\,dt.$$

Et alors

$$\begin{aligned}
|f_n'(x)| &= \left|f_n'(0)x - a_n \int_0^x f_n(t)\omega(t)\,dt\right| \\
&\leqslant |f_n'(0)|x + \left|a_n \int_0^x f_n(t)\omega(t)\,dt\right| \\
&\leqslant |f_n'(0)| + |a_n|\left|\int_0^x f_n(t)\omega(t)\,dt\right| \\
&\leqslant a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} + a\int_0^x |f_n(t)|\omega(t)\,dt \\
&\leqslant a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} + a\|\omega\|_\infty \int_0^x ax(1-x)\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}\,dt \\
&\leqslant a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} + a\|\omega\|_\infty \int_0^x a\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}\,dt \\
&\leqslant a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} + a\|\omega\|_\infty x\frac{a}{4}\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} \\
&\leqslant a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} + a\|\omega\|_\infty \frac{a}{4}\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} \\
&\boxed{\leqslant a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}\left(1 + \frac{a}{4}\|\omega\|_\infty\right).}
\end{aligned}$$

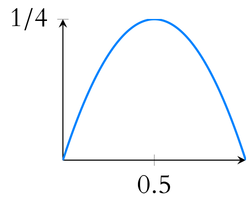
Inégalité triangulaire.

Inégalité triangulaire (pour les intégrales).

$\omega(t) \leqslant \|\omega\|_\infty$.

Classique

La fonction $x \mapsto x(1-x)$ admet sur $[0,1]$ un maximum égal à $\frac{1}{4}$.



17. Soient $x, y \in [0,1]$. Puisque f_n est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, d'après l'inégalité des accroissements finis[11]

$$\boxed{|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant C|x-y|.}$$

[11] f_n' est majorée par C.

18.a. Nous avons prouvé à la question 16.c que, pour $x \in [0,1]$ fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Ceci s'applique en particulier pour α_k, où k est fixé : pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\alpha_k) = 0$.
Et donc, il existe $p_k \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant p_k$, $|f_n(\alpha_k)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Notons alors $p = \max(p_0, p_1, \dots, p_N)$. Ainsi, pour $n \geqslant p$ et $k \in [\![0,N]\!]$, on a $n \geqslant p_k$ et en particulier $\boxed{|f_n(\alpha_k)| < \dfrac{\varepsilon}{2}.}$

18.b. Soit $x \in [0,1]$ et soit $k \in [\![0, N-1]\!]$ tel que $x \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$.
Alors $f_n(x) = f_n(\alpha_k) + (f_n(x) - f_n(\alpha_k))$ de sorte que, par l'inégalité triangulaire, pour $n \geqslant p$,

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &\leqslant |f_n(\alpha_k)| + |f_n(x) - f_n(\alpha_k)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + C|x - \alpha_k| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + C\left(\alpha_{k+1} - \alpha_k\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + C\frac{1}{N} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + C\frac{\varepsilon}{2C} \\
&\boxed{< \varepsilon.}
\end{aligned}$$

Remarque

Si x n'est pas l'un des α_i, $i \in [\![1, N-1]\!]$ alors il existe un unique entier k tel que $x \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$.
En revanche, si $x = \alpha_i$, on a à la fois $x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ et $x \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ de sorte qu'on peut choisir $k = i$ ou $k = i - 1$.

18.c. Nous venons de prouver que pour $n \geqslant p$, et pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leqslant \varepsilon$.
Ceci signifie donc que pour $n \geqslant p$, $\|f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant p$, $\|f_n\|_\infty < \varepsilon$.
Nous reconnaissons donc la définition de $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0.}$

18.d. Soit $t \in [0,1]$. Alors $|f_n(t)^2| \leqslant \|f_n\|_\infty^2$.
Et donc $0 \leqslant f_n(t)^2\omega(t) \leqslant \|f_n\|_\infty^2\omega(t) \leqslant \|f_n\|_\infty^2\|\omega\|_\infty$.
Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$0 \leqslant \int_0^1 (f_n(t))^2\omega(t)\,dt \leqslant \int_0^1 \|f_n\|_\infty^2\|\omega\|_\infty\,dt \leqslant \|f_n\|_\infty^2\|\omega\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)^2\omega(t)\,dt = 0.$$

Ceci contredit donc l'hypothèse faite sur les f_n qui était $\displaystyle\int_0^1 (f_n(t))^2\omega(t)\,dt = 1$.

Et donc on en déduit que $\boxed{\text{l'hypothèse } (H_\omega) \text{ n'est pas vérifiée.}}$

ESSEC 2014

Sujet : Matrices et endomorphismes normaux d'un espace euclidien **Difficile**
Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆
Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire et bilinéaire, polynômes, nombres complexes.
Commentaires : sujet très intéressant et progressif jusqu'à la fin de la partie III. La suite est bien plus complexe et relativement calculatoire. L'ensemble demande beaucoup d'aisance avec la factorisation des polynômes réels en produit de polynômes irréductibles.

Le problème comporte 6 parties.
Le but du problème est d'étudier les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que ${}^tAA = A{}^tA$.
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant cette propriété sera dite normale.

Dans tout le problème :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
- $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
- Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on identifiera x et la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_0$.
- $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^n$: $\langle x|y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. La norme euclidienne associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est notée $\| \cdot \|$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ représenté par A dans la base $\mathcal{B}_0$, on note f^* l'endomorphisme de représenté par ${}^tA$ dans la base $\mathcal{B}_0$.
- Un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ représenté par une matrice normale dans la base $\mathcal{B}_0$ est dit normal, il vérifie donc $f \circ f^* = f^* \circ f$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$, on dit que f est stable par f si : $\forall x \in F, f(x) \in F$. Dans ce cas, on note f_F l'endomorphisme de F défini par : $\forall x \in F, f_F(x) = f(x)$.
- Si $\theta \in \mathbf{R}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Partie I - Matrices normales d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

1. Vérifier que A est une matrice normale si et seulement si ou bien A est symétrique, ou bien il existe $\rho \in \mathbf{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que $A = \rho R_\theta$.
2. On suppose que A est une matrice normale. Montrer qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que ${}^tA = P(A)$ (on pourra utiliser ${}^tA + A$).
3. Déterminer les matrices normales $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ telles que $A^2 - A + I_2 = 0$.

Partie II - L'endomorphisme f^*

Dans cette partie, $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et f est l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ représenté par A dans la base $\mathcal{B}_0$.

4. **Propriétés élémentaires de f^***
   a. Préciser l'endomorphisme $(f^*)^*$.
   b. Si f est inversible, préciser l'endomorphisme $(f^{-1})^*$.
5. **Caractérisation de l'endomorphisme f^*.**
   a. Pour tout couple (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$, exprimer $\langle f(e_i)|e_j \rangle$ à l'aide des coefficients de A.
   b. Montrer que : $\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^n)^2, \langle f(x)|y \rangle = \langle x|f^*(y) \rangle$.
   c. Montrer que f^* est l'unique endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^n)^2, \langle f(x)|y \rangle = \langle x|f^*(y) \rangle.$$

6. Montrer que si f est un endomorphisme normal : $\forall x \in \mathbf{R}^n, \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.
7. Réciproquement, soit $g \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n, \|g(x)\| = \|g^*(x)\|$. En exploitant l'égalité $\|g(x+y)\| = \|g^*(x+y)\|$, montrer que g est normal.
8. Vérifier que si A est une matrice normale de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, la matrice de f dans toute base orthonormale de $\mathbf{R}^n$ est normale.

Dans la suite du problème, **on admettra les résultats suivants** :
Si f est un endomorphisme d'un espace euclidien E muni du produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$, on notera encore f^* l'unique endomorphisme de E vérifiant : $\forall(x,y) \in E^2$, $\langle f(x)|y\rangle = \langle x|f^*(y)\rangle$.
Dans toute base orthonormée de E, la matrice de f^* est la transposée de la matrice de f.
On dire encore que f est normal si $f \circ f^* = f^* \circ f$.

Partie III - Matrices normales et polynômes annulateurs

9. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice normale telle qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$. Soit $S = {}^tAA$. Vérifier que $S^p = 0$ et montrer que $S = 0$. Montrer alors que $A = 0$.
10. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice normale, on suppose qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tels que $P^q(A) = 0$. Montrer que $P(A) = 0$.
11. **Exemple** : soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M^2 + M - {}^tM = I_n$. Déterminer un polynôme annulateur de M de degré 4, le factoriser. En déduire que $(M - I_n)^3 \cdot (M + I_n)^3 = 0$. Montrer alors que M est symétrique et que $M^2 = I_n$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que A est une matrice normale non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

12. Montrer que A admet un polynôme annulateur $P \in \mathbf{R}[X]$, de degré au moins égal à 1, dont les racines complexes sont toutes de multiplicité 1.
    On note I_A l'ensemble des polynômes de $\mathbf{R}[X]$, annulateurs de A dont les racines complexes sont toutes de multiplicité 1, et on pose $D_A = \{\deg Q, Q \in I_A\}$.
13. Justifier que D_A admet un minimum d. Soit π un élément de I_A de degré d. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ les racines complexes deux à deux distinctes de π.
    a. Montrer que $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont les valeurs propres complexes de A.
    b. En déduire que l'unique élément de I_A de degré d, de coefficient dominant égal à 1 est $\displaystyle\prod_{k=1}^{d}(X - \lambda_k)$.

    Dans la suite du problème, on note π_A ce polynôme.
14. Déterminer π_M pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M^2 + M - {}^tM = I_n$ et $M \neq \pm I_n$.

Partie IV - Propriétés spectrales des matrices normales

Dans cette partie, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est une matrice normale, f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ représenté par A dans la base $\mathscr{B}_0$.
On note toujours π_A le polynôme associé à A défini dans la partie III.

15. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^*$. Plus généralement, si $\lambda \in \mathbf{R}$, vérifier que $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}) = \operatorname{Ker}(f^* - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n})$. En déduire que les espaces propres, s'ils existent, de f et f^* sont identiques.
16. Soit $Q \in \mathbf{R}[X]$ et $F = \operatorname{Ker}(Q(f))$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ stable par f et f^*. Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par f et f^*. Vérifier alors que f_F et $f_{F^\perp}$ sont deux endomorphismes normaux respectivement de F et de $F^\perp$ et que $(f_F)^* = (f^*)_F$.
17. **Recherche d'un sous-espace stable.**
    On désire montrer qu'il existe un sous-espace F, stable par f et f^*, de dimension 1 ou 2 :
    a. Premier cas : on suppose que π_A admet une racine réelle λ : $\pi_A(\lambda) = 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.
       Montrer qu'il existe $e \neq 0$ appartenant à $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n})$. Montrer que $F = \operatorname{Vect}(e)$ convient.
    b. Deuxième cas : on suppose maintenant que π_A n'admet pas de racine réelle.
       i. Justifier l'existence d'un couple de réels (a,b) tels que $a^2 - 4b < 0$ et $f^2 + af + b\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$ ne soit pas inversible.
          On note $G = \operatorname{Ker}(f^2 + af + b\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n})$ et $g = f_G$.
       ii. Vérifier que $h = g + g^*$ est diagonalisable. On note e un vecteur propre de h.
       iii. Montrer alors que $F = \operatorname{Vect}(e, f(e))$ convient.
18. Montrer qu'il existe une base orthonormée C de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \rho_s R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des réels, $\rho_1, \dots, \rho_s$ sont des réels positifs et $\theta_1, \dots, \theta_s$ des réels appartenant à $[0, 2\pi[$.

19. Quelles sont les matrices normales A pour lesquelles π_A a toutes ses racines réelles ?

Partie V - Étude d'un exemple

Dans cette partie, A est une matrice normale et inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $(A+I_n)^7 = A^7 + I_n$.
On note $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

20. Déterminer les complexes $z \in \mathbf{C}$ tels que $\begin{cases} P(z) = 0 \\ P'(z) = 0 \end{cases}$ puis factoriser P dans $\mathbf{C}[X]$ et dans $\mathbf{R}[X]$.

21. Montrer que A est une matrice orthogonale de $\mathbf{R}^n$.

22. Montrer que ${}^tA$ est un polynôme en A.

23. On suppose de plus que n est impair et que $A \neq -I_n$. Déterminer le polynôme π_A associé à A.

Partie VI - Généralisation

Dans cette partie, A est une matrice normale non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On note π_A le polynôme associé à A, tel que défini à la question 13.
On désire démontrer que ${}^tA$ est un polynôme en A.
Plus précisément, on cherche un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à $n-1$, tel que ${}^tA = P(A)$.

24. Quel polynôme P convient lorsque π_A a toutes ses racines réelles ?

Dans la suite de cette partie, on suppose que A admet $2t$ valeurs propres complexes non réelles distinctes. On les note $\mu_1, \overline{\mu_1}, \mu_2, \overline{\mu_2}, \dots, \mu_t, \overline{\mu_t}$. Pour tout q de $[\![1, t]\!]$, on note $\mu_q = \rho_q e^{i\theta_q}$ où ρ_q est un réel strictement positif et θ_q un réel appartenant à $[0, 2\pi[$. Enfin, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres réelles distinctes de A.

On a : $\pi_A = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)\prod_{q=1}^{t}(X^2 - 2\rho_q \cos\theta_q X + \rho_q^2)$.

D'après la question 18, il existe une base orthonormée C de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \rho_t R_{\theta_t} \end{pmatrix}$$ (les réels λ_k pouvant être répétés plusieurs fois ainsi que les matrices $\rho_q R_{\theta_q}$).

25. Préciser $M_C(f^*)$.

26. Montrer que

$$(f^* = P(f)) \Leftrightarrow (\forall k \in [\![1, r]\!],\ \lambda_k = P(\lambda_k) \text{ et } (\forall k \in [\![1, t]\!],\ \overline{\mu_k} = P(\mu_k)))\,.$$

On note $S = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)$ et

$$Q = \prod_{q=1}^{t}(X^2 - 2\rho_q\cos\theta_q X + \rho_q^2) = \prod_{q=1}^{t}(X-\mu_q)(X-\overline{\mu_q})$$

et on introduit les familles de polynômes $(L_j)_{j\in[\![1,r]\!]}$, $(Q_j)_{j\in[\![1,t]\!]}$ et $(T_j)_{j\in[\![1,t]\!]}$ telles que

$$\text{pour tout } j \in [\![1, r]\!], L_j = \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r} \frac{X-\lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}\right)\frac{Q}{Q(\lambda_j)}$$

$$\text{pour tout } j \in [\![1, t]\!], Q_j = \frac{S}{S(\mu_j)}\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{t} \frac{(X-\mu_k)(X-\overline{\mu_k})}{(\mu_j-\mu_k)(\mu_j-\overline{\mu_k})}\right)\left(\frac{X-\overline{\mu_j}}{\mu_j - \overline{\mu_j}}\right)$$

$$\text{pour tout } j \in [\![1, t]\!], T_j = \frac{S}{S(\overline{\mu_j})}\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{t} \frac{(X-\mu_k)(X-\overline{\mu_k})}{(\overline{\mu_j}-\mu_k)(\overline{\mu_j}-\overline{\mu_k})}\right)\left(\frac{X-\mu_j}{\overline{\mu_j} - \mu_j}\right)$$

Enfin, on pose $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\lambda_k L_k + \sum_{k=1}^{t}(\overline{\mu_k}Q_k + \mu_k T_k)\,.$

27. Montrer que $P \in \mathbf{R}[X]$ et que ${}^tA = P(A)$.
28. Préciser P lorsque $\pi_A = X(X+1)(X^2+X+1)$.

ESSEC 2014 : Corrigé

Partie I – Matrices normales d'ordre 2

1. On a ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, de sorte que

$$A{}^tA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

De même, on a

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, A est une matrice normale si et seulement si $\begin{cases} b^2 = c^2 \\ ac+bd = ab+cd \end{cases}$

De la première équation, on tire $b = c$ ou $b = -c$.
Si $b = c$, alors la seconde est automatique vérifiée, et donc les matrices symétriques sont normales.
Si $b = -c$, la seconde équation devient $b(d-a) = b(a-d) \Leftrightarrow b(a-d) = 0$. Donc soit $b = 0$, et alors $c = 0$, soit $a = d$.
Dans ce dernier cas, on a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Soit alors $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$.

On a $\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 = 1$, donc il existe un réel θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$.

Et alors on a bien $A = \rho\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \rho R_\theta$.
Inversement, une matrice symétrique est bien normale car $A{}^tA = A^2 = {}^tAA$, et une matrice de la forme ρR_θ est bien normale car

$$R_\theta{}^tR_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = I_2 \text{ et } {}^tR_\theta R_\theta = I_2.$$

> **Module/argument**
> On cherche ρ et θ tels que
> $$\begin{cases} \rho\cos\theta = a \\ \rho\sin\theta)b \end{cases}$$
> Cela revient au même que de chercher le module et l'argument du complexe $z = a + ib$.

> **Remarque**
> θ est alors non nul car A n'est pas symétrique, donc $b \neq 0$.

2. Si A est symétrique, alors $A = {}^tA$, et donc ${}^tA = P(A)$, où $\boxed{P(X) = X.}$
Si $A = \rho R_\theta$, alors on a

$$A + {}^tA = \rho\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) = 2\rho\cos\theta I_2.$$

Et donc ${}^tA = 2\rho\cos\theta I_2 - A$, de sorte que ${}^tA = P(A)$ où $\boxed{P(X) = 2\cos\theta - X.}$

3. Si A est annulée par $X^2 - X + 1$, alors ses valeurs propres sont parmi les racines de $X^2 - X + 1$.
Ce polynôme est de discriminant négatif, donc ne possède pas de racines réelles. Et donc A ne peut être symétrique.
Donc $A = \rho R_\theta$, et alors

$$A^2 - A + I = \rho^2\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^2 - \rho\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \rho\cos\theta + 1 & 2\rho^2\cos\theta\sin\theta - \rho\sin\theta \\ -2\rho^2\cos\theta\sin\theta + \rho\sin\theta & \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \rho\cos\theta + 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est nulle si et seulement si $\begin{cases} \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \rho\cos\theta + 1 = 0 \\ 2\rho^2\cos\theta\sin\theta - \rho\sin\theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2(2\cos^2\theta - 1) - \rho\cos\theta + 1 = 0 \\ 2\rho^2\cos\theta\sin\theta = \rho\sin\theta \end{cases}$

Mais $\sin\theta \neq 0$, car sinon A serait symétrique. Donc $2\rho\cos\theta = 1$.
Par substitution dans la première équation, on obtient alors $\frac{1}{2} - \rho^2 - \frac{1}{2} + 1 = 0$ donc $\rho^2 = 1$.
Puisque $\rho > 0$, on en déduit que $\rho = 1$.
Et alors $\cos\theta = \frac{1}{2}$, donc $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.

On en déduit que $\boxed{A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}.$

> **Modulo 2π**
> Notons que si $\theta = \theta'$ modulo 2π, alors $R_\theta = R_{\theta'}$, donc on peut supposer sans restriction que $\theta \in]0, 2\pi[$.

Partie II – L'endomorphisme f^*

4. **Propriétés élémentaires de f^***

4.a. La matrice de $(f^*)^*$ dans la base $\mathscr{B}_0$ est ${}^t({}^tA) = A$. Donc $(f^*)^* = A$.

4.b. Si f est inversible, alors A l'est également, et on sait que $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
Donc la matrice de f^* est inversible, d'inverse ${}^t(A^{-1})$. Mais cette dernière matrice est, par définition la matrice de $(f^{-1})^*$.

On en déduit que f^* est inversible et que $\boxed{(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*}$.

5. **Caractérisation de l'endomorphisme f^***

5.a. Par définition de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}_0$, on a $f(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}e_k$. Il vient alors

$$\langle f(e_i)|e_j\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}e_k|e_j\right\rangle = \boxed{a_{j,i}}.$$

> **Alternative**
> Si on ne souhaite pas utiliser les vecteurs colonnes et la version matricielle du produit scalaire, on peut utiliser la question précédente en écrivant
> $$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$
> et
> $$y = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j.$$

5.b. Si $x, y \in \mathbf{R}^n$, alors $\langle f(x)|y\rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY$ et d'autre part

$$\langle x|f^*(y)\rangle = {}^tX({}^tAY) = {}^tX{}^tAY.$$

On a donc bien $\boxed{\langle f(x)|y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle}$.

5.c. Soit g un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ tel que pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$, $\langle f(x)|y\rangle = \langle x|g(y)\rangle$.
Soit $B = (b_{i,j})$ la matrice de g dans la base $\mathscr{B}_0$.
Alors, le même calcul qu'à la question 5.a prouve que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\langle e_i|g(e_j)\rangle = \langle g(e_j)|e_i\rangle = b_{i,j}$.
Mais d'autre part, on a $\langle e_i|g(e_j)\rangle = \langle f(e_i)|e_j\rangle = a_{j,i}$.
Donc pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $b_{i,j} = a_{j,i}$ de sorte que $B = {}^tA$. Et donc $\boxed{g = f^*}$.

6. Supposons que f est un endomorphisme normal, et soit $x \in \mathbf{R}^n$. Alors

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x)|f(x)\rangle = \langle x|f^*(f(x))\rangle = \langle x|f(f^*(x))\rangle = \langle f(f^*(x))|x\rangle = \langle f^*(x)|f^*(x)\rangle = \|f^*(x)\|^2.$$

Et donc, une norme étant toujours positive, on en déduit que

$$\boxed{\|f(x)\| = \|f^*(x)\|}.$$

7. On a $\|g(x + y)\|^2 = \|g(x) + g(y)\|^2 = \|g(x)\|^2 + \|g(y)\|^2 + 2\langle g(x)|g(y)\rangle$.
De même, $\|g^*(x + y)\|^2 = \|g^*(x)\|^2 + \|g^*(y)\|^2 + 2\langle g^*(x)|g^*(y)\rangle$.
Ces deux quantités étant égales, de même que $\|g(x)\| = \|g^*(x)\|$ et $\|g^*(y)\| = \|g(y)\|$, on en déduit que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n,\ \langle g(x)|g(x)\rangle = \langle g^*(x)|g^*(y)\rangle.$$

Mais d'autre part,

$$\langle g(x)|g(y)\rangle = \langle x|g^*(g(y))\rangle \text{ et } \langle g^*(x)|g^*(y)\rangle = \langle x|(g^*)^*(g(y))\rangle = \langle x|g(g^*(y))\rangle.$$

Ainsi, pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$, on a $\langle x|g^*(g(y)) - g(g^*(y))\rangle = 0$.
En particulier, si y est fixé et si on prend $x = g^*(g(y)) - g(g^*(y))$,
il vient $\|g^*(g(y)) - g(g^*(y))\|^2 = 0$ et donc $g^*(g(y)) - g(g^*(y)) = 0 \Leftrightarrow g^*(g(y)) = g(g^*(y))$.
Nous avons donc prouvé que quel que soit $y \in \mathbf{R}^n$, $g^*(g(y)) = g(g^*(y))$, et donc $g^* \circ g = g \circ g^*$.
Ainsi $\boxed{g \text{ est un endomorphisme normal.}}$

> **Astuce**
> Si un vecteur u vérifie
> $$\forall x \in \mathbf{R}^n, \langle x, u\rangle = 0$$
> alors en prenant $x = u$, on montre de la même manière que $u = 0$.

8. Soit A une matrice normale de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, c'est-à-dire telle que $A{}^tA = {}^tAA$.
Soit alors $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$, et soit $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_0}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}_0$.
Puisque $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}_0$ sont toutes deux orthonormées, P est une matrice orthogonale : ${}^tP = P$.
La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est alors, par la formule de changement de base, $B = PAP^{-1} = PA{}^tP$.
Et alors

$$B{}^tB = PA{}^tP{}^t(PA{}^tP) = PA\underbrace{{}^tPP}_{=I}{}^tA{}^tP = P(A{}^tA){}^tP = P({}^tAA){}^tP = (P{}^tA{}^tP)(PA{}^tP) = {}^tBB.$$

A étant normale, on a $A{}^tA = {}^tAA$.

Donc $\boxed{B \text{ est une matrice normale.}}$

Partie III – Matrices normales et polynômes annulateurs

9. On a $S^p = ({}^tAA)^p = \underbrace{{}^tAA{}^tAA\cdots{}^tAA}_{p \text{ fois}}$, et comme A et ${}^tA$ commutent, il vient alors

$$\boxed{S^p = ({}^tA)^pA^p = 0.}$$

Mais S est une matrice symétrique car ${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tAA = S$. Donc S est diagonalisable, et par conséquent ses valeurs propres sont des racines du polynôme X^p dont nous venons de prouver qu'il est annulateur de S.
On en déduit 0 est l'unique valeur propre de S, qui est donc semblable à $\mathrm{Diag}(0,\dots,0)$.
Mais la seule matrice semblable à la matrice nulle est la matrice nulle elle-même, et donc $\boxed{S = 0.}$
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Alors ${}^tXSX = {}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2$.
Puisque $S = 0$, on a également ${}^tXSX = 0$. Et donc $\|AX\| = 0$, de sorte que $AX = 0$.
Cela étant vrai pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on en déduit que $\boxed{A = 0.}$

10. Soit $B = P(A) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Alors B est normale car si $P = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i X^i$, alors

$$B{}^tB = \left(\sum_{i=0}^{d} A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{d} \lambda_j({}^tA)^j\right) = \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{d} \lambda_i\lambda_jA^i({}^tA)^j.$$

> **Détails**
> A étant normale, toute puissance de A commute avec toute puissance de ${}^tA$.

De même, on a

$${}^tBB = \left(\sum_{i=0}^{d}({}^tA)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{d} \lambda_jA^j\right) = \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{d} \lambda_i\lambda_j({}^tA)^iA^j = B{}^tB.$$

Par hypothèse, on a $B^p = 0$. Par la question précédente, on en déduit que $B = 0$, et donc $\boxed{P(A) = 0.}$

11. **Exemple :** si M vérifie $M^2 + M - {}^tM = I_n$, alors ${}^tM = M^2 + M - I_n$.
En particulier, ${}^tM$ est un polynôme en M, et donc commute avec M. Ainsi, M est normale.
En transposant la relation de départ, il vient $({}^tM)^2 + {}^tM - M = I_n$, ce qui, en remplaçant ${}^tM$ par $M^2 + M - I_n$, donne

$$(M^2 + M - I_n)^2 + (M^2 + M - I_n) - M = I_n \Leftrightarrow M^4 + 2M^3 - 2M - I_n = 0.$$

Donc un polynôme annulateur de M est $X^4 + 2X^3 - 2X - 1$. 1 en est une racine évidente, donc il se factorise par $X - 1$:

$$X^4 + 2X^3 - 2X - 1 = (X-1)(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) = (X-1)(X+1)^3.$$

On a alors $(M - I_n)(M + I_n)^3 = 0$, de sorte que

$$(M - I_n)^3(M + I_n))^3 = (M - I_n)^2(M - I_n)(M + I_n)^3 = 0.$$

Puisque M est normale, on peut appliquer le résultat de la question précédente, ou $P(X) = (X-1)(X+1)$ et $p = 3$. Il vient alors $(M - I_n)(M + I_n) = 0 \Leftrightarrow \boxed{M^2 = I_n.}$
Et alors M est symétrique car ${}^tM = M^2 + M - I_n = I_n + M - I_n = M$.

12. Nous savons que A admet un polynôme annulateur P non nul[1], à coefficients réels. Quitte à le diviser par son coefficient dominant, on peut supposer que P est unitaire.

Notons $P = \prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i)^{m_i}$ où les $\alpha_i \in \mathbf{C}$ sont les racines complexes distinctes de P, et m_i est la multiplicité de la racine α_i.

Soit alors $m = \max(m_1,\dots,m_d)$, et soit $Q = \prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i)^m \in \mathbf{C}[X]$.
Alors Q est encore un polynôme annulateur de A car

$$Q(A) = \left(\prod_{i=1}^{m}(A - \alpha_iI_n)^{m-m_i}\right) \times P(A) = 0.$$

[1] Nous avons même prouvé qu'un tel polynôme de degré inférieur ou égal à n^2 existe.

De plus, si α_i est une racine complexe non réelle de P, alors $\overline{\alpha_i}$ est encore une racine de P : c'est donc un α_j, avec $j \neq i$.
Plus précisément, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ les racines réelles de P et $\beta_1, \dots, \beta_r, \overline{\beta_1}, \dots, \overline{\beta_r}$ les racines complexes de P. Alors

$$Q = \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{q} (X-\lambda_i)^m\right)}_{\in \mathbf{R}[X]} \prod_{j=1}^{r} \left((X-\beta_j)(X-\overline{\beta_j})\right)^m.$$

Mais pour $j \in [\![1, r]\!]$, on a $(X-\beta_j)(X-\overline{\beta_j}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\beta_j) + |\beta_j|^2 \in \mathbf{R}[X]$.
Donc Q est un polynôme à coefficients réels avec $Q(A) = 0$.
Mais $Q = \left(\prod_{i=1}^{d}(X-\alpha_i)\right)^m$ et donc, par le résultat de la question 10 on en déduit que $R = \prod_{i=1}^{d}(X-\alpha_i)$ est un polynôme annulateur de A, qui est bien à coefficients réels, non nul[2] et dont toutes les racines complexes sont de multiplicité un.

Racines complexes Rappelons que si $P \in \mathbf{R}[X]$ possède une racine complexe α, alors $\overline{\alpha}$ est également racine de P, et elle possède la même multiplicité que α.

[2] Car P possédait au moins une racine complexe.

13. D_A est un sous-ensemble de $\mathbf{N}$, et il est non vide puisque, par la question précédente, I_A est non vide. Il possède donc un plus petit élément d.

13.a. On a $\pi = \lambda \prod_{i=1}^{d}(X-\lambda_i)$, où $\lambda \in \mathbf{R}^*$ est le coefficient dominant de π_A.
Supposons que pour un $j \in [\![1, d]\!]$, λ_j ne soit pas valeur propre de A. Alors $(A-\lambda_j I_n)$ est inversible. Et donc, si l'on multiplie[3] la relation $\pi(A) = 0$ par $(A-\lambda_j I_n)^{-1}$, il vient

$$(A-\lambda_j I_n)^{-1}\mu \prod_{i=1}^{d}(A-\lambda_i I_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{d}(A-\lambda_i I_n) = 0.$$

Autrement dit, le polynôme $P = \mu \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{d}(X-\lambda_i)$ est annulateur de A.
Si λ_j est un réel, alors il est aisé de voir que P est encore à coefficients réels.
Si λ_j est complexe, alors $\overline{\lambda_j}$ n'est pas non plus valeur propre de A, et il faut alors, sur le même principe, retirer encore la racine $\overline{\lambda_j}$ à π pour obtenir un polynôme P, annulateur de A et à coefficients réels.
Dans le deux cas, nous avons obtenu un polynôme dans $\mathbf{R}[X]$, à racines simples et annulateur de A, donc dans I_A et de degré inférieur strictement à d.
Ceci n'est pas possible, car tout polynôme non nul de I_A est de degré supérieur ou égal à d par définition de d.
Donc les λ_i sont tous des valeur propres de A.

[3] À droite ou à gauche, peu importe car tous les termes du produit commutent.

Détails λ_j est valeur propre si et seulement si il existe un $X \neq 0$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $AX = \lambda_j X$.
Mais en conjuguant cette relation, on a

$$\overline{AX} = \overline{\lambda_j X} \Leftrightarrow A\overline{X} = \overline{\lambda_j}\overline{X}$$

donc λ_j est valeur propre de A si et seulement si $\overline{\lambda_j}$ est valeur propre de A. (Notons que ceci ne vaut que pour A réelle, car alors $A = \overline{A}$.)

Inversement, une valeur propre de A est nécessairement parmi les racines complexes de π_A, qui est annulateur de A, donc est l'un des λ_i.
Ainsi, $\boxed{\text{les valeurs propres complexes de } A \text{ sont } \lambda_1, \dots, \lambda_d.}$

13.b. Un polynôme non nul P de I_A possède nécessairement[4] les λ_i comme racines, donc est divisible par $\prod_{i=1}^{d}(X-\lambda_i)$.

En particulier, il existe $Q \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\pi_A = Q \times \prod_{i=1}^{d}(X-\lambda_i)$.

Et si $\deg P = d$, alors $d = \deg P = \deg Q + d \Rightarrow \deg Q = 0$.
Ainsi, Q est une constante. Et par identification des coefficients dominants, si P est unitaire, $Q = 1$, de sorte que

$$\boxed{P = \prod_{i=1}^{d}(X-\lambda_i).}$$

[4] Car les valeurs propres sont toujours racines de tout polynôme annulateur.

14. D'après la question 11, $M^2 = I_n$, et donc $X^2-1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de M.
On a donc[5] $\pi_M \in \{X^2-1, X+1, X-1\}$.
Mais $M \neq I_n$, donc $X-1$ n'est pas annulateur de M.
De même, $M \neq -I_n$, donc $X+1$ n'est pas annulateur de M.
On en déduit donc que $\boxed{\pi_M = X^2-1.}$

[5] Car π_M est unitaire, à racines simples et ne peut posséder que 1 et/ou -1 comme racines.

Partie IV - Propriétés spectrales des matrices normales

15. On a

$$x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow \|f^*(x)\| = 0 \Leftrightarrow f^*(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} f^*.$$

Et donc $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^*.}$
De même, si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$ est un endomorphisme normal car

$$(A-\lambda I_n)^t(A-\lambda I_n) = A^tA - \lambda I_n A - \lambda I_n{}^tA + \lambda I_2 = {}^t(A-\lambda I_n)(A-\lambda I_n).$$

Et alors $(f-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n})^* = f^* - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$, car la transposée de $A - \lambda I_n$ est ${}^tA - \lambda I_n$.
Et donc, $f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$ étant normal, il vient

$$\operatorname{Ker}(f-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}) = \operatorname{Ker}((f-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n})^*) = \operatorname{Ker}(f^*-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}).$$

En particulier, si λ est valeur propre de f, alors $\operatorname{Ker}(f-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}) \neq \{0\}$ et donc $\operatorname{Ker}(f-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}) \neq \{0\}$, de sorte que λ est également valeur propre de f^*, et

$$E_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(f-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}) = \operatorname{Ker}(f^*-\lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}) = E_\lambda(f^*).$$

Les endomorphismes f et f^* ont donc les mêmes valeurs propres et les mêmes sous-espaces propres.

16. Notons que $Q(f)$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$, qui commute avec f puisque c'est un polynôme en f.
Or si deux endomorphismes commutent, le noyau de l'un est stable par l'autre, donc $\boxed{F \text{ est stable par } f.}$

Rappel
Deux polynômes en un même endomorphisme f commutent toujours entre eux.

De plus, f et f^* commutent, donc si on note $Q = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, on a

$$f^* \circ Q(f) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^* \circ f^i = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i \circ f^* = Q(f) \circ f^*$$

et donc f^* et $Q(f)$ commutent. On en déduit que $\boxed{F = \operatorname{Ker}(Q(f)) \text{ est stable par } f^*.}$
Si $x \in F^\perp$, alors pour tout $y \in F$, on a

$$\langle f(x)|y\rangle = \langle x|\underbrace{f^*(y)}_{\in F}\rangle = 0$$

et donc $f^*(x)$ est orthogonal à tout élément de F, donc dans $F^\perp$. Ainsi, $\boxed{F^\perp \text{ est stable par } f.}$
On montre de la même manière que $F^\perp$ est stable par f^*.
On a alors, pour tout $(x,y) \in F$,

$$\langle f_F(x)|y\rangle = \langle f(x)|y\rangle = \langle x|f^*(y)\rangle = \langle x|(f^*)_F(y)\rangle$$

et donc, d'après la question 5.c, $(f_F)^* = (f^*)_F$.
On a alors évidemment,

$$\forall x \in F, f_F(f_F^*(x)) = f(f^*(x)) = f^*(f(x)) = f_F^*(f_F(x))$$

de sorte que $f_F \circ f_F^* = f_F^* \circ f_F$, et donc f_F est un endomorphisme normal de F, de même que f_F^*.

Notation
L'endomorphisme f_F n'est autre que l'endomorphisme f, sauf qu'au lieu de le voir comme un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$, on le regarde uniquement comme un endomorphisme de $F \to F$. On dit que f_F est la restriction de f à F.

17. **Recherche d'un sous-espace stable**

17.a. Si π_A admet une racine réelle λ, alors par la question 13.a, λ est une valeur propre de A, et donc de f. Il existe donc[6] $e \neq 0$ dans $\operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n})$.
Et alors $F = \operatorname{Vect}(e)$ est stable par f, car si $x = \mu e \in F$, on a $f(e) = \mu f(e) = \mu\lambda e \in F$.

[6] Il suffit de prendre pour e un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

17.b.i. Si π_A n'admet pas de racine réelle, il admet tout de même au moins une racine complexe λ.
Et puisque π_A est à coefficients complexes, $\overline{\lambda}$ est également une racine de π_A, distincte de λ car $\lambda \notin \mathbf{R}$.
Notons alors a et b les réels tels que $(X-\lambda)(X-\overline{\lambda}) = X^2 + aX + b$.

Détails
a et b sont à priori complexes, mais on a en fait

$$(X-\lambda)(X-\overline{\lambda}) = X^2 - (\lambda+\overline{\lambda})X + \lambda\overline{\lambda} = X^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2 \in \mathbf{R}_2[X].$$

Remarquons que les deux seules racines complexes de $X^2 + aX + b$ sont λ et $\overline{\lambda}$, de sorte que ce polynôme ne possède pas de racines réelles. Et donc son discriminant est strictement négatif $\boxed{a^2 - 4b < 0.}$

Puisque λ et $\overline{\lambda}$ sont des racines de π_A, on a alors

$$\pi_A = (X-\lambda)(X-\overline{\lambda})\prod_{j=1}^{d-2}(X-\mu_j)$$

Notation : comme dans les questions précédentes, on a ici noté d le degré de π_A.

où $\mu_1, \dots, \mu_{d-2}$ sont les racines complexes de π_A, qui sont deux à deux distinctes par définition[7] de π_A.
Si $g = f^2 + af + b\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$ était inversible, alors en composant par g^{-1} la relation $\pi_A(f) = 0$, il viendrait

[7] Rappelons que toutes les racines complexes de π_A sont de multiplicité un.

$$0 = g^{-1}\circ\pi_A(f) = g^{-1}\circ g\circ((f-\mu_1\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n})\circ\cdots\circ(f-\mu_{d-2}\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n})) = (f-\mu_1\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n})\circ\cdots\circ(f-\mu_{d-2}\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}).$$

Et alors $(X-\mu_1)\cdots(X-\mu_{d-2})$ serait un polynôme annulateur de f, de degré strictement inférieur à celui de π_A, dont toutes les racines complexes sont de multiplicité 1. Mais un tel polynôme n'existe pas par définition de π_A, et donc $\boxed{f^2 + af + b\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n} \text{ n'est pas inversible.}}$

17.b.ii. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de G. Alors si on note M la matrice de g dans cette base, ${}^tM$ est la matrice de g^*, de sorte que la matrice de $g+g^*$ dans la base $\mathscr{B}$ est $M + {}^tM$ qui est symétrique.
La matrice de h dans la base orthonormée $\mathscr{B}$ est symétrique : $\boxed{h \text{ est un endomorphisme symétrique, et donc diagonalisable.}}$

17.b.iii. Soit $x \in \operatorname{Vect}(e, f(e))$. Alors il existe deux réels λ et μ tels que $x = \lambda e + \mu f(e)$.
Et alors $f(x) = \lambda f(e) + \mu f^2(e)$.
Puisque $e \in \operatorname{Ker}(f^2 + af + b\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n})$, on a

$$f^2(e) + af(e) + be = 0 \Leftrightarrow f^2(e) = -af(e) - be \in \operatorname{Vect}(e, f(e)) = F.$$

Et donc $f(x) = \lambda f(e) + \mu f^2(e) \in F$.
Ainsi, nous avons prouvé que $\boxed{F \text{ est stable par } f.}$
De plus, toujours pour $x = \lambda e + \mu f(e) \in F$, on a

$$f^*(x) = \lambda f^*(e) + \mu f^*(f(e)).$$

Nous savons que e est un vecteur propre de h, notons $\alpha \in \mathbf{R}$ la valeur propre associée, de sorte que

$$h(e) = \alpha e \Leftrightarrow g(e) + g^*(e) = \alpha e \Leftrightarrow f(e) + f^*(e) = \alpha e \Leftrightarrow f^*(e) = \alpha e - f(e) \in F.$$

De même, on a

$$f^*(f(e)) = f(f^*(e)) = f(\alpha e - f(e)) = \alpha f(e) - f^2(e) = \alpha f(e) - af(e) - be \in F.$$

On en déduit que $f^(x) = \lambda f^*(e) + \mu f^*(f(e)) \in F$. Et donc $\boxed{F \text{ est stable par } f^*.}$
Nous venons de prouver qu'il existe F, de dimension 1 ou 2 stable par f et par f^*.

18. Nous allons en réalité prouver un résultat plus fort que celui demandé : pour tout endomorphisme normal d'un espace euclidien E (et non uniquement de $\mathbf{R}^n$), il existe une base orthonormée de E telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme souhaitée. Pour cela, nous allons procéder par récurrence sur la dimension de E.
Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété suivante : «pour tout endomorphisme normal d'un espace euclidien E de dimension n, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est de

la forme souhaitée.»
La propriété est immédiate pour $\dim E = 1$.
Si $\dim E = 2$, alors la matrice de f dans une base orthonormée est normale.
Par la question 1, soit elle est symétrique, et donc diagonalisable en base orthonormée, soit elle est de la forme ρR_θ. Donc la propriété est vérifiée.
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies, et soit f un endomorphisme normal de E, avec $\dim E = n+2$.
Par la question 17, il existe F un sous-espace vectoriel de E stable par f et f^*, de dimension 1 ou 2.

Plus généralement
Un sous-espace stable de dimension 1 est toujours engendré par un vecteur propre.

• **Si F est de dimension** 1 : alors il est engendré par un vecteur $x \neq 0$, et il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$.
Par la question 16, $F^\perp$ est alors un sous-espace de E, de dimension $n+2-1 = n+1$, stable par f, et $f_{F^\perp}$ est normal.
Par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_{n+1})$ de $F^\perp$ telle que la matrice de $f_{F^\perp}$ dans cette base soit de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \rho_s R_{\theta_s} \end{pmatrix}$.

Alors, $\left(\dfrac{x}{\|x\|}, e_1, \dots, e_n\right)$ est une base orthonormée[8] de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_p & & (0) & \vdots \\ \vdots & \vdots & (0) & & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \rho_s R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

[8] Car obtenue par concaténation d'une base orthonormée de F et d'une base orthonormée de $F^\perp$.

• **Si F est de dimension** 2 : alors f_F est un endomorphisme normal d'après la question 16 et donc, d'après la question 1, soit il est symétrique, soit sa matrice dans une base orthonormée de F est de la forme ρR_θ.

Matrice/endomorphisme
Le résultat de la question 1 traitait en fait de matrices normales de taille 2, mais la question 8 permet de faire le lien entre les endomorphismes normaux d'un espace de dimension 2 et les matrices normales 2×2.

Si f_F est symétrique, alors il admet un vecteur propre[9], qui engendre alors un sous-espace de E de dimension 1 et stable par f. Et il est alors possible de se ramener au cas où $\dim F = 1$.
Nous supposons donc que la matrice de f_F dans une base orthonormale $\mathscr{B}_F$ de F est de la forme ρR_θ.

[9] Un endomorphisme symétrique est diagonalisable !

Alors $F^\perp$ est stable par f, et de dimension n. Par hypothèse de récurrence, la matrice de $f_{F^\perp}$ dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $F^\perp$ est donc de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \rho_s R_{\theta_s} \end{pmatrix}$.

Et alors, $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}_F$ est une base orthonormée de E, dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & & (0) & & \vdots \\ \vdots & (0) & & \rho_1 R_{\theta_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \rho_s R_{\theta_s} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \rho R_\theta \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+2$, et par récurrence double, elle est vraie pour tout endomorphisme normal d'un espace euclidien.

Au fait
Il est aisé de se convaincre que les matrices symétriques sont normales, car si A est symétrique, alors

$$A{}^tA = A^2 = {}^tAA.$$

19. Nous allons prouver que ce sont les matrices symétriques.
Si A est une matrice symétrique, alors elle est diagonalisable, à valeurs propres réelles, et d'après 13.b, $\pi_A = \prod_{\lambda\in\mathrm{Spec}(A)} (X-\lambda)$ ne possède que des racines réelles.
Inversement, supposons que π_A ne possède que des racines réelles, et soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A. Par la question 13, les valeurs propres de f sont toutes réelles.
Alors il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de f est de la forme obtenue à la question 18.
Si dans cette matrice se trouve un bloc de la forme ρR_θ, alors les valeurs propres de ρR_θ sont des valeurs propres de f et donc de A.
Mais les valeurs propres de ρR_θ sont les racines de
$X^2 - \mathrm{tr}(\rho R_\theta)X + \det(\rho R_\theta) = X^2 - 2\rho\cos\theta + \rho^2$.
Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = 4\rho^2(\cos^2\theta - 1) \leqslant 0$.
Si $\cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \theta \in \{0,\pi\}$, alors la matrice ρR_θ est diagonale.
En revanche, dans le cas contraire, $\Delta < 0$, et donc les valeurs propres de ρR_θ ne sont pas réelles, ce qui contredit le fait que A ne possède que des valeurs propres réelles.
Ainsi, les éventuels blocs de la forme ρR_θ dans la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ sont diagonaux, et donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale, donc symétrique.
La matrice de f dans une base orthonormée est symétrique, donc f est symétrique, et par conséquent, $\boxed{A \text{ est également symétrique.}}$

Détails
Un bloc ρR_θ correspond à un sous-espace F de $\mathbf{R}^n$, de dimension 2, et stable par f.
Et si λ est valeur propre de ρR_θ, alors c'est aussi une valeur propre de f_F, et donc de f.

Partie V – Étude d'un exemple

20. Remarquons que, contrairement aux apparences, P est un polynôme de degré 6, et non 7.
En effet, si on développe, il vient

$$P = \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}X^k - X^7 - 1 = \sum_{k=0}^{6}\binom{7}{k}X^k - 1 \in \mathbf{C}_6[X].$$

On a $P'(X) = 7(X+1)^6 - 7X^6$.
Soit donc $z\in\mathbf{C}$ vérifiant $P(z) = P(z') = 0$. On a alors $\begin{cases}(z+1)^7 = z+1\\(z+1)^6 = z^6\end{cases}$
De la seconde équation, on déduit que $z \neq -1$, et donc la première s'écrit $(z+1)^6 = 1$. La seconde équation devient alors $z^6 = 1$.
Cherchons donc les complexes vérifiant $\begin{cases}z^6 = 1\\(z+1)^6 = 1\end{cases}$
Si $z = \rho e^{i\theta}$, alors $z^6 = \rho^6 e^{i6\theta}$, donc il vient $\rho^6 = 1$ et $6\theta = 0 + 2k\pi$.
ρ étant positif, on en déduit que $\rho = 1$.
Et donc $z \in \left\{1, -1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}, e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}\right\}$.
Parmi ces six nombres les seuls tels que $z+1$ soit encore de module 1 sont $e^{2i\pi/3}$ et $e^{-2i\pi/3}$.
On vérifie aisément que ce sont deux solutions du système.

Ces deux complexes sont donc deux racines de P, d'ordre de multiplicité au moins égal à 2.
De plus, il est facile de voir que 0 et -1 sont aussi deux racines de P. Puisque P est de degré 6, il a exactement 6 racines complexes comptées avec multiplicité, et donc

$$P = 7(X - e^{2i\pi/3})^2(X - e^{-2i\pi/3})^2(X+1)X.$$

Puisque $(X - e^{2i\pi/3})(X - e^{-2i\pi/3}) = X^2 + X + 1$, on en déduit que

$$\boxed{P = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2.}$$

Coeff. dominant
Ne pas oublier le coefficient dominant dans la factorisation, il ne suffit pas de connaître les racines !

21. Puisque P est un polynôme annulateur de A, ses valeurs propres complexes sont parmi les racines de P.
Par hypothèse, A est inversible, donc 0 n'est pas valeur propre de A et donc n'est pas racine de π_A. Et donc π_A, qui possède pour racines les valeurs propres complexes de A est un

diviseur[10] de $(X+1)(X-e^{2i\pi/3})(X-e^{-2i\pi/3}) = (X+1)(X^2+X+1)$.
Donc soit $\pi_A = X+1$, soit $\pi_A = X^2+X+1$, soit $\pi_A = (X+1)(X^2+X+1)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_0$ est A. Alors, par la question 18, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^n$, orthonormée, telle que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ soit de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & R_{\theta_s} \end{pmatrix},$$

où les θ_i valent $\pm\dfrac{2\pi}{3}$. Puisque ${}^tR_\theta = R_{-\theta}$, on a donc

$${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & R_{-\theta_s} \end{pmatrix}$$

Mais alors on a

$$B\,{}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & R_{\theta_s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & R_{-\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & R_{-\theta_s} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & R_{\theta_1}R_{-\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & R_{\theta_s}R_{-\theta_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & I_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & I_2 \end{pmatrix} = I_n$$

et de même, ${}^tBB = I_n$.
Donc B est orthogonale. La matrice de passage Q de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ est également orthogonale[11] et $A = QBQ^{-1} = QB^tQ$, de sorte que

$${}^tA = {}^t(QB^tQ) = Q^tB^tQ = QB^tQ = A$$

et ainsi, $\boxed{A \text{ est orthogonale.}}$

22. Notons que

$$R_{2\pi/3}^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = R_{-2\pi/3}.$$

En transposant cette relation, il vient

$$({}^tR_{2\pi/3})^2 = {}^tR_{-2\pi/3} \Leftrightarrow R_{-2\pi/3}^2 = R_{2\pi/3}.$$

[10] Dans $\mathbf{R}[X]$.

Remarque

f est un endomorphisme normal de $\mathbf{R}^n$ car sa matrice dans la base canonique est normale.

Détails

A priori les blocs apparaissant dans B sont de la forme ρR_θ. Mais les calculs de la question 19 prouvent que les valeurs propres de ρR_θ sont $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$.
Comme ici nous savons que les seules valeurs propres possibles sont $e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$, nécessairement $\rho = 1$ et les θ_i valent $\pm\frac{2\pi}{3}$.

[11] Car matrice de passage entre deux bases orthonormées.

Ainsi, on a

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & R_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & R_{\theta_s} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & R_{-\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & R_{-\theta_s} \end{pmatrix} = {}^tB.$$

On en déduit que $A^2 = (QB^tQ)^2 = QB^{2t}Q = QB^{-1t}Q(QB^tQ)^{-1} = A^{-1} = {}^tA$.
Et donc $\boxed{{}^tA \text{ est un polynôme en } A.}$

Détails

Si 1 est la seule valeur propre complexe de A, alors $\pi_A = X - 1$, et la preuve de la question 18 montre alors que la matrice de A dans une «bonne» base est I_n.

23. Si n est impair, puisque les matrices R_θ sont de taille 2, $p \geqslant 1$, c'est-à-dire que l'un au moins des coefficients diagonaux de B vaut 1, donc 1 est valeur propre de A.
Et si $A \neq -I_n$, alors A ne peut posséder que 1 comme valeur propre complexe.
Et donc A possède $e^{2i\pi/3}$ et $e^{-2i\pi/3}$ comme valeurs propres complexes. On en déduit que $\boxed{\pi_A = (X+1)(X^2+X+1).}$

Remarque

Comme prouvé à la question 13.a, A ne peut avoir qu'un seul des deux complexes conjugués comme valeur propre : c'est soit les deux, soit aucun des deux.

Partie VI – Généralisation

24. Si π_A a toutes ses racines réelles, alors A est symétrique d'après la question 19. Et donc ${}^tA = A$, de sorte que le polynôme X convient.

25. Puisque la base C est orthonormée, la matrice de f^* dans la base C est ${}^tM_C(f)$, soit

$$M_C(f^*) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & \rho_1{}^tR_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \rho_s{}^tR_{\theta_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \lambda_p & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & \rho_1 R_{-\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \rho_s R_{-\theta_s} \end{pmatrix}.$$

Notations

Ce n'est pas très clair dans l'énoncé, mais $M_C(f)$ désigne la matrice de f dans la base C.

26. $f^* = P(f)$ si et seulement si $M_C(f^*) = M_C(P(f))$.
Or, il est aisé de voir que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$M_C(f)^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \lambda_p^k & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & \rho_1^k R_{\theta_1}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \rho_s^k R_{\theta_s}^k \end{pmatrix}$$

de sorte que, par combinaisons linéaires,

$$P(M_C(f)) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & P(\lambda_p) & & (0) & \vdots \\ \vdots & (0) & & P(\rho_1)P(R_{\theta_1}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & P(\rho_s)P(R_{\theta_s}) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a $M_C(f^*) = M_C(P(f))$ si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, r]\!], P(\lambda_k) = \lambda_k \text{ et } \forall k \in [\![1, t]\!],\ P(\rho_k R_{\theta_k}) = \rho_k R_{-\theta_k}.$$

Montrons donc que $P(\rho_k R_{\theta_k}) = \rho_k R_{-\theta_k}$ si et seulement si $\overline{\mu_k} = P(\mu_k)$.
Les valeurs propres complexes de $\rho_k R_{\theta_k}$ sont les racines complexes du polynôme $X^2 - \mathrm{tr}(\rho_k R_{\theta_k}) + \det(\rho_k R_{\theta_k}) = X^2 - 2\rho_k \cos\theta_k + \rho_k^2$, c'est-à-dire μ_k et $\overline{\mu_k}$.
Ainsi, $\rho_k R_{\theta_k}$ possède deux valeurs propres complexes distinctes, et donc est diagonalisable[12].
Il existe donc $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ inversible telle que $\rho_k R_{\theta_k} = Q^{-1}\begin{pmatrix}\mu_k & 0\\ 0 & \overline{\mu_k}\end{pmatrix}Q$. Et donc

$$P(\rho_k R_{\theta_k}) = Q^{-1}\begin{pmatrix}P(\mu_k) & 0\\ 0 & P(\overline{\mu_k})\end{pmatrix}Q.$$

[12] Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, c'est-à-dire avec une matrice de passage à coefficients complexes. Ce n'est pas le cas dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

D'autre part, notons que $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ est un vecteur propre de $\rho_k R_{\theta_k}$ associé à la valeur propre μ_k si et seulement si

$$\rho_k R_{\theta_k}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \mu_k\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \rho_k\begin{pmatrix}\cos\theta_k x + \sin\theta_k y\\ -\sin\theta_k x + \cos\theta_k y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)x\\ \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)y\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\theta_k x + \sin\theta_k y = \cos\theta_k x + i\sin\theta_k x\\ -\sin\theta_k x + \cos\theta_k y = \cos\theta_k y + i\sin\theta_k y\end{cases} \Leftrightarrow y = ix.$$

$\sin\theta_k \neq 0$ car on a supposé $\mu_l \notin \mathbf{R}$.

De même, $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $\rho_k R_{-\theta_k}$ associé à la valeur propre $\overline{\mu_k}$ si et seulement si

$$\rho_k R_{-\theta_k}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \overline{\mu_k}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \rho_k\begin{pmatrix}\cos\theta_k x - \sin\theta_k y\\ \sin\theta_k x + \cos\theta_k y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho_k(\cos\theta_k - i\sin\theta_k)x\\ \rho_k(\cos\theta_k - i\sin\theta_k)y\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\theta_k x - \sin\theta_k y = \cos\theta_k x - i\sin\theta_k x\\ \sin\theta_k x + \cos\theta_k y = \cos\theta_k y + i\sin\theta_k y\end{cases} \Leftrightarrow y = ix.$$

Ainsi, le sous-espace propre de $\rho_k R_{\theta_k}$ associé à la valeur propre μ_k est égal au sous-espace propre de $\rho_k R_{-\theta_k}$ associé à la valeur propre $\overline{\mu_k}$.
On montrerait de même de $E_{\overline{\mu_k}}(\rho_k R_{\theta_k}) = E_{\mu_k}(\rho_k R_{-\theta_k})$.
Et donc $\rho_k R_{-\theta_k} = Q^{-1}\begin{pmatrix}\overline{\mu_k} & 0\\ 0 & \mu_k\end{pmatrix}Q$.
On en déduit alors

$$P(\rho_k R_{\theta_k}) = \rho_k R_{-\theta_k} \Leftrightarrow Q^{-1}\begin{pmatrix}P(\mu_k) & 0\\ 0 & P(\overline{\mu_k})\end{pmatrix}Q = Q^{-1}\begin{pmatrix}\overline{\mu_k} & 0\\ 0 & \mu_k\end{pmatrix}Q \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{\mu_k} = P(\mu_k)\\ \mu_k = P(\overline{\mu_k})\end{cases}$$

Explication
Puisque les vecteurs propres de $\rho_k R_{\theta_k}$ sont également des vecteurs propres de $\rho_k R_{-\theta_k}$, il est possible de diagonaliser ces deux matrices dans une même base, i.e. en utilisant la **même** matrice de passage Q.

Notons que les deux équations de ce dernier système sont équivalentes, car P étant à coefficients réels, la seconde est la conjuguée de la première.
Ainsi, nous avons bien prouvé que $P(\rho_k R_{\theta_k}) = \rho_k R_{-\theta_k}$ si et seulement si $\overline{\mu_k} = P(\mu_k)$.

27. Notons que $\overline{Q_j} = T_j$, et que les L_k sont à coefficients réels, de sorte que

$$\overline{P} = \sum_{k=1}^{r}\overline{\lambda_k L_k} + \sum_{k=1}^{t}(\overline{\mu_k Q_k} + \overline{\overline{\mu_k} T_k}) = \sum_{k=1}^{r}\lambda_k L_k + \sum_{k=1}^{t}(\overline{\mu_k} T_k + \mu_k Q_k) = P.$$

Notation
Si P est un polynôme de $\mathbf{C}[X]$, on note $\overline{P} \in \mathbf{C}[X]$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués complexes de ceux de P.

On en déduit que P est à coefficients réels, donc $P \in \mathbf{R}[X]$.
Notons que ${}^tA = P(A)$ si et seulement si $f^* = P(f)$, et utilisons alors le résultat de la question 26.
• Soit $i \in [\![1, r]\!]$.
Alors $S(L_i) = 0$, de sorte que pour tout $k \in [\![1, t]\!]$, $Q_j(\lambda_i) = T_j(\lambda_i) = 0$.
De même, pour $k \in [\![1, r]\!]$, on a $L_k(\lambda_i) = \begin{cases}1 & \text{si } k = i\\ 0 & \text{si } k \neq i\end{cases}$
Et donc il vient

$$P(\lambda_i) = \sum_{k=1}^{r}\lambda_k L_k(\lambda_i) + \sum_{k=1}^{t}\underbrace{\overline{\mu_k} Q_k(\lambda_i) + \mu_k T_k(\lambda_i)}_{=0} = \lambda_i L_i(\lambda_i) = \lambda_i.$$

• Soit $i \in [\![1, t]\!]$.
Puisque $Q(\lambda_i) = 0$, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on a $L_k(\mu_i) = 0$.
Et pour $j \in [\![1, t]\!]$, on a

$$\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{t} \frac{(\mu_i - \mu_k)(\mu_i - \overline{\mu_k})}{(\mu_j - \mu_k)(\mu_j - \overline{\mu_k})}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \text{ et donc } Q_j(\mu_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Enfin, quel que soit $j \in [\![1, t]\!]$, $X - \mu_i$ divise T_j et donc $T_j(\mu_i) = 0$.
On en déduit donc que

$$P(\mu_i) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \underbrace{L_k(\mu_i)}_{=0} + \sum_{j=1}^{t} (\overline{\mu_j} Q_j(\mu_i) + \mu_j T_j(\mu_i)) = \overline{\mu_i}.$$

Les conditions de la question 26 sont donc bien vérifiées, et ainsi, $\boxed{{}^tA = P(A).}$

Remarque
Il a été dit en cours qu'un polynôme en A commute avec A.
Donc nous venons ici de prouver qu'une matrice est normale si et seulement si ${}^tA$ est un polynôme en A.

28. Dans ce cas, on a $r = 2$, et $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, et $t = 1$, avec $\mu_1 = e^{2i\pi/3}$.
Avec les notations précédentes, il vient alors $S = X(X+1)$ et $Q = X^2 + X + 1$. Et donc[13] $L_1 = (X+1)Q, L_2 = -XQ$ et

$$Q_1 = \frac{S}{-1} \frac{X - e^{-2i\pi/3}}{e^{2i\pi/3} - e^{-2i\pi/3}} = i\frac{S(X - e^{-2i\pi/3})}{\sqrt{3}}.$$

Et alors $T_1 = \overline{S_1} = -i\dfrac{S(X - e^{2i\pi/3})}{\sqrt{3}}$.
On en déduit que

$$\begin{aligned} P &= -L_2 + e^{-2i\pi/3}Q_1 + e^{2i\pi/3}T_1 = XQ + e^{-2i\pi/3}Q_1 + \overline{e^{-2i\pi/3}Q_1} = XQ + 2\mathrm{Re}(e^{-2i\pi/3}Q_1) \\ &= XQ + S\sqrt{3}\mathrm{Re}\left(\left(-\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ &= X(X^2 + X + 1) + X(X+1)^2 = \boxed{2X^3 + 2X^2 + X.} \end{aligned}$$

[13] Nous ne détaillons pas ici les calculs, il n'y a rien de difficile, c'est juste terriblement pénible !

ESSEC 2013

Sujet : Étude d'un endomorphisme de fonctions défini par une intégrale impropre **Moyen**
Abordable en première année : ✓ (sauf la question 15 qui nécessite le changement de variable dans les intégrales impropres.) **Intérêt** : ★★★
Thèmes du programme abordés : fonctions d'une variable réelle, intégrales impropres.
Modifications apportées au sujet d'origine : le début de la partie I a été changé, la fonction arctangente est au programme 2013 et il est étrange de prétendre qu'il s'agit d'une nouvelle fonction introduite dans l'énoncé.
Commentaires : sujet long, mais qui constitue un excellent entraînement aux techniques calculatoires.

On pose
$$E_0 = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R}),\ \text{bornée sur } \mathbf{R} \right\}.$$
Si $f \in E_0$, on notera $N_0(f) = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$.

Partie I : Étude de la fonction Arctan.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\arctan(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.
2. Montrer que arctan admet une limite finie L, notée provisoirement L en $+\infty$ et que arctan réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]-L;L[$.
3. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, calculer $\arctan(\tan(x))$ et en déduire la valeur de L.
4. Justifier que, pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $|\arctan x - \arctan y| \leqslant |x-y|$.
5. Montrer que, pour tout $x\in\mathbf{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

Si $f\in E_0$, on définit, sous réserve d'existence, $\Phi(f) : x\in\mathbf{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(tx)\frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$.
L'objectif du problème est d'obtenir quelques propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ.

Partie II : Première propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ.

6. Vérifier que E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
7. Soit $f\in E_0$. Montrer que, pour tout $x\in\mathbf{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\arctan(tx)\frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$ est absolument convergente.
8. Soit $f\in E_0$, montrer que $\Phi(f)$ est bornée et que
$$N_0(\Phi(f)) \leqslant \frac{\pi^2}{4}N_0(f).$$
9. **Continuité de $\Phi(f)$ pour $f\in E_0$.**
Dans cette question, f désigne un élément de E_0 et x un réel.
   a. Soit A un réel strictement positif et $h\in\mathbf{R}^*$. Vérifier que
$$\left|[\Phi(f)](x+h)-[\Phi(f)](x)\right| \leqslant N_0(f)\left(\int_0^A \frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,dt + \int_A^{+\infty}\frac{|\arctan(t(x+h))-\arctan(tx)|}{1+t^2}\,dt\right).$$
   b. En déduire que pour tout $h\in\mathbf{R}^*$, pour tout $A>0$
$$\left|[\Phi(f)](x+h)-[\Phi(f)](x)\right| \leqslant N_0(f)\left(|h|\int_0^A\frac{t}{1+t^2}\,dt + \pi\int_A^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\right).$$
   c. Soit $h\in\mathbf{R}^*$. En choisissant $A=\dfrac{1}{|h|}$, établir que
$$\left|[\Phi(f)](x+h)-[\Phi(f)](x)\right| \leqslant |h|\frac{N_0(f)}{2}\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi N_0(f)\arctan|h|.$$
   d. Montrer alors que $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbf{R}$.
   e. En déduire que $\Phi : f\in E_0 \mapsto \Phi(f)$ est un endomorphisme de E_0.

Partie III : Étude d'un exemple

Dans cette partie, on s'intéresse à l'application $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\, dt$.

g est ainsi l'image par Φ de la fonction constante égale à 1.

10. Vérifier que g est impaire.

11. **Dérivabilité de g sur $]0,+\infty[$.**
Soit x un réel strictement positif.

- **a.** Vérifier que, pour tout $u \in \mathbf{R}$, $|\arctan''(u)| \leqslant \dfrac{1}{1+u^2}$.
- **b.** Soit a, b deux réels distincts et I le segment d'extrémités a et b. Montrer que

$$\left|\arctan b - \arctan a - \frac{b-a}{1+a^2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \max_{u\in I}\left(\frac{1}{1+u^2}\right).$$

- **c.** Soit $h \in \left]-\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right[$ et t un réel positif. Établir

$$\left|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2}\right| \leqslant \frac{t^2h^2}{2}\frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}.$$

- **d.** Montrer alors que, pour tout $h \in \left]-\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right[$,

$$\left|g(x+h) - g(x) - h\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\, dt\right| \leqslant 2h^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(4+t^2x^2)}\frac{1}{(1+t^2)}\, dt.$$

- **e.** En déduire que g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et justifier que, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)}\frac{1}{(1+t^2)}\, dt.$$

- **f.** g est-elle dérivable sur $]-\infty, 0[$? Si oui, que vaut $g'(x)$ pour $x < 0$?

12. **Calcul de $g'(x)$ pour $x > 0$.**

- **a.** Déterminer $g'(1)$.
- **b.** Pour tout $x \in]0,1[\cup]1;+\infty[$, chercher des expressions $A(x)$ et $B(x)$, indépendantes de t telles que, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = A(x)\frac{t}{1+t^2x^2} + B(x)\frac{t}{1+t^2}.$$

- **c.** En déduire que, pour tout $x \in]0,1[\cup]1;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$.
- **d.** g est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$?

13. **Une nouvelle expression de $g(x)$ pour $x > 0$.**

- **a.** Justifier, pour tout $x > 0$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\, dt$.
- **b.** Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\, dt.$$

14. **Étude de la limite de g en $+\infty$.**

- **a.** Démontrer que, pour tout $x > 0$, $g(x) = \dfrac{\pi^2}{4} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\, dt$.
- **b.** Écrire, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^{1/\sqrt{x}} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\, dt$$

et montrer alors que

$$\left|\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\, dt\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{1}{t}\frac{1}{1+t^2}\, dt \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{x}}.$$

c. Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

15. **Application au calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.**

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\, dt$ est convergente et calculer sa valeur à l'aide des questions précédentes.

b. Vérifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\, dt = 2\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, dt$.

Indication : on pourra, en le justifiant, utiliser le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

c. Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\, dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^{2k} \ln t\, dt + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2}\, dt$$

(on justifiera l'existence des intégrales introduites).

d. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{2n} \ln t\, dt$.

e. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2}\, dt = 0$.

f. Donner alors la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. En déduire celle de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie IV - Retour à l'étude de Φ

16. Montrer que $\displaystyle\sup_{f \in E_0 \setminus \{0\}} \frac{N_0[\Phi(f)]}{N_0(f)} = \frac{\pi^2}{4}$.

Dans toute la suite du problème, on considère :

- $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $|\lambda| < \dfrac{4}{\pi^2}$, on pourra poser $\gamma = \dfrac{\pi^2}{4}|\lambda|$.
- pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\Phi^n = \underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{n \text{ fois}}$, autrement dit $\Phi^0 = \mathrm{id}_{E_0}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\Phi^{n+1} = \Phi \circ \Phi^n$.
- $f \in E_0 \setminus \{0\}$, on posera $M = N_0(f)$.
- pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi_n = \lambda^n \Phi^n(f)$.

17. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi_{n+1} = \lambda\Phi(\varphi_n)$ et $N_0(\varphi_{n+1}) \leqslant \gamma N_0(\varphi_n)$.
18. Peut-on avoir $\lambda\Phi(f) = f$? Que peut-on alors dire de $\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi$?
19. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $N_0(\varphi_n) \leqslant \gamma^n M$ et que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} N_0(\varphi_n)$ converge.

On note alors $\varphi : x \in \mathbf{R} \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)$.

20. Montrer que φ est bornée sur $\mathbf{R}$.
21. **Continuité de φ.**

a. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $h \in \mathbf{R}^*$,

$$|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)| \leqslant |\lambda| N_0(\varphi_n) \left[\frac{|h|}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) + \pi \arctan |h| \right].$$

b. En déduire que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $h \in \mathbf{R}^*$,

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leqslant |\lambda| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n) \right) \left[\frac{|h|}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) + \pi \arctan |h| \right] + |f(x+h) - f(x)|.$$

c. Justifier que φ est continue sur $\mathbf{R}$.

22. **Application aux valeurs spectrales de Φ.**

a. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer $(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right)$ et montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} N_0\left[(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) - f\right] = 0.$$

b. Montrer alors que $(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(\varphi) = f$. Que peut-on dire de $\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi$?

c. Soit $\mu \in \mathbf{R}^*$ tel que $\Phi - \mu\mathrm{id}_{E_0}$ ne soit pas bijective, montrer que $|\mu| \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}$.

ESSEC 2013 : Corrigé

Partie I : Étude de la fonction arctan

1. On sait que la fonction arctangente est une primitive sur $\mathbf{R}$ de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. Et donc pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan]_0^x = \arctan x - \arctan 0 = \boxed{\arctan(x).}$$

2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$, et nous savons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge. Par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge, et donc il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.

Si on note alors $L = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$, il vient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = L.}$$

La fonction arctangente est continue sur $\mathbf{R}$ (car réciproque d'une fonction continue), strictement croissante sur $\mathbf{R}$ (car sa dérivée y est strictement positive[1]) et $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = L$.

Or arctan est impaire (car réciproque de la fonction tangente qui est impaire) et donc $\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -L$.

D'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{arctan réalise alors une bijection de } \mathbf{R} \text{ sur }]-L, L[.}$

[1] Ou aussi car tan est strictement croissante.

Étrange...

Cette question était un peu déroutante, car on a précisément défini arctan comme étant la bijection réciproque de tan, qui réalise une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbf{R}$. On nous demande plus ou moins de redémontrer des propriétés du cours en faisant comme si nous ne les connaissions pas. Dans ce cas, mieux vaut éviter de dire «c'est du cours», même si c'est tentant !

3. Par définition, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan x) = x$. Et donc par composition de limites (on sait que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$), il vient

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} x = \lim_{u\to+\infty} \arctan(u) = L.$$

$u = \tan x$.

On en déduit que $\boxed{L = \frac{\pi}{2}.}$

4. La dérivée de arctan est la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$, qui est bornée par 1.
D'après l'inégalité des accroissements finis (qui s'applique puisque arctan est dérivable sur $\mathbf{R}$), on a alors, pour tous , $y \in \mathbf{R}$,

$$\boxed{|\arctan x - \arctan y| \leqslant 1|x-y|.}$$

5. La fonction $\varphi : x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ par composition de fonctions qui le sont, et on a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Par conséquent, la fonction est constante sur $\mathbf{R}_+^*$. Notons alors λ sa valeur.
En prenant la limite lorsque $x \to 0^+$, on obtient

$$\lambda = \lim_{x\to0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to0^+} \arctan x + \lim_{x\to0^+} \arctan \frac{1}{x} = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.}$$

Classique

Le même résultat est en fait valable sur $\mathbf{R}_-^*$: φ y est dérivable, de dérivée nulle, donc constante. L'étude de la limite en 0^- ou en $-\infty$ montre alors que $\forall x \in \mathbf{R}_-^*$,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Ceci nous rappelle qu'il faut être vigilant : si une fonction est de dérivée nulle, elle est constante sur **chaque intervalle** de son ensemble de définition, et non nécessairement sur tout son ensemble de définition (ici φ' est nulle sur $\mathbf{R}^*$ et pourtant φ n'est pas constante sur $\mathbf{R}^*$.)

Partie II : Premières propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ.

6. Il est évident que la fonction nulle est continue et bornée, et donc dans E_0.
Soient $f, g \in E_0$. Alors f et g sont continues, et

$$\forall x \in \mathbf{R}, |f(x)| \leqslant N_0(f) \text{ et } |g(x)| \leqslant N_0(g).$$

Soit alors $\lambda \in \mathbf{R}$. La fonction $\lambda f + g$ est encore continue et

$$\forall x \in \mathbf{R}, |(\lambda f + g)(x)| = |\lambda f(x) + g(x)| \leqslant |\lambda||f(x)| + |g(x)| \leqslant |\lambda| N_0(f) + N_0(g).$$

Donc la fonction $\lambda f + g$ est bornée (par $|\lambda| N_0(f) + N_0(g)$), et ainsi $\lambda f + g \in E_0$.
Alors, $\boxed{E_0 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}).}$

Explication

$N_0(f)$ est la borne supérieure des valeurs prises par f. C'est le plus petit des majorants de f.

Remarque

Ceci prouve au passage que

$N_0(\lambda f + g) \leqslant |\lambda| N_0(f) + N_0(g)$.

7. Soit $f \in E_0$ et soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. Alors, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a

$$\left| \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} \right| \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{N_0(f)}{1+t^2}.$$

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente, et donc il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left| \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} \right| dt$.
Par conséquent

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2}\, dt \text{ est absolument convergente.}}$$

8. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$|\Phi(f)(x)| = \left| \int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2}\, dt \right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left| \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} \right| dt \leqslant \frac{\pi}{2} N_0(f) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \frac{\pi^2}{4} N_0(f).$$

Ceci prouve donc que $\Phi(f)$ est bornée et que

$$\boxed{N_0(\Phi(f)) = \sup_{x \in \mathbf{R}} |\Phi(f)| \leqslant \frac{\pi^2}{4} N_0(f).}$$

Borne supérieure

Si pour tout x, $|f(x)| \leqslant M$, alors

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)| \leqslant M$$

car la borne supérieure est **le plus petit** des majorants.

9. **Continuité de $\Phi(f)$ pour $f \in E_0$.**

9.a. Par définition de Φ, on a

$$\begin{aligned}
[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x) &= \int_0^{+\infty} \arctan(t(x+h)) \frac{f(t)}{1+t^2}\, dt - \int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} (\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)) \frac{f(t)}{1+t^2}\, dt.
\end{aligned}$$

En prenant la valeur absolue, il vient alors

$$\begin{aligned}
|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)| &= \left| \int_0^{+\infty} (\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)) \frac{f(t)}{1+t^2}\, dt \right| \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \left| (\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)) \frac{f(t)}{1+t^2} \right| dt \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} |\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)| \frac{N_0(f)}{1+t^2}\, dt \\
&\leqslant \boxed{N_0(f) \left(\int_0^{A} \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2}\, dt + \int_A^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2}\, dt \right).}
\end{aligned}$$

Précision

Cette intégrale est bien convergente car on a montré à la question 7 que les intégrales $\Phi(f)(x+h)$ et $\Phi(f)(x)$ sont **absolument** convergentes.

9.b. Soit $A > 0$ fixé et $h \in \mathbf{R}^*$ fixé. Majorons chacune des deux intégrales obtenues à la question précédente.
En utilisant le résultat de la question 4, on a

$$\forall t \in [0, A], |\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)| \leqslant |t(x+h) - tx| \leqslant |th| \leqslant t|h|.$$

Par croissance de l'intégrale, il vient

$$\int_0^A \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^A |h|\frac{t}{1+t^2}\,dt.$$

De même, pour tout $t \geqslant A$, on a

$$|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)| \leqslant |\arctan(t(x+h))| + |\arctan(tx)| \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \leqslant \pi.$$

Par croissance de l'intégrale, il vient (la seconde intégrale est bien convergente par comparaison à une intégrale de Riemann)

$$\int_A^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2}\,dt \leqslant \pi \int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

En utilisant le résultat de la question 9.a, on a alors

$$\boxed{\left|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)\right| \leqslant N_0(f)\left(|h|\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\,dt + \pi\int_A^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\right).}$$

9.c. Comme indiqué dans l'énoncé, fixons h et soit $A = \frac{1}{|h|}$. Alors

$$\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\,dt = \int_0^{1/|h|} \frac{t}{1+t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^{1/|h|} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{|h|^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right).$$

De même, on a

$$\int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{1/|h|}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Pour calculer cette intégrale, soit $B > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{1/|h|}^{B} \frac{dt}{1+t^2} &= [\arctan(t)]_{1/|h|}^{B}\\ &= \arctan(B) - \arctan\frac{1}{|h|}\\ &\underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{|h|}.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_{1/|h|}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge et vaut $\displaystyle\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{|h|}$.

Utilisons à présent le résultat de la question 5, qui s'applique car $|h| \in \mathbf{R}_+^*$:

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{|h|} = \arctan|h|.$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\left|[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x)\right| \leqslant |h|\frac{N_0(f)}{2}\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi N_0(f)\arctan|h|.}$$

Rédaction ✎

On sent bien ici que la limite de

$$|h|\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right)$$

doit être nulle,non seulement parce que ça nous arrangerait bien, mais aussi par intuition des croissances comparées. Toutefois, il ne s'agit pas d'une croissance comparée usuelle, et donc il faut réussir à s'y ramener, avec des majorations, des équivalents, etc.
D'ailleurs le rapport du jury souligne que cette question a souvent été traitée avec légèreté («par croissance comparée...»).

9.d. Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. Montrons que $\Phi(f)$ est continue en x.
Lorsque $|h| \leqslant 1$, on a

$$0 \leqslant |h|\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) \leqslant |h|\ln\left(\frac{1+h^2}{h^2}\right) \leqslant |h|\ln\left(\frac{2}{h^2}\right) \leqslant |h|\left(\ln(2)-\ln(h^2)\right) \leqslant |h|\ln(2) - 2|h|\ln(|h|)$$

Par croissance comparée, ces deux termes tendent tous deux vers 0 et donc par le théorème des gendarmes

$$\lim_{h\to 0} |h|\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) = 0.$$

De même, par continuité de la fonction arctan, on a

$$\lim_{h\to 0} \arctan|h| = \arctan(0) = 0.$$

Donc en reprenant la majoration de la question 9.c, par le théorème des gendarmes, il vient

$$\lim_{h\to 0}[\Phi(f)](x+h) - [\Phi(f)](x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}[\Phi(f)](x+h) = [\Phi(f)](x).$$

Ainsi, la fonction $\Phi(f)$ est continue en x, et ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\boxed{\Phi(f) \text{ est continue sur } \mathbf{R}.}$

9.e. Nous venons de prouver que si $f \in E_0$, alors $\Phi(f)$ est continue, et nous avions déjà prouvé à la question 8 qu'elle était bornée, donc $\Phi(f) \in E_0$.
Reste à voir que Φ est linéaire, ce qui est une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégrale.
Ainsi, $\boxed{\Phi(f) \text{ est un endomorphisme de } E_0.}$

> **Rédaction** Ici, nous allons un peu vite pour la linéarité. Une copie qui traite un nombre significatif de questions pourra se permettre un tel raccourci, car la confiance du correcteur aura été gagnée grâce aux autres questions. En revanche si vous ne faite que quelques questions, mieux vaut prendre le temps d'écrire les détails.

Partie III : Étude d'un exemple

10. Rappelons que arctan est impaire car la fonction tangente l'est. Donc si $x \in \mathbf{R}$, on a

$$g(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(-tx)}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} -\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\,dt = -g(x).$$

Ainsi, $\boxed{g \text{ est impaire.}}$

11. **Dérivabilité de g sur $]0;+\infty[$**

11.a. Nous savons déjà que $\arctan'(u) = \frac{1}{1+u^2}$ et donc $\arctan''(u) = \frac{-2u}{(1+u^2)^2}$.
Et donc $|\arctan''(u)| = \frac{2|u|}{(1+|u|^2)^2}$.
Mais pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$(1-x)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - 2x + x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x \leqslant 1 + x^2.$$

En particulier, on a $2|u| \leqslant 1 + |u|^2$ et donc $0 \leqslant \dfrac{2|u|}{1+|u|^2} \leqslant 1$.

On en déduit alors que

$$\boxed{\forall u \in \mathbf{R}, |\arctan''(u)| \leqslant \frac{1}{1+u^2}.}$$

> **Très classique** On a souvent besoin de cette inégalité dans les sujets de concours. C'est souvent guidé, parfois non. Mieux vaut donc s'assurer qu'on sait la retrouver.

11.b. La fonction arctan est de classe $\mathscr{C}^2$, donc on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange en a à l'ordre 2 :

$$|\arctan b - \arctan a - \arctan'(a)(b-a)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \max_{u\in I} |\arctan''(u)|$$

Mais $\arctan'(a) = \frac{1}{1+a^2}$, et pour $u \in I$, $|\arctan''(u)| \leqslant \frac{1}{1+u^2}$. Donc il vient

$$\boxed{\left|\arctan b - \arctan a - \frac{b-a}{1+a^2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \max_{u\in I}\left(\frac{1}{1+u^2}\right).}$$

11.c. Appliquons l'inégalité obtenue précédemment avec $a = t(x+h)$ et $b = tx$. Alors,

$$\left|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx) - \frac{t(x+h)-tx}{1+t^2x^2}\right| \leqslant \frac{(t(x+h)-tx))^2}{2} \max_{u\in I}\left(\frac{1}{1+u^2}\right).$$

Ici, I désigne l'intervalle d'extrémités $t(x+h)$ et tx.

Mais on a $t\left(x - \frac{x}{2}\right) < t(x+h) < t\left(x + \frac{x}{2}\right)$ soit $\frac{tx}{2} < t(x+h) < \frac{3tx}{2}$. Donc $I \subset \left]\dfrac{tx}{2}; \dfrac{3tx}{2}\right[$.

Puisque la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ est décroissante sur I, on a alors

$$\max_{u\in I}\left(\frac{1}{1+u^2}\right) \leqslant \frac{1}{1+\left(\frac{tx}{2}\right)^2}.$$

> **Méthode** Il faut être minutieux sur ce genre de question. En commençant par identifier chacun des termes (on comprend bien qu'il faut utiliser la question précédente), puis par calculer ce qui peut l'être facilement, on comprend vite qu'il va falloir montrer que le max de la question précédente est ici inférieur à $\frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}$.

On en déduit donc que

$$\boxed{\left|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2}\right| \leqslant \frac{t^2h^2}{2}\frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}.}$$

11.d. Si l'on multiplie l'inégalité obtenue à la question 11.c par $\frac{1}{1+t^2} \geqslant 0$, il vient, pour tout $h \in \left]-\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right[$,

$$\left|\frac{\arctan(t(x+h))}{1+t^2} - \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} - \frac{th}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}\right| \leqslant \frac{t^2h^2}{2}\frac{1}{1+t^2}\frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}.$$

Ceci étant valable pour tout t positif, on a alors, par croissance de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\arctan(t(x+h))}{1+t^2} - \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} - \frac{th}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}\right| dt \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{t^2h^2}{2}\frac{1}{1+t^2}\frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}\,dt.$$

L'intégrale de droite converge bien par comparaison à une intégrale de Riemann (un équivalent suffit ici), donc l'intégrale de gauche converge par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions **positives**.

Notons que l'intégrale de droite peut également s'écrire

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2h^2}{2}\frac{1}{1+t^2}\frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}\,dt = 2h^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)(4+t^2x^2)}\,dt.$$

Enfin, nous savons[2] que

$$\left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan(t(x+h))}{1+t^2} - \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} - \frac{th}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}\right)dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty}\left|\frac{\arctan(t(x+h))}{1+t^2} - \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} - \frac{th}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}\right| dt.$$

[2] C'est l'inégalité triangulaire pour les intégrales absolument convergentes.

Mais par linéarité de l'intégrale[3], il vient

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan(t(x+h))}{1+t^2} - \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} - \frac{th}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}\right)dt = g(x+h)-g(x)-h\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}\,dt.$$

[3] Peut-être faut-il justifier que toutes ces intégrales convergent : pour les deux première, c'est déjà fait, pour la troisième, c'est automatique car obtenue par différence d'intégrales convergentes.

Nous avons donc bien prouvé que

$$\boxed{\left|g(x+h)-g(x)-h\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\,dt\right| \leqslant 2h^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(4+t^2x^2)}\frac{1}{(1+t^2)}\,dt.}$$

Précision

Aussi compliquée soit l'intégrale, elle ne dépend pas de h, et nous avons prouvé qu'il s'agit bien d'une intégrale convergente, donc c'est une constante !

11.e. Pour $h \neq 0$, l'inégalité précédente se réécrit

$$\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\,dt\right| \leqslant 2h\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(4+t^2x^2)}\frac{1}{(1+t^2)}\,dt.$$

Or, lorsque $x \to 0$, le terme de droite tend vers 0. Donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\,dt\right| = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\,dt = 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\,dt.$$

Ceci prouve que g est dérivable[4] en x et que

$$\boxed{g'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\,dt.}$$

[4] Nous revenons à la définition de la dérivée : limite du taux d'accroissement.

11.f. g est impaire. Donc elle est dérivable sur $]-\infty, 0[$ car elle l'est sur $]0, +\infty[$, et on a alors

$$\boxed{\forall x < 0, g'(x) = g'(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\, dt.}$$

12. Calcul de $g'(x)$ pour $x > 0$.

12.a. On a $g'(1) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\, dt$. Mais pour $A > 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{t}{(1+t^2)^2}\, dt &= \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}\right]_0^A \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+A^2} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Et donc $\boxed{g'(1) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\, dt = \frac{1}{2}.}$

12.b. Supposons donc que de telles expressions existent, et que pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}&\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = A(x)\frac{t}{1+t^2x^2} + B(x)\frac{t}{1+t^2} \\ \Leftrightarrow &\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = \frac{A(x)t(1+t^2) + B(x)t(1+t^2x^2)}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} \\ \Leftrightarrow &\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = \frac{t(A(x)+B(x)) + t^3(A(x)+x^2B(x))}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\end{aligned}$$

Nous devons donc avoir pour tout $t \in \mathbf{R}$, $t = t(A(x)+B(x)) + t^3(A(x)+x^2B(x))$. Or deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{cases} A(x)+B(x) = 1 \\ A(x)+x^2B(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 1 - B(x) \\ B(x)(x^2-1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} A(x) = -\frac{x^2}{1-x^2} \\ B(x) = \frac{1}{1-x^2} \end{cases}}$$

Notons que ces quantités sont bien indépendantes de t.

12.c. D'après la question précédente, on a pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$,

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{x^2}{1-x^2}\frac{t}{1+t^2x^2} + \frac{1}{1-x^2}\frac{t}{1+t^2}\right) dt.$$

Pour $A > 0$, on a alors

$$\int_0^A \frac{t}{1+t^2x^2}\, dt = \left[\frac{1}{2x^2}\ln(1+t^2x^2)\right]_0^A = \frac{1}{2x^2}\ln(1+x^2A^2)$$

et de même

$$\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\, dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^A = \frac{1}{2}\ln(1+A^2).$$

Donc il vient, par linéarité de l'intégrale[5]

$$\begin{aligned}\int_0^A \left(-\frac{x^2}{1-x^2}\frac{t}{1+t^2x^2} + \frac{1}{1-x^2}\frac{t}{1+t^2}\right) dt &= -\frac{x^2}{1-x^2}\int_0^A \frac{t}{1+t^2x^2}\, dt + \frac{1}{1-x^2}\int_0^A \frac{t}{1+t^2}\, dt \\ &= \frac{-1}{2(1-x^2)}\ln(1+x^2A^2) + \frac{1}{2(1-x^2)}\ln(1+A^2) \\ &= \frac{1}{2(1-x^2)}\ln\left(\frac{1+A^2}{1+x^2A^2}\right) \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2(1-x^2)}\ln\frac{1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2-1}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{g'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}.}$$

Parité/imparité

Pour retrouver le fait que g est dérivable sur $\mathbf{R}_-^*$, il suffit de se rappeler qu'on a $g(x) = -g(-x)$, et que donc, par composition de fonctions dérivables, g est dérivable sur $\mathbf{R}_-^*$. De plus, en dérivant cette relation, on a

$$g'(x) = -(-g'(-x)) = g'(-x).$$

De petits dessins, par exemple avec les fonctions carré (qui est paire) et cube (qui est impaire) peuvent être d'une aide précieuse dans ces cas là.

☠ Danger !

La tentation est grande ici d'utiliser la linéarité de l'intégrale, mais si on sépare en deux, les deux intégrales ainsi obtenues divergente, car

$$\frac{t}{1+t^2x^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{x^2t}$$

et de même

$$\frac{t}{1+t^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{t}.$$

[5] Ici on parle de la linéarité de l'intégrale sur un segment, il n'y a donc pas de précautions à prendre

12.d. Par composition de fonction usuelles, g' est continue sur $]0,1[\cup]1;+\infty[$. Il reste donc juste à voir si elle est continue en 1. Or,

$$\frac{\ln(x)}{x^2-1} = \frac{\ln(1+(x-1))}{(x-1)(x+1)} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x+1} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{2}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1} g'(x) = \frac{1}{2} = g'(1)$: g' est continue en 1 et donc $\boxed{g \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0;+\infty[.}$

13. Une nouvelle expression de $g(x)$ pour $x > 0$.

13.a. Si $x < 1$, la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2-1}$ est continue et positive[6] sur $]0,x]$, donc l'unique éventuel problème de convergence est au voisinage de 0.

Au voisinage de 0, $\frac{\ln t}{t^2-1} \sim \ln t$. Mais $\displaystyle\int_0^{1/2} \ln t\, dt$ est convergente car

$$\int_A^{1/2} \ln t\, dt = [t\ln t - t]_A^{1/2} = -\frac{\ln 2 + 1}{2} - A\ln A + A \underset{A\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{\ln 2+1}{2}.$$

On en déduit donc que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{t^2-1}\, dt$ converge et donc $\boxed{\displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\, dt \text{ converge.}}$

Maintenant, si $x \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2-1}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,x]$, et donc il y a également un éventuel problème de convergence en 1. Mais nous avons prouvé précédemment que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

de sorte que $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\, dt$ est faussement impropre, et donc convergente.

Dans tous les cas,

$$\boxed{\forall x > 0, \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\, dt \text{ converge.}}$$

13.b. Puisque g' est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, nous savons que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \forall y \in \mathbf{R}_+^*, g(x) - g(y) = \int_y^x g'(t)\, dt = \int_y^x \frac{\ln t}{t^2-1}\, dt.$$

À présent, lorsque $y \to 0^+$, par continuité de g, $g(y) \to g(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0\, dt = 0$.

Et $\displaystyle\int_y^x \frac{\ln t}{t^2-1}\, dt \to \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\, dt$.

On a donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}_+^*, g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}\, dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\, dt.}$$

14. Étude de la limite de g en $+\infty$

14.a. Nous savons que pour $x > 0$ et $t > 0$, par la question 5, $\arctan(tx) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)$. Et donc

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\right) \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

Mais on a

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\, dt$ qui est convergente car différence de deux intégrales convergentes, et

$$\boxed{g(x) = \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\, dt.}$$

[6] car numérateur et dénominateur sont négatifs !

Danger

La tentation est grande de prendre directement $y = 0$, mais le théorème que nous utilisons est un théorème d'intégration sur un segment ! Or g n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$, seulement sur $]0,x]$.

Subtilité

Remplacer $g'(t)$ par $\frac{\ln t}{t^2-1}$ est juste... si $t \neq 1$. Mais comme deux fonctions qui sont égales sauf en un nombre fini de points ont la même intégrale, on ne fait pas d'erreur ici.

Astuce

On pourrait redémontrer que cette intégrale converge par le calcul, mais il est bien plus rapide d'utiliser ce que nous avons déjà fait !

14.b. Par la relation de Chasles, on a

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^{1/\sqrt{x}} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Il est aisé de voir que toutes ces intégrales sont positives[7], et donc

$$\left|\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt\right| = \int_0^{1/\sqrt{x}} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

[7] Car intégrales de fonctions positives

On met ici la valeur absolue pour être en accord avec l'énoncé, mais elle ne sert strictement à rien !

Mais pour $t \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{x}}\right[$, on a

$$0 \leqslant \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2} \leqslant \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^{1/\sqrt{x}} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{\pi}{2}\,dt = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}.$$

Méthode

Avant de se lancer dans des calculs sans fin, il est conseillé de chercher au brouillon quel est la contribution de chaque terme au majorant que l'on souhaite (ici $\frac{\pi}{\sqrt{x}}$).

Ici, on souhaiterait que chacun soit inférieur à $\frac{\pi}{2\sqrt{x}}$.

Pour la seconde intégrale, notons que d'après la question 3 appliquée avec $y = 0$, on a

$$\forall x > 0, \forall t \in \mathbf{R}_+^*, 0 \leqslant \arctan\left(\frac{1}{tx}\right) \leqslant \frac{1}{tx}.$$

Et donc, par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{x}\int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{1}{t}\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Cette dernière intégrale converge bien par comparaison à une intégrale de Riemann convergente.

Mais pour $t \in \left[\frac{1}{\sqrt{x}}, +\infty\right[$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \sqrt{x} \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{t}\frac{1}{1+t^2} \leqslant \sqrt{x}\frac{1}{1+t^2}$$

si bien que, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{1}{t}\frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant \sqrt{x}\int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \sqrt{x}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} \leqslant \sqrt{x}\frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{x}\int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{1}{t}\frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant \frac{\sqrt{x}}{x}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}.$$

Et donc

$$\left|\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt\right| \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{x}} + \frac{\pi}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{x}}.}$$

14.c. Par le théorème des gendarmes, il vient alors

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt = 0$$

puis

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4} - \lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi^2}{4}.}$$

15. Application au calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

15.a. Nous savons que pour $x > 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$ converge et vaut $g(x)$. Or, à la question 14, il vient d'être démontré que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt = \frac{\pi^2}{4}.$$

Ceci nous garantit donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt = \frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt = -\frac{\pi^2}{4}.}$$

15.b. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ réalise une bijection $\mathscr{C}^1$ de $]1,+\infty[$ sur $]0,1[$. Procédons alors, dans $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt$, au changement de variable $t = \frac{1}{u}$, de sorte que $dt = -\frac{1}{u^2}\,du$. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt$ converge, la convergence de l'intégrale obtenue après changement de variable est automatique et

Chgt de variable

Une bijection $\mathscr{C}^1$ est automatiquement strictement monotone grâce au théorème des valeurs intermédiaires.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt = \int_1^0 \frac{\ln\frac{1}{u}}{1-\frac{1}{u^2}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_0^1 \frac{-\ln u}{u^2-1}\,du = \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u^2}\,du.$$

Et alors, par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt &= \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt\\ &= \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt + \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u^2}\,du\\ &= \boxed{2\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt.}\end{aligned}$$

15.c. Pour $t \in]0,1[$, on a[8]

$$\sum_{k=0}^n t^{2k} = \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^n t^{2k} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}.$$

Et donc, après multiplication par $\ln t$,

$$\frac{\ln t}{1-t^2} = \sum_{k=0}^n (\ln t)t^{2k} + \frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}.$$

De plus, pour $k \in \mathbf{N}$, pour tout $t \in]0,1]$,

$$|(\ln t)t^{2k}| \leqslant |\ln t| = -\ln t.$$

En effet, $\ln t \leqslant 0$ et donc $|\ln t| = -\ln t$.

Mais $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt$ converge car

$$\int_A^1 \ln t\,dt = [t\ln t]_A^1 = -1 + A - A\ln A \underset{A\to 0^+}{\longrightarrow} 1.$$

Donc par comparaison, $\displaystyle\int_0^1 t^{2k}\ln t\,dt$ converge (absolument).

Alors, puisque nous avions déjà prouvé que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt$ converge, la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}\,dt$ est automatique, par somme d'intégrales convergentes et

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (\ln t)t^{2k}\,dt + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}\,dt.}$$

[8] Rappelons que ce qui est important ici n'est pas le fait d'être dans $]0,1[$, mais différent de 1, la formule donnant les sommes partielles de la série $\sum q^n$ étant valable pour tout $q \neq 1$, y compris si la série diverge.

15.d. Nous venons de prouver que pour $n=0$, on a $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt = -1$.

De manière générale, procédons à une intégration par parties sur un segment de la forme $[A, 1-A] \subset [0,1]$. En posant $u=\ln t, v'=t^{2n}$, fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[A,1-A]$, on a

$$\begin{aligned}\int_A^{1-A}(\ln t)t^{2n}\,dt &= \left[\ln t\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_A^{1-A} - \int_A^{1-A}\frac{t^{2n+1}}{t(2n+1)}\,dt\\ &=\frac{1}{2n+1}\left(\ln(1-A)(1-A)^{2n+1}-\ln(A)A^{2n+1}\right)-\int_A^{1-A}\frac{t^{2n}}{2n+1}\,dt\\ &=\frac{1}{2n+1}\left(\ln(1-A)(1-A)^{2n+1}-\ln(A)A^{2n+1}\right)-\left[\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right]_A^{1-A}\\ &=\frac{1}{2n+1}\left(\ln(1-A)(1-A)^{2n+1}-\ln(A)A^{2n+1}\right)-\frac{1}{(2n+1)^2}\left((1-A)^{2n+1}-A^{2n+1}\right)\\ &\underset{A\to 0}{\longrightarrow}\boxed{-\frac{1}{(2n+1)^2}}.\end{aligned}$$

Astuce

On sait déjà que l'intégrale converge, si on souhaite gagner du temps, plutôt que de prendre un segment $[A,B]$ puis prendre **deux limites**, on peut se contenter d'une seule limite. Le gain de temps n'est pas énorme pour autant...

⚠Ceci n'est valable que si l'on sait déjà que l'intégrale converge. Si vous n'êtes pas sûr de votre coup, mieux vaut prendre deux limites.

15.e. Coupons l'intégrale en deux à l'aide de la relation de Chasles :

$$\int_0^1\frac{\ln t}{t^2-1}t^{2n+2}\,dt=\int_0^{1/2}\frac{\ln t}{t^2-1}t^{2n+2}\,dt+\int_{1/2}^1\frac{\ln t}{t^2-1}t^{2n+2}\,dt.$$

La fonction $t\mapsto\frac{\ln t}{1-t^2}$ est continue et négative sur $[1/2,1]$ et donc y admet un minimum $m\leqslant 0$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a, par croissance de l'intégrale,

$$0\geqslant\int_{1/2}^1\frac{\ln t}{t^2-1}t^{2n+2}\,dt\geqslant m\int_{1/2}^1 t^{2n+2}\,dt\geqslant\frac{m}{2n+3}\left(1-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)\geqslant\frac{m}{2n+3}.$$

Par le théorème des gendarmes, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{1/2}^1\frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}\,dt=0.$$

Sur $]0,1/2[$, on a $1-t^2\in\left[\frac34,1\right]$ et donc

$$\frac43(\ln t)t^{2n+2}\leqslant\frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}\leqslant 0$$

Et donc

$$\frac43\int_0^{1/2}(\ln t)t^{2n+2}\,dt\leqslant\int_0^{1/2}\frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}\,dt\leqslant 0.$$

Mais la fonction $t\mapsto(\ln t)t^{2n+2}$ est négative sur $]0,\frac12]$, donc

$$\int_0^{1/2}(\ln t)t^{2n+2}\,dt\geqslant\int_0^1(\ln t)t^{2n+2}\,dt=-\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Et enfin

$$-\frac{4}{3(2n+1)^2}\leqslant\int_0^{1/2}\frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}\,dt\leqslant 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1/2}\frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}\,dt=0.$$

Enfin, par somme de limites, il vient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}t^{2n+2}\,dt=0.}$$

Méthode

Pour montrer que la limite est nulle, on a sûrement envie d'utiliser des majorations, et pourquoi pas d'utiliser

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n\,dt=0.$$

Le problème est que la fonction $t\mapsto\dfrac{\ln t}{1-t^2}$ tend à la fois vers $-\infty$ en 0 et vers $+\infty$ en 1, donc il est dur de majorer efficacement sur $]0,1[$. C'est pour cette raison que l'on choisit de la couper en deux, pour traiter séparément le problème en 0 et le problème en 1.

Signes !

$\ln t$ est négatif, donc on a bien pris soin de changer le sens des inégalités

Important

L'inégalité qui suit n'est valable que parce que la fonction est négative (c'est clair si on pense à l'interprétation de l'intégrale en terme d'aire), elle ne le serait pas nécessairement pour une fonction changeant de signe.

15.f. En combinant les résultats des questions 15.a à 15.d, il vient

$$-\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,dt = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2}\,dt.$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on a alors la convergence[9] de la série de terme général $\frac{1}{(2k+1)^2}$ et

[9] Cette convergence était aisée à obtenir par ailleurs par comparaison à une série de Riemann.

$$-\frac{\pi^2}{8} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \Leftrightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

Enfin, en séparant les termes pairs des termes impairs dans la série (convergente) de terme général $\frac{1}{n^2}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Classique

Une telle relation existe pour toutes les séries de Riemann : si l'on connaît la somme de la série des termes impairs, on peut en déduire la somme de la série entière et vice-versa.

Soit encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}.}$$

Partie IV – Retour à l'étude de Φ.

16. Nous avons prouvé à la question 8 que pour tout $f \in E_0$, $N_0(\Phi(f)) \leqslant \frac{\pi^2}{4} N_0(f)$.

Or, si $f \in E_0$ est non nulle, $|f|$ est non nulle, de sorte que $N_0(f) \neq 0$. Et alors $\frac{N_0(\Phi(f))}{N_0(f)} \neq \frac{\pi^2}{4}$.

Donc déjà, $\sup\limits_{f\in E_0\setminus\{0\}} \frac{N_0(\Phi(f))}{N_0(f)} \leqslant \frac{\pi^2}{4}$.

De plus, nous avons prouvé à la question 14.c que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(1)(x) = \frac{\pi^2}{4}$. Et donc $N_0(\Phi(1)) \geqslant \frac{\pi^2}{4}$.

Détails

Si on avait au contraire $N_0(g) < \frac{\pi^2}{4}$, alors $g(x)$ ne pourrait pas prendre des valeurs aussi proches que l'on veut de $\frac{\pi^2}{4}$, contredisant $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4}$.

Mais la fonction constante égale à 1 vérifie $N_0(1) = 1$, de sorte que $\frac{N_0(\Phi(1))}{N_0(1)} \geqslant \frac{\pi^2}{4}$.

Par conséquent, $\sup\limits_{f\in E_0\setminus\{0\}} \frac{N_0(\Phi(f))}{N_0(f)} \geqslant \frac{\pi^2}{4}$ et donc

$$\boxed{\sup_{f\in E_0\setminus\{0\}} \frac{N_0(\Phi(f))}{N_0(f)} = \frac{\pi^2}{4}.}$$

17. Par linéarité de Φ, et donc de Φ^n, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\varphi_{n+1} = \lambda^{n+1}\Phi^{n+1}(f) = \lambda\Phi^{n+1}(\lambda^n f) = \lambda\Phi(\Phi^n(\lambda^n f)) = \lambda\Phi(\lambda^n\Phi^n(f)) = \boxed{\lambda\Phi(\varphi_n).}$$

De plus, si $f \in E_0$ et $\mu \in \mathbf{R}$, alors on a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|\mu f(x)| = |\mu||f(x)|$, de sorte que

$$N_0(\mu f) = \sup_{x\in\mathbf{R}} |\mu f(x)| = |\mu| \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)| = |\mu| N_0(f).$$

Et donc $N_0(\varphi_{n+1}) = |\lambda| N_0(\Phi(\varphi_n)) \leqslant |\lambda|\frac{\pi^2}{4} N_0(\varphi_n) \leqslant \boxed{\gamma N_0(\varphi_n).}$

18. Si $\lambda\Phi(f) = f$, alors soit $\lambda = 0$ et donc $f = 0$.
Soit $\lambda \neq 0$, et donc $\Phi(f) = \frac{1}{\lambda} f$.
On en déduit que $N_0(\Phi(f)) = N_0\left(\frac{1}{\lambda} f\right) = \left|\frac{1}{\lambda}\right| N_0(f)$.
Or, on a

$$N_0(\Phi(f)) \leqslant \frac{\pi^2}{4} N_0(f) \Leftrightarrow N_0(f) \leqslant \frac{\pi^2}{4}|\lambda| N_0(f).$$

Mais par hypothèse, $\frac{\pi^2}{4}|\lambda| < 1$, donc nécessairement $N_0(f) = 0$.
Soit encore : $\forall x \in \mathbf{R}, |f(x)| \leqslant 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$.
Et donc $f = 0$ est la seule fonction vérifiant $\lambda\Phi(f) = f$.
On en déduit que $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi) = \{0\}$ et donc $\boxed{\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi \text{ est injective.}}$

Danger !
Bien que $\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi$ soit un **endomorphisme** de E_0, on ne peut en déduire que $\mathrm{id}_{E_0} - \Phi$ est bijective. En effet, il faudrait pour cela que E_0 soit de dimension finie pour pouvoir appliquer le théorème du rang.
Notons que nous n'avons à aucun moment prouvé que la dimension de E_0 est infinie, mais c'est généralement le cas des espaces de fonctions, à moins qu'ils soient définis explicitement par une famille finie d'éléments.

19. On a évidemment $N_0(\varphi_0) = N_0(f) = M \leqslant \gamma^0 M = M$, et une récurrence immédiate utilisant $N_0(\varphi_{n+1}) \leqslant \gamma N_0(\varphi_n)$ nous donne $\boxed{0 \leqslant N_0(\varphi_n) \leqslant \gamma^n M.}$
Et puisque $|\gamma| < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \gamma^n M$ est une série géométrique convergente.
Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que
$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} N_0(\varphi_n) \text{ converge absolument, donc converge.}}$

20. D'après l'inégalité triangulaire, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$|\varphi(x)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n).$$

Et donc $\boxed{\varphi \text{ est bornée.}}$

21. **Continuité de φ.**

21.a. Soient $n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}$ et $h \in \mathbf{R}^*$. Alors

$$\begin{aligned}|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)| &= |\lambda\Phi(\varphi_n)(x+h) - \lambda\Phi(\varphi_n)(x)| \\ &= |\lambda|\,|\Phi(\varphi_n)(x+h) - \Phi(\varphi_n)(x)| \\ &\leqslant \boxed{|\lambda| N_0(\varphi_n)\left(\frac{|h|}{2}\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi\arctan|h|\right).}\end{aligned}$$

C'est le résultat de la question 9.c, appliqué à la fonction $\varphi_n \in E_0$.

21.b. En utilisant la question précédente, il vient, pour $x \in \mathbf{R}$ et $h \in \mathbf{R}^*$,

$$\begin{aligned}|\varphi(x+h) - \varphi(x)| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x+h) - \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x)\right| \\ &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} (\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x))\right| \\ &\leqslant |\varphi_0(x+h) - \varphi_0(x)| + \sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)| \\ &\leqslant |f(x+h) - f(x)| + \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda| N_0(\varphi_n)\left(\frac{|h|}{2}\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi\arctan|h|\right) \\ &\leqslant \boxed{|f(x+h) - f(x)| + |\lambda|\left(\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n)\right)\left(\frac{|h|}{2}\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi\arctan|h|\right).}\end{aligned}$$

Sous réserve de la convergence de cette seconde somme.

Cette série converge car $\sum_n N_0(\varphi_n)$ converge. L'emploi de l'inégalité triangulaire est donc bien justifié.

21.c. Lorsque $h \to 0$, on a $f(x+h) \underset{h\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ par continuité de f au point x.
Et à la question 9.d, il a été prouvé que

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{|h|}{2}\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi\arctan|h|\right) = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc

$$\lim_{h\to 0} |\varphi(x+h) - \varphi(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \varphi(x+h) = \varphi(x).$$

On en déduit que φ est continue en x. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbf{R}.}$

Remarque
Puisque nous avions déjà prouvé que φ est bornée sur $\mathbf{R}$, cela signifie donc que $\varphi \in E_0$.

22. **Application aux valeurs spectrales de Φ.**

22.a. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) &= \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k - \lambda\Phi\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k - \sum_{k=0}^{n+1} \lambda\Phi(\varphi_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k - \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_{k+1}\\ &= \varphi_0 - \varphi_{n+2} = \boxed{f - \varphi_{n+2}.}\end{aligned}$$

On reconnaît une somme télescopique.

On a donc $(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) - f = -\varphi_{n+2}$ et donc

$$0 \leqslant N_0\left[(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) - f\right] = N_0(-\varphi_{n+2}) = N_0(\varphi_{n+2}) \leqslant \gamma^{n+2}M \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} N_0\left[(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) - f\right] = 0.}$$

22.b. Pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(\varphi) - f = \left((\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(\varphi) - (\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right)\right) + \left((\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) - f\right).$$

Et donc, d'après la remarque faite à la question 6,

$$N_0\left[(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(\varphi) - f\right] \leqslant N_0\left[(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(\varphi) - (\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right)\right] + N_0\left[(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) - f\right].$$

Or, par linéarité de $\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi$, on a

$$(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(\varphi) - (\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) = (\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\varphi - \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right) = (\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=n+2}^{+\infty} \varphi_k\right).$$

Remarque

$$\sum_{k=n+2}^{+\infty} \varphi_k = \varphi - \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k$$

est un élément de E_0 car combinaison linéaire d'éléments de E_0.

On en déduit que

$$\begin{aligned}N_0\left[(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(\varphi) - (\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k\right)\right] &= N_0\left[(\mathrm{id}_{E_0} - \lambda\Phi)\left(\sum_{k=n+2}^{+\infty} \varphi_k\right)\right]\\ &= N_0\left[\sum_{k=n+2}^{+\infty} \varphi_k - \lambda\Phi\left(\varphi - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k\right)\right]\\ &\leqslant N_0\left(\sum_{k=n+2}^{+\infty} \varphi_k\right) + |\lambda| N_0\left(\sum_{k=n+2}^{+\infty} \varphi_k\right)\\ &\leqslant N_0\left(\sum_{k=n+2}^{+\infty} \varphi_k\right) + |\lambda|\frac{\pi^2}{4} N_0\left(\sum_{k=n+2}^{+\infty} \varphi_k\right)\\ &\leqslant \left(1 + |\lambda|\frac{\pi^2}{4}\right) N_0\left(\sum_{k=n+2}^{+\infty} \varphi_k\right).\end{aligned}$$

Or, pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\left|\sum_{k=n+2}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+2}^{+\infty} |\varphi_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+2}^{+\infty} N_0(\varphi_k).$$

Et donc
$$N_0\left(\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k\right)\leqslant\sum_{k=n+2}^{+\infty}N_0(\varphi_k)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Limite

Le reste d'ordre n d'une série convergente tend vers 0 lorsque $n\to+\infty$. Or nous savons que $\sum_k N_0(\varphi_k)$ converge.

Ainsi, on a
$$\begin{aligned}N_0\left[(\mathrm{id}_{E_0}-\lambda\Phi)(\varphi)-f\right]&\leqslant N_0\left[(\mathrm{id}_{E_0}-\lambda\Phi)(\varphi)-(\mathrm{id}_{E_0}-\lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1}\varphi_k\right)\right]+N_0\left[(\mathrm{id}_{E_0}-\lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1}\varphi_k\right)-f\right]\\&\leqslant\left(1+|\lambda|\frac{\pi^2}{4}\right)N_0\left(\sum_{k=n+2}^{+\infty}\varphi_k\right)+N_0\left[(\mathrm{id}_{E_0}-\lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n+1}\varphi_k\right)-f\right]\\&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$

Le second membre tend vers 0 d'après la question 22.a.

On en déduit que $N_0\left[(\mathrm{id}_{E_0}-\lambda\Phi)(\varphi)-f\right]=0$ et donc[10] que
$$(\mathrm{id}_{E_0}-\lambda\Phi)(\varphi)-f=0\Leftrightarrow\boxed{(\mathrm{id}_{E_0}-\lambda\Phi)(\varphi)=f.}$$

[10] Nous avons prouvé à la question 18 que si $g\in E_0$ vérifie $N_0(g)=0$, alors $g=0$.

Nous venons de prouver que tout élément de E_0 possède un antécédent par $\mathrm{id}_{E_0}-\lambda\Phi$, et donc que $\mathrm{id}_{E_0}-\lambda\Phi$ est surjectif. Combiné à ce qui a été dit à la question 18, on en déduit que $\boxed{\mathrm{id}_{E_0}-\lambda\Phi \text{ est bijectif.}}$

22.c. Si $\Phi-\mu\mathrm{id}_{E_0}$ n'est pas bijectif et $\lambda\neq0$, alors $-\frac{1}{\mu}\left(\Phi-\mu\mathrm{id}_{E_0}\right)=\mathrm{id}_{E_0}-\frac{1}{\mu}\mathrm{id}_{E_0}$ n'est pas bijectif.

On en déduit[11] donc que $\left|\frac{1}{\mu}\right|\geqslant\frac{4}{\pi^2}$. Et donc $\boxed{|\mu|\leqslant\frac{\pi^2}{4}.}$

[11] Nous venons de prouver que pour $|\lambda|<\frac{4}{\pi^2}$, alors $\mathrm{id}_{E_0}-\lambda\Phi$ est bijectif.

ESSEC 2012

Sujet : Pseudo solutions d'une équation linéaire et pseudo inverse d'une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$. **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : diagonalisation, espaces euclidiens, projecteurs orthogonaux, matrices symétriques.

Commentaires : des thèmes plutôt classiques (notamment la partie I), rencontrés régulièrement dans les sujets de parisiennes. Les calculs sont parfois un peu rébarbatifs, mais l'ensemble permet de creuser un peu la notion de pseudo solution, rapidement évoquée en cours, et surtout, explique comment déterminer de telles pseudo solutions. Je ne suis pas certain que tout le corrigé ait été relu avec attention, mais j'ai la flemme de m'y remettre !

Notations : Dans tout le problème, les lettres m et n désignent des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.
Par ailleurs, on note :

- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients réels ; ainsi, tout élément X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est une matrice colonne à n lignes.
- ${}^tM$ la matrice transposée de la matrice M.
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$.
- Pour M appartenant à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, $\operatorname{Ker} M = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) / MX = 0\}$ et $\operatorname{Im} M = \{MX / X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})\}$.
- Pour tout m entier naturel non nul, on munit $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$ de sa structure euclidienne canonique ; ainsi : si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$, le produit scalaire de X et Y s'obtient par la relation ${}^tXY = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$ et la norme euclidienne de Y notée $\|Y\|_m$ par : $\|Y\|_m^2 = {}^tYY = \sum_{i=1}^{m} y_i^2$
- On admettra que toute matrice et sa transposée ont même rang. De plus, on rappelle que lorsque le produit de deux matrices M et N est possible, on a la relation ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$.

1. **Question préliminaire.**
   Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de dimension k non nulle et $(U_1, U_2, \ldots, U_k)$ une base orthonormée de vecteurs colonnes de F.
   On envisage la projection orthogonale sur F représentée par sa matrice P dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
   Montrer que $P = \sum_{i=1}^{k} U_i\,{}^tU_i$ et vérifier que P est une matrice symétrique.

Partie I - Décomposition spectrale de la matrice ${}^tAA$ associée à une matrice A de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$.
On envisage dans toute cette partie une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$.

2. a. Préciser la taille de la matrice ${}^tAA$ et vérifier que $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} {}^tAA$.
   b. Montrer que si $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$ alors $\|AX\|_m = 0$ et établir que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA$.
   Montrer que A et ${}^tAA$ sont nulles simultanément.
   c. Justifier l'égalité : $\operatorname{Im} {}^tA = \operatorname{Im} {}^tAA$.
3. a. Établir que la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable et en calculant $\|AX\|_m^2$ pour X vecteur propre de la matrice ${}^tAA$, montrer que ses valeurs propres sont des réels positifs.
   b. On désigne par $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ la liste des valeurs propres distinctes de la matrice ${}^tAA$, classée dans l'ordre croissant.
   On rappelle que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}({}^tAA)$ où $E_{\lambda_i}({}^tAA) = \operatorname{Ker}({}^tAA - \lambda_i I_n)$.
   Pour i entier naturel compris entre 1 et p, on note P_i la matrice de la projection orthogonale sur $E_{\lambda_i}({}^tAA)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Vérifier que pour i et j distincts compris entre 1 et p, P_iP_j est la matrice nulle.

Justifier les relations : $I_n = \sum_{i=1}^{p} P_i$ et ${}^tAA = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i$. Cette dernière écriture s'appelle la décomposition spectrale de ${}^tAA$.

4. **Exemples :**

   a. Déterminer la décomposition spectrale de ${}^tAA$ lorsque A est la matrice 3×3 égale à $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   b. On envisage la matrice ligne $A = (a_1 \; a_2 \; \cdots \; a_n)$ où les réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont fixés, non tous nuls simultanément. Ainsi, A^tA est un réel.
   Montrer que le polynôme $X^2 - (A^tA)X$ est annulateur pour la matrice ${}^tAA$. Préciser la liste des valeurs propres et la décomposition spectrale de la matrice ${}^tAA$.

Partie II – Pseudo solution d'une équation linéaire.
On s'intéresse dans cette partie à l'équation $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$.
Une matrice X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est dite *solution* de cette équation si elle vérifie la relation $AX = B$.
Elle est dite *pseudo solution* de cette équation si elle vérifie :

$$\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \qquad \|AX - B\|_m \leqslant \|AZ - B\|_m$$

5. On suppose que l'équation $AX = B$ admet au moins une solution. Montrer que X est une pseudo solution si et seulement si elle est solution de l'équation.
6. On suppose que X est une pseudo solution de l'équation.
   Montrer que, pour tout réel λ et toute matrice Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on a :
   $$\lambda^2\|AY\|_m^2 + 2\lambda^tY^tA(AX - B) \geqslant 0$$
   En déduire que ${}^tAAX = {}^tAB$.
7. Montrer que tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ vérifiant la relation ${}^tAAX = {}^tAB$ est pseudo solution et en déduire qu'il existe toujours au moins une pseudo solution de l'équation.
8. Exemple : déterminer toutes les pseudo solutions de l'équation $AX = B$ lorsque :
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Parmi celles-ci, préciser celle dont la norme euclidienne est minimale.
9. Donner une condition sur le rang de A pour que l'équation admette une unique pseudo solution.

Partie III – Pseudo inverse d'une matrice.
On reprend les notations de la partie II.
Parmi toutes les pseudo solutions de l'équation $AX = B$, on se propose de chercher s'il en existe, celle(s) dont la norme euclidienne est minimale.

10. Montrer que l'équation possède une unique pseudo solution de norme minimale notée S et qu'elle est caractérisée par les deux conditions : ${}^tAAS = {}^tAB$ et S est orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA$.
11. Pour B fixé et appartenant à $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$, préciser S dans les cas suivants :
    a. A est de rang n.
    b. A est la matrice nulle.
12. Lorsque B varie dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$, montrer que l'application qui à B associe son unique pseudo solution de norme minimale S est une application linéaire de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
    Relativement aux bases canoniques respectives de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$ et de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, cette dernière application linéaire est représentée par sa matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$. On convient de l'appeler, jusqu'à la fin de ce problème, *pseudo inverse* de la matrice A et de la noter A^+.
13. On suppose que A est non nulle et on revient à la matrice ${}^tAA$ dont la décomposition spectrale introduite à la question 3.b est $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i$.
    On désigne par $\Gamma(A)$ l'ensemble des indices i compris entre 1 et p pour lesquels on a $\lambda_i \neq 0$.
    a. Pourquoi a-t-on $\Gamma(A) \neq \emptyset$?

b. Vérifier que $A^+ = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tA$.

14. Reprendre l'exemple de la question 8 en calculant explicitement A^+ ; retrouver ainsi l'unique pseudo solution de norme minimale.

15. Lorsque A appartient à $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$, montrer que :

$$A^+ = \begin{cases} \dfrac{{}^tA}{A\,{}^tA} & \text{si } A \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Partie IV - Étude de l'opérateur $A \mapsto A^+$.

16. Démontrer les relations suivantes :

$$A = AA^+A\,, \quad A^+ = A^+AA^+\,, \quad {}^t(A^+A) = A^+A\,, \quad {}^t(AA^+) = AA^+.$$

17. Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ vérifiant :

$(*)$ $$A = AMA\,, \quad M = MAM\,, \quad {}^t(MA) = MA\,, \quad {}^t(AM) = AM.$$

a. Montrer que M vérifie les relations suivantes :

$$M = M\,{}^tM\,{}^tA = {}^tA\,{}^tMM\,, \quad A = A\,{}^tA\,{}^tM = {}^tM\,{}^tAA\,, \quad {}^tA = {}^tAAM = MA\,{}^tA.$$

b. En déduire que $M = A^+$ et qu'ainsi A^+ est l'unique matrice vérifiant les relations $(*)$.

18. Établir les formules suivantes :

a. $(A^+)^+ = A$.

b. $({}^tA)^+ = {}^t(A^+)$.

19. Soit x un réel strictement positif et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$.
Montrer que : $A^+ = \lim_{x\to 0^+} \left[({}^tAA + xI_n)^{-1}\,{}^tA\right]$. (On conviendra, sous réserve d'existence, que la limite en un point d'une matrice est la matrice formée des limites en ce même point de ses coefficients).
Utiliser ce procédé pour trouver la pseudo inverse de la matrice A mise en œuvre dans la question 8.

20. Pour tout α réel différent de 0 et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, exprimer $(\alpha A)^+$ en fonction de α et A^+. La matrice $(\alpha A)^+$ admet-elle une limite lorsque α tend vers 0 ?

ESSEC 2012 : CORRIGÉ

1. Question préliminaire.
Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, et notons $U_{i,j}$ le $j^{\text{ème}}$ coefficient de U_i.
Notons également p la projection orthogonale sur F.
Alors nous savons que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$p(e_j) = \sum_{i=1}^{k} \langle U_i, e_j \rangle U_i = \sum_{i=1}^{k} U_{j,i} U_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{n} U_{j,i} U_{\ell,i} e_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} U_{j,i} U_{\ell,i} \right) e_\ell.$$

Et donc

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} p(e_1) & p(e_2) & \dots & p(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} U_{1,i} U_{1,i} & \sum_{i=1}^{k} U_{2,i} U_{1,i} & \dots & \sum_{i=1}^{k} U_{n,i} U_{1,i} \\ \sum_{i=1}^{k} U_{1,i} U_{2,i} & \sum_{i=1}^{k} U_{2,i} U_{2,i} & \dots & \sum_{i=1}^{k} U_{n,i} U_{2,i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} U_{1,i} U_{n,i} & \sum_{i=1}^{k} U_{2,i} U_{n,i} & \dots & \sum_{i=1}^{k} U_{n,i} U_{n,i} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Donc le coefficient (ℓ, j) de P est $\sum_{i=1}^{k} U_{j,i} U_{\ell,i}$.
Mais d'autre part, le coefficient (j, ℓ) de $U_i {}^t U_i$ n'est autre que $U_{\ell,i} U_{j,i}$.

Et donc $\boxed{P = \sum_{i=1}^{k} U_i {}^t U_i.}$ Notons que cette formule est en réalité dans le cours...

Et alors, on a ${}^t P = \sum_{i=1}^{k} {}^t(U_i {}^t U_i) = \sum_{i=1}^{k} U_i {}^t U_i = P$, et donc $\boxed{P \text{ est symétrique.}}$

Détails
Notons que nous avons ici le produit (dans cet ordre) d'un vecteur colonne par un vecteur ligne, qui est une matrice carrée.
Or, il est facile de se convaincre que si

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

alors le coefficient (j, ℓ) de $X {}^t Y$ est $x_j y_\ell$.

Partie I – Décomposition spectrale de la matrice ${}^t AA$ associée à une matrice A de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$.

2.a. On a ${}^t A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ et donc $\boxed{{}^t AA \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$ De plus, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est dans $\operatorname{Ker} A$, alors $AX = 0$ et donc ${}^t AAX = 0$, de sorte que $X \in \operatorname{Ker} {}^t AA$.
On en déduit que $\boxed{\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} {}^t AA.}$

2.b. Si $X \in \operatorname{Ker} {}^t AA$, alors ${}^t AAX = 0$ et donc ${}^t X {}^t AAX = {}^t X 0 = 0$.
Mais ${}^t X {}^t AAX = {}^t (AX) AX = \|AX\|_m^2$. On en déduit que $\boxed{\|AX\|_m = 0.}$
Mais alors[1] $AX = 0$ et donc $X \in \operatorname{Ker} A$.
On a donc $\operatorname{Ker} {}^t AA \subset \operatorname{Ker} A$ et par double inclusion, $\boxed{\operatorname{Ker} {}^t AA = \operatorname{Ker} A.}$
En particulier, on a $A = 0$ si et seulement si $\operatorname{Ker} A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, et de même ${}^t AA = 0$ si et seulement si $\operatorname{Ker} {}^t AA = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Et donc $\boxed{A = 0 \text{ si et seulement si } {}^t AA = 0.}$

[1] Le seul vecteur de norme nulle est le vecteur nul.

2.c. Soit f l'application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$ définie par $X \mapsto AX$.
Alors la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$ est A.
Par le théorème du rang, $\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rg}(A)$, de sorte que $\operatorname{rg}(A) = n - \dim \operatorname{Ker} A$.
De même, on a $\operatorname{rg} {}^t AA = n - \dim \operatorname{Ker} {}^t AA = n - \dim \operatorname{Ker} A = \operatorname{rg} A$.

Noyau
Par définition de $\operatorname{Ker} A$, on a $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} f$.

De plus, si $X \in \operatorname{Im} {}^t AA$, alors il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $X = {}^t AAY = {}^t A(AY) \in \operatorname{Im} {}^t A$.
Donc $\operatorname{Im} {}^t AA \subset \operatorname{Im} {}^t A$.
Enfin, A et ${}^t A$ ont même rang, et donc $\dim \operatorname{Im} A = \dim \operatorname{Im} {}^t A$, de sorte que $\dim \operatorname{Im} {}^t A = \dim \operatorname{Im} {}^t AA$.
On en déduit donc que $\boxed{\operatorname{Im} {}^t A = \operatorname{Im} {}^t AA.}$

Rang
Nous savons que le rang de A est égal à la dimension de $\operatorname{Im} f$. Mais par définition, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} A$, et donc $\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Im} A$.

3.a. La matrice ${}^tAA$ est symétrique car ${}^t({}^tAA) = {}^tA^t({}^tA) = {}^tAA$.
Elle est donc $\boxed{\text{diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$
Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est un vecteur propre de ${}^tAA$ associé à la valeur propre λ, alors on a

$$\|AX\|_m^2 = {}^tX^tAAX = {}^tX\lambda X = \lambda^tXX = \lambda\|X\|_m^2.$$

Et donc $\lambda\|X\|_m^2 \geqslant 0$. Mais X étant non nul, on a donc $\|X\|_m^2 > 0$ et donc $\lambda \geqslant 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{les valeurs propres de } {}^tAA \text{ sont des réels positifs.}}$

Rédaction Il est important de préciser que $\|x\|_m \neq 0$, car s'il était nul, on ne pourrait rien en déduire sur le signe de λ.

3.b. Puisque ${}^tAA$ est symétrique, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.
Et donc si $i \neq j$, $E_{\lambda_j}({}^tAA) \subset E_{\lambda_i}({}^tAA)^\perp$.
En particulier, si p_i (resp. p_j) désigne la projection orthogonale sur $E_{\lambda_i}({}^tAA)$ (resp. sur $E_{\lambda_j}({}^tAA)$), alors pour tout $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on a $p_j(x) \in E_{\lambda_j}({}^tAA)$, de sorte que $p_j(x) \in E_{\lambda_i}({}^tAA)^\perp$ et donc $p_i(p_j(x)) = 0$.
On en déduit donc que $p_i \circ p_j = 0$ et donc $\boxed{P_iP_j = 0.}$
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Alors, de manière unique, on a

$$X = X_1 + \cdots + X_p, \text{ avec } \lambda_1 \in E_{\lambda_1}({}^tAA), X_2 \in E_{\lambda_2}({}^tAA), \ldots, X_p \in E_{\lambda_p}({}^tAA).$$

Mais par orthogonalité des sous-espaces propres de ${}^tAA$, on a alors $p_i(X) = X_i$.

Et donc $X = \displaystyle\sum_{i=1}^p p_i(X)$, soit encore $\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})} = \displaystyle\sum_{i=1}^p p_i$. Et donc $\boxed{I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^p P_i.}$

On en déduit donc que ${}^tAA = {}^tAAI_n = \displaystyle\sum_{k=1}^p {}^tAAP_i$.
Mais si $X = X_1 + \cdots + X_p \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, alors $P_iX = X_i \in E_{\lambda_i}({}^tAA)$, de sorte que ${}^tAAP_iX = {}^tAAX_i = \lambda_iX_i = \lambda_iP_iX$.
On en déduit que ${}^tAAP_i = \lambda_iP_i$ et donc

$$\boxed{{}^tAA = \sum_{i=1}^p \lambda_iP_i.}$$

Détail Si $X_i \in E_{\lambda_i}({}^tAA)$, alors
$${}^tAAX_i = \lambda_iX_i.$$

4. Exemples

4.a. On a ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on a $\lambda \in \mathrm{Spec}({}^tAA)$ si et seulement si $\mathrm{rg}({}^tAA - \lambda I_3) < 3$. Or

$${}^tAA - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -3 & 3-\lambda & 0 \\ 3-\lambda & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow 3L_2 + (3-\lambda)L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -3 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 6\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice n'est pas inversible si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 6$. Et donc $\mathrm{Spec}({}^tAA) = \{0, 6\}$.

Plutôt que de déterminer des bases orthonormées des sous-espaces propres et d'utiliser la formule de la question 1 pour déterminer les P_i, notons plutôt que $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 6$, de sorte que la décomposition spectrale de ${}^tAA$ sera

$${}^tAA = 0 \times P_1 + 6 \times P_2 = 6P_2.$$

On en déduit que $P_2 = \dfrac{1}{6}{}^tAA$ (et alors $P_1 = I_3 - P_2$).

Remarque On aurait aussi pu remarquer que 0 est valeur propre de ${}^tAA$ car ses deux premières colonnes sont colinéaires, remarquer que 6 est valeur propre (grâce à la dernière colonne), et calculer les dimensions des sous-espaces propres associés. La somme de ces dimension étant égale à 3, il n'y a donc pas d'autres valeurs propres.
Ou alors utiliser un argument de trace une fois qu'on avait déjà les deux valeurs propres 0 et 6.

4.b. On a

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \ldots & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1a_n & \ldots & \ldots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, le coefficient (i,j) de ${}^tAA$ est a_ia_j.
On a

$$({}^tAA)^2-(A^tA)^tAA={}^tA\underbrace{A^tA}_{\in\mathbf{R}}A-A^tA^tAA=A^tA^tAA-A^tA^tAA=0.$$

Les valeurs propres de ${}^tAA$ sont donc parmi les racines du polynôme annulateur $X^2-(A^tA)X$, qui sont 0 et A^tA.
Les colonnes de ${}^tAA$ étant non toutes nulles et deux à deux proportionnelles, ${}^tAA$ est de rang 1, et donc 0 est valeur propre de ${}^tAA$, avec $\dim E_0({}^tAA)=n-1$.
Puisque ${}^tAA$ est diagonalisable, elle admet au moins une autre valeur propre, qui ne peut être que $A^tA=\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^2$.
Si P désigne la matrice de la projection orthogonale sur $E_{A^tA}({}^tAA)$, on doit donc avoir ${}^tAA=0+A^tAP$, et donc nécessairement $P=\dfrac{1}{A^tA}{}^tAA$.
Ainsi, la décomposition spectrale de ${}^tAA$ est

$$\boxed{{}^tAA=A^tA\frac{1}{A^tA}{}^tAA.}$$

Partie II – Pseudo solution d'une équation linéaire

5. Si X est une solution de l'équation, alors $AX=B\Leftrightarrow AX-B=0$, de sorte que $\|AX-B\|_m=0$. Mais alors, pour tout $Z\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $\|AZ-B\|_m\geqslant 0$ et donc $\|AX-B\|_m\leqslant\|AZ-B\|_m$: X est une pseudo solution de l'équation.

   Inversement, si X est une pseudo solution de l'équation et si Z en est une solution alors $\|AX-B\|_m\leqslant\|AZ-B\|_m$, où $\|AZ-B\|_m=0$ car $AZ=B$.
   Et donc[2] $\|AX-B\|_m=0\Leftrightarrow AX-B=0\Leftrightarrow AX=B$. Par conséquent, X est une solution de l'équation.
   Ainsi, si l'équation possède au moins une solution, X est solution si et seulement si X est pseudo solution.

6. On a, pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$ et tout $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$,

$$\|A(X+\lambda Y)-B\|_m^2\geqslant\|AX-B\|_m^2. \tag{1}$$

   Or, d'une part,

$$\|AX-B\|_m^2=\|AX\|_m^2+\|B\|_m^2-2{}^tX{}^tAB.$$

   D'autre part,

$$\begin{aligned}\|A(X+\lambda Y)-B\|_m^2&=\|A(X+\lambda Y)\|_m^2+\|B\|_m^2-2(\lambda{}^tY+{}^tX){}^tAB\\&=\|AX\|_m^2+\|\lambda AY\|_m^2+2\lambda{}^tY{}^tAAX+\|B\|_m^2-2\lambda{}^tY{}^tAB-2{}^tX{}^tAB.\end{aligned}$$

   Et donc, il vient, en remplaçant dans l'inéquation (1),

$$\|AX\|_m^2+\|\lambda AY\|_m^2+2\lambda{}^tY{}^tAAX+\|B\|_m^2-2\lambda{}^tY{}^tAB-2{}^tX{}^tAB\geqslant\|AX\|_m^2+\|B\|_m^2-2{}^tX{}^tAB$$
$$\Leftrightarrow\boxed{\lambda^2\|AY\|_m^2+2\lambda{}^tY{}^tA(AX-B)\geqslant 0.}$$

   La fonction $\lambda\mapsto\lambda^2\|AY\|_m^2+2\lambda{}^tY{}^tA(AX-B)$ est une fonction polynomiale du second degré en λ. Elle est de signe constant, donc son discriminant est négatif ou nul.
   Or, ce discriminant est

$$\Delta=4\left({}^tY{}^tA(AX-B)\right)^2-4\|AY\|_m^2\times 0.$$

   Et donc $\Delta\leqslant 0\Leftrightarrow\left({}^tY{}^tA(AX-B)\right)^2\leqslant 0\Leftrightarrow{}^tY{}^tA(AX-B)=0$.
   Mais ceci étant vrai pour tout $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, c'est qu'on doit avoir

$${}^tA(AX-B)=0\Leftrightarrow{}^tAAX={}^tAB.$$

Danger
En général A et ${}^tA$ ne commutent pas ! Nous n'avons pas dit ici qu'elles commutaient, mais que A^tA étant un réel, il commute avec toute matrice carrée.

Remarque
On aurait également pu montrer que ${}^tA$ est un vecteur propre de ${}^tAA$ pour la valeur propre A^tA, puis le diiser par sa norme afin d'obtenir une base orthonormée de $E_{A^tA}({}^tAA)$ et utiliser la formule de la question 1.

[2] Une norme est positive.

Rappel
Dans un espace euclidien, on a toujours

$\|x-y\|^2=\|x\|^2-2\langle x,y\rangle+\|y\|^2$.

Inégalités
Notons que contrairement à ce que l'on pourrait penser, nous n'écrivons pas une inégalité sur des matrices : ${}^tY{}^tA(AX-B)$ est un réel !

7. Soit X vérifiant ${}^tAAX = {}^tAB$, et soit $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Alors, en posant $Y = Z - X$, il vient, on a

$$\langle AY, AX - B\rangle = {}^tY{}^tA(AX - B) = {}^tY({}^tAAX - {}^tAB) = 0$$

de sorte que AY et $AX - B$ sont orthogonaux. Mais alors, par le théorème de Pythagore,

$$\|AZ - B\|_m^2 = \|A(X+Y) - B\|_m^2 = \|(AX - B) + AY\|_m^2 = \|AX - B\|_m^2 + \|AY\|_m^2 \geqslant \|AX - B\|_m^2.$$

Et donc $\boxed{X \text{ est une pseudo-solution de l'équation.}}$

D'après la question 2.c, ${}^tA$ et ${}^tAA$ ont la même image.
Or, ${}^tAB \in \operatorname{Im}{}^tA$, et donc ${}^tAB \in \operatorname{Im}({}^tAA)$: il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que ${}^tAB = {}^tAAX$.
Et par ce qui a été dit précédemment, un tel X est nécessairement une pseudo solution de l'équation : $\boxed{\text{il existe toujours une pseudo-solution de l'équation.}}$

8. On a ${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

De plus, ${}^tAB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est une pseudo solution de l'équation si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ -3x + 3y = -3 \\ 6z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ainsi, les pseudo solutions de l'équation $AX = B$ sont les $\begin{pmatrix} x \\ x-1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbf{R}$.

En particulier, on a

$$\left\|\begin{pmatrix} x \\ x-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|_3^2 = x^2 + (x-1)^2 + 1 = 2x^2 - 2x + 2.$$

La fonction $x \mapsto 2x^2 - 2x + 2$ admet un unique minimum en $x = \dfrac{1}{2}$, et donc la pseudo solution de norme minimale de $AX = B$ est $\boxed{\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.}$

Remarque

Le lecteur à l'œil exercé aura sûrement remarqué que $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est en fait une solution de l'équation $AX = B$.
Et donc, d'après la question 5, les pseudo-solutions de l'équation sont exactement ses solutions, donc il suffit de résoudre l'équation $AX = B$ plutôt que de résoudre ${}^tAAX = {}^tAB$.

9. L'équation admet une unique pseudo solution si et seulement si ${}^tAB$ s'écrit d'une seule manière ${}^tAAX$. Autrement dit, si et seulement si ${}^tAB$ possède un unique[3] antécédent par $X \mapsto {}^tAAX$.
Montrons que c'est le cas si et seulement si $\operatorname{Ker}{}^tAA = \{0\}$.

Supposons donc que $\operatorname{Ker}{}^tAA = \{0\}$. Alors si X et Y sont deux pseudo solutions de l'équation, on a ${}^tAAX = {}^tAAY = {}^tAB$.
Et donc ${}^tAA(X - Y) = 0 \Leftrightarrow X - Y \in \operatorname{Ker}{}^tAA$.
Ainsi, $X - Y = 0 \Leftrightarrow X = Y$: l'équation possède une unique pseudo solution.
Inversement, si l'équation possède une unique pseudo solution X, soit $Y \in \operatorname{Ker}{}^tAA$. Alors

$${}^tAB = {}^tAAX = {}^tAAX + 0 = {}^tAAX + {}^tAAY = {}^tAA(X + Y).$$

Et donc $X + Y$ est encore une pseudo solution de l'équation. Puisque nous avons supposé que celle-ci était unique c'est que $X + Y = X \Leftrightarrow Y = 0$.
Et donc $\operatorname{Ker}{}^tAA = \{0\}$.

[3] Notons que l'existence d'un antécédent de ${}^tAB$ est garantie par ce qui a été dit précédemment, et donc ce qui nous intéresse ici est l'unicité de cet antécédent.

Plus généralement

Si est une application linéaire, alors tout élément de $\operatorname{Im} f$ possède un unique antécédent si f est injective, et une infinité sinon.

Mais, par le théorème du rang appliqué à l'application $f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ définie par $X \mapsto {}^tAAX$, c'est le cas si et seulement si $\mathrm{rg}({}^tAA) = n$.
Et d'après 2.c, c'est donc le cas si et seulement si $\mathrm{rg}({}^tA) = n$.
Enfin, puisque le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée, c'est le cas si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'équation admet une unique pseudo solution si et seulement si } A \text{ est de rang } n.}$

Remarque
Notons que si $m < n$, alors $\mathrm{rg}(A) < m$, et donc il ne pourra jamais y avoir unicité de la pseudo solution.

Partie III – Pseudo inverse d'une matrice.

10. Soit X_1 une pseudo solution de l'équation $AX = B$. Alors, comme expliqué à la question 9, l'ensemble des pseudo solutions est $\{X_1 + Y,\ Y \in \mathrm{Ker}\,{}^tAA\} = \{X_1 - Y, Y \in \mathrm{Ker}({}^tAA)\}$.
Mais nous savons que $\{\|X_1 - Y\|_m,\ Y \in \mathrm{Ker}\,{}^tAA\}$ admet un unique minimum atteint lorsque Y est le projeté orthogonal de X_1 sur $\mathrm{Ker}\,{}^tAA$.
Et donc $\boxed{\text{il existe une unique pseudo solution } X \text{ de norme minimale.}}$

De plus, celle-ci est une pseudo solution de l'équation, donc vérifie ${}^tAAX = {}^tAB$ et $X = X_1 - p(X_1)$, où p désigne le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}\,{}^tAA$. Et donc $X \in (\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$.

Rappel
Si p est le projecteur orthogonal sur F, alors pour tout x, $x - p(x) \in F^\perp$.

Inversement, si ${}^tAAS = {}^tAB$ et si $S \in (\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$, alors S est une pseudo solution, et si X est une pseudo solution, alors $X = S + \underbrace{(X - S)}_{\in \mathrm{Ker}({}^tAA)}$.
Et donc, par le théorème de Pythagore,

$$\|X\|_m^2 = \|S\|_m^2 + \|X - S\|_m^2 \geqslant \|S\|_m^2.$$

Ainsi, S est bien un pseudo solution de norme minimale.

11.a. Si A est de rang n, nous savons[4] qu'il existe une unique pseudo solution à l'équation $AX = B$, et donc S est précisément cette pseudo solution.
De plus, ${}^tAA$ est alors de rang n, et dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$: c'est donc une matrice inversible, de sorte que

$${}^tAAS = {}^tAB \Leftrightarrow \boxed{S = \left({}^tAA\right)^{-1}\,{}^tAB.}$$

[4] C'est la question 9.

11.b. Si A est la matrice nulle, alors $\mathrm{Ker}\,{}^tAA = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Et donc $(\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp = \{0\}$. Et donc nécessairement $\boxed{S = 0.}$

12. Soient $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$, et soient S_1 (resp. S_2) l'unique pseudo solution de $AX = B_1$ (resp. de $AX = \lambda B_2$) de norme minimale.
Alors on a

$${}^tAA(S_1 + \lambda S_2) = {}^tAAS_1 + \lambda\,{}^tAAS_2 = {}^tAB_1 + {}^tA(\lambda B_2)$$

de sorte que $S_1 + \lambda S_2$ est une pseudo solution de l'équation $AX = B_1 + \lambda B_2$.
De plus, on a $S_1 \in (\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$ et $S_2 \in (\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$, de sorte que[5] $S_1 + \lambda S_2 \in (\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$.
Et donc, d'après la question 10, cela signifie que $S_1 + \lambda S_2$ est la pseudo solution de norme minimale de l'équation $AX = B_1 + \lambda B_2$.
Ainsi, l'application qui à un vecteur B de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$ associe l'unique pseudo solution de $AX = B$ de norme minimale $\boxed{\text{est linéaire.}}$

[5] $(\mathrm{Ker}\,{}^tAA)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

13.a. Si ${}^tAA$ ne possédait que 0 comme valeur propre, puisqu'elle est diagonalisable[6], elle serait semblable à $\mathrm{Diag}(0, \dots, 0) = 0$, et donc nulle.
Mais alors $\mathrm{rg}({}^tAA) = 0$, et donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tAA) = 0$, de sorte que $A = 0$. Or, nous avons supposé A non nulle, donc il existe au moins une valeur propre non nulle de ${}^tAA$: $\boxed{\Gamma(A) \neq \emptyset.}$

[6] Car symétrique

Remarque
La notation $\Gamma(A)$ est inutilement compliquée : si 0 est valeur propre de ${}^tAA$, alors $\Gamma(A) = [\![1, p]\!]$, sinon $\Gamma(A) = [\![2, p]\!]$.

13.b. Notons f l'application qui à un vecteur $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$ associe l'unique pseudo solution de $AX = B$ de norme minimale.
Alors f n'est autre que l'application $B \mapsto A^+B$.

Il s'agit donc de vérifier que pour tout $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$, $\left(\displaystyle\sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i\,{}^tA\right) B$ est l'unique pseudo

solution de norme minimale de $AX = B$.
Autrement dit que ${}^tAA\left(\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}P_i{}^tA\right)B = {}^tAB$ et que $\left(\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}P_i{}^tA\right)B \in (\operatorname{Ker}{}^tAA)^\perp$.
Or on a

$${}^tAA\left(\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}P_i{}^tA\right)B = \sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}{}^tAAP_i{}^tAB.$$

Mais ${}^tAB = I_n{}^tAB = \sum_{j=1}^{p}P_j{}^tAB$ et donc

$$\sum_{i\in\Gamma(A)}P_i{}^tAB = \sum_{i\in\Gamma(A)}\sum_{j=1}^{p}P_iP_j{}^tAB = \sum_{i\in\Gamma(A)}P_i{}^tAB.$$

Rappel
$P_iP_j = 0$ si $i \neq j$ et $P_i^2 = P_i$.

Enfin, ${}^tAA = \sum_{j=1}^{p}\lambda_jP_j$, et donc

$${}^tAA\left(\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}P_i{}^tA\right)B = \sum_{j=1}^{p}\lambda_jP_j\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}P_i{}^tAB = \sum_{i\in\Gamma(A)}P_i{}^tAB.$$

Dans le cas où toutes les valeurs propres de ${}^tAA$ sont non nulles, ceci vaut $I_n{}^tAB = {}^tAB$.
Sinon, avec les notations de la partie I, on a $\lambda_1 = 0$. Alors ${}^tAB \in \operatorname{Im}{}^tA = \operatorname{Im}{}^tAA$, de sorte qu'il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que ${}^tAB = {}^tAAU$.
Et alors, pour $X \in \operatorname{Ker}{}^tAA$, il vient

$$\langle X, {}^tAB\rangle = {}^tX{}^tAAU = {}^t(\underbrace{{}^tAAX}_{=0})U = 0.$$

Et donc ${}^tAB \in (\operatorname{Ker}{}^tAA)^\perp$.
Mais P_1 est la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}({}^tAA)$, donc[7] $P_1{}^tAB = 0$.
Ainsi, on a bien

$${}^tAA\left(\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}P_i{}^tA\right)B = \sum_{i\in\Gamma(A)}P_i{}^tAB = \sum_{i=1}^{p}P_i{}^tAB = I_n{}^tAB = {}^tAB.$$

[7] ${}^tAB$ est dans l'orthogonal de $\operatorname{Ker}({}^tAA)$, c'est-à-dire dans le noyau de P_1.

De plus, si $X \in \operatorname{Ker}({}^tAA)$, alors, pour tout $i \in \Gamma(A)$, $X \in E_{\lambda_i}({}^tAA)^\perp$.
Et donc $P_iX = 0$. Mais P_i est la matrice d'un endomorphisme symétrique[8] en base orthonormée[9], et donc est symétrique : ${}^tP_i = P_i$.
Et donc on a $P_iX = 0 \Leftrightarrow {}^tXP_i = 0$.
Il vient alors

$${}^tX\left(\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}P_i{}^tA\right)B = \sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}\underbrace{{}^tXP_i}_{=0}{}^tAB = 0.$$

Rappel
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont deux à deux orthogonaux.

[8] En l'occurence, un projecteur orthogonal.

[9] La base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Et donc $\left(\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}P_i{}^tA\right)B \in (\operatorname{Ker}({}^tAA))^\perp$.

D'après la question 10, c'est donc que $\left(\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}P_i{}^tA\right)B$ est l'unique pseudo solution de norme minimale de l'équation $AX = B$.
Et donc est égal à A^+B. Ceci étant vrai pour tout $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$, on en déduit que

$$\boxed{A^+ = \sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}P_i{}^tA.}$$

14. Nous avons déjà calculé la décomposition spectrale de ${}^tAA$ à la question 4, et prouvé que celle-ci est égale à ${}^tAA = 0\times(I_3 - P_2) + 6\times\frac{1}{6}{}^tAA$.

Et donc

$$A^+ = \frac{1}{6}\frac{1}{6}{}^tAA^tA = \frac{1}{36}\begin{pmatrix}3 & -3 & 0\\ -3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix}6 & 6 & -6\\ -6 & -6 & 6\\ 6 & 6 & 12\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

En particulier, l'unique pseudo solution de $AX = B$ de norme minimale est

$$A^+\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1/2\\ -1/2\\ 1\end{pmatrix}.}$$

15. Si $A = 0$, alors nous avons montré à la question 11.b que pour tout $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$, $A^+B = 0$, et donc $A^+ = 0$.
Si $A \neq 0$, alors d'après la question 4.b, ${}^tAA$ possède deux valeurs propres, dont une seule est non nulle : A^tA.
Et on a alors $P_2 = \frac{1}{A^tA}{}^tAA$.
Ainsi, d'après le résultat de 13.b, il vient

$$A^+ = \frac{1}{A^tA}P_2{}^tA = \frac{1}{(A^tA)^2}{}^tAA^tA = {}^tA\frac{A^tA}{A^tAA^tA} = \frac{A^tA}{A^tA}\frac{1}{A^tA}{}^tA = \boxed{\frac{{}^tA}{A^tA}}.$$

Partie IV – Étude de l'opérateur $A \mapsto A^+$.

16. Notons que si $A = 0$, alors toutes ces relations sont triviales. Nous supposons donc que $A \neq 0$.
Commençons par remarquer que $A^+A = \sum_{i\in\Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i}P_i{}^tAA$.

Mais $P_i{}^tAA = P_i\sum_{j=1}^{p}\lambda_jP_j = \lambda_iP_i^2 = \lambda_iP_i$.

Et donc $A^+A = \sum_{i\in\Gamma(A)} P_i$.

En particulier, puisque les P_i sont symétriques, A^+A l'est également et donc $\boxed{{}^t(A^+A) = A^+A.}$.

• **<u>Si</u>** <u>$0 \notin \mathrm{Spec}({}^tAA)$</u>, alors $A^+A = \sum_{i=1}^{p}P_i = I_n$.

Et donc $AA^+A = I_nA = A$.
• **<u>Dans le cas où 0 est valeur propre de</u>** <u>${}^tAA$</u>, on a $A^+A = I_n - P_1$, où P_1 est la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}({}^tAA)$.
On a donc $AA^+A = A - AP_1$.
Il reste donc à prouver que $AP_1 = 0$. Pour cela, prouvons que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $AP_1X = 0$.
Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on a $P_1X \in \mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$ et donc $AP_1X = 0$.
Et donc $AP_1 = 0$, de sorte que $\boxed{AA^+A = A.}$

De même, on a $A^+AA^+ = I_nA^+ = A^+$ si $0 \notin \mathrm{Spec}({}^tAA)$.
Et sinon, on a $A^+AA^+ = (I_n - P_1)A^+ = A^+ - \sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}P_1P_i{}^tA$.
Or, pour $i \in \Gamma(A)$, $P_1P_i = 0$, et donc $A^+AA^+ = A^+$.
Enfin, remarquons que $AA^+ = \sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}AP_i{}^tA$. Mais $AP_i{}^tA$ est symétrique car P_i l'est, et donc AA^+ est symétrique car combinaison linéaire de matrices symétriques. Et donc $\boxed{{}^t(AA^+) = AA^+.}$

17.a. On a $M = MAM$ et $AM = {}^t(AM) = {}^tM{}^tA$, donc $\boxed{M = M(AM) = M{}^tM{}^tA.}$

On a également $MAM = (MA)M = {}^(MA)M = \boxed{{}^{At}MM.}$ De même, $A = AMA$ avec $MA = {}^t(MA) = {}^tA{}^tM$, donc $\boxed{A = A{}^tA{}^tM.}$

Et $A = (AM)A = {}^t(AM)A = \boxed{{}^tM\,{}^tAA.}$.
Enfin, en transposant les deux relations précédentes, on obtient

$$\boxed{{}^tA = MA\,{}^tA = {}^tAAM.}$$

17.b. On a alors, pour $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$, ${}^tAAMB = {}^tAB$, et si $X \in \mathrm{Ker}({}^tAA)$, alors

$${}^tXMB = {}^tX\,{}^tA\,{}^tMMB = {}^tX\,{}^tAAM\,{}^tMMB = {}^t(\underbrace{{}^tAAX}_{=0})M\,{}^tMMB = 0.$$

Et donc, pour tout $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$, on a ${}^tAAMB = {}^tAB$ et MB est orthogonal à $\mathrm{Ker}({}^tAA)$.
D'après la question 10, MB est donc l'unique pseudo solution de norme minimale de l'équation $AX = B$. Et donc $MB = A^+B$.
Ceci étant vrai pour tout $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$, on en déduit que $\boxed{M = A^+.}$

18.a. Il s'agit de remarquer que si on pose $M = A$, alors les relations de la question 16 s'écrivent

$$M = MA^+M,\ A^+ = A^+MA^+,\ {}^t(A^+M) = A^+M,\ {}^t(MA^+) = AA^+.$$

D'après la question 17, M est alors l'unique pseudo inverse de A^+ : $\boxed{(A^+)^+ = A.}$

18.b. De même, en transposant toutes[10] les relations de la question 16, on a

$${}^tA({}^{}A^+)^tA = {}^tA,\ {}^t(A^+) = {}^t(A^+)\,{}^tA\,{}^t(A^+),\ {}^tA\,{}^t(A^+) = {}^t\left({}^tA\,{}^t(A^+)\right),\ {}^t(A^+)\,{}^tA = {}^t\left({}^t(A^+)\,{}^tA\right).$$

Toujours d'après la question 17, ceci prouve que ${}^t(A^+)$ est l'unique pseudo inverse de ${}^tA$.
Et donc $\boxed{({}^tA)^+ = {}^t(A^+).}$

[10] En réalité, transposer les deux dernières ne sert à rien : on retrouve les relations qu'on avait déjà.

19. Notons que les valeurs propres de ${}^tAA$ étant positives, nécessairement, pour $x > 0$, $-x \notin \mathrm{Spec}({}^tAA)$ et donc ${}^tAA + xI_n$ est inversible.
De plus, on a ${}^tAA + xI_n = \sum_{i=1}^{p}(\lambda_i + x)P_i$ et alors si on pose $Q = \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{\lambda_j + x}P_j$, il vient

$$Q({}^tAA + xI_n) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{\lambda_i + x}{\lambda_j + x}P_jP_i = \sum_{i=1}^{p}P_i = I_n.$$

Détails
Rappelons que $P_iP_j = 0$ si $i \neq j$ et que $P_i^2 = P_i$.

Ainsi, l'inverse de ${}^tAA + xI_n$ est $\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i + x}P_i$.

On en déduit que

$$\left({}^tAA + xI_n\right)^{-1}{}^tA = \sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i + x}P_i\,{}^tA.$$

Si $0 \notin \mathrm{Spec}({}^tAA)$, alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\lambda_i + x} = \frac{1}{\lambda_i}$ et donc

$$\lim_{x\to 0^+}\left({}^tAA + xI_n\right)^{-1}{}^tA = \sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i}P_i\,{}^tA = A^+.$$

En revanche, si 0 est valeur propre de ${}^tAA$, alors nous avons prouvé à la question 13.b que pour tout $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$, $P_1\,{}^tAB = 0$, et donc $P_1\,{}^tA = 0$.
Il reste donc $\left({}^tAA + xI_n\right)^{-1}{}^tA = \sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i + x}P_i\,{}^tA$, et comme précédemment,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\left({}^tAA + xI_n\right)^{-1}{}^tA = \sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}P_i\,{}^tA = A^+.}$$

Si l'on reprend la matrice de la question 8, on a alors ${}^tAA + xI_3 = \begin{pmatrix} 3+x & -3 & 0 \\ -3 & 3+x & 0 \\ 0 & 0 & 6+x \end{pmatrix}$.

Première méthode : «à la main» : calculons l'inverse de la matrice ${}^tAA + xI_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3+x & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3+x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6+x & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+L_2 \\ L_3\leftarrow L_3/(6+x)}}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} x & x & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3+x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6+x} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1/x}{\longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/x & 1/x & 0 \\ -3 & 3+x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6+x} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2+3L_1}{\longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/x & 1/x & 0 \\ 0 & 6+x & 0 & 3/x & 1+3/x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6+x} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2/(6+x)}{\longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/x & 1/x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/(x(6+x)) & (x+3)/(x(6+x)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6+x} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\longleftrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & (3+x)/(x(6+x)) & 3/(x(6+x)) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/(x(6+x)) & (x+3)/(x(6+x)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6+x} \end{array}\right)$$

Ainsi, on a $({}^tAA+xI_3)^{-1} = \dfrac{1}{x(6+x)}\begin{pmatrix} 3+x & 3 & 0 \\ 3 & 3+x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$.

Et donc $({}^tAA+I_3)^{-1}\,{}^tA = \dfrac{1}{x(6+x)}\begin{pmatrix} 3+x & 3 & 0 \\ 3 & 3+x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{x(x+6)}\begin{pmatrix} x & x & -x \\ -x & -x & x \\ x & x & 2x \end{pmatrix} =$
$\dfrac{1}{x+6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Ainsi, lorsque $x \to 0^+$, on retrouve

$$A^+ = \lim_{x\to 0^+} ({}^tAA+xI_3)^{-1}\,{}^tA = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode : utilisons ce qui a été dit précédemment : on sait que
${}^tAA + xI_3 = (6+x)P_2$, où $P_2 = \dfrac{1}{6}\,{}^tAA$.
Et donc $({}^tAA+xI_3)^{-1} = \dfrac{1}{6+x}P_2 = \dfrac{6}{6+x}\,{}^tAA$. Ainsi

$$({}^tAA+xI_3)^{-1}\,{}^tA = \frac{1}{6(6+x)}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6(6+x)}\begin{pmatrix} 6 & 6 & -6 \\ -6 & -6 & 6 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{6+x}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors le même résultat que dans la question précédente, et donc la même limite.

20. D'après la question 16, on a

$$\alpha A = \alpha A\frac{A^+}{\alpha}\alpha A,\ \frac{A^+}{\alpha} = \frac{A^+}{\alpha}\alpha A\frac{A^+}{\alpha},\ {}^t\left(\frac{A^+}{\alpha}\alpha A\right) = \frac{A^+}{\alpha}\alpha A,\ {}^t\left(\alpha A\frac{A^+}{\alpha}\right) = \alpha A\frac{A^+}{\alpha}.$$

Et donc d'après la question 17, $\boxed{\dfrac{A^+}{\alpha} = (\alpha A)^+}$.

Si $A \neq 0$, alors $A^+ \neq 0$ et donc $\dfrac{A^+}{\alpha}$ n'admet pas de limite lorsque $\alpha \to 0^+$.
On en déduit donc que $(\alpha A)^+$ n'admet pas de limite lorsque $x \to 0^+$.
Remarque : ceci signifie que l'application $A \mapsto A^+$ n'est pas continue en 0.

Détails
$A^+ \neq 0$ car $(A^+)^+ = A$ et $0^+ = 0$.

ESSEC 2011

Sujet : Commutant d'un endomorphisme diagonalisable **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire, diagonalisation, séries numériques

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Modifications apportées au sujet d'origine : ajout de la définition d'homothétie (définition qui ne figure pas explicitement au programme.)

Commentaires : la partie II est assez calculatoire et un peu rébarbative. Les parties III, IV et V sont très intéressantes, de difficulté graduelle, et aboutissent à un vrai résultat.

Le problème comporte cinq parties.
$\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, et $\mathbf{R}[X]$ celui des polynômes à coefficients réels.
Si n est un entier naturel, $\mathbf{R}_n[X]$ est le sous-ensemble de $\mathbf{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Si E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, on notera $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Si U est une partie non vide de $\mathscr{L}(E)$, on appelle centre de U et on note $C(U)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de U, c'est-à-dire

$$C(U) = \{v \in \mathscr{L}(E) : \forall u \in U, u \circ v = v \circ u\}.$$

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, et $U = \{u\}$, $C(\{u\})$ est plus simplement noté $C(u)$ et est appelé aussi commutant de u.
On a donc $C(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) : u \circ v = v \circ u\}$.
Un endomorphisme $v \in \mathscr{L}(E)$ est appelé homothétie s'il existe un réel λ tel que $v = \lambda \mathrm{id}_E$.
Si $P \in \mathbf{R}[X]$, et $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbf{R}^{d+1}$ avec $P = a_d X^d + \cdots + a_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par $P(u) = a_d u^d + \cdots + a_0 \mathrm{id}_E = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k u^k$. En particulier $1(u) = \mathrm{id}_E$.
Enfin, on note $\mathbf{R}[u] = \{P(u), P \in \mathbf{R}[X]\}$.
L'objectif du problème est de comparer $C(u)$ et $\mathbf{R}[u]$ dans certains cas.

Partie I : Préliminaires

Dans cette partie, on suppose que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension finie n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1, U est une partie non vide de $\mathscr{L}(E)$ et u est un élément de $\mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de dimension supérieure ou égale à 1.
2. Vérifier que $C(u)$ contient $\mathbf{R}[u]$.
3. Soit λ une valeur propre de u, $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ l'espace propre associé et v dans $C(u)$. Montrer que $E_\lambda(u)$ est stable par v.

Partie II : Étude d'un exemple

Dans toute cette partie, on notera

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \forall x \in]-1,1[, \sum_{n\geqslant 0} |a_n x^n| \text{ converge}\right\} \\
B &= \{(a_n)_{n\geqslant 0} \in A, \forall n \in \mathbf{N}, 2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0\} \\
H &= \left\{f : x \in]-1,1[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ où } (a_n)_{n\geqslant 0} \in A\right\} \\
E &= \left\{f : x \in]-1,1[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ où } (a_n)_{n\geqslant 0} \in B\right\} \\
\alpha_n &= \frac{1}{2^n}, \beta_n = (-1)^n \text{ et } \gamma_n = n(-1)^n \\
\varphi &: x \in]-1,1[\mapsto \frac{1}{2-x}, \psi : x \in]-1,1[\mapsto \frac{1}{1+x} \text{ et } \delta : x \in]-1,1[\mapsto \frac{1}{(1+x)^2}
\end{aligned}$$

On admet que pour f dans H, il existe une unique suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ dans A telle que

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

4. **Quelques propriétés de A**
   a. Vérifier que la suite constante égale à 1 appartient à A.
   b. Plus généralement, si $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est telle qu'il existe $s \in \mathbf{R}$ vérifiant $a_n = o(n^s)$, montrer que $(a_n)_{n\geqslant 0} \in A$.
   c. En déduire que les suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}, (\beta_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ appartiennent à A.
5. **Premières propriétés de H**
   a. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de $]-1,1[$ dans $\mathbf{R}$.
   b. Montrer que les fonctions φ, ψ et δ appartiennent à H.
6. **Premières propriétés de E :**
   a. Déterminer les suites géométriques appartenant à B.
   b. Vérifier que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 0}$ appartient à B.
   c. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de H contenant les fonctions φ, ψ et δ.
7. **Caractérisation des éléments de E**
   Soit $f \in E$ telle que, pour tout x de $]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $(a_n)_{n\geqslant 0} \in B$.
   a. Montrer que
   $$\forall x \in]-1,1[, f(x)(x^3-3x-2) + a_0(2+3x) + a_1(2x+3x^2) + 2a_2x^2 = 0.$$
   b. En déduire qu'il existe une fonction polynôme Q de degré inférieur ou égal à 2 telle que, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{Q(x)}{x^3-3x-2}$.
   c. Montrer alors que f est combinaison linéaire des fonctions φ, ψ et δ.
   d. Conclure que E est un espace de dimension finie dont $C = (\varphi, \psi, \delta)$ est une base.
8. **L'endomorphisme u**
   Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ dans B et f de E telles que
   $$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
   a. Montrer que la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}, b_n = a_{n+1}$, appartient à B.
   On note alors $u(f)$ l'application définie par
   $$\forall x \in]-1,1[, [u(f)](x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$
   b. Vérifier que u est un endomorphisme de E.
   c. Déterminer u^k pour tout k de $\mathbf{N}$. En déduire un polynôme π de $\mathbf{R}[X]$, de degré 3, tel que $\pi(u) = 0$.
   d. Déterminer la matrice T de u dans la base C et calculer T^k pour tout $k \in \mathbf{N}$.
9. **Éléments propres de u**
   a. Quels sont les valeurs propres et sous-espaces propres de u ?
   b. u est-il diagonalisable ?
10. **Centre de u**
    Soit v un élément du commutant de u, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $u \circ v = v \circ u$.
    a. Montrer qu'il existe des réels λ et μ tels que $v(\varphi) = \lambda\varphi$ et $v(\psi) = \mu\psi$.
    b. Montrer qu'il existe aussi des réels η et ω tels que $v(\delta) = \eta\psi + \omega\delta$.
    c. Démontrer que $\mu = \omega$.
    d. Réciproquement, si v est un endomorphisme de E pour lequel il existe des réels λ, μ et η tels que
    $$\mathrm{Mat}_C(v) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$
    vérifier que v appartient à $C(u)$.
    e. Que vaut $\dim[C(u)]$?
    f. Montrer que la famille (id_E, u, u^2) est libre dans $\mathscr{L}(E)$.
    g. Comparer $C(u)$ et $\mathbf{R}[u]$.

Partie III : Centre de $\mathscr{L}(E)$

Dans cette partie, on suppose que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension finie n où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1, et u un élément de $\mathscr{L}(E)$.

11. On suppose que tout vecteur non nul de E est vecteur propre de u. Montrer que u est une homothétie.
12. Soit U la partie de $\mathscr{L}(E)$ formée des projecteurs de E et v dans $C(U)$. On se donne e un vecteur non nul de E, et un supplémentaire G de $F = \mathrm{Vect}(e)$. En considérant la projection sur F parallèlement à G, montrer que v est une homothétie de E. En déduire $C(U)$.
13. Que vaut $C(\mathscr{L}(E))$?

Partie IV : Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on suppose que $E = \mathbf{R}^n$ et que u est un endomorphisme diagonalisable de E. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u, $E_1, \dots, E_p$ les espaces propres correspondants, et pour tout i de $[\![1,p]\!]$, $r_i = \dim E_i$.

14. Justifier que, pour tout v de $C(u)$ et tout i de $[\![1,p]\!]$, E_i est stable par v.
15. Réciproquement, si v est un endomorphisme de E tel que, pour tout i de $[\![1,p]\!]$, E_i est stable par v, montrer que $v \in C(u)$.
16. Considérer une base b de E adaptée à l'écriture $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ et caractériser les endomorphismes de $C(u)$ par l'allure de leur matrice dans cette base.
17. En déduire que
$$\dim C(u) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2.$$
18. Montrer que $\dim C(u) \geqslant n$, puis que $\dim C(u) = n$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.
19. Écrire la matrice M de u dans la base b. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, calculer M^k, puis $P(M)$ pour tout polynôme P de $\mathbf{R}[X]$.
20. On note $\pi(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$. Que vaut $\pi(u)$?
21. Plus généralement, si P est un polynôme de $\mathbf{R}[X]$, vérifier que $P(u) = 0$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $P(\lambda_i) = 0$.
22. En déduire que la famille $(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{p-1})$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$.
23. Montrer que $\forall k \in \mathbf{N}$, $u^k \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{p-1})$. En déduire que $\dim \mathbf{R}[u] = p$.
24. Démontrer que $C(u) = \mathbf{R}[u]$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

Partie V : Centre du commutant d'un endomorphisme diagonalisable

On garde, dans cette partie, les mêmes notations et hypothèses que dans la partie IV. On veut déterminer $C(C(u))$, que l'on notera plus simplement $C_2(u)$.

25. Vérifier que $C_2(u) \subset C(u)$.
26. Montrer que $\mathbf{R}[u] \subset C_2(u)$.
27. Pour v dans $C_2(u)$ et i dans $[\![1,p]\!]$, on note v_i l'endomorphisme de E_i défini par
$$\forall x \in E_i, v_i(x) = v(x).$$
Montrer que $v_i \in C(\mathscr{L}(E_i))$. En déduire qu'il existe un réel μ_i tel que $v_i = \mu_i \mathrm{id}_{E_i}$.
28. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de degré inférieur ou égal à $p-1$ tel que
$$\forall i \in [\![1,p]\!], Q(\lambda_i) = \mu_i.$$
29. Démontrer que $C_2(u) = \mathbf{R}[u]$.

ESSEC 2011 : CORRIGÉ

Partie I : Préliminaires

1. Puisque l'endomorphisme nul commute à tout endomorphisme, il est dans $C(U)$.
Soient $v_1, v_2 \in C(U)$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$(\lambda v_1 + v_2) \circ u = \lambda v_1 \circ u + v_2 \circ u = \lambda u \circ v_1 + u \circ v_2 = u \circ (\lambda v_1 + v_2).$$

Donc $\lambda v_1 + v_2$ commute avec u, et donc $\lambda v_1 + v_2 \in C(u)$.
On en déduit que $\boxed{C(u) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(E).}$
Si $u = 0$, alors pour tout $v \in \mathscr{L}(E), u \circ v = v \circ u = u$, et donc $C(u) = \mathscr{L}(E)$ est de dimension supérieure ou égale à 1.
Si $u \neq 0$, alors $u \in C(u)$, et donc $\text{Vect}(u) \subset C(u)$, de sorte que $\dim C(u) \geqslant \dim \text{Vect}(u) = 1$.

$\boxed{\text{Et donc } C(u) \text{ est de dimension supérieure ou égale à 1.}}$

$u = 0$

L'inclusion $\text{Vect}(u) \subset C(u)$ reste vraie si $u = 0$, mais alors $\text{Vect}(u) = \{0\}$ est de dimension nulle, donc il est important de distinguer le cas $u = 0$.

2. Soit $v \in \mathbf{R}[u]$. Alors il existe $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$ tel que $v = P(u)$.
Mais alors

$$v \circ u = P(u) \circ u = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k\right) \circ u = \sum_{k=0}^{d} a_k u^{k+1} = u \circ \left(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k\right) = u \circ v.$$

Ainsi, $v \in C(u)$, et donc $\boxed{\mathbf{R}[u] \subset C(u).}$

Plus rapide

On peut aussi directement dire que tout polynôme en u commute avec u, ce que nous reprouvons ici.s

3. Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$

Donc $v(x) \in E_\lambda(u)$: $\boxed{E_\lambda(u) \text{ est stable par } v.}$

Partie II : Étude d'un exemple

4. **Quelques propriétés de A**

4.a. Soit $x \in]-1,1[$. Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} |x^n| = \sum_{n \geqslant 0} |x|^n$ converge car il s'agit d'une série géométrique de raison $|x| < 1$. $\boxed{\text{Donc la suite constante égale à 1 appartient à } A.}$

4.b. Soit (a_n) une suite telle qu'il existe $s \in \mathbf{R}$ tel que $a_n = o(n^s)$.
Alors pour $x \in]-1,1[$, on a $n^2 a_n x^n = o(n^{s+2}x^n)$. Mais par croissances comparées, $n^{s+2}x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc

$$a_n x^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puisque la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge[1], par critère de comparaison, on en déduit que $\sum a_n x^n$ converge, et donc que $\boxed{(a_n) \in A.}$

[1] C'est une série de Riemann de paramètre $2 > 1$.

4.c. On a $\alpha_n = o(1)$, $\beta_n = o(n)$ et $\gamma_n = o(n^2)$, donc d'après la question précédente, ces trois suites sont dans A.

5. **Premières propriétés de H**

5.a. Il est évident par définition de H que H est inclus dans l'ensemble des applications de $]-1,1[$ dans $\mathbf{R}$.
De plus, l'application nulle est dans H car elle correspond à la suite nulle (qui est bien dans A).
Soient $f, g \in H$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Notons (a_n) et (b_n) les uniques suites telles que

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Alors pour $x \in]-1,1[$, la série de terme général $(\lambda a_n + b_n)x^n$ converge, de sorte que $(\lambda a_n + b_n) \in A$, et

$$(\lambda f + g)(x) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n) x^n.$$

Ceci prouve bien que $\lambda f + g$ est dans H, et donc que H est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de $]-1,1[$ dans $\mathbf{R}$.

5.b. Soit $x \in]-1,1[$. Alors

$$\varphi(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n.$$

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est bien dans } H}$ et correspond à la suite $\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}(\alpha_n)$ qui est dans A car (α_n) est dans A.

De même, pour $x \in]-1,1[$, on a

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n.$$

Et donc $\boxed{\psi \text{ est dans } H}$, correspondant à la suite (β_n) de A.
Enfin, pour $x \in]-1,1[$, on a

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(-x)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(\beta_n + \gamma_n)x^n.$$

> **Série géom. dérivée**
> Rappelons que pour $|q| < 1$,
> $$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Donc $\boxed{\delta \in H}$ car $(\beta_n + \gamma_n)$ est un élément de A.

6. Premières propriétés de E

6.a. Soit (λr^n) une suite géométrique de B. Alors

$$\forall n \in \mathbf{N},\ 2\lambda r^{n+3} + 3\lambda r^{n+2} - \lambda r^n = 0$$

donc si $\lambda \neq 0$ (i.e. si (u_n) n'est pas la suite nulle), et, il vient

$$r^n(2r^3 + 3r^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow r^n(r+1)(2r^2 + r - 1) = 0 \Leftrightarrow r^n(r+1)2(r+1)\left(r - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

On en déduit que $\boxed{r \in \{0, -1, \frac{1}{2}\}.}$
Inversement, on vérifie aisément que toute suite géométrique de raison 0, -1 ou $\frac{1}{2}$ est dans B (elle sera dans A car sera négligeable devant n).

> **Remarque**
> Notons au passage qu'une suite géométrique de raison 0 est en fait une suite dont seul le premier terme est (éventuellement) non nul.

6.b. Nous avons déjà prouvé que $(\gamma_n) \in A$.
De plus, $\forall n \in \mathbf{N}$,

$$2\gamma_{n+3} + 3\gamma_{n+2} - \gamma_n = 2(n+3)(-1)^{n+3} + 3(n+2)(-1)^{n+2} - n(-1)^n = (-1)^n(3n + 6 - 2n - 6 - n) = 0.$$

Donc on a bien $\boxed{(\gamma_n) \in B.}$

6.c. Il est aisé de prouver que B est un sous-espace vectoriel de A, et de même que E est un sous-espace vectoriel de H. Mais à la question a, nous avons prouvé que les suites (α_n) et (β_n) sont dans B, car ce sont des suites géométriques de raisons respectives $\frac{1}{2}$ et -1. De plus, nous venons de prouver que $(\gamma_n) \in B$.
$\boxed{\text{Ainsi, les trois fonctions } \varphi, \psi \text{ et } \delta \text{ sont bien dans } E.}$

7. Caractérisation des éléments de E

7.a. Soient f et (b_n) comme dans l'énoncé. Alors $\forall x \in]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}
f(x)(x^3-3x-2) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)(x^3-3x-2)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+3} - 3\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} a_{n-3} x^{n} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} \underbrace{(a_{n-3}-3a_{n-1}-2a_n)}_{=0 \text{ car } (a_n)\in B} x^n - 3(a_0x+a_1x^2) - 2(a_0+a_1x+a_2x^2)\\
&= -a_0(2+3x) - a_1(2x+3x^2) - 2a_2x^2.
\end{aligned}$$

On a donc bien la relation souhaitée :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, f(x)(x^3-3x-2) + a_0(2+3x) + a_1(2x+3x^2) + 2a_2x^2 = 0.}$$

7.b. En notant $Q(x) = -a_0(2+3x) - a_1(2x+3x^2) - 2a_2x^2$, Q est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, et puisque

$$\forall x \in]-1,1[, x^3-3x-2 \neq 0,$$

il vient

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{Q(x)}{x^3-3x-2}.}$$

Détails
Les racines de X^3-3X-2 sont -1 et 2, donc ne sont pas dans $]-1,1[$.

7.c. Notons que $x^3-3x-2 = (x+1)(x^2-x-2) = (x+1)^2(x-2)$.
Soit $Q = aX^2+bX+c \in \mathbf{R}_2[X]$. Montrons qu'il existe $\lambda,\mu,\gamma \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall x \in]-1,1[, \frac{Q(x)}{x^3-3x-2} = \lambda\varphi(x)+\mu\psi(x)+\gamma\delta(x) = \frac{\lambda}{2-x}+\frac{\mu}{1+x}+\frac{\gamma}{(1+x)^2}.$$

Factorisation
Afin d'obtenir cette factorisation, il faut remarquer que -1 est une racine de ce polynôme, et donc il se factorise par $(x+1)$.
La factorisation de x^2-x-2 ne présente ensuite pas de difficultés.

Soit encore, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{Q(x)}{x^3-3x-2} = \frac{-\lambda(x+1)^2+\mu(x+1)(x-2)+\gamma(x-2)}{x^3-3x-2}.$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{aligned}
&\forall x \in]-1,1[\quad ax^2+bx+c = -\lambda(1+x)^2+\mu(1+x)(x-2)+\gamma(x-2)\\
\Leftrightarrow\ &\forall x \in]-1,1[\quad (a+\lambda-\mu)x^2+(b+2\lambda+\mu+\gamma)x+(c+\lambda+2\mu+2\gamma) = 0
\end{aligned}$$

Détails
Deux polynôme coïncident en une infinité de valeurs (ici $]-1,1[$ est infini) si et seulement si ils sont égaux, c'est-à-dire ont les mêmes coefficients.

Il s'agit donc de résoudre le système (d'inconnues λ,μ,γ)

$$\begin{cases}\lambda-\mu=-a\\ 2\lambda+\mu+\gamma=-b\\ \lambda+2\mu+2\gamma=-c\end{cases}
\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow}
\begin{cases}\lambda-\mu=-a\\ 3\mu+\gamma=-b+2a\\ 3\mu+2\gamma=-c+a\end{cases}
\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Longleftrightarrow}
\begin{cases}\lambda-\mu=-a\\ 3\mu+\gamma=-b+2a\\ \gamma=-c+b-a\end{cases}$$

Ce système est échelonné, avec trois pivots, donc possède une unique solution. Ceci prouve bien que toute fonction $f \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire de φ,ψ et δ.

Solution
Notons que nous nous sommes arrêtés avant d'obtenir l'unique solution du système. En effet, ce qui nous intéresse est l'existence d'une telle solution, mais nous n'avons pas besoin de l'expression de cette solution en fonction de a, b et c.

7.d. Nous venons de prouver que (φ,ψ,δ) est une famille génératrice de E. Nous pourrions prouver «à la main» que la famille (φ,ψ,δ) est une famille libre, mais dans la question précédente, nous avons prouvé que tout élément f de E s'écrit **de manière unique** comme combinaison linéaire de (φ,ψ,δ). Ceci prouve donc directement que $\boxed{(\varphi,\psi,\delta) \text{ est une base de } E.}$

8. **L'endomorphisme u**

8.a. Soit $(a_n) \in B$, et soit (b_n) la suite définie par $b_n = a_{n+1}$.
Alors (b_n) est dans A car pour $x \in]-1,1[$, on a $b_nx^n = a_{n+1}x^n$.
Si $x=0$, $\sum_n b_nx^n = \sum_n 0$ converge, et si $x \neq 0$, $\sum_n b_nx^n = \frac{1}{x}\sum_{n\geqslant 1} a_nx^n$ qui converge car

$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge.
De plus, on a

$$2b_{n+3}+3b_{n+2}-b_n = 2a_{(n+1)+3}+3a_{(n+1)+2}-a_{n+1} = 0.$$

Ainsi, la suite $\boxed{(b_n) \text{ appartient à } B.}$

8.b. Puisque $(b_n)\in B$, $u(f)$ est bien une fonction de E.
Soient $f,g\in E$, et soient $(a_n),(b_n)\in B$ telles

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Pour $\lambda\in\mathbf{R}$, et $x\in]-1,1[$ on a

$$u(\lambda f+g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_{n+1}+b_{n+1})x^n = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n+1}x^n = \lambda u(f)(x)+u(g)(x).$$

$\boxed{\text{Ainsi, } u \text{ est un endomorphisme de } E.}$

8.c. Soit $f\in E$, soit $(a_n)\in B$ telle que

$$\forall x\in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Alors pour $k\in\mathbf{N}$ et $x\in]-1,1[$, on a

$$u^k(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k}x^n.$$

En particulier,

$$\forall x\in]-1,1[, (2u^3(f)+3u^2(f)-f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2a_{n+3}+3a_{n+2}-a_n)x^n = 0.$$

Donc le polynôme $\boxed{\pi(x) = 2X^3+3X^2-1 \text{ est un polynôme annulateur de } u}$, et il est bien de degré 3 comme demandé.

8.d. On a, $\forall x\in]-1,1[, u(\varphi)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+2}}x^n = \frac{1}{2}\varphi(x).$
Par conséquent, $u(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi$.
De même, on a

$$\forall x\in]-1,1[, u(\psi)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = -\psi(x)$$

et

$$\forall x\in]-1,1[, u(\delta)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(-1)^{n+1}x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-1)^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = -\delta(x)-\psi(x).$$

On en déduit que la matrice T est

$$\boxed{T = \mathrm{Mat}_C(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(\varphi) & u(\psi) & u(\delta) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \varphi \\ \psi \\ \delta \end{array} \end{array}.}$$

Notons que $T = D + N$, avec $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Or, $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$.

Puisque N et D commutent, la formule du binôme de Newton s'applique :

$$T^k = (D+N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^i N^{k-i}.$$

Or, on a $N^2 = 0$, et donc pour $i \geqslant 2$, $N^i = 0$. Il vient donc

$$\begin{aligned} T^k &= \binom{k}{k} D^k + \binom{k}{k-1} D^{k-1} N \\ &= D^k + kD^{k-1}N \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & k(-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}.} \end{aligned}$$

9. Éléments propres de u

9.a. T étant triangulaire, ses valeurs propres[2] sont ses coefficients diagonaux.

[2] Qui sont les valeurs propres de u.

Donc $\boxed{\mathrm{Spec}(u) = \left\{\frac{1}{2}, -1\right\}.}$

De plus, $\dim E_{1/2}(u) = \dim E_{1/2}(T) = 1$, puisque $\frac{1}{2}$ n'apparaît qu'une seule fois sur la diagonale de T.
D'autre part, on a

$$\dim E_{-1}(u) = \dim E_{-1}(T) = 3 - \mathrm{rg}(T + I_3) = 3 - 2 = 1.$$

Dim. de $E_\lambda(T)$.

Rappelons que pour une matrice triangulaire, la dimension de E_λ est inférieure ou égale au nombre de fois où λ apparaît sur la diagonale de T.
Mais si λ n'apparaît qu'une seule fois sur cette diagonale, alors nécessairement $\dim E_\lambda = 1$.

Puisque $u(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi$ et que $u(\psi) = -\psi$, on en déduit que

$$\boxed{E_{\frac{1}{2}}(u) = \mathrm{Vect}(\varphi) \text{ et } E_{-1}(u) = \mathrm{Vect}(\psi).}$$

9.b. $\boxed{u \text{ n'est pas diagonalisable}}$ puisque la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut $2 \neq \dim E$.

10. Centre de u

10.a. Puisque u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables[3] par v.
En particulier, $v(\varphi) \in E_{-1/2}(u) = \mathrm{Vect}(\varphi)$, donc il existe un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\boxed{v(\varphi) = \lambda\varphi.}$

[3] C'est le résultat de la question 3.

De même, $v(\psi) \in E_{-1}(u) = \mathrm{Vect}(\psi)$, et donc il existe $\mu \in \mathbf{R}$ tel que $\boxed{v(\psi) = \mu\psi.}$

10.b. Puisque (φ, ψ, δ) est une base de E, $v(\delta)$ s'écrit de manière unique $a\varphi + \nu\psi + \omega\delta$.
Il s'agit donc de prouver que $a = 0$.
D'une part, on a $v(u(\delta)) = v(-\psi - \delta) = -\mu\psi - a\varphi - \nu\psi - \omega\delta$.
D'autre part, puisque u et v commutent,

$$v(u(\delta)) = u(v(\delta)) = u(a\varphi + \nu\psi + \omega\delta) = \frac{a}{2}\varphi - \nu\psi - \omega\psi - \omega\delta$$

Par unicité de la décomposition de $u(v(\delta))$ dans la base C, on en déduit que $\frac{a}{2} = a$, et donc $a = 0$.
Ceci prouve bien qu'il existe $\boxed{\nu, \omega \in \mathbf{R} \text{ tels que } v(\delta) = \nu\psi + \omega\delta.}$

10.c. En réutilisant le calcul de la question précédente, et en identifiant cette fois les composantes en ψ, il vient $\mu + \nu = \omega + \nu$, et donc $\boxed{\mu = \omega.}$

10.d. $v \in C(u)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_C(v)$ et $\mathrm{Mat}_C(u) = T$ commutent. Or, on a

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -mu & -\eta-\mu \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc si $\mathrm{Mat}_C(v)$ est de la forme indiquée, on a bien $u \circ v = v \circ u$: $\boxed{v \in C(u).}$

10.e. Les questions précédentes prouvent que $C(u)$ est exactement l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans la base C est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Notons F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ formé des matrices de cette forme.
Nous savons que $f \mapsto \mathrm{Mat}_C(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
Or, nous venons de prouver que sa restriction à $C(u)$ induit un isomorphisme de $C(u)$ sur F, de sorte que $\dim C(u) = \dim F$.
Il est facile de voir que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F, et c'est une famille libre. C'est donc une base de F, qui est donc de dimension 3. On en déduit que

$$\boxed{\dim C(u) = \dim F = 3.}$$

> **Détails**
> Les questions 10.a et 10.b prouvent que si v commute avec u, alors la matrice de v dans la base C est de la forme indiquée.
> Et la question 10.c prouvent la réciproque.

10.f. Soient $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$ tels que $a_1 \mathrm{id}_E + a_2 u + a_3 u^2 = 0$. Alors

$$0 = a_1 I_3 + a_2 T + a_3 T^2 = \begin{pmatrix} a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & a_1 - a_2 + 2a_3 & -a_2 + 2a_3 \\ 0 & 0 & a_1 - a_2 + 2a_3 \end{pmatrix}.$$

Par identification des coefficients, il vient

$$\begin{cases} a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{4} = 0 \\ a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 \\ -a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\longleftrightarrow} \begin{cases} a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{4} = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 2a_3 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (\mathrm{id}_E, u, u^2) \text{ est une famille libre de } \mathscr{L}(E).}$

10.g. Nous avons prouvé à la question 2 que $\mathbf{R}[u] \subset C(u)$. De plus, $\dim C(u) = 3$, et puisque (id_E, u, u^2) est une famille libre de $\mathbf{R}[u]$, $\dim \mathbf{R}(u) \geqslant 3$.
On en déduit que $\dim \mathbf{R}[u] = 3$, et donc $\boxed{\mathbf{R}[u] = C(u).}$

> **Remarque**
> Nous venons de prouver que tout endomorphisme commutant avec u est un polynôme en u.
> Mieux : (id_E, u, u^2) est une base de $C(u)$ et donc tout endomorphisme commutant avec u est un polynôme en u de degré au plus 2.

Partie III : Centre de $\mathscr{L}(E)$

11. Par hypothèse, si $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbf{R}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$.
Ceci ne prouve pas que u est une homothétie car **a priori**, λ_x dépend de x. Prouvons qu'en fait, λ_x ne dépend pas de x.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ (autrement dit, avec la notation précédente, $\lambda_i = \lambda_{e_i}$).
Si $i \geqslant 2$, alors $u(e_1 + e_i) = u(e_1) + u(e_i) = \lambda_1 e_1 + \lambda_i e_i$.
Mais d'autre part, il existe $\mu \in \mathbf{R}$ tel que $u(e_1 + e_i) = \mu(e_1 + e_i)$, et donc $(\mu - \lambda_1)e_1 + (\mu - \lambda_i)e_i = 0$.
Mais la famille (e_1, e_i) est libre[4], et donc $\mu - \lambda_1 = 0$ et $\mu - \lambda_i = 0$. On en déduit que $\lambda_1 = \lambda_i$.
Par conséquent, la matrice de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est $\lambda_1 I_n$, et donc $u = \lambda_1 \mathrm{id}_E$: $\boxed{u \text{ est une homothétie.}}$

[4] Car sous-famille d'une base.

12. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Alors $p \circ v = v \circ p$.
En particulier, $p(v(e)) = v(p(e)) = v(e)$. Mais $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$, donc $u(e) \in F = \mathrm{Vect}(e)$.
Et donc $v(e)$ est colinéaire à e : e est un vecteur propre de v.
Ce raisonnement étant valable pour tout vecteur non nul e de E, on en déduit que tout vecteur de E est vecteur propre de v. Par la question précédente, cela signifie que v est une homothétie.

> **Rappel**
> Si p est un projecteur, alors
> $E_1(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(p)$.
> En particulier, si p est la projection sur F parallèlement à G, $E_1(p) = F$.

Donc $C(U)$ est inclus dans l'ensemble des homothéties de E.
Inversement, il est clair que si $v = \lambda \mathrm{id}_E$ est une homothétie de E, alors v commute à tous les projecteurs de E, et donc est dans $C(U)$.

$\boxed{\text{Ceci prouve que } C(U) \text{ est l'ensemble des homothéties de } E.}$

13. Il est évident que toutes les homothéties commutent à tous les endomorphismes de E.
Et d'après la question précédente, si u commute à tous les endomorphismes de E, alors u commute à tous les projecteurs de E, et donc est une homothétie.
Ainsi, $\boxed{C(\mathscr{L}(E) = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E) \text{ est l'ensemble des homothéties de } E.}$

Partie IV : Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

14. C'est le résultat de la question 3, puisque $E_i = E_{\lambda_i}(u)$.

15. Puisque u est diagonalisable, il existe une base de E formée de vecteurs propres de u. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ une telle base.
Alors pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons j_i l'entier de $[\![1, r]\!]$ tel que $e_i \in E_{j_i}$.
Puisque E_j est stable par v, $v(e_i) \in E_{j_i}$. Et donc

$$u(v(e_i)) = \lambda_{j_i} v(e_i).$$

D'autre part, $v(u(e_i)) = v(\lambda_{j_i} e_i) = \lambda_{j_i} v(e_i)$.
Et donc $u(v(e_i)) = v(u(e_i))$.
Si $x \in E$, alors il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, et donc

$$u(v(x)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(v(e_i)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v(u(e_i)) = v(u(x)).$$

Ainsi, u et v commutent, donc $\boxed{v \in C(u).}$

16. Soit comme indiqué dans l'énoncé, b une base de E obtenue par concaténation de bases des E_i.
Autrement dit, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, soit $(e_1^i, e_2^i, \dots, e_{r_i}^i)$ une base de E_i, et soit $b = (e_1^1, \dots, e_{r_1}^1, e_1^2, \dots, e_{r_2}^2, \dots, e_{r_p}^p)$ la base de E obtenue par concaténation des bases des E_i.
Par les questions précédentes, v est dans $C(u)$ si et seulement si tous les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Cela signifie notamment que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, et tout $j \in [\![1, r_i]\!]$ $v(e_j^i) \in E_i = \mathrm{Vect}(e_1^i, \dots, e_{r_i}^i)$.
Autrement dit, la matrice de v dans la base b est «diagonale par blocs», avec des blocs carrés de taille $r_1, r_2, \dots, r_p$.

Détails
Si vous n'êtes pas convaincu, voir ci-dessous pour un exemple plus concret.

$$\mathrm{Mat}_b(v) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & A_p \end{array}\right)$$

avec $A_1 \in \mathscr{M}_{r_1}(\mathbf{R}), A_2 \in \mathscr{M}_{r_2}(\mathbf{R}), \dots, A_p \in \mathscr{M}_{r_p}(\mathbf{R})$ et où les 0 désignent des matrices rectangulaires nulles.

Et inversement, si la matrice de v dans la base b possède l'allure ci-dessus, soit $i \in [\![1, p]\!]$ et soit $x \in E_i$.
Alors x est combinaison linéaire de $(e_1^i, \dots, e_{r_i}^i)$: il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_i}$ tels que

$$x = \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j e_j^i.$$

Mais la matrice de v étant diagonale par blocs, les $v(e_k^i)$, $k \in [\![1, r_i]\!]$ sont combinaisons linéaires de $e_1^i, \dots, e_{r_i}^i$ et donc dans E_i. Ainsi

$$v(x) = \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j \underbrace{v(e_j^i)}_{\in E_i} \in E_i.$$

Ceci prouve que tous les sous-espaces propres de u sont stables par v, et donc par la question 15, que $v \in C(u)$.

Quelques détails sur un exemple : si le raisonnement ci-dessus ne vous convainc pas totalement, essayons de regarder en détails ce qu'il se passe sur un exemple.

Supposons par exemple que $\dim E = 5$, que u possède trois valeurs propres $1, 2$ et 3, et que $\dim E_1(u) = 1$, $\dim E_2(u) = \dim E_3(u) = 2$.

Notons e_1^1 une base de $E_1(u)$, (e_1^2, e_2^2) une base de $E_2(u)$ et (e_1^3, e_2^3) une base de $E_3(u)$.

Alors $v(e_1^1) \in E_1$, et donc il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $v(e_1^1) = \alpha e_1^1$.

De même, $v(e_1^2) \in E_2 = \mathrm{Vect}(e_1^2, e_2^2)$, et donc il existe deux réels λ_1, λ_2 tels que $v(e_1^2) = \lambda_1 e_1^2 + \lambda_2 e_2^2$.

Et de même, il existe deux réels μ_1, μ_2 tels que $v(e_2^2) = \mu_1 e_1^2 + \mu_2 e_2^2$.

Toujours sur le même principe, $v(e_1^3)$ et $v(e_2^3)$ sont dans $E_3(u)$ et donc s'écrivent

$$v(e_1^3) = \beta_1 e_1^3 + \beta_2 e_2^3 \text{ et } v(e_2^3) = \gamma_1 e_1^3 + \gamma_2 e_2^3.$$

Alors la matrice de v dans la base[5] $b = (e_1, e_1^2, e_2^2, e_1^3, e_2^3)$ est

$$\mathrm{Mat}_b(v) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v(e_1^1) & v(e_1^2) & v(e_2^2) & v(e_1^3) & v(e_2^3) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|cc|cc} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \mu_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 & \gamma_2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1^1 \\ e_1^2 \\ e_2^2 \\ e_1^3 \\ e_2^3 \end{array}.$$

[5] Qui est bien une base adaptée à la somme directe des sous-espaces propres.

Il s'agit donc bien d'une matrice diagonale par blocs, dont le premier bloc est de taille $1 = \dim E_1(u)$, le second est de taille $2 = \dim E_2(u)$ et le troisième est de taille $2 = \dim E_2(u)$.

17. Notons F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices de la forme obtenue à la question 16[6]

[6] C'est-à-dire diagonales par blocs avec des blocs diagonaux de taille $r_1, r_2, \dots, r_p$.

Nous venons de prouver que $v \mapsto \mathrm{Mat}_b(v)$ est un isomorphisme de $C(u)$ sur F, et donc $C(u)$ et F ont même dimension.

Or toute matrice de F s'écrit de manière unique

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right) + \dots + \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & A_p \end{array}\right)$$

avec $A_1 \in \mathcal{M}_{r_1}(\mathbf{R}), A_2 \in \mathcal{M}_{r_2}(\mathbf{R}), \dots, A_p \in \mathcal{M}_{r_p}(\mathbf{R})$.

Puisque la dimension de $\mathcal{M}_{r_i}(\mathbf{R})$ est r_i^2, on en déduit que

$$\boxed{\dim C(u) = \dim F = \sum_{i=1}^{p} \dim \mathcal{M}_{r_i}(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2.}$$

Remarque : cette preuve est relativement intuitive, mais peut-être pas totalement satisfaisante. De manière plus précise, une base de F est formée de l'ensemble des matrices élémentaires (c'est-à-dire celles qui n'ont qu'un coefficient non nul, et égal à 1) qui sont dans F. On vérifie alors qu'il y en a bien $\sum r_i^2$.

18. Nous savons que $n = \sum_{i=1}^{p} r_i$, et que chacun des r_i est supérieur ou égal à 1.

Donc $r_i^2 \geqslant r_i$, et ainsi

$$\dim C(u) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{p} r_i = n.$$

De plus, on a égalité si et seulement si pour tout i, $r_i^2 = r_i$, c'est-à-dire si et seulement si[7] pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $r_i = \dim E_i = 1$.

[7] Notons que les r_i sont strictement positifs, et donc on peut écarter le cas $r_i = 0$.

Or, puisque u est diagonalisable, tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1 si et seulement si u possède exactement n valeurs propres distinctes (car $\sum_{i=1}^{p} r_i = n$).

19. Puisque b est une base de vecteurs propres de u, la matrice de u dans la base b est diagonale. Plus précisément, on a

$$M = \mathrm{Mat}_b(u) = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{r_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{r_p \text{ fois}}).$$

Puisque les puissances d'une matrice diagonale sont faciles à calculer, on a

$$\forall k \in \mathbf{N}, M^k = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1^k, \dots, \lambda_1^k}_{r_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_p^k, \dots, \lambda_p^k}_{r_p \text{ fois}}).$$

Et par combinaisons linéaires, si $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, alors

$$\boxed{P(M) = \sum_{i=0}^{d} a_i M^i = \mathrm{diag}(\underbrace{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_1)}_{r_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{P(\lambda_p), \dots, P(\lambda_p)}_{r_p \text{ fois}}).}$$

20. Par la question précédente, on a

$$\pi(M) = \mathrm{diag}(\underbrace{\pi(\lambda_1), \dots, \pi(\lambda_1)}_{r_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\pi(\lambda_p), \dots, \pi(\lambda_p)}_{r_p \text{ fois}}) = 0.$$

Or, $\pi(M) = \mathrm{Mat}_b(\pi(u))$, et donc $\boxed{\pi(u) = 0.}$

21. On a $P(u) = 0$ si et seulement si $P(M) = 0$.
Mais d'après la question 19, $\boxed{P(M) = 0 \text{ si et seulement si } \lambda_1, \dots, \lambda_p \text{ sont des racines de } P.}$

22. Soient $a_0, \dots, a_{p-1}$ des réels tels que $\sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i = 0$.

Alors en posant $P = \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i \in \mathbf{R}[X]$, on a $P(u) = 0$.
Par la question précédente, cela signifie que $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des racines de P.
Or, $\deg P \leqslant p - 1$, et ainsi P possède strictement plus de racines que son degré : P est nul.
Et par unicité des coefficients d'un polynôme, $a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0$.
$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{p-1}) \text{ est une famille libre de } \mathscr{L}(E).}$

23. Soit $k \in \mathbf{N}$. Écrivons la division euclidienne du polynôme X^k par π : $X^k = \pi Q_k + R_k$ avec $Q_k \in \mathbf{R}[X]$ et $R_k \in \mathbf{R}_{p-1}[X]$.

Notons $R_k(x) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i$. Alors

$$u^k = \underbrace{\pi(u)}_{=0} \circ Q_k(u) + R_k(u) = R_k(u) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i \in \boxed{\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, \dots, u^{p-1}).}$$

On en déduit que la famille $(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{p-1})$ est une famille génératrice de $\mathbf{R}[u]$, car tout élément de $\mathbf{R}[u]$ s'écrit (par définition) comme combinaison linéaire des $u^k, k \in \mathbf{N}$, et donc comme combinaison linéaire de $(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{p-1})$.
Comme la question précédente prouve que cette famille est libre, c'est donc une base de $\mathbf{R}[u]$ et par conséquent

$$\boxed{\dim \mathbf{R}[u] = \mathrm{Card}(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{p-1}) = p.}$$

Plus généralement

Notons que ce résultat n'est pas spécifique au polynôme π, et on peut tenir le même raisonnement avec n'importe quel polynôme annulateur de u : si P est un polynôme annulateur de u de degré d, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$u^k \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{d-1}).$$

24. En combinant les résultats des questions 18 et 23, on a

$$\dim C(u) \geqslant n \geqslant p \geqslant \dim \mathbf{R}[u].$$

Puisque $\mathbf{R}[u] \subset C(u)$ (question 2), $C(u) = \mathbf{R}[u]$ si et seulement si toutes les inégalités qui précèdent sont des égalités.
En particulier, si $C(u) = \mathbf{R}[u]$, alors $n = p$, donc u admet n valeurs propres distinctes.
Inversement, si u admet n valeurs propres distinctes, alors $\dim C(u) = n$ par la question 18 et $\dim \mathbf{R}[u] = n$ par la question 23. Donc $C(u) = \mathbf{R}[u]$.
Ainsi, $\boxed{C(u) = \mathbf{R}[u] \text{ si et seulement si } u \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes.}}$

Partie V : Centre du commutant d'un endomorphisme diagonalisable

25. Soit $v \in C_2(u)$. Alors v commute à tous les éléments de $C(u)$. Mais $u \in C(u)$, et donc u et v commutent. Donc $v \in C(u)$, et ainsi $\boxed{C_2(u) \subset C(u).}$

26. Soit $v \in C(u)$. Alors une récurrence rapide prouve que

$$\forall k \in \mathbf{N}, v \circ u^k = u^k \circ v.$$

Soit $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbf{R}[X]$. Alors

$$P(u) \circ v = \sum_{i=0}^{d} a_i u^i \circ v = \sum_{i=0}^{d} a_i v \circ u^i = v \circ P(v).$$

Ainsi, pour $P \in \mathbf{R}[X]$ et $v \in C(u)$, $P(u)$ et v commutent. Cela signifie bien que $P(u) \in C_2(u)$, et donc $\boxed{\mathbf{R}[u] \subset C_2(u).}$

27. Soit $f \in \mathscr{L}(E_i)$. Montrons qu'il existe un endomorphisme $\tilde{f}$ de E tel que

$$\forall x \in E_i, \tilde{f}(x) = f(x) \text{ et } \forall j \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}, \forall x \in E_j, \tilde{f}(x) = 0.$$

Pour cela, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, formée de vecteurs propres de u, et telle que les r_i premiers vecteurs de cette base forment une base de E_i.
Alors on définit un endomorphisme $\tilde{f}$ de E en posant

$$\forall (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbf{R}^n, \tilde{f}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{r_1} \mu_i e_i\right).$$

> **Autrement dit**
> Si on note p_i la projection sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$, alors $\tilde{f} = f \circ p_i$.
> Notons de plus que si $x \in E_i$, alors $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Alors tous les sous-espaces propres de u sont stables par $\tilde{f}$ (car f est un endomorphisme de E_i et que pour $i \neq j$, $\tilde{f}(E_j) = \{0\}$), et donc par la question 15, $\tilde{f} \in C(u)$.
Donc v et $\tilde{f}$ commutent, car $\tilde{f} \in C(u)$ et $v \in C_2(u)$.
En particulier, $\forall x \in E_i$, on a

$$v_i(f(x)) = v_i(\tilde{f}(x)) = v(\tilde{f}(x)) = \tilde{f}(v(x)) = \tilde{f}(v_i(x)) = f(v_i(x)).$$

Donc $v_i \circ f = f \circ v_i$. Ceci étant vrai pour tout $f \in \mathscr{L}(E_i)$, on a bien $v_i \in C(\mathscr{L}(E_i))$.
D'après la question 13, v_i est donc une $\boxed{\text{homothétie de } E_i}$.
Autrement dit, $\boxed{\text{il existe } \mu_i \in \mathbf{R} \text{ tel que } v_i = \mu_i \mathrm{id}_{E_i}.}$

28. Soit $\varphi : \mathbf{R}_{p-1}[X] \to \mathbf{R}^p$ l'application linéaire définie par

$$\varphi(P) = \left(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_p)\right).$$

Alors φ est injective, car si $\varphi(P) = (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_p)) = (0, \dots, 0)$, alors $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des racines distinctes[8] de P, et donc P est nul car possède strictement plus de racines que son degré.
Mais puisque $\dim \mathbf{R}_{p-1}[X] = \dim \mathbf{R}^p = p$, φ est bijectif.
Et donc il existe un unique $Q \in \mathbf{R}_{p-1}[X]$ antécédent par φ au p-uplet $(\mu_1, \dots, \mu_p)$.
Autrement dit, il existe un unique $Q \in \mathbf{R}_{p-1}[X]$ tel que

$$\boxed{\forall i \in [\![1,p]\!], Q(\lambda_i) = \mu_i.}$$

[8] Car $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont distincts.

29. Nous avons déjà prouvé à la question 26 que $\mathbf{R}[u] \subset C_2(u)$. Prouvons l'inclusion réciproque : soit $v \in C_2(u)$. Alors d'après la question 27, dans une base b adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, la matrice de v est de la forme

$$\mathrm{diag}(\underbrace{\mu_1, \dots, \mu_1}_{r_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\mu_p, \dots, \mu_p}_{r_p \text{ fois}}).$$

Mais alors si Q est le polynôme défini à la question précédente, il vient

$$\mathrm{Mat}_b(v) = \mathrm{diag}(\underbrace{Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_1)}_{r_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{Q(\lambda_p, \dots, Q(\lambda_p)}_{r_p \text{ fois}}) = Q(\mathrm{Mat}_b(u)).$$

Et donc il vient $v = Q(u)$, de sorte que $v \in \mathbf{R}[u]$.
On a alors $C_2(u) \subset \mathbf{R}[u]$, et par double inclusion, $\boxed{\mathbf{R}[u] = C_2(u).}$

ESSEC 2010

Sujet : Étude d'un opérateur lié à une équation différentielle du premier ordre. **Moyen**

Abordable en première année : ✓ (sauf 4.b et 5.b) **Intérêt** : ★☆☆

Thèmes du programme abordés : fonctions d'une variable, intégrales impropres, algèbre linéaire de base.

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Commentaires : La première partie est intéressante, mais l'ensemble est un peu répétitif.

Notations et objectifs du problème.

On désigne par I l'intervalle $[1,+\infty[$; on note E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur U à valeurs réelles et $\mathscr{C}^1(I,\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs réelles.

On fixe enfin a un réel strictement positif.

Pour f un élément de E, on dit qu'une fonction y de $\mathscr{C}^1(I,R)$ est une solution du problème (E_f) si :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) - ay(x) + f(x) = 0.$$

L'objectif de ce problème est de montrer qu'à tout élément f de E, on peut associer une unique solution g de (E_f) qui soit bornée sur I, puis d'étudier l'opérateur $U : f \mapsto g$.

Les trois parties du problème traitent, souvent à partir d'exemples, de propriétés de l'opérateur U.

I. Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U.

1. **Étude de l'équation (E_f).**
   a. On considère $f \in E$ et $y \in \mathscr{C}^1(I,\mathbf{R})$. Écrire la dérivée de $x \mapsto e^{-ax}y(x)$. Montrer alors que y est solution du problème (E_f) si et seulement si il existe $K \in \mathbf{R}$ tel que : $\forall x \in I, \quad y(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at}f(t)\,dt\right)$.
   b. Montrer que, s'il existe une solution de (E_f) qui soit bornée sur I, celle-ci est unique.
   c. Vérifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt$ est convergente.
   d. Démontrer que $g : x \mapsto e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt$ est l'unique solution de (E_f) qui soit bornée sur I.

Dans toute la suite du problème, si $f \in E$, on note $U(f)$ la fonction g obtenue à la question d.

2. **Linéarité de U.**
   a. Expliciter $U(f)$ dans le cas où $f = 1$.
   b. Montrer que U est un endomorphisme de E.
   c. U est-il injectif ?
   d. On définit les puissances successives de U par $U^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout entier naturel n non nul, $U^n = U^{n-1} \circ U$.
   Montrer que, pour tout entier naturel n, $U^{n+1}(f)$ est la fonction $x \mapsto e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)\,dt$.
3. **Cas des fonctions exponentielles.**
   a. Pour k un nombre réel positif et f_k la fonction $x \mapsto e^{-kx}$, expliciter $U(f_k)$.
   b. En déduire que, pour tout réel $\lambda \in \left]0, \frac{1}{a}\right]$, $\mathrm{Ker}(U - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0\}$.
   c. Pour tout entier naturel n, expliciter $U^n(f_k)$. Pour x élément de I, préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} [U^n(f)](x)$.
4. **Cas des fonctions sinus et cosinus.**
   Dans cet exemple seulement (ensemble de la question 4), on prendra $a = 1$.
   a. Expliciter $U(\sin)$ et $U(\cos)$.
   b. Montrer que le sous-espace vectoriel P de E engendré par les fonctions sin et cos est stable par U et que (sin, cos) en est une base. Dans cette base, écrire la matrice M de l'endomorphisme $U_p : \begin{cases} P & \to P \\ f & \mapsto U(f) \end{cases}$
   c. Calculer M^2, M^3, M^4. Expliciter M^n pour tout entier naturel n, puis préciser la limite des coefficients de M^n lorsque n tend vers l'infini.

5. **Une autre famille de fonctions.**
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction de E $\varphi_n : x \mapsto e^{-x}x^n$ et on note ψ_n la fonction $U(\varphi_n)$.
   a. Pour n entier naturel non nul, établir une relation entre ψ_n, φ_n et ψ_{n-1}.
   b. Pour p entier naturel, montrer que le sous-espace F_p de E engendré par $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est stable par U et admet pour base $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$.
   c. On prend ici $p = 2$, écrire dans la base $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ de F_2 la matrice T_2 de l'endomorphisme $U_2 : \begin{cases} F_2 & \to F_2 \\ f & \mapsto U(f) \end{cases}$.
   Calculer T_2^n pour tout entier naturel n, puis préciser la limite des coefficients de T_2^n lorsque n tend vers l'infini.
6. **Une autre expression de $U(f)$.**
Pour $f \in E$, montrer que $: \forall x \in I, U(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t)\, dt$.
7. **Positivité de U.**
   a. Pour $f \in E$, montrer que : $|U(f)| \leqslant U(|f|)$.
On considère maintenant φ un élément de E à valeurs positives et $\psi = U(\varphi)$.
   b. Montrer que ψ est à valeurs positives.
   c. On suppose que φ est décroissante. Montrer que $a\psi \leqslant \varphi$ puis que ψ est décroissante.
8. **Commutation de U avec la dérivation.**
On note $E_1 = \{f \in E \cap \mathscr{C}^1(I, \mathbf{R}) / f'$ bornée sur $I\}$ et D l'opérateur de dérivation qui, à tout élément de E_1, associe sa dérivée.
   a. Pour f un élément de E_1, montrer, en utilisant la question 6, que $: aU(f) = f + U(f')$.
   b. En déduire que, pour tout élément f de E_1, $D(U(f)) = U(D(f))$.
   c. Pour f une fonction de E_1 à valeurs positives et décroissante, retrouver le résultat de la question 7.c $: U(f)$ est décroissante.

II. Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de $+\infty$.

9. **Résultats préliminaires.**
On considère ici α et β deux fonctions à valeurs réelles, continues sur I. On supposer que, $\forall x \in I$, $\beta(x) > 0$, et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \beta(t)\, dt$ converge.
   a. On suppose ici que $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\beta(x))$ et on se propose de montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \alpha(t)\, dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t)\, dt\right)$.
   Soit $\varepsilon > 0$, montrer que $: \exists A > 0 / \forall x \geqslant A, \left|\displaystyle\int_x^{+\infty} \alpha(t)\, dt\right| \leqslant \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t)\, dt$. Conclure.
   b. On suppose maintenant que $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \beta(x)$, montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \alpha(t)\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \beta(t)\, dt$.
10. **Cas des fonctions admettant une limite en $+\infty$.**
Si f est un élément de E admettant une limite finie b en $+\infty$ (b est un nombre réel), montrer que $g = U(f)$ admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera (*on pourra commencer par traiter le cas où $b = 0$ en écrivant, dans ce cas, $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1)$ et en utilisant la question 9.*).
11. **Cas des fonctions puissances.**
Dans cette question et la suivante, ω est un réel strictement positif, on note f_ω la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega = U(f_\omega)$.
   a. Montrer que $g_\omega(x) = \dfrac{f_\omega(x)}{a} - \dfrac{\omega}{a} g_{\omega+1}(x)$. En déduire que $g_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{f_\omega(x)}{a}$.
   b. Montrer que pour tout x de I, $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\, dt = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k \cdot k!}(x^k - 1)$ (On pourra utiliser une inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction $t \mapsto e^{-at}$), et en déduire :
$$g_1(x) = e^{ax} \left\{ -\ln x - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{a^k}{k.k!}(x^k - 1) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\, dt \right\}.$$
12. **Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances f_ω.**
On note toujours f un élément de E et $g = U(f)$.
   a. Prouver que si f est négligeable devant f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est négligeable devant g_ω au voisinage de $+\infty$.
   b. Prouver que si f est équivalent à f_ω au voisinage de $+\infty$, alors g est équivalent à $\dfrac{f}{a}$ au voisinage de $+\infty$.

III. Convergence absolue de $\displaystyle\int_1^{+\infty} U(f)$.

On s'intéresse dans cette partie à la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} |[U(f)](t)|\, dt$ dans le cas où $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(t)|\, dt$ est elle-même convergente. On note toujours $g = U(f)$.

13. **Étude d'exemples.**

  a. Pour k un réel strictement positif et $f_k : t \mapsto e^{-kt}$, on note $g_k = U(f_k)$. Vérifier que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_k(t)\, dt$ est convergente.

  b. Pour ω un réel strictement positif, on note encore $f_\omega : t \mapsto \dfrac{1}{t^\omega}$ et $g_\omega = U(f_\omega)$. Pour quelles valeurs de ω l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_\omega(t)\, dt$ est-elle convergente ?

14. **Cas des fonctions positives.**

  Dans cette question, f est un élément de E, à valeurs positives tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente.

  On note $F : x \in I \mapsto \displaystyle\int_1^{x} f(t)\, dt$, $g = U(f)$ et $G : x \in I \mapsto \displaystyle\int_1^{x} g(t)\, dt$.

  a. Vérifier que $G' - aG = -F + g(1)$.

  b. Justifier que F est dans E et montrer qu'il existe une constante réelle K telle que, pour tout $x \in I$, $G(x) = Ke^{ax} + [U(F)](x) - \dfrac{g(1)}{a}$.

  c. Vérifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{G(x)}{x}$ est bornée sur I.

  d. En déduire que $K = 0$ et que $G = U(F) - \dfrac{g(1)}{a}$.

  e. Montrer alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\, dt$ est convergente.

15. **Cas général.**

  Dans cette question, f est un élément de E tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est absolument convergente.

  Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\, dt$ est absolument convergente.

ESSEC 2010 : CORRIGÉ

I. Existence et propriétés élémentaires de l'opérateur U.

1. **Étude de l'équation (E_f).**

1.a. La dérivée de $h : x \mapsto e^{-ax}y(x)$ est $\boxed{h' : x \mapsto e^{-ax}\left(y'(x) - ay(x)\right).}$
En particulier, y est solution de (E_f) si et seulement si pour tout $x \in I$,

$$e^{ax}h'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow h'(x) = -e^{-ax}f(x).$$

C'est-à-dire si et seulement si h est une primitive de $x \mapsto e^{-ax}f(x)$.
Mais par le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto -\int_1^x e^{-at}f(t)\,dt$ est une primitive de $x \mapsto -e^{-ax}f(x)$, et donc h est une primitive de $x \mapsto -e^{-ax}f(x)$ si et seulement si il existe $K \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in I,\ h(x) = K - \int_1^x e^{-at}f(t)\,dt$.
Autrement dit, si et seulement si il existe $K \in \mathbf{R}$ tel que

$$\boxed{\forall x \in I,\ y(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at}f(t)\,dt\right).}$$

Mieux
Nous savons même qu'il s'agit de l'unique primitive qui s'annule en 1.

Remarque
Notons que nous venons donc de prouver que (E_f) possède toujours une infinité de solutions.

1.b. Supposons que y_1, y_2 soient deux solutions bornées de (E_f).
Alors il existe deux constantes réelles K_1, K_2 telles que

$$\forall x \in I,\ y_1(x) = e^{ax}\left(K_1 - \int_1^x e^{-at}f(t)\,dt\right) \text{ et } y_2(x) = e^{ax}\left(K_2 - \int_1^x e^{-at}f(t)\,dt\right).$$

De plus, il existe deux réels positifs M_1, M_2 tels que

$$\forall x \in I,\ |y_1(x)| \leqslant M_1 \text{ et } |y_2(x)| \leqslant M_2.$$

Mais alors $y_1 - y_2$ est encore bornée car

$$\forall x \in I,\ |y_1(x) - y_2(x)| \leqslant |y_1(x)| + |y_2(x)| \leqslant M_1 + M_2.$$

Or, $|y_1(x) - y_2(x)| = e^{ax}|K_1 - K_2|$.
Si $K_1 \neq K_2$, alors $|K_1 - K_2| > 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} |y_1(x) - y_2(x)| = +\infty$, ce qui est impossible car $y_1 - y_2$ est bornée.
On en déduit que $K_1 = K_2$, et donc que $y_1 = y_2$.
Ainsi, $\boxed{\text{si } (E_f) \text{ possède une solution bornée, celle-ci est unique.}}$

Danger
Attention aux signes, il n'est pas question d'affirmer que $|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant |y_1(x)| - |y_2(x)|$, l'inégalité triangulaire nous donne seulement un signe +.

1.c. Puisque $f \in E$, elle est bornée, et donc il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in I,\ |f(t)| \leqslant M$.
Ainsi, pour tout $t \in I$, on a $0 \leqslant |e^{-at}f(t)| \leqslant Me^{-at}$.
Mais $a > 0$, et donc $\int_1^{+\infty} Me^{-at}\,dt$ converge.
On en déduit donc que $\int_1^{+\infty} |e^{-at}f(t)|\,dt$ converge, c'est-à-dire que $\int_1^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt$ converge absolument $\boxed{\text{et donc converge.}}$

1.d. Notons que par la question précédente, $\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt$ est bien convergente.
D'autre part, on a

$$\left|\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^{+\infty} |e^{-at}f(t)|\,dt \leqslant M\int_x^{+\infty} e^{-at}\,dt.$$

Mais pour $A > x$, on a

$$\int_x^A e^{-at}\,dt = \left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_x^A = \frac{1}{a}\left(e^{-ax} - e^{-aA}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}e^{-ax}.$$

Et donc il vient $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}\,dt = \frac{e^{-ax}}{a}$ et par conséquent

$$|g(x)| = e^{ax}\left|\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt\right| \leqslant e^{ax} M \frac{e^{-ax}}{a} \leqslant \frac{M}{a}.$$

Ainsi, g est bien une fonction bornée sur I.

D'autre part, si on note $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt$, alors pour tout $x \in I$, par la relation de Chasles,

$$g(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)\,dt\right)$$

et donc par la question 1.a, g est une solution de (E_f).

Puisqu'elle est bornée, la question 1.c garantit qu'il s'agit de $\boxed{\text{l'unique solution bornée de } (E_f).}$

2. **Linéarité de U.**

2.a. Si $f = 1$, on a pour tout $x \in I$,

$$[U(f)](x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}\,dt = e^{ax}\frac{e^{-ax}}{a} = \boxed{\frac{1}{a}.}$$

2.b. Soient f et g deux éléments de E et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}[U(\lambda f + g)](x) &= e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}(\lambda f(t) + g(t))\,dt \\ &= \lambda e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt + e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} g(t)\,dt = \lambda\,[U(f)](x) + [U(g)](x).\end{aligned}$$

Ainsi, on a $U(\lambda f + g) = \lambda U(f) + U(g)$, donc U est linéaire.

De plus, si $f \in E$, alors $U(f)$ est continue[1] et bornée par définition de $U(f)$.

Et ainsi $U(f) \in E$: $\boxed{U \text{ est un endomorphisme de } E.}$

[1] Et même $\mathscr{C}^1$ car solution de (E_f).

Rédaction Rappelons qu'une fonction est nulle si et seulement si elle s'annule en tout point de son ensemble de définition. Il est donc important ici de préciser que ceci est vrai **pour tout** $x \in I$.

2.c. Soit $f \in \operatorname{Ker}(U)$. Alors pour tout $x \in E$,

$$e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt = 0.$$

En particulier, pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt = 0$.

Mais $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt - \int_1^x e^{-at} f(t)\,dt$ a pour dérivée $x \mapsto -e^{-ax} f(x)$.

Et donc $x \mapsto -e^{-ax} f(x)$ est la fonction nulle, et donc pour tout $x \in I$, $f(x) = 0$.

Ainsi, $\operatorname{Ker}(U) = \{0\}$ et donc $\boxed{U \text{ est injectif.}}$

2.d. Procédons par récurrence sur n. Pour $n = 0$, le résultat est vrai d'après la question 1.d.

Supposons donc que pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in I$, $[U^{n+1}(f)](x) = e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at} f(t)\,dt$.

En particulier

$$[U^{n+2}(f)](x) = [U^{n+1}(U(f))](x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} e^{-at}[U(f)](t)\,dt.$$

Mais nous savons[2] que $U(f)$ est dérivable sur I avec

[2] C'est la définition de $U(f)$.

$$[U(f)]'(x) = a[U(f)](x) - f(x).$$

Procédons alors à une intégration par parties sur $[x, A]$, $A \geqslant x$, en posant

$$u(t) = \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ et } v(t) = e^{-at}[U(f)](t)$$

qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, avec

$$u'(t) = \frac{(t-x)^n}{n!} \text{ et } v'(t) = e^{-at}\left(-a[U(f)](t) + [U(f)]'(t)\right) = -e^{-at} f(t).$$

Il vient alors

$$\int_x^A \frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}[U(f)](t)\,dt = \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}[U(f)](t)\right]_x^A + \int_x^A \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}f(t)\,dt$$
$$= -\frac{(A-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-aA}[U(f)](A) + \int_x^A \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}f(t)\,dt.$$

Par croissances comparées, $\dfrac{(A-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-aA} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et puisque $U(f)$ est bornée,

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{(A-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-aA}[U(f)](A) = 0.$$

On en déduit donc que

$$\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}[U(f)](t)\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}f(t)\,dt.$$

Ce qui après multiplication par e^{ax} nous donne $[U^{n+2}(f)](x) = e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-at}f(t)\,dt$.
Et donc par le principe de récurrence, pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $f \in E$,

$$\boxed{[U^{n+1}(f)](x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!}e^{-at}f(t)\,dt.}$$

3. Cas des fonctions exponentielles.

3.a. Pour $x \in I$, on a

$$[U(f_k)](x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-(a+k)t}\,dt = e^{ax}\frac{e^{-(a+k)x}}{a+k} = \frac{e^{-kx}}{a+k}.$$

Et donc $\boxed{U(f_k) = \dfrac{1}{a+k}f_k.}$

3.b. Soit $\lambda \in \left]0, \dfrac{1}{a}\right]$, et soit $k = \dfrac{1}{\lambda} - a > 0$, de sorte que $\lambda = \dfrac{1}{a+k}$.
Alors nous venons de prouver que $U(f_k) = \dfrac{1}{a+k}f_k = \lambda f_k$, et donc $f_k \in \operatorname{Ker}(U - \lambda \mathrm{id}_E)$.
On en déduit donc que $\boxed{\operatorname{Ker}(U-\lambda\mathrm{id}_E) \neq \{0\}.}$

Valeurs propres

Ceci est un exemple de ce qui peut se produire pour des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension infini (ce qui est le cas de E) : ils peuvent posséder une infinité de valeurs propres distinctes. Notons au passage que cela prouve que E est de dimension infinie : dans le cas contraire, il n'existerait qu'un nombre fini de $\lambda \in \mathbf{R}$ pour lesquels $\operatorname{Ker}(U-\lambda\mathrm{id}_E) \neq \{0\}$.

3.c. Puisque $U(f_k) = \dfrac{1}{a+k}f_k$, on a donc $\boxed{U^n(f_k) = \dfrac{1}{(a+k)^n}f_k.}$
En particulier, pour $x \in I$, $U^n(f_k) = \dfrac{1}{(a+k)^n}e^{-kx}$.
Si $a+k > 1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}[U^n(f_k)](x) = 0$.
Si $a+k = 1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}[U^n(f_k)](x) = e^{-kx}$.
Enfin, si $a+k < 1$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}[U^n(f_k)](x) = +\infty$.

4. Cas des fonctions sinus et cosinus.

4.a. On a $[U(\cos)](x) = e^x\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos t\,dt$.
Or, sur un segment de la forme $[x, A]$, une intégration par parties nous donne

$$\int_x^A e^{-t}\cos t\,dt = \left[e^{-t}\sin t\right]_x^A + \int_x^A e^{-t}\sin t\,dt = -e^{-x}\sin x + e^{-A}\sin A + \int_x^A e^{-t}\sin t\,dt.$$

Or, lorsque $A \to +\infty$, $e^{-A} \to 0$ et la fonction sin étant bornée, $e^{-A}\sin A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos t\,dt = -e^{-x}\sin x + \int_x^{+\infty} e^{-t}\sin t\,dt$.
Ainsi, $[U(\cos)](x) = -\sin x + [U(\sin)](x)$.
De même, on prouve à l'aide d'une intégration par parties que

$$[U(\sin)](x) = \cos(x) - [U(\cos)](x).$$

Et donc, il vient

$$\begin{cases} U(\cos) = -\sin + U(\sin) \\ U(\sin) = \cos - U(\cos) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U(\cos) = \frac{\cos - \sin}{2} \\ U(\sin) = \frac{\cos + \sin}{2} \end{cases}$$

Soit $f \in P$. Alors il existe deux réels α et β tels que $f = \alpha \cos + \beta \sin$.
Et donc $U(f) = \alpha \underbrace{U(\cos)}_{\in P} + \beta \underbrace{U(\sin)}_{\in P} \in P$.

Ainsi, $\boxed{P \text{ est stable par } U.}$

Plus généralement Un sous-espace vectoriel F est stable par f si et seulement si l'image par f d'une base de F est encore dans F.

Par définition de P, la famille $(\sin, \cos)$ en est génératrice. D'autre part, si λ_1, λ_2 sont deux réels tels que $\lambda_1 \cos + \lambda_2 \sin = 0$, alors en évaluant cette relation en $x = 0$, il vient $\lambda_1 = 0$.
Et donc $\lambda_2 \sin = 0$. En évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$, il vient donc $\lambda_2 = 0$.

Ainsi, la famille $(\cos, \sin)$ est libre : $\boxed{\text{c'est une base de } P.}$
Et d'après les relations montrées précédemment,

$$M = \mathrm{Mat}_{(\sin,\cos)}(U) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} U(\sin) & U(\cos) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \end{array}.$$

4.b. On a

$$M^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M^3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, M^4 = -\frac{1}{4} I_2.$$

Il est alors évident que si $n = 4p$ est multiple de p, on a

$$M^n = M^{4p} = \left(M^4\right)^p = \frac{(-1)^p}{4^p} I_2.$$

Sinon, il faut distinguer suivant la valeur du reste lors de la division euclidienne de n par 4 :

- : si $n = 4p+1$, alors $M^n = M^{4p}M = \frac{(-1)^p}{2 \cdot 4^p}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- si $n = 4p+2$, alors $M^n = M^{4p}M^2 = \frac{(-1)^p}{2 \cdot 4^p}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- si $n = 4p+3$, alors $M^n = M^{4p}M^3 = \frac{(-1)^p}{4^{p+1}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{p+1}}{4^{p+1}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Une autre famille de fonctions.

5.a. On a, pour tout $x \in I$,

$$[U(\psi_n)](x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}e^{-t}t^n\,dt = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-(a+1)t}t^n\,dt.$$

Mais, une intégration par parties sur un segment de la forme $[x, A]$ nous donne

$$\int_x^A e^{-(a+1)t}t^n\,dt = \left[-\frac{1}{a+1}e^{-(a+1)t}t^n\right]_x^A + \frac{n}{a+1}\int_x^A e^{-(a+1)t}t^{n-1}\,dt = \frac{x^n}{a+1}e^{-(a+1)x} - \frac{A^n}{a+1}e^{-(a+1)A}.$$

En passant à la limite lorsque $A \to +\infty$, $A^n e^{-(a+1)A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, et donc

$$\int_x^{+\infty} e^{-(a+1)t}t^n\,dt = \frac{x^n}{a+1}e^{-(a+1)x} + \frac{n}{a+1}\int_x^{+\infty} e^{-at}e^{-t}t^{n-1}\,dt.$$

Après multiplication par e^{ax}, il vient donc $\boxed{\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{a+1} + \frac{n}{a+1}\psi_{n-1}(x).}$

5.b. Notons que le résultat précédent n'est valable que pour $n \geqslant 1$, et que pour $n = 0$, on a, avec les notations de la question 3, $\varphi_0 = f_1$, et donc en particulier

$$\psi_0 = U(\varphi_0) = \frac{1}{a+1}f_0 = \frac{1}{a+1}\varphi_0.$$

Montrons par récurrence sur p que $\psi_p \in F_p$.
Pour $p = 0$, nous venons de prouver que $\psi_0 \in \mathrm{Vect}(\varphi_0) = F_0$.
Supposons donc que $\psi_p \in F_p$. Alors

$$\psi_{p+1} = \frac{1}{a+1}\underbrace{\varphi_{p+1}}_{\in F_{p+1}} + \frac{p+1}{a+1}\underbrace{\psi_p}_{\in F_p \subset F_{p+1}} \in F_{p+1}.$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\psi_p \in F_p$.

Soit à présent $p \in \mathbf{N}$ fixé, et soit $f = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \varphi_i \in F_p$.

Alors, par linéarité de U, $U(f) = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \psi_i$.

Et pour $i \in [\![0, p]\!]$, nous venons de prouver que $\psi_i \in F_i \subset F_p$.
Ainsi, $U(f) \in F_p$, et donc $\boxed{F_p \text{ est stable par } U.}$

Il est évident que la famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_p)$ est une famille génératrice de F_p.

Soient donc $\lambda_0, \dots, \lambda_p$ des réels tels que $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i \varphi_i = 0$.

Alors pour tout $x \in I$, on a

$$\sum_{i=0}^{p} \lambda_i x^i e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{p} \lambda_i x^i\right) e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{p} \lambda_i x^i = 0.$$

Une exponentielle n'est jamais nulle.

Et donc le polynôme $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i X^i$ s'annule en tous les $x \in I$, qui sont en nombre infini : c'est donc le polynôme nul, de sorte que les λ_i sont tous nuls.
Ainsi, la famille $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre : $\boxed{\text{c'est une base de } F_p.}$

5.c. Notons $\mathscr{B} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$. On a alors

$$U(\varphi_0) = \frac{1}{a+1}\varphi_0,\ U(\varphi_1) = \frac{1}{a+1}\varphi_1 + \frac{1}{a+1}\psi_0 = \frac{1}{a+1}\varphi_1 + \frac{1}{(a+1)^2}\varphi_0$$

et $U(\varphi_2) = \frac{1}{a+1}\varphi_2 + \frac{2}{a+1}\psi_1 = \frac{1}{a+1}\varphi_2 + \frac{2}{(a+1)^2}\varphi_1 + \frac{2}{(a+1)^3}\varphi_0$.
Donc la matrice de U est

$$T_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(U_2) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \ \ U(\varphi_0) & U(\varphi_1) & U(\varphi_2) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{a+1} & \frac{1}{(a+1)^2} & \frac{2}{(a+1)^3} \\ 0 & \frac{1}{a+1} & \frac{2}{(a+1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{matrix} \end{array}.$$

Notons que $T_2 = \frac{1}{(a+1)} I_3 + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(a+1)^2} & \frac{2}{(a+1)^3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{(a+1)^3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{(a+1)^4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et pour $k \geqslant 3$, $N^k = 0$.

Puisque N et I_3 commutent[3], par la formule du binôme de Newton, on a alors

[3] L'identité commute avec toute matrice.

$$T_2^n = \left(\frac{1}{a+1} I_3 + N\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \frac{1}{(a+1)^{n-k}} I_3 = \frac{1}{(a+1)^n} I_3 + \frac{n}{(a+1)^{n-1}} N + \frac{n(n-1)}{2(a+1)^{n-2}} N^2.$$

$N^k = 0$ pour $k \geqslant 3$.

Soit encore

$$\boxed{T_2^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{(a+1)^n} & \frac{n}{(a+1)^{n+1}} & \frac{n(n+1)}{(a+1)^{n+2}} \\ 0 & \frac{1}{(a+1)^n} & \frac{n}{(a+1)^{n+1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(a+1)^n} \end{pmatrix}.}$$

En particulier, tous les coefficients de T_2^n tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

6. **Une autre expression de $U(f)$.**
D'après ce qui a été dit précédemment, pour tout $x \in I$, on a

$$[U(f)](x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt = \int_x^{+\infty} e^{-a(t-x)}f(t)\,dt.$$

À x fixé, procédons alors au changement de variable affine $u = t - x \Leftrightarrow t = u + x$, de sorte que lorsque $t \to x$, $u \to 0$ et lorsque $t \to +\infty$, $x \to +\infty$. Il vient alors

$$[U(f)](x) = \int_0^{+\infty} e^{-au}f(u+x)\,du = \boxed{\int_0^{+\infty} e^{-at}f(t+x)\,dt.}$$

Remarque
Cette dernière intégrale converge puisque l'intégrale avant changement de variable converge.

7. **Positivité de U.**

7.a. Commençons par remarquer que si $f \in E$, alors $|f|$ est également dans E, car continue[4] sur I et bornée.
Et donc $U(|f|)$ existe, de sorte que $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}|f(t)|\,dt$ converge pour tout $x \in I$.
Par l'inégalité triangulaire, on a donc, pour tout $x \in I$,

$$\left|\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^{+\infty} |e^{-at}f(t)|\,dt = \int_x^{+\infty} e^{-at}|f(t)|\,dt.$$

Après multiplication par $e^{ax} \geqslant 0$, on a donc

$$|[U(f)](x)| = \left|e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt\right| \leqslant e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}|f(t)|\,dt = [U(|f|)](x).$$

Et ceci étant vrai pour tout $x \in I$, on a bien $\boxed{|U(f)| \leqslant U(|f|).}$

[4] Par composition de fonctions continues.

7.b. Pour $x \in I$, on a $\psi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\varphi(t+x)\,dt$.
Mais la fonction $t \mapsto e^{-at}\varphi(t+x)$ est positive sur $\mathbf{R}_+$, et donc, par positivité de l'intégrale, $\boxed{\psi(x) \geqslant 0.}$

7.c. Soit $x \in I$. Alors $a\psi(x) = ae^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}\varphi(t)\,dt$.
Mais par décroissance de φ, pour tout $t \in]x, +\infty[$, $\varphi(t) \leqslant \varphi(x)$ et donc par croissance de l'intégrale,

$$a\psi(x) = ae^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}\varphi(t)\,dt \leqslant ae^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}\varphi(x)\,dt \leqslant \varphi(x)a\,\underbrace{e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}\,dt}_{=[U(1)](x)} = \varphi(x).$$

Donc on a bien $\boxed{a\psi \leqslant \varphi.}$

Soient $x < y$ deux réels dans I. Alors $\psi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\varphi(t+x)\,dt$ et $\psi(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\varphi(t+y)\,dt$.
Mais par décroissance de φ, pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi(t+x) \geqslant \varphi(t+y)$ et donc par croissance de l'intégrale, $\psi(x) \geqslant \psi(y)$: $\boxed{\text{la fonction } \psi \text{ est décroissante.}}$

8. **Commutation de U avec la dérivation.**

8.a. Pour $x \in I$, on a

$$a[U(f)](x) = \int_0^{+\infty} ae^{-at}f(x+t)\,dt.$$

Procédons à une intégration par parties sur un segment de la forme $[0, A]$ en posant $u(t) = f(x+t)$ et $v(t) = -e^{-at}$ qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$, avec $u'(t) = f'(x+t)$ et $v'(t) = ae^{-at}$. Alors

$$\int_0^A ae^{-at}f(x+t)\,dt = \left[-f(x+t)e^{-at}\right]_0^A + \int_0^A e^{-at}f'(x+t)\,dt$$

$$= f(x) - f(x+A)e^{-aA} + \int_0^A e^{-at} f'(x+t)\,dt.$$

Et donc en passant à la limite lorsque $A \to +\infty$, il vient

$$\int_0^{+\infty} ae^{-at} f(x+t)\,dt = f(x) + \int_0^{+\infty} e^{-at} f'(x+t)\,dt$$

Remarque
Cette dernière intégrale converge car $f' \in E$.

soit encore $a[U(f)](x) = f(x) + [U(f')](x)$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in I$, on en déduit que $\boxed{aU(f) = f + U(f').}$

8.b. Rappelons que par définition de U, $U(f)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Et puisque f' est bornée, $f' \in E$ et donc $U(f')$ est également de classe $\mathcal{C}^1$.
En dérivant la relation de la question précédente, on obtient

$$aD(U(f)) = f' + D(U(f')).$$

Notation
Nous notons D pour la dérivée, comme nous l'indique l'énoncé, mais remarquons que $D(U(f)) = [U(f)]'$ et

$$D(U(f')) = [U(f')]'.$$

Or, par définition, $U(f')$ est une solution de l'équation $(E_{f'})$ de sorte que

$$D(U(f')) - aU(f') + f' = 0 \Leftrightarrow D(U(f')) = aU(f') - f'.$$

Et donc

$$aD(U(f)) = f' + aU(f') - f' = aU(f') = aU(D(f)).$$

Puisque $a \neq 0$, on en déduit que $\boxed{D(U(f)) = U(D(f)).}$

8.c. Si f est positive et décroissante, f' est négative, et donc $D(U(f)) = U(f') = -U(-f')$.
Or $-f' \geqslant 0$ et donc par la question 7.b, $U(f') \geqslant 0$.
On en déduit que $D(U(f)) \leqslant 0$, et donc $\boxed{U(f) \text{ est décroissante.}}$

II. Comportement asymptotique de $U(f)$ au voisinage de $+\infty$.

9. Résultats préliminaires.

9.a. Par hypothèse, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Et donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour $t \geqslant A$, $\left|\dfrac{\alpha(t)}{\beta(t)}\right| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |\alpha(t)| \leqslant \varepsilon\beta(t)$.
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que pour tout $x \geqslant A$,

$$\int_x^{+\infty} |\alpha(t)|\,dt \leqslant \varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt.$$

Convergence
La convergence de ces intégrales est garantie par le fait que $\int_1^{+\infty} \beta(t)\,dt$ converge.

Et alors, par l'inégalité triangulaire, pour $x \geqslant A$,

$$\left|\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt\right| \leqslant \int_x^{+\infty} |\alpha(t)|\,dt \leqslant \boxed{\varepsilon \int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt.}$$

On en déduit que pour $x \geqslant A$,

$$\left|\frac{\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt}{\int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Et donc, sen revenant à la définition d'une limite, nous venons de prouver que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt}{\int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt} = 0 \Longleftrightarrow \boxed{\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt\right).}$$

9.b. Par définition d'un équivalent, on a $\alpha(x) = \beta(x) + \gamma(x)$, où $\gamma(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\beta(x))$.
Et donc, en appliquant le résultat de la question précédente, il vient

$$\int_x^{+\infty} \alpha(t)\,dt = \int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt + \int_x^{+\infty} \gamma(t)\,dt$$

$$= \int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt\right)$$
$$\boxed{\underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \beta(t)\,dt.}$$

10. Cas des fonctions admettant une limite en $+\infty$.
Comme indiqué, commençons par supposer que $b = 0$, c'est-à-dire que $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(1)$.
Alors $e^{-at}f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{-at})$ et donc par la question précédente,

$$\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} e^{-at}\,dt\right).$$

Or nous avons déjà prouvé[5] que $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}\,dt = \frac{1}{a}e^{-ax}$.
Après multiplication par e^{ax}, on a donc

[5] Voir question 1.d.

$$[U(f)](x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{ax}\frac{1}{a}e^{-ax}\right) = \underset{x\to+\infty}{o}(1).$$

Et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} [U(f)](x) = 0.}$

Passons à présent au cas général, en posant $f_1 = f - b$, de sorte que $f_1 \in E$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - b = b - b = 0$.
Par ce qui précède, on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} [U(f_1)](x) = 0$.
Or, par linéarité de U, $U(f_1) = U(f) - bU(1) = U(f) - \dfrac{b}{a}$.

Rappel
Nous avons calculé $U(1)$ à la question 2.a.

Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [U(f)](x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [U(f_1)](x) + \dfrac{b}{a} = \boxed{\dfrac{b}{a}.}$

11. Cas des fonctions puissances.

11.a. On a, pour tout $x \in I$, par intégration par parties,

$$\int_x^{+\infty} e^{-at}\frac{1}{t^\omega}\,dt = \lim_{A\to+\infty}\left(\left[-\frac{1}{a}e^{-at}\frac{1}{t^\omega}\right]_x^A - \int_x^A \frac{\omega}{a}e^{-at}\frac{1}{t^{\omega+1}}\,dt\right) = \frac{1}{a}e^{-ax}\frac{1}{x^\omega} - \frac{a}{\omega}\int_x^{+\infty} e^{-at}\frac{1}{t^\omega}\,dt.$$

Et donc après multiplication par e^{ax}, on a donc

$$U(f_\omega)(x) = \frac{1}{a}\frac{1}{x^\omega} - \frac{\omega}{a}e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}\frac{1}{t^{\omega+1}}\,dt = \frac{1}{a}f_\omega(x) - \frac{\omega}{a}g_{\omega+1}(x).$$

Et donc on a bien $\boxed{g_\omega = \dfrac{1}{a}f_\omega - \dfrac{\omega}{a}g_{\omega+1}.}$

Puisque $f_{\omega+1}(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(f_\omega(x))$, on a $e^{-at}f_{\omega+1}(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{-at}f_\omega(t))$, et donc d'après 9.a,

$$g_{\omega+1}(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f_{\omega+1}(t)\,dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f_\omega(t)\,dt\right) = \underset{x\to+\infty}{o}(g_\omega(x)).$$

On a donc $\dfrac{f_\omega(x)}{a} = g_\omega(x) + \underset{x\to+\infty}{o}(g_\omega(x))$ et donc $\boxed{\dfrac{f_\omega(x)}{a} \underset{x\to+\infty}{\sim} g_\omega(x).}$

11.b. Comme indiqué, appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f_a : u \mapsto e^{-au}$ entre 0 et $t \in I$.
f_a est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,t]$ et pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f_a^{(k)}(u) = (-1)^k a^k e^{-au}$.
En particulier, pour tout $u \in [0,t]$, $|f_a^{(k)}(u)| = a^k e^{-au} \leqslant a^k$.
Et donc, pour tout $t \in I$

$$\left|f_a(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k\right| \leqslant \frac{t^{n+1}a^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Soit encore
$$\left|e^{-at}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k a^k}{k!}t^k\right|\leqslant\frac{t^{n+1}a^{n+1}}{(n+1)!}.$$
En divisant par $t\neq 0$, il vient
$$\left|\frac{e^{-at}}{t}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k a^k}{k!}t^{k-1}\right|\leqslant\frac{t^{n}a^{n+1}}{(n+1)!}.$$
Et donc par croissance de l'intégrale, pour tout $x\in I$,
$$\int_1^x\left|\frac{e^{-at}}{t}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k a^k}{k!}t^{k-1}\right|dt\leqslant\int_1^x\frac{t^n a^{n+1}}{(n+1)!}\,dt=a^{n+1}\frac{x^{n+1}-1}{(n+1)(n+1)!}.$$
D'autre part, on a
$$\begin{aligned}\int_1^x\frac{e^{-at}}{t}\,dt-\ln(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k a^k}{k\cdot k!}(x^k-1)&=\int_1^x\frac{e^{-at}}{t}\,dt-\int_1^x\frac{dt}{t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k a^k}{k!}\int_1^x t^{k-1}\,dt\\&=\int_1^x\left(\frac{e^{-at}}{t}-\frac{1}{t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k a^k}{k!}t^{k-1}\right)dt.\end{aligned}$$
Et donc par l'inégalité triangulaire,
$$\begin{aligned}\left|\int_1^x\frac{e^{-at}}{t}\,dt-\ln(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k a^k}{k\cdot k!}(x^k-1)\right|&=\left|\int_1^x\left(\frac{e^{-at}}{t}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k a^k}{k!}t^{k-1}\right)dt\right|\\&\leqslant\int_1^x\left|\frac{e^{-at}}{t}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k a^k}{k!}t^{k-1}\right|dt\\&\leqslant a^{n+1}\frac{x^{n+1}-1}{(n+1)(n+1)!}\\&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.\end{aligned}$$
On en déduit donc que la série de terme général $\frac{(-1)^k a^k}{k\cdot k!}(x^k-1)$ converge[6] et que
$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k a^k}{k\cdot k!}(x^k-1)=\int_1^x\frac{e^{-at}}{t}\,dt-\ln(x).}$$

[6] Car la suite de ses sommes partielles admet une limite.

On en déduit que pour tout $x\in I$,
$$\begin{aligned}g_1(x)&=e^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-at}f_1(t)\,dt=e^{ax}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t}\,dt\\&=e^{ax}\left(\int_1^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t}\,dt-\int_1^x\frac{e^{-at}}{t}\,dt\right)\\&=\boxed{e^{ax}\left(\int_1^{+\infty}\frac{e^{-at}}{t}\,dt-\ln(x)-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k a^k}{k\cdot k!}(x^k-1)\right).}\end{aligned}$$

12. Cas des fonctions comparables aux fonctions puissances f_ω.

12.a. Si $f=\underset{x\to+\infty}{o}(f_\omega)$, alors $e^{-at}f(t)=\underset{t\to+\infty}{o}(e^{-at}f_\omega(t))$ et alors le résultat de la question 9.a s'applique car $t\mapsto e^{-at}f_\omega$ est strictement positive et $\int_1^{+\infty}e^{-at}f_\omega(t)\,dt$ converge.

Détails
Cette dernière intégrale converge car
$$e^{-at}f_\omega(t)=\underset{t\to+\infty}{o}(e^{-at}).$$

Et donc $\int_x^{+\infty}e^{-at}f(t)\,dt=\underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty}e^{-at}f_\omega(t)\,dt\right)$, de sorte qu'après multiplication par e^{ax},
$$g(x)=e^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-at}f(t)\,dt=\underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{ax}\int_x^{+\infty}e^{-at}f_\omega(t)\,dt\right)=\boxed{\underset{x\to+\infty}{o}(g_\omega(x)).}$$

12.b. De même, si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} f_\omega(t)$, alors $f(t) = f_\omega(t) + \underset{t\to+\infty}{o}(f_\omega(t))$.
Et donc en multipliant par e^{-at}, $f(t)e^{-at} = f_\omega(t)e^{-at} + \underset{t\to+\infty}{o}(e^{-at}f_\omega(t))$. Par la question 9.b, on a alors

$$\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,dt = \int_x^{+\infty} e^{-at}f_\omega(t)\,dt + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} f_\omega(t)e^{-at}\,dt\right).$$

Et donc après multiplication par e^{ax},

$$g(x) = g_\omega(x) + \underset{x\to+\infty}{o}(g_\omega(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} g_\omega(x).$$

Mais d'après la question 11.a, $g_\omega(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{f_\omega(x)}{a}$.
On en déduit donc que

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{f_\omega(x)}{a} \boxed{\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{f(x)}{a}.}$$

III. Convergence absolue de $\int_1^{+\infty} U(f)$.

13. Étude d'exemples.

13.a. Nous avons déjà prouvé que $g_k = U(f_k) = \dfrac{1}{a+k}f_k$.
Et alors $\int_1^{+\infty} f_k(t)\,dt$ est une intégrale de référence convergente, de sorte que $\int_1^{+\infty} g_k(t)\,dt$ converge.

13.b. Nous avons prouvé à la question 11.a que $g_\omega(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{f_\omega(t)}{a}$.
Or, $\int_1^{+\infty} f_\omega(t)\,dt = \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^\omega}\,dt$ converge si et seulement si $\omega > 1$.
D'après le critère des équivalents pour les intégrales de fonctions positives[7], $\int_1^{+\infty} g_\omega(t)\,dt$ converge $\boxed{\text{si et seulement si } \omega > 1.}$

[7] D'après le résultat de la question 7.b que g_ω est positive.

14. Cas des fonctions positives.

14.a. Puisque g est solution de (E_f), alors, pour tout $t \in E$, $g'(t) - ag(t) = -f(t)$.
En intégrant cette relation entre 1 et x, il vient

$$\int_1^x g'(t)\,dt - a\int_1^x g(t)\,dt = -\int_1^x f(t)\,dt \Leftrightarrow g(x) - g(1) - aG(x) = -F(x).$$

De plus, g étant continue sur I, G est $\mathscr{C}^1$ sur I et $G'(x) = g(x)$. Et donc

$$\boxed{G'(x) - aG(x) = -F(x) + g(1).}$$

14.b. Puisque F est la primitive de f qui s'annule en 1, elle est continue.
Pour montrer que F est dans E, il s'agit donc de prouver qu'elle est bornée. Notons que par croissance de l'intégrale, F est à valeurs positives.
D'autre part, puisque $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$.
Et donc il existe $A \geqslant 1$ tel que pour $x \geqslant A$,

$$\left|F(x) - \int_1^{+\infty} f(t)\,dt\right| \leqslant 1 \Longrightarrow F(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Comme de plus, F est continue sur le segment $[1, A]$ elle y est bornée : il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [1, A]$, $|F(x)| \leqslant M$.
Ainsi, pour tout $x \in I$, on a

$$F(x) \leqslant \max\left(M, 1 + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt\right).$$

Et donc F est bornée, et donc $\boxed{\text{est un élément de } E.}$

Le résultat de la question 14.a montre que G est une solution de l'équation $(E_{F-g(1)})$. Et donc par la question 1.a, il existe $K \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall x \in I,\ G(x) = Ke^{ax} - e^{ax}\int_1^x e^{-at}\left(F(t) - g(1)\right)dt = Ke^{-ax} + [U(F)](x) - [U(g(1))](x).$$

Mais $U(g(1)) = g(1)U(1) = \dfrac{g(1)}{a}$, de sorte que

$$\boxed{\forall x \in I,\ G(x) = Ke^{ax} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a}.}$$

14.c. Puisque $g = U(f)$ est dans E, elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|g(x)| \leqslant M$. Et alors, par croissance de l'intégrale,

$$|G(x)| = \left|\int_1^x g(t)\,dt\right| \leqslant \int_1^x |g(t)|\,dt \leqslant \int_1^x M\,dt \leqslant M(x-1) \leqslant Mx.$$

On en déduit donc que pour tout $x \in I$,

$$\left|\frac{G(x)}{x}\right| \leqslant \frac{Mx}{x} \leqslant M.$$

Et donc $\boxed{g \text{ est bornée sur } I.}$

14.d. Par définition de U, $U(F)$ est bornée sur I.
Si $K \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} K\dfrac{e^{ax}}{x} = \pm\infty$, suivant le signe de K. Et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{G(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{Ke^{ax}}{x} + [U(F)](x) - \frac{g(1)}{a} = \pm\infty,$$

contredisant le fait que $x \mapsto \dfrac{G(x)}{x}$ est bornée.

On en déduit donc que $\boxed{K = 0.}$ Et donc $\boxed{G = U(F) - \dfrac{g(1)}{a}.}$

14.e. Pour tout $x \in I$, on a

$$\int_1^x g(t)\,dt = G(x) = U(F)(x) - \frac{g(1)}{a}.$$

Mais puisque $U(F)$ est bornée, G est également bornée, et en particulier majorée.
Or, g étant positive, $G : x \mapsto \displaystyle\int_1^x g(t)\,dt$ est croissante[8]. Puisqu'elle est bornée, elle admet une limite en $+\infty$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_1^x g(t)\,dt$ existe.

Ceci prouve donc que $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,dt \text{ converge.}}$

[8] Par le théorème fondamental de l'analyse, sa dérivée est g.

15. Cas général
Nous avons prouvé à la question 7.a que $|U(f)| \leqslant U(|f|)$.
Or, $|f|$ est une fonction positive, et par hypothèse, $\displaystyle\int_1^{+\infty}|f(t)|\,dt$ converge.
D'après le résultat de la question 14, $\displaystyle\int_1^{+\infty}[U(|f|)](t)\,dt$ est donc convergente.
Et alors, par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty}|[U(f)](t)|\,dt$ converge, de sorte que $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,dt \text{ converge absolument.}}$

HEC

6

HEC 2017

Sujet : Autour de l'interpolation polynomiale : Bernstein, Lagrange et Runge. **Moyen**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : polynômes, algèbre linéaire, diagonalisation, produits scalaires, fonctions d'une variable, suites, variables aléatoires discrètes, `Scilab`

Modifications apportées au sujet d'origine : La formulation «dans les questions 13 et 14 on suppose que n est impair» était un peu étrange pour le passage à la limite de la question 14. Elle a été supprimée et les n de la question 14 ont été remplacés par des 2 + 1.

Dans tout le problème :

- pour tout entier naturel n, on note $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n ;
- on identifie le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ avec la fonction polynomiale $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$, avec la convention $0^0 = 1$;
- on rappelle la formule de Stirling : $n!$ est équivalent à $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

Le problème a pour objet l'approximation d'une fonction réelle par des fonctions polynomiales.
Dans la partie I, on étudie le cas des polynômes de Bernstein. Les parties II et III sont consacrées aux polynômes d'interpolation de Lagrange.
Les parties II et III sont largement indépendantes de la partie I.

Partie I. Quelques propriétés des polynômes de Bernstein.

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$ et tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on note $B_{n,k}$ le polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par :

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

On pose pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $A_k = X^k$ et on note $\mathscr{C}_n = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

Soit T_n l'application définie sur $\mathbf{R}_n[X]$ telle que : $\forall P \in \mathbf{R}_n[X]$, $(T_n(P))(X) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X)$.

1. *Dans cette question uniquement, on choisit $n = 2$.*
   a. Déterminer la matrice K_2 de la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ dans la base $\mathscr{C}_2$.
   b. En déduire que la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
   c. Calculer $T_2(A_0)$, $T_2(A_1)$ et $T_2(A_3)$: déterminer la matrice H_2 de T_2 dans la base $\mathscr{C}_2$.
   Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de T_2.
2. *On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 1.*
   a. Montrer que la famille $(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ est libre : en déduire que cette famille est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
   b. Montrer que l'application T_n est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
   c. Calculer $T_n(A_0)$ et montrer que $T_n(A_1) = A_1$.
   d. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le degré du polynôme $T_n(A_k)$ est égal à k.
   Pour établir ce résultat, on pourra utiliser la propriété suivant que *l'on ne demande pas de démontrer* :
   $$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ (T_n(A_{k+1}))(X) = \frac{1}{n} X(1-X)\,(T_n(A_k))'(X) + X\,(T_n(A_k))(X)$$
   où $(T_n(A_k))'$ est le polynôme dérivé de $T_n(A_k)$.
   e. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, soit α_k le coefficient de X^k du polynôme $T_n(A_k)$. Calculer α_k en fonction de k et de n.
   L'automorphisme T_n est-il diagonalisable ?
3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On pose : $\forall n \in \mathbf{N}^*$ et $\forall z \in [0, 1]$, $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(z)$.

   Soit $z \in [0, 1]$. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit Z_n une variable aléatoire définie sur cet espace suivant la loi binomiale de paramètres n et z. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $\overline{Z_n} = \frac{Z_n}{n}$.

a. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\overline{Z_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers le réel z.

b. Justifier l'existence de $M = \max\limits_{[0,1]} |f|$.

c. Soit ε un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit U_n l'événement : $U_n = \left[\left|f\left(\overline{Z_n}\right) - f(z)\right| > \varepsilon\right]$.
On note $\mathbb{1}_{U_n}$ la variable indicatrice de l'événement U_n et $\overline{U_n}$ l'événement contraire de U_n.
Établir l'inégalité : $\left|f\left(\overline{Z_n}\right) - f(z)\right| \leqslant 2M \times \mathbb{1}_{U_n} + \varepsilon \times \mathbb{1}_{\overline{U_n}}$.

d. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} E\left(f\left(\overline{Z_n}\right)\right) = f(z)$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z)$.

4. a. Compléter le code `Scilab` suivant afin qu'un appel à la fonction `binom(n,z)` renvoie une réalisation d'une loi binomiale de paramètres n et z.

```
function Z = binom(n,z)
        Z = ........
endfunction
```

b. Soit une fonction `Scilab` `f` et une variable `z` définies par :

```
function y = f(x)
        if x==0 then y=0, else y=-x*log(x),end
endfunction
z=0.4
```

On considère le code `Scilab` suivant :

```
n = 100 ; N=1000
S = 0
for k=1 :N
        S = S+f(binom(n,z)/n)
end
disp(S/N)
```

Ce code affiche une valeur approchée d'une certain quantité. Laquelle ?
Cette valeur affichée est le résultat de la mise en œuvre de certaines méthodes. Lesquelles ?

Partie II. Les polynômes d'interpolation de Lagrange.

5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Soit Φ l'application de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ telle que : $\forall P \in \mathbf{R}_n[X],\ \Phi(P) = (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n))$.

a. Montrer que l'application Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b. On note $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$ avec $e_0 = (1,0,0,\ldots,0), e_1 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0,0,\ldots,1)$.
Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on note L_i le polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ tel que $\Phi(L_i) = e_i$.
Montrer que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $L_i(X) = \prod\limits_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k\neq i}} \dfrac{X - x_k}{x_i - x_k}$.

c. Soit Ψ l'application définie sur $(\mathbf{R}_n[X])^2$ par : $\forall (P,Q) \in (\mathbf{R}_n[X])^2$, $\Psi(P,Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$.
Vérifier que Ψ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$. On munit alors $\mathbf{R}_n[X]$ de ce produit scalaire.
Montrer que $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}_n[X]$.

d. Expliciter la matrice de passage de la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ à la base canonique $\mathscr{C}_n$ de $\mathbf{R}_n[X]$.

e. Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles.
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un unique polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$, noté P_f, vérifiant les relations :

$$P_f(x_0) = f(x_0),\ P_f(x_1) = f(x_1), \ldots, P_f(x_n) = f(x_n).$$

On dit que P_f *est le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.*
Exprimer P_f dans la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$.

6. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels appartenant à un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$ tels que $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$ et $\overline{x}$ un réel de $[a,b]$ différent de $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
On note P_f le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et Q_f le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}$. On pose $w(X) = \prod\limits_{k=0}^{n}(X - x_k)$.

a. Établir l'existence d'un réel δ tel que pour tout $t \in [a,b]$, on a : $Q_f(t) - P_f(t) = \delta \times w(t)$.

b. Soit h la fonction définie sur $[a,b]$ par : $\forall t \in [a,b],\ h(t) = f(t) - Q_f(t)$.
Montrer que la fonction h s'annule en les $(n+2)$ points $\overline{x}, x_0, x_1, \ldots, x_n$, et en déduire l'existence d'un réel $\theta \in]a,b[$ tel que $h^{(n+1)}(\theta) = 0$.

c. Établir l'égalité : $f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = \dfrac{1}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(\theta) \times w(\overline{x})$.

d. En déduire que pour tout $t \in [a,b]$, on a : $\left|f(t) - P_f(t)\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times \sup\limits_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$.

Partie III. Exemple d'interpolation et phénomène de Runge.

Dans cette partie, on suppose que l'entier n appartient à $\mathbf{N}^*$ et n'est plus fixé.

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $x_{k,n} = -1 + \dfrac{2k}{n}$.

Pour tout réel $\rho > 0$, on note f_ρ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbf{R},\ f_\rho(x) = \dfrac{1}{x^2+\rho^2}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $\rho > 0$, on note $P_{f_\rho,n}$ le polynôme d'interpolation aux points $x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n,n}$ de la fonction f_ρ.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $w_n(X) = \prod\limits_{k=0}^{n} (X - x_{k,n})$.

Cette partie se propose de mettre en évidence les conditions suffisantes de convergence de la suite $\left(P_{f_\rho,n}(x)\right)_{n\geqslant 1}$ vers $f_\rho(x)$ pour x appartenant à un intervalle $I \subset \mathbf{R}$.

7. **a.** Justifier que la fonction f_ρ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $|f_\rho^{(n)}(x)| = |f_\rho^{(n)}(-x)|$.

c. Montrer que pour tout réel x vérifiant $|x| < \rho$, on a $\dfrac{1}{x^2+\rho^2} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}} x^{2k}$.

8. Dans cette question, **on admet** le résultat qui suit.
Pour tout $k \in \mathbf{N}$, soit A_k la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $A_k(t) = t^k$. Soit R un réel strictement positif. Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On suppose que pour tout $t \in]-R,R[$, la série de terme général $u_k \times A_k(t)$ est convergente : on note $\varphi(t)$ sa somme.
Alors la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et $\forall t \in]-R,R[$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, on a : $\varphi^{(n)}(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k \times A_k^{(n)}(t)$.

Soit $\rho > 0$. On pose : $\forall x \in]-\rho,\rho[,\ v(x) = \dfrac{\rho^2}{\rho^2 - x^2}$.

a. Déterminer les réels p et q pour lesquels on a : $\forall x \in]-\rho,\rho[,\ v(x) = \dfrac{p}{\rho - x} + \dfrac{q}{\rho + x}$.

b. Comparer pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in]-\rho,\rho[$, $|v^{(n)}(x)|$ et $|v^{(n)}(-x)|$.

c. Montrer que pour tout $x \in]-\rho,\rho[$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $|f_\rho^{(n)}(x)| \leqslant \dfrac{1}{\rho^2} \times |v^{(n)}(x)|$.

d. On suppose que $\rho > 1$. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\left|f_\rho^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{\rho} \times \frac{n!}{(\rho-1)^{n+1}}.$$

9. Pour $x \in [-1,1]$, avec $x \notin \{x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n,n}\}$, soit k l'entier de $[\![0,n-1]\!]$ tel que $x \in]x_{k,n}, x_{k+1,n}[$.

a. Établir les inégalités : $|w_n(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1} \times (k+1)!(n-k)! \leqslant \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1} \times n!$.

b. À l'aide de la formule de Stirling (rappelée dans le préambule du problème), montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a pour tout $x \in [-1,1]$: $|w_n(x)| \leqslant \left(\dfrac{2}{e}\right)^{n+1}$.

c. Déduire des question 6.d, 8.d et 9.b qu'une *condition suffisante* pour que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right| = 0$ pour tout $x \in [-1,1]$ est : $\rho > 1 + \dfrac{2}{e}$.

10. **a.** On pose : $\forall \rho > 0,\ H(\rho) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-1}^{1} \ln(t^2+\rho^2)\,dt$. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $H(\rho)$.
Montrer que la fonction H est prolongeable par continuité en 0. On note encore H la fonction prolongée.

b. Montrer que la fonction H réalise une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle à déterminer.

c. Montrer qu'il existe un unique $\rho_0 > 0$ tel que $H(\rho_0) = \ln 2 - 1$. Montrer que $\rho_0 < 1$ (on donne $\ln(2) \simeq 0.693$).

d. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ et $|w_n(i\rho)|$ le module du nombre complexe $w_n(i\rho)$.

Vérifier que pour tout $\rho > 0$, on a : $|w_n(i\rho)| > 0$. Montrer alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln|w_n(i\rho)| = H(\rho)$.

11. La fonction Arctan est codée dans le langage `Scilab` par `atan`.
Le programme suivant renvoie une valeur approchée d'un réel s_0 à 0.001 près.

```
function z = G(x) ; z = (1/2)*(log((1+x^2)/4))+x*(atan(1/x)) ; endfunction
u = 0.25 ; v=1 ;
while (v-u)>0.001 do
        if G((u+v)/2)>0 then v=(u+v)/2 ; end
        if G((u+v)/2)<0 then u=(u+v)/2 ; end
        if G((u+v)/2)==0 then v=(u+v)/2 ; u=(u+v)/2 ; end
end
disp((u+v)/2)
```

a. Quelle est la méthode mise en œuvre dans ce programme ? Donner une équation vérifiée par s_0.

b. Comparer s_0 et ρ_0.

12. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $S_n(X) = 1 - (X^2 + \rho^2)P_{f_\rho,n}(X)$.

a. Montrer que le polynôme w_n divise le polynôme S_n.

b. Montrer que le polynôme $P_{f_\rho,n}$ est pair.

c. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $y_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. Exprimer $|w_n(y_n)|$ en fonction de n.

Trouver un équivalent de $|w_n(y_n)|$ lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme $\dfrac{\tau}{n} \times \sigma^n$, où τ et σ sont des réels strictement positifs que l'on déterminera.

d. *On admet sans démonstration* que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\ln|w_n(i\rho)| - nH(\rho)) = 0$.

Déduire de ce résultat admis et de la question 12.c, un équivalent de $\left|\dfrac{w_n(y_n)}{w_n(i\rho)}\right|$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans la question 13, on suppose que n est impair.

13. **a.** Montrer que $w_n(i\rho) \in \mathbf{R}^*$ et exprimer $S_n(X)$ en fonction de $w_n(X)$ et $w_n(i\rho)$.

b. En déduire que pour tout $x \in [-1,1]$, on a : $\left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right| = f_\rho(x) \times \left|\dfrac{w_n(x)}{w_n(i\rho)}\right|$.

14. On suppose que $0 < \rho < \rho_0$.

a. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|f_\rho(y_{2n+1}) - P_{f_\rho,2n+1}(y_{2n+1})\right|$.

b. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sup_{[-1,1]} \left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,2n+1}(x)\right| = +\infty$ (*phénomène de Runge*).

HEC 2017 : Corrigé

Partie I. Quelques propriétés des polynômes de Bernstein.

1.a. On a $B_{2,0}(X) = \binom{2}{0} X^0(1-X)^{2-0} = (1-X)^2 = X^2 - 2X + 1$.
Et de même, $B_{2,1}(X) = 2X(1-X) = -2X^2 + 2X$ et $B_{2,2}(X) = X^2$.
Ainsi, la matrice de $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ dans la base $\mathscr{C}_2$ est

$$K_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_2}(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2}) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}.$$

1.b. La matrice obtenue à la question précédente est inversible, car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.
On en déduit donc que $\boxed{(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2}) \text{ est une base de } \mathbf{R}_2[X].}$

Rappel
Une famille de dim E vecteurs de E est une base si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base est inversible.

1.c. On a

$$T_2(A_0) = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} X^k (1-X)^{2-k} = (X + 1 - X)^2 = 1.$$

Binôme de Newton.

$$T_2(A_1) = \frac{1}{2}B_{2,1} + B_{2,2} = X.$$

$$T_2(A_2) = \frac{1}{4}B_{2,1} + B_{2,2} = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X.$$

Et donc il vient

$$H_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_2}(T_2) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} T_2(1) & T_2(X) & T_2(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}.$$

Puisque H_2 est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux :

$$\boxed{\mathrm{Spec}(H_2) = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}.}$$

Vecteurs propres
Les deux premières colonnes de H_2 montrent immédiatement que ces deux vecteurs sont des vecteurs propres, et puisque 1 apparaît deux fois sur la diagonale de H_2, le sous-espace propre associé est de dimension inférieure ou égale à 2.

Il est alors facile de voir que $E_1(H_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

D'autre part, pour $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on a

$$H_2X = \frac{1}{2}X \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x \\ y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

Et donc $E_{\frac{1}{2}}(H_2) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Nous en déduisons donc[1] que $\mathrm{Spec}(T_2) = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ et que

$$E_1(T_2) = \mathrm{Vect}(1, X),\ E_{\frac{1}{2}}(T_2) = \mathrm{Vect}\left(X - X^2\right).$$

[1] N'oublions pas que les vecteurs propres de T_2 sont des polynômes, dont les vecteurs propres de H_2 sont les vecteurs des coordonnées dans la base canonique.

2.a. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $(1-X)^{n-k} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}(-1)^{n-k-i}X^{n-k-i}$ et donc

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = \sum_{i=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{i}(-1)^{n-k-i}X^{n-i} = \sum_{j=k}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{n-j}(-1)^{j-k}X^j.$$

Chgt d'indice
On a posé $j = n - i$.

Ainsi, la matrice de $(B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,n})$ dans la base $\mathscr{C}_n$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_n}(B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,n}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} B_{n,0} & B_{n,1} & \dots & B_{n,n} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -n & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n & (-1)^{n-1}n & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ \vdots \\ X^n \end{array} \end{array}.$$

Alternative
Il est également possible de s'en sortir en utilisant uniquement la définition de famille libre, si $\sum \lambda_i B_{n,i} = 0$, alors en identifiant les termes de plus bas degré, on obtient $\lambda_0 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$, etc.
Un argument de dimension permet ensuite de conclure.

Cette matrice est triangulaire inférieure, et ses coefficients diagonaux sont non nuls : elle est donc inversible.
Ceci signifie donc que la famille $\boxed{(B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,n}) \text{ est une base de } \mathbf{R}_n[X].}$

2.b. Notons que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg B_{n,k} = k + n - k = n$.

Et donc pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$, $T_n(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(X) \in \mathbf{R}_n[X]$.

Pour $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, il vient

$$T_n(\lambda P+Q) = \sum_{k=0}^{n}\left(\lambda P\left(\frac{k}{n}\right) + Q\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k} = \lambda\sum_{k=0}^{n}P\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}+\sum_{k=0}^{n}Q\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k} = \lambda T_n(P)+T_n(Q).$$

Donc T_n est linéaire et donc est $\boxed{\text{un endomorphisme de } \mathbf{R}_n[X].}$

Soit $P \in \operatorname{Ker} T_n$. Alors $T_n(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k} = 0$.

Mais la famille $(B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,n})$ est libre, donc nécessairement, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P\left(\dfrac{k}{n}\right) = 0$.

Ainsi, P possède au moins $n+1$ racines distinctes. Puisque P est de degré au plus n, c'est donc que $P = 0$.
Ainsi, $\operatorname{Ker} T_n = \{0\}$, et donc T_n est injectif. Et alors, puisque $\mathbf{R}_n[X]$ est de dimension finie, T_n est bijectif : c'est $\boxed{\text{un automorphisme de } \mathbf{R}_n[X].}$

Dim. finie
Il est ici important de préciser que T_n est un endomorphisme d'un espace **de dimension finie.** C'est une condition suffisante (découlant du théorème du rang) pour garantir qu'un endomorphisme est bijectif si et seulement si il est injectif. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie peut être injectif sans être surjectif.

2.c. On a, par la formule du binôme de Newton,

$$T_n(A_0) = \sum_{k=0}^{n}B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = \boxed{1.}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} T_n(A_1) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}B_{n,k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}X^k(1-X)^{n-k} \\ &= X\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}X^{k-1}(1-X)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= X\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}X^i(1-X)^{n-1-i} \\ &= X(X+1-X)^{n-1} = X = A_1. \end{aligned}$$

Le terme correspondant à $k = 0$ est nul.

Rappel
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
Cette formule peut se retrouver très rapidement en revenant aux factorielles.

Chgt d'indice
$i = k - 1$.

2.d. Montrons par récurrence sur $k \leqslant n$ que $T_n(A_k)$ est de degré k.
Pour $k = 0$ et $k = 1$, c'est le résultat de la question précédente.

Supposons donc que pour $k < n$, $T_n(A_k)$ est de degré k.
Alors $T_n(A_k)'$ est de degré $k-1$ et donc $\frac{1}{n}X(1-X)T_n(A_k)'$ est de degré $k+1$, de même que $XT_n(A_k)$.
Donc $T_n(A_{k+1})$ est de degré au plus $k+1$. Prouvons qu'il est de degré exactement $k+1$ en montrant que son coefficient de degré $k+1$ est non nul.
À cet effet, notons $T_n(A_k) = \alpha_k X^k + Q_k$, où $\alpha_k \neq 0$ est le coefficient dominant de $T_n(A_k)$ et $\deg Q_k \leqslant k-1$. Alors

$$\begin{aligned}
T_n(A_{k+1}) &= \frac{1}{n}X(1-X)k\alpha_k X^{k-1} + \frac{1}{n}X(1-X)Q_k'(X) + \alpha_k X^{k+1} + XQ_k \\
&= -\frac{k\alpha_k}{n}X^{k+1} + \alpha_k X^{k+1} + \frac{1}{n}X(1-X)Q_k'(X) + XQ_k \\
&= \alpha_k\left(1-\frac{k}{n}\right)X^{k+1} + \underbrace{\frac{1}{n}X(1-X)Q_k'(X) + XQ_k}_{\text{de degré } \leqslant k}
\end{aligned}$$

Et donc, puisque $k < n$, $1 - \frac{k}{n} \neq 0$ et donc le coefficient de degré $k+1$ de $T_n(A_{k+1})$ est non nul : $T_n(A_{k+1})$ est un polynôme de degré $k+1$.
Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0,n]\!],\ T_n(A_k) \text{ est de degré } k.}$

Degré ☠ N'oublions pas que la somme de deux polynômes de degré $k+1$ peut être de degré strictement inférieur à $k+1$. Et donc il est **indispensable** pour répondre à la question de prouver que le coefficient de degré $k+1$ est non nul.

2.e. Notons que dans la récurrence de la question précédente, nous avons prouvé que si α_k est le coefficient dominant de $T_n(A_k)$, alors $\alpha_{k+1} = \left(1-\frac{k}{n}\right)\alpha_k = \frac{n-k}{n}\alpha_k$.
D'autre part, puisque $T_n(A_1) = A_1 = X$, $\alpha_1 = 1$.

Et donc

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{n-(k-1)}{n}\alpha_{k-1} \\
&= \frac{n-(k-1)}{n}\frac{n-(k-2)}{n}\alpha_{k-2} \\
&= \frac{n-(k-1)}{n}\frac{n-(k-2)}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\alpha_1 \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k} = \frac{k!}{n^k}\binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Détails On a multiplié numérateur et dénominateur par n pour faire apparaître $n!$

Puisque $T_n(A_k)$ est de degré k, la matrice de T_n dans la base $\mathscr{C}_n$ est de la forme

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} T_n(1) & T_n(X) & T_n(X^2) & \dots & T_n(X^n) \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \star & \dots & \star \\
0 & 1 & \star & & \star \\
\vdots & 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \dots & \alpha_n
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{array}
\end{array}.$$

Puisqu'elle est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.
D'autre part, pour $k \geqslant 2$, $\alpha_{k+1} = \left(1-\frac{k}{n}\right)\alpha_k < \alpha_k$.
Et donc $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont deux à deux distincts, et puisque pour $k \geqslant 2$, α_k n'apparaît qu'une fois sur la diagonale, le sous-espace propre associé est de dimension 1.
Enfin, on voit directement sur la matrice que $E_1(T_n) = \mathrm{Vect}(1, X) = \mathbf{R}_1[X]$.
Et donc

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(T_n)} \dim E_\lambda(T_n) = 2 + (n-1)\times 1 = n+1 = \dim \mathbf{R}_n[X],$$

ce qui prouve que $\boxed{T_n \text{ est diagonalisable.}}$

3.a. La variable aléatoire $\overline{Z_n}$ admet une espérance égale à z et une variance égale à $\dfrac{z(1-z)}{n}$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$0 \leqslant P(|\overline{Z_n} - z| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{nz(1-z)}{n\varepsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|\overline{Z_n} - z| \geqslant \varepsilon) = 0$: $\boxed{\overline{Z_n} \xrightarrow{P} z.}$

3.b. $|f|$ étant continue sur $[0,1]$, elle y est bornée et atteint ses bornes : $\boxed{\max\limits_{[0,1]} |f| \text{ existe.}}$

3.c. Notons que Z_n prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$, de sorte que $\overline{Z_n}$ est à valeurs dans $[0,1]$.
Et par conséquent, on a $\left|f\left(\overline{Z_n}\right)\right| \leqslant M$.
Par l'inégalité triangulaire, on a donc toujours

$$\left|f\left(\overline{Z_n}\right) - f(z)\right| \leqslant \left|f\left(\overline{Z_n}\right)\right| + |f(z)| \leqslant 2M.$$

Soit $\omega \in \Omega$.

Autrement dit
Si l'événement U_n est réalisé.

- Si $\omega \in U_n$, alors $\mathbb{1}_{U_n}(\omega) = 1$ et $\mathbb{1}_{\overline{U_n}}(\omega) = 0$ et

$$\left|f\left(\overline{Z_n}(\omega)\right) - f(z)\right| \leqslant 2M \leqslant 2M \times \mathbb{1}_{U_n}(\omega) + \varepsilon \times \mathbb{1}_{\overline{U_n}}(\omega).$$

- Si $\omega \notin U_n$, alors $\mathbb{1}_{U_n}(\omega) = 0$ et $\mathbb{1}_{\overline{U_n}}(\omega) = 1$ et alors

$$\left|f\left(\overline{Z_n}(\omega)\right) - f(z)\right| \leqslant \varepsilon \leqslant 2M \times \mathbb{1}_{U_n}(\omega) + \varepsilon \times \mathbb{1}_{\overline{U_n}}(\omega).$$

Dans les deux cas, on a bien $\boxed{\left|f\left(\overline{Z_n}\right) - f(z)\right| \leqslant 2M \times \mathbb{1}_{U_n} + \varepsilon \times \mathbb{1}_{\overline{U_n}}.}$

3.d. D'après la question précédente, $\left|f\left(\overline{Z_n}\right) - f(z)\right|$ admet une espérance et

Indicatrice
Rappelons que pour tout événement A, $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$ et donc $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.

$$E\left(\left|f\left(\overline{Z_n}\right) - f(z)\right|\right) \leqslant 2ME\left(\mathbb{1}_{U_n}\right) + \varepsilon E\left(\mathbb{1}_{\overline{U_n}}\right) = 2MP(U_n) + \varepsilon P(\overline{U_n}) \leqslant 2MP(U_n) + \varepsilon.$$

Lorsque $n \to +\infty$, d'après la question 3.a, $P(U_n) \to 0$.
Et donc il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que pour $n \geqslant N$, $P(U_n) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M} \Leftrightarrow 2MP(U_n) \leqslant \varepsilon$.
Et donc pour $n \geqslant N$, $0 \leqslant E\left(\left|f\left(\overline{Z_n}\right) - f(z)\right|\right) \leqslant 2\varepsilon$.
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, c'est donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} E\left(\left|f\left(\overline{Z_n}\right) - f(z)\right|\right) = 0$.
D'autre part, puisque $\left|f\left(\overline{Z_n}\right) - f(z)\right|$ admet une espérance, $f(Z_n) - f(z)$ admet aussi une espérance et

Rappel
X admet une espérance si et seulement si $|X|$ admet une espérance et alors

$$|E(X)| \leqslant E(|X|).$$

$$\left|E\left(f\left(\overline{Z_n}\right) - f(z)\right)\right| \leqslant E\left(\left|f\left(\overline{Z_n}\right) - f(z)\right|\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mais $E\left(f\left(\overline{Z_n}\right) - f(z)\right) = E\left(f\left(\overline{Z_n}\right)\right) - f(z)$, de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(f\left(\overline{Z_n}\right)\right) - f(z) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} E\left(f\left(\overline{Z_n}\right)\right) = f(z).$$

Enfin, par le théorème de transfert,

$$E\left(f\left(\overline{Z_n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P(Z_n = k) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(z) = f_n(z).$$

Et donc nous avons bien prouvé que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z).}$

Pour la culture
Nous avons donc prouvé que toute fonction continue sur $[0, 1]$ peut être «approchée» par une fonction polynomiale (voir la figure ci-dessous).
Ce résultat est encore vrai sur n'importe quel segment $[a, b]$, et est connu sous le nom de théorème d'approximation de Weierstrass.

4.a. Le plus simple est d'utiliser la fonction `grand` qui simule très bien des lois binomiales.

```
function Z = binom(n,z)
        Z = grand(1,1,'bin',n,z)
endfunction
```

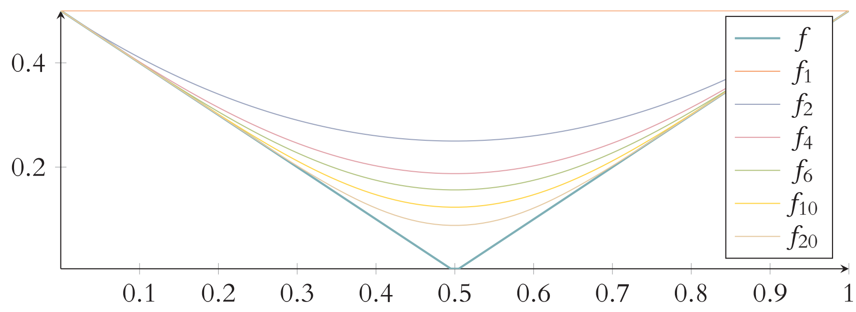


FIGURE 1 – Quelques f_n lorsque $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. On constate que les polynômes f_n sont de plus en plus proches de f.

4.b. Notons que la fonction f est la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -x\ln(x) & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$

Elle est bien continue sur $[0,1]$, car, par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to 0^+} -x\ln(x) = 0$.

Puisque f est continue, elle est bornée, et donc $f(\overline{Z_n})$ est une variable aléatoire bornée. En particulier, elle admet une variance.

La loi faible des grands nombres s'applique alors : si on simule un grand nombre[2] de fois $f(\overline{Z_n})$ et que l'on calcule la moyenne des résultats obtenus, cette moyenne doit être proche de $E(f(\overline{Z_n})) = f_n(z)$.

Mais $f_n(z)$ doit être proche de $f(z)$ pour n suffisamment grand, donc on peut penser que le programme renvoie une valeur approchée de $f(0.4)$.

[2] Ici 1000 fois.

Hasard

Notons que le programme en question est probabiliste. En moyenne, il doit renvoyer une valeur proche de 0.4, mais il est toujours possible (bien que peu probable) d'avoir eu un «mauvais» échantillon lors du tirage de nos N lois binomiales, et d'obtenir un résultat très différent de $f(0.4)$.

Partie II. Les polynômes d'interpolation de Lagrange.

5.a. Soient $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(x_0), (\lambda P + Q)(x_1), \dots, (\lambda P + Q)(x_n)) \\
&= (\lambda P(x_0) + Q(x_0), \lambda P(x_1) + Q(x_1), \dots, \lambda P(x_n) + Q(x_n)) \\
&= \lambda\,(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) + (Q(x_0), Q(x_1), \dots, Q(x_n)) \\
&= \lambda\Phi(P) + \Phi(Q).
\end{aligned}$$

Donc Φ est linéaire.

Montrons qu'elle est injective : soit $P \in \operatorname{Ker}(\Phi)$. Alors

$$\Phi(P) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(x_i) = 0.$$

Mais alors P possède $n+1$ racines distinctes alors qu'il est de degré inférieur ou égal à n : P est nécessairement le polynôme nul. Et donc $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$: Φ est injective.

Puisque $\dim \mathbf{R}_n[X] = \dim \mathbf{R}^{n+1} = n+1$, $\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme.}}$

5.b. Puisque $\Phi(L_i) = e_i$, L_i est l'unique[3] polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ tel que

$$(L_i(x_0), L_i(x_1), \dots, L_i(x_n)) = \Big(0, \dots, 0, \underset{\underset{(i+1)}{\uparrow}}{1}, 0, \dots, 0\Big) \Leftrightarrow \forall j \in [\![1,n]\!],\ L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Notons $Q_i = \displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$.

Alors, on a $Q_i(x_i) = \displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} = 1$.

Et pour $j \neq i$, alors le terme $X - x_j$ figure dans le produit définissant Q_i, de sorte que x_j est racine de Q_i : $Q_i(x_j) = 0$.

Ainsi, $Q_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ de sorte que $L_i = Q_i = \boxed{\displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.}$

[3] L'unicité est assurée par la bijectivité de Φ.

Danger !

Ici les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$ sont notés $e_0, \dots, e_n$ là où on a l'habitude de les noter $e_1, \dots, e_{n+1}$.

5.c. Soient $P, Q, R \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\Psi(\lambda P+Q, R) = \sum_{k=0}^{n}(\lambda P+Q)(x_k)R(x_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} P(x_k)R(x_k)+\sum_{k=0}^{n} Q(x_k)R(x_k) = \lambda\Psi(P, R)+\Psi(Q, R).$$

Donc Ψ est linéaire à gauche.
Pour $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$, on a

$$\Psi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k) = \sum_{k=0}^{n} Q(x_k)P(x_k) = \Psi(Q, P).$$

Donc Ψ est symétrique, et étant linéaire à gauche, est bilinéaire symétrique.
Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$. Alors

$$\Psi(P, P) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)^2 \geqslant 0.$$

De plus, on a $\Psi(P, P) = 0$ si et seulement si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(x_k)^2 = 0 \Leftrightarrow P(x_k) = 0$.
Mais alors P est un polynôme de degré au plus n possédant $n + 1$ racines distinctes : P est nécessairement le polynôme nul.
Et donc $\Psi(P, P) = 0 \Leftrightarrow P = 0$.
Ceci achève de prouver que $\boxed{\Psi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbf{R}_n[X].}$

Soient $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$. Alors

$$\begin{aligned}\Psi(L_i, L_j) &= \sum_{k=0}^{n} L_i(x_k)L_j(x_k) = 1 \times L_j(x_i)\\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j\\ 1 & \text{si } i = j\end{cases}\end{aligned}$$

Et donc la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est bien une famille $\boxed{\text{orthonormée}}$. En particulier, elle est libre. Puisqu'elle est de cardinal $n + 1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$, c'est donc $\boxed{\text{une base de } \mathbf{R}_n[X].}$

Détails
Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul.

Les $L_i(x_k)$ sont tous nuls, sauf pour $k = i$.

5.d. Puisque $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée, pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i$.

Et en particulier, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $X^k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k L_i$.

Et donc la matrice de passage de la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ à la base $\mathscr{C}_n$ est

$$P_{(L_0,\ldots,L_n),\mathscr{C}_n} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & X & \ldots & X^n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n\\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ L_0\\ L_1\\ \vdots\\ L_n \end{array}.$$

Pour la culture
La matrice ainsi obtenue est appelée matrice de Vandermonde. Elle est inversible car matrice de passage entre deux bases de $\mathbf{R}_n[X]$, ce qui, sans être impossible, ne serait pas si évident à démontrer à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes.

5.e. Puisque Φ est bijective, il existe un unique $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que

$$\Phi(P) = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)) \Leftrightarrow (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)) = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)).$$

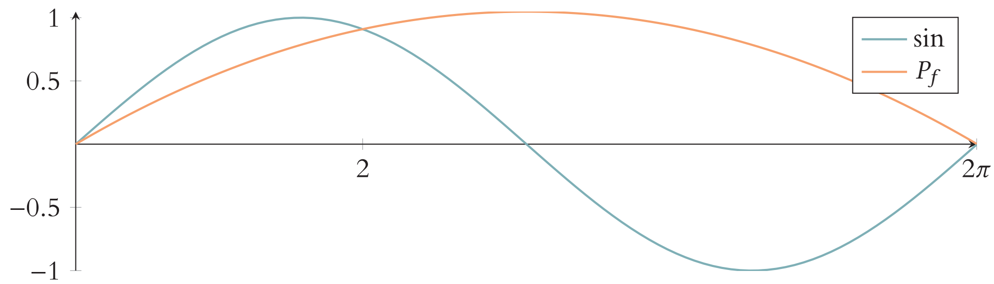
De plus, on a $(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)e_i$ de sorte que, par linéarité de Φ^{-1},

$$P_f = \Phi^{-1}(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)) = \Phi^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} f(x_i)e_i\right) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Phi^{-1}(e_i) = \boxed{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i.}$$

Notons que le polynôme P_f ainsi obtenu est un[4] polynôme de degré n qui prend les mêmes valeurs que f en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, ce qui ne signifie pas pour autant qu'il constitue une bonne approximation de f sur tout le segment $[a, b]$.

[4] Et même l'unique.

Par exemple, la figure ci-dessous représente le polynôme d'interpolation de la fonction sin aux points $0, 2$ et 2π.
Ce polynôme coïncide avec sin en ces trois points mais en est assez éloigné pour d'autres valeurs.
La suite du problème a précisément pour but d'étudier l'écart maximal entre f et P_f.



6.a. Notons que P_f est un polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ et que Q_f est un polynôme de $\mathbf{R}_{n+1}[X]$, de sorte que $Q_f - P_f \in \mathbf{R}_{n+1}[X]$.
D'autre part, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $Q_f(x_i) - P_f(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$.

Tous les x_i sont donc racines de $Q_f - P_f$ qui est alors divisible par $\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - x_i) = w(X)$.

Il existe donc un polynôme $R \in \mathbf{R}[X]$ tel que $Q_f - P_f = R \times w$.
Mais alors $\deg R + \deg w = \deg(Q_f - P_f) \leqslant n + 1$.
Puisque $\deg w = n + 1$, nécessairement $\deg R = 0$: R est une constante δ.
Et donc il existe bien un réel δ tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\boxed{Q_f(t) - P_f(t) = \delta \times w(t).}$

Degré
w est le produit de $n + 1$ termes de degré 1 et donc est de degré $n + 1$.

6.b. Q_f est, par définition, le polynôme d'interpolation de f aux $(n + 2)$ points $\overline{x}, x_0, x_1, \dots, x_n$.
Ceci signifie que f et Q_f coïncident en ces points, si bien que $h = f - Q_f$ s'annule en ces $n + 2$ points.
Or, un corollaire classique du théorème de Rolle est que si une fonction dérivable g s'annule en k points distincts de $[a, b]$, alors sa dérivée s'annule en au moins $k - 1$ points distincts de $[a, b]$.

Figure 2 – Si on note $y_1 < y_2 < \cdots < y_k$ les k réels où g s'annule, alors d'après le théorème de Rolle, g' s'annule une fois sur $]y_1, y_2[$, une fois sur $]y_2, y_3[$, etc. Ce qui en tout fournit bien $k - 1$ réels **distincts** où g' s'annule (un dans chaque intervalle orange).

Ainsi, h' s'annule en au moins $n + 1$ points de $[a, b]$.
Mais h' est elle-même dérivable, et donc[5] h'' s'annule en au moins n points de $[a, b]$.
Puisque h est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ (car différence de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^{n+1}$), on prouve de proche en proche que pour tout $k \in [\![0, n + 1]\!]$, $h^{(k)}$ s'annule au moins $n + 2 - k$ fois dans $[a, b]$.
En particulier, $h^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois : $\boxed{\text{il existe } \theta \in [a, b] \text{ tel que } h^{(n+1)}(\theta) = 0.}$

[5] Par le même corollaire de Rolle.

6.c. Notons $Q_f(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k X^k$.

Alors $Q_f'(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k\alpha_k X^{k-1}$, puis $Q_f'(X) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)\alpha_k X^{k-1}$, etc.
Une récurrence rapide prouve que pour tout $i \in [\![1, n + 1]\!]$,

$$Q_f^{(i)}(X) = \sum_{k=i}^{n+1} k(k-1)\cdots(k-i+1)\alpha_k X^{k-i} = \sum_{k=i}^{n+1} \frac{k!}{(k-i)!}\alpha_k X^{k-i}.$$

Et en particulier, $Q_f^{(n+1)}(X) = (n + 1)!\alpha_{n+1}$ est une constante.
D'autre part, $Q_f = P_f + \delta w$, où P_f est de degré inférieur ou égal à n.

Le coefficient en X^{n+1} de Q_f est donc celui de δw : c'est donc δ.
On a donc $h^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\delta$.
Et donc $h^{(n+1)}(\theta) = 0 \Leftrightarrow f^{(n+1)}(\theta) = Q_f^{(n+1)}(\theta) = (n+1)! \times \delta$.

Soit encore $\delta = \dfrac{f^{(+1)}(\theta)}{(n+1)!}$.
Enfin, puisque $f(\overline{x}) = Q_f(\overline{x})$, on a

$$f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = Q_f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = \delta w(\overline{x}) = \boxed{\frac{1}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(\theta) \times w(\overline{x}).}$$

Détails
Si on développe le produit définissant w, il est clair que w est de degré $n+1$ et que son coefficient dominant vaut 1.

6.d. Soit $t \in [a,b]$. Si t est l'un des x_i, $i \in [\![0,n]\!]$, alors $f(t) - P_f(t) = 0$, et donc l'inégalité est vérifiée[6].
Et sinon, le résultat de la question précédente s'applique, en prenant $\overline{x} = t$, il existe un $\theta_t \in [a,b]$ tel que

$$|f(t) - P_f(t)| = \frac{1}{(n+1)!} \times |f^{(n+1)}(\theta_t)| \times |w(t)| \leqslant \boxed{\frac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}|.}$$

[6] Et c'est même une égalité car alors $w(t) = 0$.

Remarque
f étant $\mathscr{C}^{n+1}$, $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a, b]$, et donc $\max |f^{(n+1)}|$ existe bien.

Partie III. Exemple d'interpolation et phénomène de Runge.

7.a. La fonction $x \mapsto x^2 + \rho^2$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et ne s'y annule pas car $\rho^2 > 0$. Et donc son inverse, $\boxed{f_\rho \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbf{R}.}$

7.b. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = f_\rho(-x)$.
On a alors $g'(x) = -f_\rho(-x)$, $g''(x) = (-1)^2 f_\rho''(-x)$, et plus généralement, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $g^{(n)}(x) = (-1)^n f_\rho^{(n)}(-x)$.
Mais puisque f_ρ est paire, $g = f_\rho$ et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_\rho^{(n)} = g^{(n)}$.
Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^* \text{ et tout } x \in \mathbf{R}, \left|f_\rho^{(n)}(-x)\right| = \left|f_\rho^{(n)}(x)\right|.}$

Plus généralement
La dérivée d'une fonction paire est impaire et vice-versa. Il est assez facile de se convaincre de ceci graphiquement.

7.c. Pour $|x| < \rho$, on a $\dfrac{1}{x^2+\rho^2} = \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{\rho^2}\right)}$, avec $\left|-\dfrac{x^2}{\rho^2}\right| < 1$.

On reconnaît alors la somme d'une série géométrique de raison $-\dfrac{x^2}{\rho^2}$:

$$\frac{1}{\rho^2+x^2} = \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{\rho^2}\right)} = \frac{1}{\rho^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{x^2}{\rho^2}\right)^k = \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}}x^{2k}.}$$

8.a. Supposons que deux tels réels p et q existent. Alors

$$\frac{p}{\rho - x} + \frac{q}{\rho + x} = \frac{p(\rho - x) + q(\rho + x)}{\rho^2 - x^2} = \frac{(q-p)x + (p+q)\rho}{\rho^2 - x^2}.$$

Et donc cette quantité est égale à $\dfrac{\rho^2}{\rho^2 - x^2}$ si et seulement si pour tout $x \in]-\rho,\rho[$, $\rho^2 = (q-p)x + (p+q)\rho$.
Mais deux polynôme coïncident en une infinité de valeurs si et seulement si ils sont égaux, c'est-à-dire si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.
Donc on doit avoir $\begin{cases} q - p = 0 \\ p + q = \rho \end{cases} \Leftrightarrow p = q = \dfrac{\rho}{2}$.

Et donc $\boxed{\text{pour tout } x \in]-\rho,\rho[, v(x) = \frac{\rho}{2}\frac{1}{\rho - x} + \frac{\rho}{2}\frac{1}{\rho + x}.}$

8.b. La fonction v est paire, et donc le même raisonnement qu'à la question 7.b s'applique : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in]-\rho,\rho[$, $|v^{(n)}(x)| = |v^{(n)}(x)|$.

8.c. Reprenons le résultat de la question 7.c : pour tout $x \in]-\rho,\rho[$,

$$\rho^2 f_\rho(x) = \frac{\rho^2}{x^2+\rho^2} = \rho^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\rho^{2k}}t^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}}A_{2k}(x).$$

Si on pose $u_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{\rho^{2k}} & \text{si } n = 2k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$, alors

$$\forall x \in]-\rho, \rho[,\ \rho^2 f_\rho(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k A_k(x).$$

Et donc le résultat admis au début de la question 8 s'applique : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x \in]-\rho, \rho[$, $f_\rho^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k A_k^{(n)}(x)$.

D'autre part, pour tout $x \in]-\rho, \rho[$, $v(x) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{x^2}{\rho^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{\rho^{2k}} x^{2k}$.

Et donc là encore, le résultat admis s'applique : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in]-\rho, \rho[$,

$$v^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2k}} A_{2k}^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| A_k^{(n)}(x).$$

En particulier, la série $\sum_k |u_k| A_k^{(n)}(x)$ converge et donc par l'inégalité triangulaire, pour tout $x \in [0, \rho[$.

$$|\rho^2 f_\rho^{(n)}(x)| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k A_k^{(n)}(x) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| |A_k^{(n)}(x)| = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| A_k^{(n)}(x) = v^{(n)}(x).$$

Signe

Notons que pour $x \geqslant 0$, les $A_k^{(n)}(x) = k \dots (k-n+1) x^{k-n}$ sont positifs.

Et donc pour $x \in [0, \rho[$, $\boxed{\left| f_\rho^{(n)}(x) \right| \leqslant \dfrac{1}{\rho^2} |v^{(n)}(x)|.}$

Enfin, si $x \in]-\rho, 0]$, alors d'après les résultats des questions 7.b et 8.b,

$$|f_\rho^{(n)}(x)| = |f_\rho^{(n)}(-x)| \leqslant \frac{1}{\rho^2} |v^{(n)}(-x)| = \frac{1}{\rho^2} |v^{(n)}(x)|.$$

8.d. Notons $v_1(x) = \dfrac{1}{\rho - x}$ et $v_2(x) = \dfrac{1}{\rho + x}$, de sorte que pour $x \in]-\rho, \rho[$, $v(x) = \dfrac{\rho}{2}(v_1(x) + v_2(x))$.

Alors $v_1'(x) = \dfrac{1}{(\rho - x)^2}$, $v_1''(x) = \dfrac{2}{(\rho - x)^3}$, $v^{(3)}(x) = \dfrac{6}{(\rho - x)^4}$, et une récurrence rapide prouverait que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in]-\rho, \rho[$,

$$v_1^{(n)}(x) = \frac{n!}{(\rho - x)^{n+1}}.$$

De même, on a $v_2'(x) = -\dfrac{1}{(\rho + x)^2}$, $v_2''(x) = \dfrac{2}{(\rho + x)^3}$ etc et

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in]-\rho, \rho[,\ v_2^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(\rho + x)^{n+1}}.$$

Ainsi, pour $x \in [-1, 1]$, on a

$$|v^{(n)}(x)| = \left| \frac{\rho}{2} v_1^{(n)}(x) + \frac{\rho}{2} v_2^{(n)}(x) \right| \leqslant \frac{\rho}{2} \left(|v_1^{(n)}(x)| + |v_2^{(n)}(x)| \right) \leqslant \frac{\rho}{2} \left(\frac{n!}{(\rho - x)^{n+1}} + \frac{n!}{(\rho + x)^{n+1}} \right).$$

Mais pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$, il vient $0 \leqslant \rho - 1 \leqslant \rho - x$, de sorte que $\dfrac{1}{(\rho - 1)^{n+1}} \geqslant \dfrac{1}{(\rho - x)^{n+1}}$.

Et de même, $0 \leqslant \rho - 1 \leqslant \rho + x$ et donc $\dfrac{1}{(\rho - 1)^{n+1}} \geqslant \dfrac{1}{(\rho + x)^{n+1}}$.

On en déduit donc que

$$|v^{(n)}(x)| \leqslant \frac{\rho}{2} \left(\frac{n!}{(\rho - 1)^{n+1}} + \frac{n!}{(\rho - 1)^{n+1}} \right) \leqslant \frac{\rho n!}{(\rho - 1)^{n+1}}.$$

Et donc, d'après la question 8.c, pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$|f_\rho^{(n)}(x)| \leqslant \frac{1}{\rho^2} \left| v^{(n)}(x) \right| \leqslant \boxed{\frac{1}{\rho} \frac{n!}{(\rho - 1)^{n+1}}.}$$

9.a. Par définition de w_n,

$$|w_n(x)| = \prod_{i=0}^{n} |x - x_{i,n}| = \prod_{i=0}^{k} (x - x_{i,n}) \times \prod_{i=k+1}^{n} (x_{i,n} - x).$$

> **Détail**
> Pour $i \leqslant k$, $x - x_{i,n} \geqslant 0$ et pour $i > k$, $x - x_{i,n} < 0$.

- Pour $i \in [\![0, k]\!]$, $x - x_{i,n} \leqslant x_{k+1,n} - x_{i,n} \leqslant -1 + \dfrac{2(k+1)}{n} + 1 - \dfrac{2i}{n} \leqslant \dfrac{2}{n}(k+1-i)$.

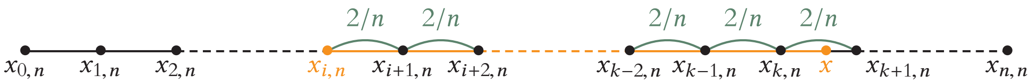


FIGURE 3 – La distance entre $x_{i,n}$ et x (en orange) est inférieure ou égale à la longueur de $k+1-i$ intervalles de longueur $\frac{2}{n}$.

- Pour $i \in [\![k+1, n]\!]$, $x_{i,n} - x \leqslant x_{i,n} - x_{k,n} \leqslant \dfrac{2}{n}(i-k)$.

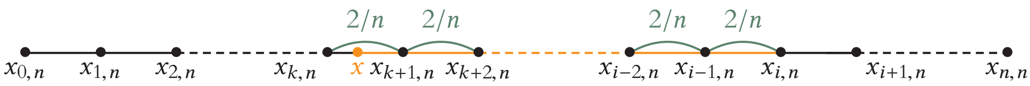


FIGURE 4 – La distance entre $x_{i,n}$ et x (en orange) est inférieure ou égale à la longueur de $i-k$ intervalles de longueur $\frac{2}{n}$.

Et donc

$$\begin{aligned} |w_n(x)| &\leqslant \prod_{i=0}^{k} \frac{2}{n}(k+1-i) \times \prod_{i=k+1}^{n} \frac{2}{n}(i-k) \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times ((k+1) \times k \times \cdots 1) \times (1 \times 2 \times \cdots \times (n-k)) \\ &\leqslant \boxed{\left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} (k+1)! \times (n-k)!.} \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)!(n-k)!}{n!} &= \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (k+1) \times 1 \times 2 \times \cdots \times (n-k)}{1 \times 2 \times \cdots \times n} \\ &= \frac{\overbrace{1 \times 2 \times \cdots \times (n-k)}^{(n-k) \text{ termes}}}{\underbrace{(k+2) \times (k+3) \times \cdots \times n}_{(n-k-1) \text{ termes}}} = 1 \times \frac{2}{k+2} \times \frac{3}{k+3} \times \cdots \times \frac{n-k}{n} \leqslant 1. \end{aligned}$$

On en déduit que $(k+1)!(n-k)! \leqslant n!$ et donc

$$\boxed{|w_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} n!}$$

9.b. D'après la formule de Stirling, on a

$$\left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} n! \left(\frac{e}{2}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{n+1}}{n^{n+1}} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \frac{e^{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{e\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$\left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} n! \left(\frac{e}{2}\right)^{n+1} \leqslant 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} n! \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}.$$

Et donc $\boxed{\text{pour } n \geqslant n_0,\ |w_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}.}$

9.c. D'après la question 6.c, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \times |w_n(x)| \times \sup_{[-1,1]} \left|f_\rho^{(n+1)}\right|.$$

Mais pour $\rho > 1 + \frac{2}{e}$, le résultat de la question 8.d s'applique et :

$$\sup_{[-1,1]} \left|f_\rho^{(n+1)}\right| \leqslant \frac{1}{\rho} \frac{(n+1)!}{(\rho-1)^{n+2}}.$$

On en déduit donc que pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1} \frac{1}{\rho} \frac{(n+1)!}{(\rho-1)^{n+2}} \leqslant \frac{1}{\rho(\rho-1)} \left(\frac{2}{e(\rho-1)}\right)^{n+1}.$$

Or, $\rho - 1 > \frac{2}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{(\rho-1)} < \frac{e}{2}$ et donc $0 \leqslant \frac{2}{e(\rho-1)} < 1$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{e(\rho-1)}\right)^{n+1} = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right| = 0.}$$

10.a. Sur $[-1,1]$, posons $u(t) = \ln(t^2+\rho^2)$ et $v(t) = t$. Ce sont alors deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ avec $u'(t) = \frac{2t}{t^2+\rho^2}$ et $v'(t) = 1$.
Une intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned}
H(\rho) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \ln(t^2+\rho^2)\,dt &= \left[\frac{1}{4} t \ln(t^2+\rho^2)\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{t^2}{t^2+\rho^2}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\ln(1^2+\rho^2) + \frac{1}{4}\ln((-1)^2+\rho^2) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{(t^2+\rho^2)-\rho^2}{t^2+\rho^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{\rho^2}{t^2+\rho^2}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\rho^2}{t^2+\rho^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - 1 + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\rho}\right)^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - 1 + \left[\frac{\rho}{2}\mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{\rho}\right)\right]_{-1}^{1} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - 1 + \rho\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right).}
\end{aligned}$$

Rappel
La fonction Arctan est impaire donc
$$\mathrm{Acrtan}\left(\frac{-1}{\rho}\right) = -\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Lorsque $\rho \to 0^+$, alors $\ln(1+\rho^2) \to \ln(1) = 0$.
Et puisque Arctan est bornée, $\rho\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right) \underset{\rho\to0^+}{\longrightarrow} 0$.
Et donc $\lim_{\rho\to0^+} H(\rho) = -1$.

$\boxed{\text{La fonction } H \text{ peut donc être prolongée par continuité en 0 en posant } H(0) = -1.}$

10.b. H est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et

$$H'(\rho) = \frac{\rho}{1+\rho^2} - \rho\frac{1}{\rho^2}\frac{1}{1+\frac{1}{\rho^2}} = \frac{\rho}{1^2+\rho^2} - \frac{\rho}{1+\rho^2} + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right) > 0.$$

Et donc H est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$.
Enfin, lorsque $\rho \to +\infty$, $\ln(1+\rho^2) \to +\infty$ et donc[7] $\lim_{\rho\to+\infty} H(\rho) = +\infty$.

[7] Le terme avec l'arctangente est positif.

Par le théorème de la bijection, qui s'applique car H est continue et strictement croissante, H réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $[-1, +\infty[$.
En particulier, puisque $\ln(2) - 1 < 0$, $\boxed{\text{il existe un unique } \rho_0 > \text{ tel que } H(\rho_0) = \ln(2) - 1.}$

$\ln(2) - 1 < 0$

Notons qu'il n'est pas vraiment utile ici de disposer de la valeur approchée de ln(2). En effet, si on se rappelle que $e \simeq 2.718 > 2$, alors

$$\ln(2) < \ln(e) = 1.$$

10.c. Notons que

$$H(1) = \frac{1}{2}\ln(2) - 1 + \frac{\pi}{4} = \ln(2) - 1 + \left(\underbrace{\frac{\pi}{4}}_{>\frac{3}{4}} - \underbrace{\frac{1}{2}\ln(2)}_{<\frac{1}{2}}\right) > \ln(2) - 1 = H(\rho_0).$$

Or la fonction H étant croissante, nécessairement, $\boxed{\rho_0 < 1.}$

10.d. w_n est un polynôme de degré $n+1$, qui possède donc au plus $n+1$ racines complexes. Or, nous savons que les $x_{k,n}$ sont $(n+1)$ racines de w_n, qui ne peut donc posséder d'autres racines.
En particulier, pour tout $\rho > 0$, $w_n(i\rho) \neq 0$ et donc $|w_n(i\rho)| > 0$.
De plus, on a alors

$$\begin{aligned} |w_n(i\rho)| &= \left|\prod_{k=0}^{n}(i\rho - x_{k,n})\right| \\ &= \prod_{k=0}^{n}\left|i\rho + \left(-1 + \frac{2k}{n}\right)\right| \\ &= \prod_{k=0}^{n}\sqrt{\rho^2 + \left(-1 + \frac{2k}{n}\right)^2}. \end{aligned}$$

Et donc

$$\frac{1}{n}\ln|w_n(i\rho)| = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\rho^2 + \left(-1 + \frac{2k}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\frac{1-(-1)}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\rho^2 + \left(-1 + k\frac{1-(-1)}{n}\right)^2\right) + \underbrace{\frac{1}{2n}\ln(\rho^2+1)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

On reconnaît alors une somme de Riemann pour la fonction $t \mapsto \ln(\rho^2 + t^2)$, entre -1 et 1 de sorte que

$$\frac{1-(-1)}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(\rho^2 + \left(-1 + k\frac{1-(-1)}{n}\right)^2\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-1}^{1}\ln(\rho^2+t^2)\,dt.$$

Et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|w_n(i\rho)| = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\ln(\rho^2+t^2)\,dt = H(\rho).}$$

Sommes de Riemann

Rappelons que les deux formules dont nous disposons pour les sommes de Riemann font apparaître des sommes de n termes : $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cdots$ ou $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cdots$.
Comme ici nous avons affaire à une somme de $n+1$ termes, nous avons sorti un des termes de la somme.

11.a. L'algorithme proposé cherche une valeur approchée d'une solution de $G(s) = 0$ où G est la fonction définie par

$$G(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{4} + x\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln(2) + x\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'une part, nous avons déjà prouvé que $G(1) > 0$ et d'autre part,

$$G\left(\frac{1}{4}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{17}{16}\right)}_{>0} - \ln(2) + \frac{1}{4}\underbrace{\text{Arctan}(4)}_{<\pi/2} < \frac{\pi}{8} - \ln(2) < \frac{3.2}{8} - 0.6 < 0.4 - 0.6 < 0.$$

Valeur approchée

Comme chacun sait, $\pi \simeq 3.14$ et donc $\pi \leqslant 3.2$

Ainsi, par croissance de G, l'unique solution de $G(x) = 0$ se trouve dans l'intervalle $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$.
La méthode mise en œuvre est la méthode de dichotomie.
À chaque étape, on calcule l'image du milieu de l'intervalle $[u, v]$ par G. Si celle-ci est

négative, la solution se trouve dans l'intervalle $\left[\dfrac{u+v}{2}, v\right]$.
Sinon, elle se trouve dans l'intervalle $\left[u, \dfrac{u+v}{2}\right]$.
Enfin, si jamais[8] $G\left(\dfrac{u+v}{2}\right) = 0$, alors la solution cherchée est $\dfrac{u+v}{2}$.
L'algorithme s'arrête dès que $|v-u| \leqslant 0.001$, car alors $[u, v]$ contient la solution de l'équation, et est de longueur inférieure à 0.001, de sorte que n'importe quel nombre de $[u, v]$ est à distance de s_0 inférieure ou égale à 0.001 et donc est une approximation de s_0 à 0.001 près.
Notons que le programme `Scilab` renvoie 0.5257568, à comparer avec la «vraie valeur» de s_0 qui est environ 0.5255249. Nous constatons que la différence entre ces deux nombres est bien inférieure ou égale à 0.001.

[8] Notons qu'il faudrait beaucoup de chance pour que ceci se produise !

Arrêt
Notons qu'à chaque étape, la longueur de l'intervalle $[u, v]$ est divisée par 2, et donc au bout d'un certain nombre d'étapes, on aura bien $|v-u| \leqslant 0.001$. Ce nombre d'étapes peut même être calculé «à la main», indépendamment du résultat.

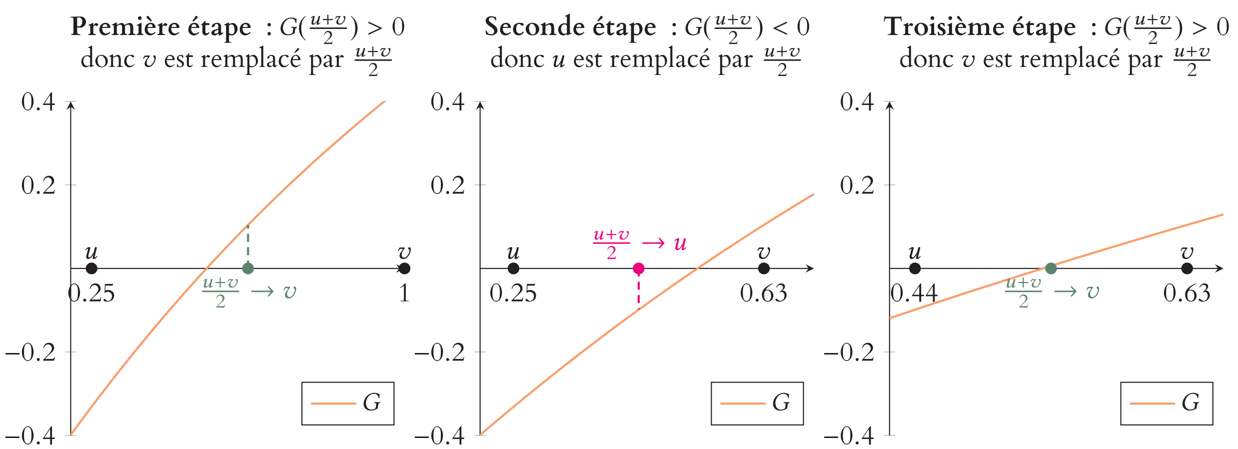


FIGURE 5 – Les trois premières étapes de l'algorithme.

11.b. Puisque s_0 est solution de $G(s_0) = 0 \Leftrightarrow H(s_0) = \ln(2) - 1$, on a $\boxed{s_0 = \rho_0.}$

12.a. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$S_n(x_{k,n}) = 1 - (x_{k,n}^2 + \rho^2)P_{f_\rho,n}(x_{k,n}) = \left(x_{k,n}^2 + \rho^2\right)\left(f_\rho(x_{k,n}) - P_{f_\rho,n}(x_{k,n})\right) = 0.$$

Et donc les $x_{k,n}$ sont tous racines de S_n : $\boxed{S_n \text{ est divisible par } \prod_{k=0}^{n}(X - x_{k,n}) = w_n.}$

12.b. Notons $L_{0,n}, L_{1,n}, \ldots, L_{n,n}$ les polynômes de Lagrange associés au réels $x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n,n}$.

Notation
Contrairement à la partie II où n était fixé et où on notait les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n$, nous les notons ici $L_{k,n}$ pour ne pas oublier qu'ils dépendent de n. Par exemple, $L_{0,1} \neq L_{0,2}$.

Alors, d'après la question 5.e, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$P_{f_\rho,n}(X) = \sum_{k=0}^{n} f_\rho(x_{k,n})L_{k,n}(X).$$

Remarquons que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$x_{k,n} = -1 + \frac{2k}{n} = \frac{-n+2k}{n} = \frac{-n+2(n-k)}{n} = -1 + \frac{2(n-k)}{n} = -x_{n-k,n}.$$

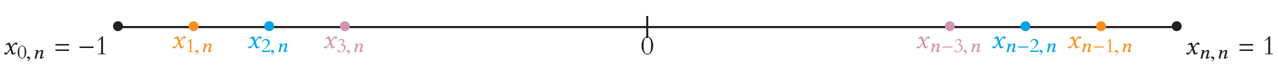


FIGURE 6 – $x_{k,n} = -x_{n-k,x}$: $x_{k,n}$ et $x_{n-k,n}$ sont symétriques par rapport à l'origine.

Ainsi, on a

$$L_{k,n}(X) = \prod_{\substack{i \in [\![0,n]\!] \\ i \neq k}} \frac{X - x_{i,n}}{x_{k,n} - x_{i,n}}.$$

Et donc

$$L_{k,n}(-X) = \prod_{\substack{i\in[\![0,n]\!]\\ i\neq k}} \frac{-X - x_{i,n}}{x_{k,n} - x_{i,n}} = \prod_{\substack{i\in[\![0,n]\!]\\ i\neq k}} \frac{-(X - x_{n-i,n})}{-(x_{n-k,n} - x_{n-i,n})} = \prod_{\substack{j\in[\![0,n]\!]\\ j\neq n-k}} \frac{X - x_{j,n}}{x_{n-k,n} - x_{j,n}} = L_{n-k,n}(X).$$

Chgt d'indice
$j = n - i$.

Il vient donc

$$\begin{aligned} P_{f_\rho,n}(-X) &= \sum_{k=0}^{n} f_\rho(x_{k,n})L_{k,n}(-X) = \sum_{k=0}^{n} f_\rho(x_{k,n})L_{n-k,n}(X) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f_\rho(x_{n-i,n})L_{i,n}(X) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f_\rho(-x_{i,n})L_{i,n}(X) \\ &= \sum_{i=0}^{n} f_\rho(x_{i,n})L_{i,n}(X) = P_{f_\rho,n}(X). \end{aligned}$$

$i = n - k$.

$x_{n-i,n} = -x_{i,n}$

f_ρ est une fonction paire.

Et donc, $\boxed{P_{f_\rho,n} \text{ est un polynôme pair.}}$

12.c. On a

$$|w_n(y_n)| = \left|\prod_{k=0}^{n}(y_n - x_{k,n})\right| = \prod_{k=0}^{n} |y_n - x_{k,n}|.$$

Or, $|y_n - x_{k,n}| = \left|1 - \dfrac{1}{n} + 1 - \dfrac{2k}{n}\right| = \left|\dfrac{2n-2k-1}{n}\right|$.

En particulier, pour $k = n$, on a $|y_n - x_{n,n}| = \dfrac{1}{n}$.

Et pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $|y_n - x_{k,n}| = \dfrac{2n-2k-1}{n}$.

Ainsi, il vient

$x_{n,n}$ est le seul des $x_{k,n}$ pour lequel $y_n - x_{k,n} < 0$.

$$\begin{aligned} |w_n(y_n)| &= \frac{1}{n}\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2n-2k-1}{n} \\ &= \frac{1}{n^{n+1}}\left((2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 1\right) \\ &= \frac{1}{n^{n+1}} \frac{(2n)!}{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2} \\ &= \frac{1}{n^{n+1}} \frac{(2n)!}{(2n)\times(2(n-1))\times\cdots\times(2\times 2)\times(2\times 1)} \\ &= \boxed{\frac{1}{n^{n+1}}\frac{(2n)!}{2^n n!}}. \end{aligned}$$

Astuce
On a multiplié numérateur et dénominateur par le produit des nombres pairs entre 2 et $2n$, ce qui permet de faire apparaître une factorielle au numérateur.

Utilisons une fois de plus la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \text{ et } (2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} (2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n} = 2^{2n+1}n^{2n}e^{-2n}\sqrt{\pi n}.$$

Et donc il vient

$$|w_n(y_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n n^{n+1}} \frac{2^{2n+1}n^{2n}e^{-2n}\sqrt{\pi n}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \frac{2^{n+1}}{n}\frac{e^{-n}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{n}\left(\frac{2}{e}\right)^n}.$$

12.d. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln|w_n(i\rho)| - nH(\rho)) = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\ln|w_n(i\rho)| - nH(\rho)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{|w_n(i\rho)|}{e^{nH(\rho)}} = 1 \Leftrightarrow |w_n(i\rho)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(e^{H(\rho)}\right)^n.$$

Plus généralement
Le même raisonnement prouve que si $u_n - v_n \to 0$, alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.

Ainsi, en utilisant le résultat de la question 12.c, il vient

$$\left|\frac{w_n(y_n)}{w_n(i\rho)}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n}\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{1}{\left(e^{H(\rho)}\right)^n} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{n}\left(\frac{2}{e^{1+H(\rho)}}\right)^n}.$$

13.a. Par définition de w_n, on a $w_n(i\rho) = \prod_{k=0}^{n}(i\rho - x_{k,n})$.

Et donc son complexe conjugué est $\overline{w_n(i\rho)} = \prod_{k=0}^{n}(-i\rho - x_{k,n})$.

Mais, comme remarqué à la question 12.b, $x_{k,n} = -x_{n-x,n}$. Et donc

$$\overline{w_n(i\rho)} = \prod_{k=0}^{n}(-i\rho + x_{n-k,n}) = (-1)^{n+1}\prod_{k=0}^{n}(i\rho - x_{n,k,n})$$
$$= (-1)^{n+1}\prod_{k'=0}^{n}(i\rho - x_{k',n}) = (-1)^{n+1}w_n(i\rho).$$

Chgt d'indice
$k' = n - k$.

Mais n étant impair, $(-1)^{n+1} = 1$, et donc $\overline{w_n(i\rho)} = w_n(i\rho)$, et donc $w_n(i\rho) \in \mathbf{R}$.
Comme de plus, nous avons déjà vu à la question 10.d que $w_n(i\rho) \neq 0$, $\boxed{w_n(i\rho) \in \mathbf{R}^*}$.

Méthode
Pour montrer qu'un nombre complexe est en fait un nombre réel, on peut :
•soit prouver que sa partie imaginaire est nulle (ce qui nécessite de pouvoir calculer cette partie imaginaire, ce qui ici n'est pas agréable)
•soit prouver qu'il est égal à son propre conjugué.

Puisque S_n est divisible par w_n, il existe $Q_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que $S_n = Q_n \times w_n$.
De plus, $\deg S_n = \deg\left((X^2+\rho^2)P_{f_\rho,n}(X)\right) \leqslant n+2$, et $\deg w_n = n+1$, de sorte que $\deg Q_n \leqslant 1$.
Ainsi, il existe deux réels a et b tels que $Q_n(X) = aX + b$.
Or, $S_n(i\rho) = 1 - \left((i\rho)^2 + \rho^2\right)P_{f_\rho,n}(i\rho) = 1 - (-\rho^2+\rho^2)P_{f_\rho,n}(i\rho) = 1$.
Mais on a également $S_n(i\rho) = Q_n(i\rho) \times w_n(i\rho)$, et donc $Q_n(i\rho) = \dfrac{1}{w_n(i\rho)} \in \mathbf{R}$.
Puisque $Q_n(i\rho) = ai\rho + b$ possède une partie imaginaire égale à $a\rho$, c'est un réel si et seulement si $a\rho = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
Ainsi, Q_n est constant, et $Q_n(X) = \dfrac{1}{w_n(i\rho)}$.
On en déduit que

$$S_n(X) = Q_n(X) \times w_n(X) = \boxed{\frac{w_n(X)}{w_n(i\rho)}}.$$

13.b. Pour $x \in [-1,1]$, on a

$$\left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\right| = \left|f_\rho(x)\left(1 - (x^2+\rho^2)P_{f_\rho,n}(x)\right)\right|$$
$$= |f_\rho(x)| \times |S_n(x)|$$
$$= \boxed{|f_\rho(x)| \times \left|\frac{w_n(x)}{w_n(i\rho)}\right|}.$$

14.a. On a $f_\rho(y_{2n+1}) = \dfrac{1}{\rho^2 + y_{2n+1}^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1+\rho^2}$.
D'autre part, en réutilisant le résultat de la question 12.d, on a

$$\left|\frac{w_{2n+1}(y_{2n+1})}{w_{2n+1}(i\rho)}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{2n+1}\left(\frac{2}{e^{1+H(\rho)}}\right)^{2n+1}.$$

Or, par hypothèse, $0 < \rho < \rho_0$, et donc $H(\rho) < H(\rho_0) = \ln(2) - 1$, de sorte que $1 + H(\rho) < \ln(2)$ ce qui à son tour implique que $e^{1+H(\rho)} < 2$.
Par conséquent, $\dfrac{2}{e^{1+H(\rho)}} > 1$ et donc $\dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{2}{e^{1+H(\rho)}}\right)^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Par croissance comparée, il vient alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left|f_\rho(y_{2n+1}) - P_{f_\rho,2n+1}(y_{2n+1})\right| = +\infty.}$$

14.b. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\sup_{[-1,1]}|f_\rho - P_{f_\rho,2n+1}| \geqslant \left|f_\rho(y_{2n+1}) - P_{f_\rho,2n+1}(y_{2n+1})\right|.$$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{[-1,1]}\left|f_\rho(x) - P_{f_\rho,2n+1}(x)\right| = +\infty$.

Quelques commentaires sur le phénomène de Runge[9] : nous venons de prouver, sur un exemple que, lorsque le nombre de points tend vers $+\infty$, les polynômes d'interpolation ne suffisent pas toujours à approcher la fonction de départ sur tout l'intervalle $[a, b]]$: ils coïncident avec cette fonction en un nombre de points de plus en plus grand, mais pourtant l'écart maximal entre la fonction de départ et son polynôme d'interpolation tend vers $+\infty$.

[9] Du nom de Carl RUNGE (1856–1927) , mathématicien allemand qui découvrit ce phénomène.

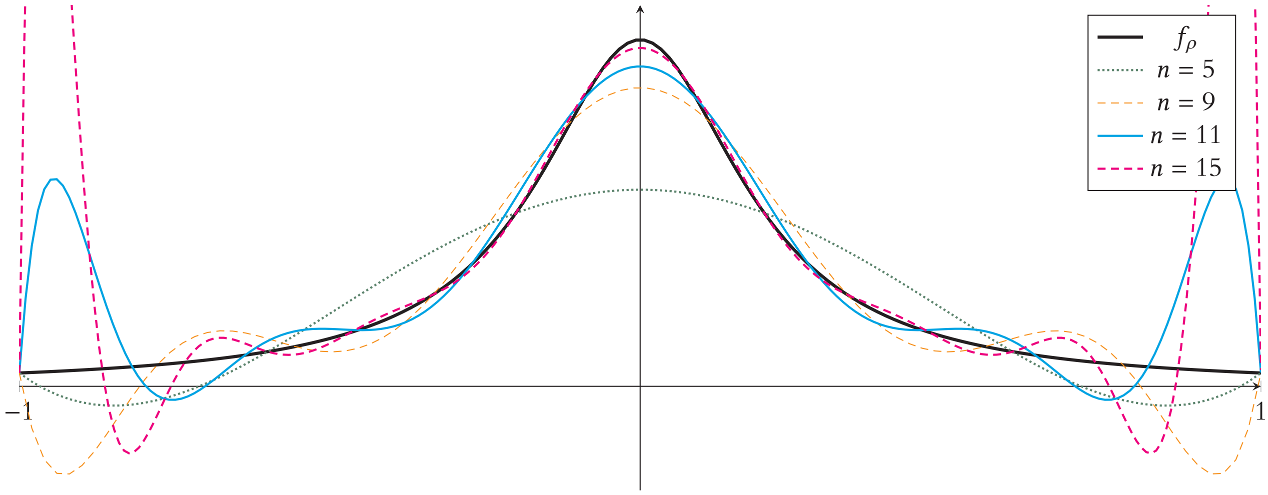


FIGURE 7 – Ici, on a choisi $\rho = 0.2$. On constate que si les $P_{f_\rho,n}$ sont de plus en proches de f_ρ autour de 0, l'écart maximal entre f_ρ et $P_{f_\rho,n}$ devient rapidement très grand au voisinage de ± 1 (ce qui n'est pas sans lien avec le fait que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$).

Notons que si l'on regarde l'inégalité de la question 6.d,

$$\forall t \in [-1, 1],\ \left|f_\rho(t) - P_{f_\rho,n}(t)\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \times |w_n(t)| \times \sup_{[-1,1]} \left|f_\rho^{(n+1)}\right|,$$

le terme de droite semble tendre vers 0 assez rapidement du fait de la présence de la factorielle au dénominateur.
Toutefois, si les dérivées successives de f tendent très rapidement vers $+\infty$ (ce qui est le cas ici de $f_\rho^{(n)}(1)$), alors le majorant ne tend pas nécessairement vers 0.

HEC 2016

Sujet : Décomposition spectrale et application à l'étude de vecteurs gaussiens. **Difficile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★☆

Thèmes du programme abordés : algèbre linéaire élémentaire, diagonalisation, projecteurs orthogonaux, `Scilab` , variables à densité, vecteurs aléatoires.

Commentaires : les résultats prouvés sont plutôt intéressants, mais l'ensemble est extrêmement difficile, avec relativement peu de questions plus faciles. La partie I reste abordable, mais demande déjà un niveau solide en algèbre linéaire. La partie III est plutôt abordable pour un bon candidat, à l'exception de la question 14 qui est très très difficile. Probablement l'un des sujets les plus durs jamais posés à HEC.

Dans tout le problème :

- On note n et k deux entiers vérifiant $2 \leqslant k \leqslant n$ et E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle\, , \rangle_E$ qui en fait un espace euclidien.
- On note 0_E et $0_{\mathscr{L}(E)}$ respectivement, le vecteur nul et l'endomorphisme nul de E et $\mathscr{B} = (e1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. L'endomorphisme identité de E est noté id_E.
- Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on note $F^\perp$ l'orthogonal de F et p_F le *projecteur orthogonal d'image* F, c'est-à-dire l'unique endomorphisme de E vérifiant : $\forall x \in F$, $p_F(x) = x$ et $\forall x \in F^\perp$, $p_F(x) = 0_E$.
- On note $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes ($m \geqslant 1$) à coefficients réels. La transposée d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ est notée ${}^tA$.
- Pour tout $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k) \in \mathbf{R}^k$, on note $\mathrm{Diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k)$ la matrice diagonale de $\mathscr{M}_k(\mathbf{R})$ dont les coefficients diagonaux sont, dans cet ordre, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$.
- On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

On rappelle que la *somme* de k sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_k$ de E est le sous-espace vectoriel de E noté $\displaystyle\sum_{i=1}^k F_i$, défini par : $\displaystyle\sum_{i=1}^k F_i = \left\{\sum_{i=1}^k x_i ; (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_k\right\}$.

On rappelle aussi que les sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_k$ sont en *somme directe* si chaque vecteur de $\displaystyle\sum_{i=1}^k F_i$ n'admet qu'une seule décomposition de la forme précédente. Dans ce cas, et seulement dans ce cas, la somme des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_k$ est notée $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^k F_i$.

L'objet de ce problème est la mise en évidence de quelques propriétés algébriques dont les conséquences probabilistes fondent les tests statistiques qui permettent de mesurer l'influence effective d'une ou plusieurs variables explicatives sur une variable endogène.
La partie II est indépendante de la partie I.

Partie I. Partitions de l'identité.

Soit k endomorphismes $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de E. On dit que $u_1, u_2, \ldots, u_k$ constituent une *partition de l'identité de E* si : $u_1 + u_2 + \cdots + u_k = \mathrm{id}_E$.

1. *Exemple 1.* Dans cette question, $n = 3$ et $E = \mathbf{R}^3$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
   a. Préciser le spectre de la matrice A et montrer que A n'est pas diagonalisable.
   b. Montrer que le polynôme $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $Q(X) = X^3 + X^2$ est un polynôme annulateur de A.
   c. Existe-t-il un polynôme de degré 2 annulateur de A ?
   d. Trouver deux polynômes Q_1 et Q_2 de $\mathbf{R}[X]$ pour lesquels les deux endomorphismes $Q_1(f)$ et $Q_2(f)$ sont des projecteurs et constituent une partition de l'identité de $\mathbf{R}^3$.
2. *Exemple 2.* On considère dans cette question un endomorphisme f de E diagonalisable et possédant k valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.
   Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note :

- $L_i(X)$ le polynôme de $\mathbf{R}[X]$ défini par $L_i(X) = \displaystyle\prod_{\substack{j\in[\![1,k]\!]\\ j\neq i}} \left(\frac{X-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_k}\right)$;
- $E_{\lambda_i}(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ;
- v_i l'endomorphisme de E défini par $v_i = L_i(f)$.

a. Justifier l'égalité $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$. En déduire que $\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(X-\lambda_j)$ est un polynôme annulateur de f.

b. Établir pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, l'inclusion : $\mathrm{Im}(v_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$.

c. Pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, calculer la somme : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} L_i(\lambda_j)$. En déduire que les endomorphismes $v_1, v_2, \ldots, v_k$ constituent une partition de l'identité de E.

d. Établir pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, l'égalité : $\mathrm{Im}(v_i) = E_{\lambda_i}(f)$. Identifier l'endomorphisme v_1.

3. Soit k endomorphismes $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de E qui constituent une partition de l'identité de E.
Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, on note r_i le rang de u_i.

a. Établir les relations : $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(u_i)$ et $n \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{k} r_i$.

b. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(u_1), \mathrm{Im}(u_2), \ldots, \mathrm{Im}(u_k)$ sont en somme directe si et seulement si on a : $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} r_i$.

c. Dans cette question, on cherche à montrer l'équivalence des propriétés (1),(2) et (3) suivantes :

(1) $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} r_i$

(2) Les endomorphismes $u_1, u_2, \ldots, u_k$ sont des projecteurs.

(3) Pour tout $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$, avec $i \neq j$, on a : $u_i \circ u_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

i. En utilisant la trace des matrices de projecteurs, justifier l'implication (2) $\Rightarrow$ (1).

ii. À l'aide de la question 3.b et en écrivant, pour $x \in E$, les vecteurs $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ comme des sommes de k vecteurs, établir l'implication (1) $\Rightarrow$ (3).

iii. Conclure en établissant une troisième implication.

Partie II. Représentation matricielle d'un projecteur orthogonal.

4. **a.** Soit p un endomorphisme de E et P la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si on a : $P^2 = P$ et ${}^tP = P$.

b. Soit f un endomorphisme de E et M la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
Établir l'existence d'un réel α et d'un projecteur orthogonal p tels que $f = \alpha p$, si et seulement si on a : $\mathrm{tr}(M)M^2 = \mathrm{tr}(M^2)M$ et ${}^tM = M$, où $\mathrm{tr}(M)$ et $\mathrm{tr}(M^2)$ sont les traces respectives de M et M^2.

5. **a.** Écrire en `Scilab` une fonction "`function t = tr(A)`" qui calcule la trace d'une matrice carrée A.

b. La fonction "`issym`" suivante permet de tester si une matrice carrée A de taille n donnée est symétrique.

```
1 function b = issym(n,A)
2   b = %T ; //affectation de la valeur booleenne true a la variable b.
3   for i=1 :n-1
4     for j = i+1 :n
5       b = b & A(i,j)==A(j,i)
6     end ;
7   end ;
8 endfunction
```

Préciser la signification de la ligne 5) du code et donner un exemple d'utilisation de la fonction "`issym`" en indiquant les valeurs d'entrée ainsi que la valeur de sortie obtenue.

c. La fonction "`orthoproj`" suivante, dont une ligne de code est incomplète, permet de tester si, pour une matrice carrée M de taille n donnée, il existe un réel α et un projecteur orthogonal p pour lesquels M est la matrice de l'endomorphisme αp dans une base orthonormale. Cette fonction utilise les deux fonctions précédentes (question 5.a et 5.b) et s'appuie sur la condition nécessaire et suffisante de la question 4.b.

```
1  function b = orthoproj(n,M)
2    A = tr(M)*M^2 ;
3    B = tr(M^2)*M ;
4    b = issym(n,M) ;
5    if b then
6      for i = 1 :n
7        for j=i :n
8          b=.....
9        end ;
10     end ;
11   end,
12 endfunction
```

Compléter la ligne 8) du code et donner les valeurs de sortie obtenues par application de cette fonction aux deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les définition et notations suivantes concernent les questions 6 à 9.
Pour tout vecteur $x \in E$, on note X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.
Soit $\mathscr{F} = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ une famille de k vecteurs de E et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{F}$. On note S la matrice de $\mathscr{M}_{n,k}(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $S_1, S_2, \ldots, S_k$.
On rappelle que p_F est le projecteur orthogonal d'image F.

6. a. Montrer que les deux matrices S et ${}^tSS$ ont le même rang.
   b. Soit $y \in E$. Montrer que $y \in F$ si et seulement si il existe une matrice $Z \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ telle que $Y = SZ$.
   c. Soit $y \in E$. Montrer que $y \in F^{\perp}$ si et seulement si la matrice colonne ${}^tSY$ est nulle.
   d. Soit $x \in E$ et $y = p_F(x)$. Établir l'existence d'une matrice $Z \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ telle que $Y = SZ$ et ${}^tSX = {}^tSSZ$.
   e. En déduire l'expression de la matrice de p_F dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de S lorsque la famille $\mathscr{F}$ est libre.
7. Soit M une matrice symétrique de $\mathscr{M}_k(\mathbf{R})$. On appelle *inverse de Penrose-Moore de M* toute matrice N de $\mathscr{M}_k(\mathbf{R})$ qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

$$MNM = M\,; \qquad NMN = N\,; \qquad {}^t(MN) = MN\,; \qquad {}^t(NM) = NM\,;$$

   a. Établir l'existence d'une matrice $Q \in \mathscr{M}_k(\mathbf{R})$ et de réels $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ qui vérifient la relation suivante :

$$M = Q\mathrm{Diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k){}^tQ.$$

   b. On note h l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que : $\forall t \in \mathbf{R},\ h(t) = \begin{cases} 1/t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. On note $M^{(-)}$ la matrice définie par : $M^{(-)} = Q\mathrm{Diag}(h(\rho_1), h(\rho_2), \ldots, h(\rho_k)){}^tQ$.
   Montrer que $M^{(-)}$ est une inverse de Penrose-Moore de M.
   c. Soit N une inverse de Penrose-Moore de M.
      i. Justifier les égalités : $N = M^tNN$ et $M^2N = M$.
      ii. Soit U une matrice de $\mathscr{M}_k(\mathbf{R})$. On suppose que M^2U est nulle. Montrer que MU est nulle.
      iii. On pose : $U = N - M^{(-)}$. Justifier que $M^{(-)}$ est l'unique inverse de Penrose-Moore de M.
8. On note $({}^tSS)^{(-)}$ l'unique inverse de Penrose-Moore de la matrice ${}^tSS$ et on pose : $P = S({}^tSS)^{(-)}{}^tS$.
   a. Montrer que les matrices P et S ont le même rang.
   b. Justifier que P est la matrice de p_F dans la base $\mathscr{B}$ et que son expression généralise la formule trouvée dans la question 6.e lorsque la famille $\mathscr{F}$ est libre.
9. *Exemple.* On suppose que : $k = 2$, $s_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $s_2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, $s_1 \neq 0_E$ et ${}^tSS$ non inversible.
   a. Établir l'existence d'un réel θ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\beta_i = \theta\alpha_i$.
   b. Déterminer une matrice carrée Q pour laquelle la matrice ${}^tQ^tSSQ$ est diagonale.
   c. En déduire l'inverse de Penrose-Moore de la matrice ${}^tSS$.
   d. Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ un vecteur de E. Calculer $p_F(x)$.

Partie III. Application probabiliste.

Dans cette cette partie, $E = \mathbf{R}^n$ et on suppose que toutes les variables aléatoires et tous les vecteurs aléatoires considérés sont définis sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout entier $d \geqslant 1$, on dit qu'une variable aléatoire C suit la *loi du khi-deux de paramètre d*, notée $\chi^2(d)$ si la variable aléatoire $\frac{C}{2}$ suit la loi $\gamma\left(\frac{d}{2}\right)$.

On appelle *variable gaussienne* toute variable aléatoire X qui suit une loi normale ou qui est certaine, et on note sa loi $\mathcal{G}(\mu, \sigma^2)$, où μ est l'espérance de X et σ l'écart-type de X.

Autrement dit, pour tout couple $(\mu, \sigma) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$, une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{G}(\mu, \sigma^2)$, soit lorsque $\sigma > 0$ et X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, soit lorsque $\sigma = 0$ et $P([X = \mu]) = 1$.

10. Soit $(\mu, \sigma) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ et soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Montrer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$ suit la loi $\chi^2(n)$.

Si $G_1, G_2, \dots, G_n$ sont des variables aléatoires réelles telles que pour tout $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i G_i$ est une *variable gaussienne centrée*, alors on dit que le vecteur aléatoire $(G_1, G_2, \dots, G_n)$ est un *vecteur gaussien* et on note G la matrice colonne de composantes $G_1, G_2, \dots, G_n$.

11. Soit $(G_1, G_2, \dots, G_n)$ un vecteur gaussien, M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ un vecteur aléatoire tel que la matrice colonne H de composantes $H_1, H_2, \dots, H_n$ vérifie : $H = MG$.
    a. Montrer que $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ est un vecteur gaussien.
    b. Justifier que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, la variable aléatoire $G_i G_j$ admet une espérance, notée $E(G_i G_j)$.

On note alors $\Lambda(G)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par : $\Lambda(G) = \left(E(G_i G_j)\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ et *on admet* dans la suite que la loi d'un vecteur gaussien $(G_1, G_2, \dots, G_n)$ est caractérisée par la matrice $\Lambda(G)$.

Autrement dit, si $(G_1, G_2, \dots, G_n)$ et $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ sont deux vecteurs gaussiens vérifiant $\Lambda(G) = \Lambda(R)$, alors ils ont la même loi, c'est-à-dire : $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $P\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [G_i \leqslant x_i]\right) = P\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [R_i \leqslant x_i]\right)$.

12. On suppose que $G_1, G_2, \dots, G_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
    a. Montrer que $(G_1, G_2, \dots, G_n)$ est un vecteur gaussien. Déterminer $\Lambda(G)$.
    b. Soit Q une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $(H_1, H_2, \dots, H_n)$ un vecteur aléatoire tel que la matrice colonne H de composantes $H_1, H_2, \dots, H_n$ vérifie : $H = QG$.
    Montrer que les variables aléatoires $H_1, H_2, \dots, H_n$ sont mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
13. Soit $(G_1, G_2, \dots, G_n)$ un vecteur gaussien dont les composantes $G_1, G_2, \dots, G_n$ sont mutuellement indépendantes et de variance égale à 1.
    Soit $P_1, P_2, \dots, P_k$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rangs respectifs $r_1, r_2, \dots, r_k$.
    On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} P_i = I_n$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} r_i = n$.
    a. Justifier que $P_1, P_2, \dots, P_k$ sont des matrices de projecteurs orthogonaux de $\mathbf{R}^n$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ dont les images sont deux à deux orthogonales.
    b. En déduire l'existence d'une matrice orthogonale Q de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ pour laquelle chacune des matrices $QP_1{}^tQ, QP_2{}^tQ, \dots, QP_k{}^tQ$ est diagonale.
    c. On suppose que $r_1 \neq 0$. Montrer que la variable aléatoire ${}^tGP_1G$ suit la loi $\chi^2(r_1)$.
    d. Montrer que les variables aléatoires ${}^tGP_1G, {}^tGP_2G, \dots, {}^tGP_kG$ sont mutuellement indépendantes.
14. Soit q et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et $(X_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant m}}$ une famille de $q \times m$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
    On pose : $\overline{X} = \displaystyle\frac{1}{q \times m} \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m} X_{i,j}$ et pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, $Z_j = \displaystyle\frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} X_{i,j}$.
    a. Déterminer les lois respectives des variables aléatoires $\overline{X}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m} (X_{i,j} - \overline{X})^2$ et établir l'indépendance de ces deux variables aléatoires.
    b. Déterminer les lois respectives des variables aléatoires $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m} (X_{i,j} - Z_j)^2$ et $q \displaystyle\sum_{j=1}^{m} (Z_j - \overline{X})^2$ et établir l'indépendance de ces deux variables aléatoires.

HEC 2016 : Corrigé

Partie I. Partitions de l'identité

1. *Exemple 1.*

1.a. A est triangulaire supérieure, et donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $\boxed{\operatorname{Spec}(A) = \{0,-1\}.}$

On a alors $\dim E_0(A) = 3-\operatorname{rg}(A) = 1$ et $\dim E_{-1}(A) = 3-\operatorname{rg}(A+I_3) = 3-\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} = 1$.

Donc $\displaystyle\sum_{\lambda\in\operatorname{Spec}(A)} \dim E_\lambda(A) < 3$, donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

1.b. On a $A^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, de sorte que $A^3+A^2 = 0$.

Donc $\boxed{Q(X) = X^3+X^2 \text{ est annulateur de } A.}$

1.c. Un polynôme annulateur de A possède nécessairement les valeurs propres de A. Un tel polynôme de degré 2, possédant 0 et -1 comme racines est donc nécessairement de la forme $P(X) = \alpha X(X+1)$, avec $\alpha \neq 0$.

Mais on a $A(A+I_3) = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \neq 0$.

Donc $\boxed{A \text{ ne possède pas de polynôme annulateur de degré 2.}}$

1.d. Notons que telle qu'est formulée la question, il existe une réponse triviale[1] : $Q_1 = 1$ et $Q_2 = 0$.
On a alors $Q_1(f) = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}$, qui est le projecteur sur $\mathbf{R}^3$ parallèlement à $\{0\}$ et $Q_2(f) = \{0\}$ qui est le projecteur sur $\{0\}$ parallèlement à $\mathbf{R}^3$.
Une autre solution, non triviale est obtenue en remarquant que A^2 est une matrice de projecteur, car diagonale et ne possédant que des 0 et des 1 sur la diagonale.
Alors $(I_3-A^2)^2 = I_3-2A^2+A^4 = I_3-2A^2+A^2 = I_3-A^2$, de sorte que $\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3} - f$ est également un projecteur de $\mathbf{R}^3$.
Et on a $f^2 + (\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3} - f) = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}$, donc $f^2, \mathrm{id}_{\mathbf{R}^3} - f^2$ constitue une partition de l'identité.
Ainsi $\boxed{Q_1(X) = X^2 \text{ et } Q_2(X) = 1-X^2 \text{ conviennent.}}$

[1] Qui n'est probablement pas celle qui était attendue...

Remarque
Ces deux projecteurs sont des cas «dégénérés», qui correspondent à la somme directe

$$E = E \oplus \{0\}.$$

Notons que ce sont les seuls projecteurs qui ne possèdent pas à la fois 0 et 1 comme valeur propre (id_E possède 1 pour seule valeur propre et 0_E possède 0 comme seule valeur propre).

2. *Exemple 2.*

2.a. f est diagonalisable, donc $\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Spec}(f)} E_\lambda(f) = E \Leftrightarrow \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(f) = E$.

Notons $P(X) = \displaystyle\prod_{j=1}^k (X-\lambda_j)$, de sorte que $P(f) = (f-\lambda_1\mathrm{id}_E)\circ\cdots\circ(f-\lambda_k\mathrm{id}_E)$.

Soit $i \in [\![1,k]\!]$, et soit $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ un élément du sous-espace propre de f associé à la valeur λ_i. Alors, en notant $Q_i = \displaystyle\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k (X-\lambda_j)$, on a $P = Q_i(X-\lambda_i)$ et donc $P(f) = Q_i(f)\circ(f-\lambda_i\mathrm{id}_E)$.

Et donc

$$P(f)(x_i) = Q_i(f)\circ(f-\lambda_i\mathrm{id}_E)(x_i) = Q_i(f)\left(f(x_i)-\lambda_i x_i\right) = Q_i(f)(0_E) = 0_E.$$

$x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ si et seulement si $f(x_i) = \lambda_i x_i$.

Si $x \in E$, alors de manière unique, $x = x_1+\cdots+x_k$, avec $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$. Et donc

$$P(f)(x) = P(f)\left(\sum_{i=1}^k x_i\right) = \sum_{i=1}^k P(f)(x_i) = 0_E.$$

Ainsi, $P(f)$ est nul, donc $\boxed{P = \prod_{j=1}^k (X-\lambda_j) \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$

2.b. Soit $y_i \in \mathrm{Im}(v_i)$. Alors il existe $x_i \in E$ tel que $y_i = v_i(x_i)$. Et alors

$$(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)(y_i) = (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)\,(L_i(f)(x_i)) = R_i(f)(x_i)$$

où R_i est le polynôme défini par

$$R_i(X) = (X - \lambda_i)L_i = \underbrace{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}}_{\in \mathbf{R}} \prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} P.$$

Mais P étant annulateur de f, il vient donc

$$(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)(y_i) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} P(f)(y_i) = 0_E.$$

Ainsi, $y_i \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}_E) = E_{\lambda_i}(f)$.
On en déduit que $\boxed{\mathrm{Im}(v_i) \subset E_{\lambda_i}(f).}$

2.c. Soient $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$. Alors, si $i = j$, on a $L_i(\lambda_j) = L_i(\lambda_i) = \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{k} \underbrace{\frac{\lambda_i - \lambda_\ell}{\lambda_i - \lambda_\ell}}_{=1} = 1.$

Et si $i \neq j$, il vient $L_i(\lambda_j) = \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{k} \underbrace{\frac{\lambda_j - \lambda_\ell}{\lambda_i - \lambda_\ell}}_{=0 \text{ pour } \ell=j} = 0.$

Ainsi, $L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$
Par conséquent, on a, pour $j \in [\![1, k]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{k} L_i(\lambda_j) = L_j(\lambda_j) = \boxed{1.}$$

Notons $Q = 1 - \sum_{i=1}^{k} L_i$. Alors, d'après la question précédente, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont des racines de Q. Puisque par hypothèse les λ_i sont deux à deux distincts, Q possède donc k racines distinctes.
Or les L_i sont de degré $k - 1$ et donc Q est de degré inférieur ou égal à $k - 1$: il possède donc strictement plus de racines que son degré : c'est le polynôme nul. Et donc $\sum_{i=1}^{k} L_i = 1$.
On en déduit en particulier que

$$\sum_{i=1}^{k} v_i = \sum_{i=1}^{k} L_i(f) = \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} L_i}_{=1} \right)(f) = \mathrm{id}_E.$$

Donc $\boxed{v_1, \dots, v_k \text{ constituent une partition de l'identité de } E.}$

2.d. Si $x \in E$, alors $x = \mathrm{id}_E(x) = \sum_{i=1}^{k} v_i(x)$.
Ainsi, $E \subset \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(v_i)$, de sorte que $E = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(v_i)$.

On en déduit que $\dim E \leqslant \sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{Im}(v_i)$.

Mais alors

$$\dim E \leqslant \sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{Im}(v_i)$$

Classique
Les polynômes L_i sont appelés polynômes de Lagrange, et apparaissent souvent dans les sujets de concours. En particulier, ce résultat sur la valeur de $L_i(\lambda_j)$ constitue une question très classique.

Tous les termes de la somme sont nuls, sauf celui correspondant à $i = j$.

Racines
Nous connaissons bien le résultat qui affirme qu'un polynôme de degré n qui possède $n+1$ racines distinctes est le polynôme nul.
Nous venons d'utiliser ce résultat d'une manière qui pourrait se généraliser par : si P et Q sont deux polynômes de $\mathbf{R}_n[X]$ qui prennent la même valeur en $n + 1$ points, alors P et Q sont égaux.

Dimensions
La concaténation de bases des $\mathrm{Im}(v_i)$ est une famille génératrice de la somme, donc de E.
Et donc possède un cardinal au moins égal à $\dim E$.

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i}(f)$$
$$\leqslant \dim E$$

D'après 2.b.

Car $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$.

Ces inégalités sont donc des égalités, et puisque pour tout i, $\dim \mathrm{Im}(v_i) \leqslant \dim E_{\lambda_i}(f)$, on en déduit que pour tout i, $\dim \mathrm{Im}(v_i) = \dim E_{\lambda_i}(f)$.
Et puisqu'on a déjà l'inclusion $\mathrm{Im}(v_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$, on en déduit que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $\mathrm{Im}(v_i) = E_{\lambda_i}(f)$.
Soient $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$, et soit $x_j \in E_{\lambda_j(f)}$. Alors

$$v_i(x_j) = L_i(f)(x_j) = L_i(\lambda_j)x_j = \begin{cases} 0_E & \text{si } i \neq j \\ x_j & \text{si } i = j \end{cases}$$

Rappel
Si $x \in E_\lambda(f)$ et si $P \in \mathbf{R}[X]$, alors
$$P(f)(x) = P(\lambda)x.$$

En particulier, si un vecteur $x \in E$ se décompose dans la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i(f)}$ sous la forme $x = x_1 + \cdots + x_k$, alors on a

$$v_i(x) = \sum_{j=1}^{k} v_i(x_j) = v_i(x_i) = x_i.$$

Projecteur
De manière unique, on a
$$x = \underbrace{x_i}_{\in E_{\lambda_i}(f)} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k} x_j}_{\in F_i}$$
et alors $v_i(x) = x_i$: on ne conserve que la composante suivant $E_{\lambda_i}(f)$. On reconnaît bien là la définition du projecteur sur $E_{\lambda_i}(f)$ parallèlement à F_i.

On en déduit que v_i est la projection sur $E_{\lambda_i}(f)$, parallèlement à $F_i = \bigoplus_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{k} E_{\lambda_j}(f)$.

En particulier, v_1 est la projection sur $E_{\lambda_1}(f)$ parallèlement à $\bigoplus_{i=2}^{k} E_{\lambda_i}(f)$.

3.a. Si $x \in E$, alors $x = \mathrm{id}_E(x) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{u_i(x)}_{\in \mathrm{Im}(u_i)} \in \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(u_i)$.

Donc $E \subset \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(u_i)$. L'inclusion réciproque étant évidemment vérifiée, on a donc $\boxed{E = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(u_i).}$
Mais alors la concaténation de bases de $\mathrm{Im}(u_i)$ forme une famille génératrice de E, donc de cardinal au moins égal à $\dim E$, de sorte que

$$\dim E \leqslant \sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{Im}(u_i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} r_i.$$

3.b. Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(u_1), \dots, \mathrm{Im}(u_k)$ sont en somme directe si et seulement si la concaténation d'une base de $\mathrm{Im}(u_1)$, d'une base de $\mathrm{Im}(u_2), \dots$ d'une base de $\mathrm{Im}(u_k)$ forme une base de E.
Or nous savons déjà qu'une telle famille est génératrice de E, donc c'est une base si et seulement si elle est de cardinal $\dim E$.
Son cardinal étant évidemment $\sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{Im}(u_i) = \sum_{i=1}^{k} r_i$, c'est une base si et seulement si $\sum_{i=1}^{k} r_i = \dim E$.

Donc $\mathrm{Im}(u_1), \dots, \mathrm{Im}(u_k)$ sont en somme directe si et seulement si $\sum_{i=1}^{k} r_i = \dim E$.

Somme directe
Nous savons déjà que la somme des $\mathrm{Im}(u_i)$ est égale à E, donc si la somme est directe, nécessairement
$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(u_i).$$

3.c.i. Si A est la matrice d'un projecteur p dans une base $\mathscr{B}$, alors A est semblable à $\mathrm{Diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{\mathrm{rg}(p) \text{ fois}}, \underbrace{0,\dots,0}_{\dim \mathrm{Ker}(p) \text{ fois}})$.

Et alors[2], on a $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(\mathrm{Diag}(1,\dots,1,0,\dots,0)) = \mathrm{rg}(p)$.

[2] Deux matrices semblables ont même trace.

Supposons donc que (2) est vérifiée, c'est-à-dire que $\mathrm{id}_E = u_1+\cdots+u_k$, où les u_i sont des projecteurs. Alors, si $\mathscr{B}$ est une base de E, en notant $A_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_i)$, il vient $I_n = A_1 + \cdots + A_k$. Et donc, en passant à la trace,

$$n = \mathrm{tr}(I_n) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{tr}(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{rg}(u_i) = \sum_{i=1}^{k} r_i.$$

Et donc $\boxed{(2) \Longrightarrow (1).}$

3.c.ii. Si (1) est vérifiée, alors d'après la question 3.b, les $\mathrm{Im}(u_i)$ sont en somme directe.
Soit $x \in E$. Alors, pour $i \in [\![1,n]\!]$, on a

$$u_i(x) = \mathrm{id}_E(u_i(x)) = \sum_{j=1}^{k} u_j(u_i(x)) = \underbrace{u_1(u_i(x))}_{\in \mathrm{Im}(u_1)} + \cdots + \underbrace{u_k(u_i(x))}_{\in \mathrm{Im}(u_k)}.$$

D'autre part, on a

$$u_i(x) = \underbrace{0}_{\in \mathrm{Im}(u_1)} + \cdots + \underbrace{0}_{\in \mathrm{Im}(u_{i-1})} + \underbrace{u_i(x)}_{\in \mathrm{Im}(u_i)} + \underbrace{0}_{\in \mathrm{Im}(u_{i+1})} + \cdots + \underbrace{0}_{\in \mathrm{Im}(u_k)}.$$

Et alors, par unicité de la décomposition de $u_i(x)$ dans la somme directe $E = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Im}(u_j)$, on en déduit que

$$\boxed{\forall j \neq i,\ u_j(u_i(x)) = 0.}$$

Et même
En identifiant les composantes suivant $\mathrm{Im}(u_i)$, il vient

$$u_i(u_i(x)) = u_i(x)$$

et donc u_i est un projecteur, donc (1) $\Rightarrow$ (2).

3.c.iii. Il reste à prouver que (3) $\Longrightarrow$ (2). Soit $i \in [\![1,k]\!]$. Alors on a

$$u_i = u_i \circ \mathrm{id}_E = u_i \circ (u_1 + \cdots + u_k) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} u_i \circ u_j + u_i^2 = u_i^2.$$

Ainsi, u_i est un projecteur, et donc $\boxed{(3) \Longrightarrow (2).}$

Partie II. Représentation matricielle d'un projecteur orthogonal.

4.a. Soit p un projecteur orthogonal, et soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$. Alors $p^2 = p$ et donc $P^2 = P$. De plus, p est un endomorphisme symétrique, et donc sa matrice dans une base orthonormée est symétrique. Donc[3] P est symétrique : $P = {}^tP$.
Inversement, si $P^2 = P$, alors $p^2 = p$, donc p est un projecteur, et puisque sa matrice dans la base orthonormée $\mathscr{B}$ est symétrique, c'est un endomorphisme symétrique.
Or un projecteur est orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique.
Donc p est un projecteur orthogonal si et seulement si $P^2 = P$ et ${}^tP = P$.

[3] $\mathscr{B}$ est orthonormée par hypothèse.

4.b. Si $f = \alpha$ avec α un réel non nul[4] et p un projecteur orthogonal, alors $f^2 = \alpha^2 p^2 = \alpha^2 p$, de sorte que $M^2 = \alpha M$.
On en déduit que $\mathrm{tr}(M^2) = \alpha \mathrm{tr}(M)$ et donc

$$\mathrm{tr}(M)M^2 = \frac{\mathrm{tr}(M^2)}{\alpha}\alpha M = \mathrm{tr}(M^2)M.$$

[4] Le cas $\alpha = 0$ est trivial car alors $M = 0$.

Et puisque la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$ est symétrique[5], il en est de même M : ${}^tM = M$.

[5] Toujours car p est un endomorphisme symétrique.

Inversement, supposons que $\mathrm{tr}(M)M^2 = \mathrm{tr}(M^2)M$ et ${}^tM = M$. Si $M = 0$, le résultat est évident, en prenant $\alpha = 0$ et pour p n'importe quel projecteur orthogonal.
Supposons donc que $M \neq 0$. Alors M est diagonalisable car symétrique, et donc semblable à une matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Et M n'étant pas nulle, l'une au moins de ses valeurs propres est non nulle. On peut par exemple supposer[6] que $\lambda_1 \neq 0$.
Alors M^2 est semblable à $\mathrm{Diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$, de sorte que $\mathrm{tr}(M^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \geqslant \lambda_1^2 > 0$.

[6] Quitte à changer l'ordre des valeurs propres.

En particulier, $\mathrm{tr}(M^2) \neq 0$, donc $\mathrm{tr}(M)M^2 = \mathrm{tr}(M^2)M \neq 0$. Et donc $\mathrm{tr}(M) \neq 0$.

Soit alors $\alpha = \dfrac{\mathrm{tr}(M^2)}{\mathrm{tr}(M)}$, et soit $P = \dfrac{M}{\alpha}$. P est évidemment une matrice symétrique, et on a

$$P^2 = \frac{M^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha M}{\alpha^2} = \frac{M}{\alpha} = P.$$

D'après la question 4.a, P est alors la matrice d'un projecteur orthogonal p, et donc $f = \alpha p$.

5.a. Il s'agit de calculer la somme des coefficients diagonaux de A. Notons que la taille de A n'est pas nécessairement connue, et qu'il faut donc la calculer à l'aide de `size` ou de `length`.

length/size

`length(A)` renvoie le nombre de coefficients de A, soit n^2, alors que `size(A)` renvoie le vecteur `[n,n]`.

```
function t = tr(A)
        n = sqrt(length(A)) ;
        t = 0 ;
        for i=1 :n
                t = t + A(i,i) ;
        end
endfunction
```

5.b. Les deux boucles `for` servent à parcourir la matrice `A`, afin de vérifier si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $A(i, j) = A(j, i)$.
Notons que pour vérifier ceci, il suffit de le faire pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $i+1 \leqslant j \leqslant n$. Autrement dit, pour chaque coefficient sous la diagonale[7], il s'agit de vérifier si $A(i, j) = A(j, i)$.
Ceci explique que les boucles n'aillent pas toutes deux de 1 à n.
Le code de la ligne 5 vérifie si $A(i, j) = A(j, i)$.
Si c'est le cas, le booléen `b` conserve la valeur qu'il avait déjà, et sinon, on lui affecte la valeur `false`.
Ainsi, à la fin du programme, `b` vaut `true` si et seulement si pour tous $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $A(i, j) = A(j, i)$, c'est-à-dire si et seulement si A est symétrique.
Par exemple `issym(2,[1,2 ;2,1])` renvoie `%T` et `issym(2,[1,0 ;1,1])` renvoie `%F`.

Booléens

La notion de booléen n'est pas explicitement au programme : il s'agit d'un type de variable qui ne peut prendre que deux valeurs : `%T` (ou `true`, pour «vrai») et `%F` (ou `false`, pour «faux»).
Le booléen `a & b` prend alors la valeur `true` si et seulement les deux booléens `a` et `b` valent simultanément `true`.
Il est également possible de voir une telle variable comme prenant les deux valeurs 0 et 1, et de remplacer & par le produit : $a \times b$ prend la valeur 1 si et seulement si a et b valent 1.

5.c. Il s'agit de vérifier que A et B sont égales et symétriques.
Si M n'est pas symétrique, alors le programme s'arrête et renvoie `%F`.
En revanche, si M est symétrique, alors il faut vérifier que A et B ont les mêmes coefficients.
Mais étant toutes deux symétriques, il suffit de le vérifier pour les coefficients en dessous de la diagonale[8]
Ls deux boucles `for` servent donc à parcourir les coefficients sous la diagonale, et la ligne manquante est

```
b = b & A(i,j) == B(i,j) ;
```

[8] Diagonale **incluse** !

Ainsi, à la fin du programme, `b` vaut `%T` si et seulement M est symétrique et $\mathrm{tr}(M^2)M = \mathrm{tr}(M)M^2$.

Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors M est symétrique, et $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, de sorte que $\mathrm{tr}(M)M^2 \neq \mathrm{tr}(M^2)M$.
Donc `orthoproj(2,M)` retourne `%F`.

En revanche, si $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors M est symétrique et $M^2 = 2M$, et alors $\mathrm{tr}(M)^2 = 4M = \mathrm{tr}(M^2)M$.
Donc `orthoproj(2,M)` renvoie `%T`.

6.a. Notons que $S \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbf{R})$ et ${}^tSS \in \mathcal{M}_k(\mathbf{R})$.
Si $SX = 0$, alors ${}^tSSX = 0$.
Inversement, si ${}^tSSX = 0$, alors ${}^tX{}^tSSX = 0 \Leftrightarrow {}^t(SX)(SX) = 0$.
Mais ${}^t(SX)(SX) = \|SX\|^2$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Et donc ${}^t(SX)(SX) = 0 \Leftrightarrow \|SX\| = 0 \Leftrightarrow SX = 0$.
Ainsi, on a $\{X \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R}) : SX = 0\} = \{X \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R}) : {}^tSSX = 0\}$.
Si on note $f : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ et $g : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ les applications linéaires dont les matrices respectives dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^k$ et $\mathbf{R}^n$ sont S et ${}^tSS$, alors nous avons $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$.
Mais d'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}(f) = k - \dim \mathrm{Ker}\, f = k - \dim \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}({}^tSS).$$

On a donc bien $\boxed{\mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}({}^tSS).}$

> **Remarque**
> Cette relation est valable quelle que soit la matrice S, carrée ou non.

6.b. $y \in F$ si et seulement si il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i s_i$.

Soit si et seulement si $Y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i S_i = S \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\boxed{y \in F \text{ si et seulement si il existe } Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R}) \text{ tel que } Y = SZ.}$

6.c. La matrice ${}^tS$ est dans $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbf{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, de sorte que ${}^tSY \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$.
De plus, la i-ème ligne de ${}^tSY$ est ${}^tS_iY$. Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a alors ${}^tS_iY = \langle s_i, y\rangle_E$.
La famille $\mathcal{F}$ étant génératrice de F, on a $y \in F^\perp$ si et seulement si y est orthogonal à tous les éléments de $\mathcal{F}$.
Ainsi, $y \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, k]\!]^2,\ \langle s_i, y\rangle_E = 0 \Leftrightarrow {}^tSY = 0$.

> **Orthogonal**
> Nous avons l'habitude d'utiliser $y \in F^\perp$ si et seulement y est orthogonal à tous les éléments d'une base de F. Mais une famille génératrice de F contient une base de F, donc ce résultat reste valable en remplaçant «base» par «famille génératrice».

6.d. On a $y = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$
En utilisant les résultats des questions 6.b et 6.c, ceci implique donc l'existence d'un vecteur $Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ tel que $Y = SZ$ et ${}^tS(Y - X) = 0 \Leftrightarrow {}^tSY = {}^tSX = {}^tSSZ$.

6.e. Si la famille $\mathcal{F}$ est libre, alors S est de rang[9] k. Et donc, d'après la question 6.a, ${}^tSS$ est également de rang k.
Mais ${}^tSS \in \mathcal{M}_k(\mathbf{R})$, donc étant de rang k, elle est inversible.

[9] Ses colonnes forment une famille libre, donc de rang k.

Soit donc $x \in E$ et soit $y = p_F(x)$. Alors il existe $Z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ tel que $Y = SZ$ et ${}^tSX = {}^tSSZ \Leftrightarrow Z = ({}^tSS)^{-1}\,{}^tSX$.
Ainsi, un tel Z est unique et

$$Y = SZ = S({}^tSS)^{-1}\,{}^tSX = \left(S({}^tSS)^{-1}\,{}^tS\right) X.$$

On en déduit que la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ est $\boxed{S({}^tSS)^{-1}\,{}^tS.}$

7.a. Puisque M est symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée : il existe D diagonale et Q orthogonale telles que $M = QD{}^tQ$. Donc si $\rho_1, \dots, \rho_k$ sont les coefficients diagonaux de D, on a le résultat voulu.

7.b. On a $MM^{(-)} = Q\mathrm{Diag}(\rho_1 h(\rho_1), \dots, \rho_k h(\rho_k))^tQ$ et donc $MM^{(-)}M = Q\mathrm{Diag}(\rho_1^2 h(\rho_1), \dots, \rho_k^2 h(\rho_k))^tQ$.

Mais pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $t^2h(t) = \begin{cases} t^2\dfrac{1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} = t$.

Et donc
$$MM^{(-)}M = Q\mathrm{Diag}(\rho_1, \dots, \rho_k)^tQ = M.$$

De même, on a $M^{(-)}MM^{(-)} = Q\mathrm{Diag}(\rho_1 h(\rho_1)^2, \dots, \rho_k h(\rho_k)^2)^tQ$, et pour tout $t \in \mathbf{R}$, on vérifie que $th(t)^2 = h(t)$, de sorte que

$$M^{(-)}MM^{(-)} = Q\mathrm{Diag}(h(\rho_1), \dots, h(\rho_k))^tQ = M^{(-)}.$$

Enfin, on a $MM^{(-)} = Q\mathrm{Diag}(\rho_1 h(\rho_1), \dots, \rho_k h(\rho_k))^tQ$, de sorte que

$${}^t(MM^{(-)}) = {}^t({}^tQ)^t\left(\mathrm{Diag}(\rho_1 h(\rho_1), \dots, \rho_k h(\rho_k))\right){}^tQ = Q\mathrm{Diag}(\rho_1 h(\rho_1), \dots, \rho_k h(\rho_k))^tQ = MM^{(-)}.$$

> **Remarque**
> L'expression de $MM^{(-)}$ indique qu'elle est diagonalisable en base orthonormée. Mais une matrice est diagonalisable en base orthonormée **ssi** elle est symétrique.

De même, on prouve que ${}^t(M^{(-)}M) = M^{(-)}M$.
Et donc $\boxed{M^{(-)} \text{ est une inverse de Penrose-Moore de } M.}$

7.c.i. Par définition d'une inverse de Penrose-Moore, on a

$$N = NMN = {}^t(NM)N = {}^tM{}^tNN = M{}^tNN.$$

M est symétrique donc ${}^tM = M$.

On a alors

$$M^2N = MMN = M^t(MN) = M^tNM = {}^t(MNM) = {}^tM = \boxed{M.}$$

7.c.ii. Si $M^2U = 0$, alors ${}^tUM^2U = 0 \Leftrightarrow {}^tU{}^tMMU = 0 \Leftrightarrow {}^t(MU)(MU) = 0$.
Mais d'après la question 6.a, (MU) et ${}^t(MU)(MU)$ ont le même rang, donc l'une est nulle si et seulement si l'autre est nulle.
On en déduit donc que $\boxed{MU = 0.}$

7.c.iii. Soit N une inverse de Penrose-Moore de M, et soit $U = N - M^{(-)}$.
Alors $M^2U = M^2N - M^2M^{(-)} = M - M = 0$ d'après la question 7.c.i.
D'après 7.c.ii, on en déduit donc que $MU = 0 \Leftrightarrow MN = MM^{(-)}$.
De plus, si N est une inverse de Penrose-Moore de M, alors il en est de même de ${}^tN$. En effet :

$$\begin{aligned}
MNM = M &\iff {}^tM{}^tN{}^tM = {}^tM \Leftrightarrow M{}^tNM = M\\
NMN = N &\iff {}^tN{}^tM{}^tN = {}^tN \Leftrightarrow {}^tNM{}^tN = {}^tN\\
{}^t(MN) = MN &\iff {}^tNM = MN \Leftrightarrow {}^tNM = {}^t({}^tNM)\\
{}^t(NM) = NM &\iff M{}^tN = NM \Leftrightarrow M{}^tN = {}^t(M{}^tN).
\end{aligned}$$

Donc en particulier, on a également $M{}^tN = MM^{(-)}$. Or, on a $M{}^tN = {}^t(NM) = NM$, de sorte que $NM = MM^{(-)}$.
Partons donc de $MN = MM^{(-)}$ et multiplions à gauche par N, de sorte que

$$N = NMN = NMM^{(-)} = MM^{(-)}M^{(-)}.$$

Par construction, $M^{(-)}$ est une matrice symétrique[10] et donc

$${}^t(MM^{(-)}) = MM^{(-)} \Leftrightarrow {}^tM^{(-)}M = MM^{(-)} \Leftrightarrow M^{(-)}M = MM^{(-)}.$$

Et donc, $N = MM^{(-)}M^{(-)} = M^{(-)}MM^{(-)} = M^{(-)}$.
Ainsi, si N est une inverse de Penrose-Moore de M, nécessairement $N = M^{(-)}$:
$\boxed{M^{(-)} \text{ est l'unique inverse de Penrose-Moore de } M.}$

[10] Elle est diagonalisable en base orthonormée.

8.a. D'après 6.a, P et ${}^tPP$ ont même rang. Or,

$${}^tPP = S({}^tSS)^{(-)}{}^tSS({}^tSS)^{(-)}{}^tS = S\left(({}^tSS)^{(-)}({}^tSS)({}^tSS)^{(-)}\right){}^tS = S({}^tSS)^{(-)}{}^tS.$$

8.b. P est symétrique car $({}^tSS)^{(-)}$ est symétrique et donc

$${}^tP = {}^tS^t\left(({}^tSS)^{(-)}\right){}^tS = S({}^tSS)^{(-)}{}^tS = P.$$

Donc P est une matrice symétrique, et

$$P^2 = {}^tPP = S({}^tSS)^{(-)}{}^tSS({}^tSS)^{(-)}{}^tS = S\left(({}^tSS)^{(-)}({}^tSS)({}^tSS)^{(-)}\right){}^tS = S({}^tSS)^{(-)}{}^tS = P.$$

D'après 4.a, P est donc la matrice d'un projecteur orthogonal.

9. *Exemple.*

9.a. S est une matrice de $\mathcal{M}_{n,2}(\mathbf{R})$, et donc ${}^tSS$ est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Elle n'est pas inversible, donc de rang 1 ou 0.
Or elle possède le même rang que S d'après 6.a, et s_1 étant non nul, $\operatorname{rg}(S) \neq 0$.
Par conséquent $\operatorname{rg}(S) = 1$, et la première colonne étant non nulle, elle engendre la famille des vecteurs colonne de S.
Par conséquent, il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $s_2 = \theta s_1$, et donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\beta_i = \theta\alpha_i$.

9.b. On a $S = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \vdots & \vdots\\ \alpha_n & \beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \theta\alpha_1\\ \vdots & \vdots\\ \alpha_n & \theta\alpha_n\end{pmatrix}$, de sorte que

$${}^tSS = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \dots & \alpha_n\\ \theta\alpha_1 & \dots & \theta\alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & \theta\lambda\\ \theta\lambda & \theta^2\lambda\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1 & \theta\\ \theta & \theta^2\end{pmatrix}$$

où $\lambda = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = \|s_1\|^2$.
Nous savons que ${}^tSS$ est de rang 1, donc 0 en est valeur propre, et ${}^tSS$ étant diagonalisable (car symétrique), sa trace est égale à la somme de ses valeurs propres, de sorte que la seconde

valeur propre de ${}^tSS$ est $\lambda(\theta^2+1)$.

Une résolution de système prouve que $E_0({}^tSS) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-\theta\\1\end{pmatrix}\right)$ et

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in E_{\lambda(\theta^2+1)}({}^tSS) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & \theta\\ \theta & \theta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (\theta^2+1)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\theta y = \theta^2 x\\ \theta x = y\end{cases} \Leftrightarrow y = \theta x.$$

Ainsi, $E_{\lambda(\theta^2+1)}({}^tSS) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\\theta\end{pmatrix}\right)$.

Ainsi, une base orthonormée de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de ${}^tSS$ est $\left(\frac{1}{\sqrt{\theta^2+1}}\begin{pmatrix}-\theta\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{\theta^2+1}}\begin{pmatrix}1\\\theta\end{pmatrix}\right)$.

Ainsi, $Q = \frac{1}{\sqrt{\theta^2+1}}\begin{pmatrix}-\theta & 1\\ 1 & \theta\end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ à une base orthonormée de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de ${}^tSS$, de sorte que ${}^tQ{}^tSSQ$ est une matrice diagonale[11].

[11] De coefficients diagonaux égaux à 0 et $\lambda(\theta^2+1)$, dans cet ordre.

9.c. On en déduit que

$$\begin{aligned}({}^tSS)^{(-)} &= Q\mathrm{Diag}\left(0, \frac{1}{\lambda(\theta^2+1)}\right){}^tQ = \begin{pmatrix}-\theta & 1\\ 1 & \theta\end{pmatrix}\mathrm{Diag}\left(0, \frac{1}{\lambda(\theta^2+1)^2}\right)\begin{pmatrix}-\theta & 1\\ 1 & \theta\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{\lambda(\theta^2+1)^2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & \theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\theta & 1\\ 1 & \theta\end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^2(\theta^2+1)^2}{}^tSS = \frac{1}{(\mathrm{tr}({}^tSS)^2)}{}^tSS.\end{aligned}$$

9.d. D'après 8.b, en notant $y = p_F(x)$, on a

$$\begin{aligned}Y =& S({}^tSS)^{(-)}{}^tS\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^2(\theta^2+1)^2}S\begin{pmatrix}1 & \theta\\ \theta & \theta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\\ \theta\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\end{pmatrix}\\ =& \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\lambda^2(\theta^2+1)^2}S\begin{pmatrix}1 & \theta\\ \theta & \theta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \theta\end{pmatrix}\\ =& \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\lambda(\theta^2+1)}S\begin{pmatrix}1\\\theta\end{pmatrix}\\ =& \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}{\lambda(\theta^2+1)}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \theta\alpha_1\\ \vdots & \vdots\\ \alpha_n & \theta\alpha_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix}1\\\theta\end{pmatrix}$ est vecteur propre de $\begin{pmatrix}1 & \theta\\ \theta & \theta^2\end{pmatrix}$ pour la valeur propre $\lambda(\theta^2+1)$.

En se rappelant que par définition, on a posé $\lambda = \|s_1\|^2$, on a donc

$$Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix} = \frac{\langle x, s_1\rangle_E}{\|s_1\|^2}S_1 \Leftrightarrow p_F(x) = \frac{\langle x, s_1\rangle_E}{\|s_1\|^2}s_1.$$

Remarque

Tous ces calculs fastidieux mènent à un résultat qui était largement prévisible : s_1 et s_2 étant colinéaires, $\frac{s_1}{\|s_1\|}$ est une base orthonormée de F. Et alors, nous savons grâce à un résultat du cours, que pour tout $x \in E$,

$$p_F(x) = \left\langle x, \frac{s_1}{\|s_1\|}\right\rangle_E \frac{s_1}{\|s_1\|}.$$

Partie III. Application probabiliste.

10. D'après la définition de la loi du khi-deux, il s'agit de prouver que $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(\frac{Xi-\mu}{\sigma^2}\right)$ suit une loi $\gamma\left(\frac{n}{2}\right)$.

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrons que $\frac{X^2}{2} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Notons que $\frac{X^2}{2}$ ne prend que des valeurs positives, donc pour $x<0$, on a $P\left(\frac{X^2}{2} \leqslant x\right) = 0$.

Soit donc $x \geqslant 0$. On a

$$P\left(\frac{X^2}{2} \leqslant x\right) = P(X^2 \leqslant 2x) = P(-\sqrt{2x} \leqslant X \leqslant \sqrt{2x}) = \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x}) = 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1.$$

Ainsi, la fonction de répartition de $\frac{X^2}{2}$ est

$$F : x \mapsto \begin{cases}2\Phi(\sqrt{2x}) - 1 & \text{si } x \geqslant 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Puisque la fonction racine carrée et Φ sont continues sur $\mathbf{R}_+$, F est continue sur $\mathbf{R}_+$ par composition de fonctions continues.
Elle est évidemment continue sur $\mathbf{R}_-^*$ car constante, et on a

$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = 0 = F(0)$$

donc F est également continue à gauche en 0, donc[12] continue sur $\mathbf{R}$.
Les fonctions Φ et racine carrée sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, donc par composition, F est également $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$. Et donc $\dfrac{X^2}{2}$ est une variable à densité.
Une densité en est alors obtenue en dérivant F là où elle est dérivable[13] et en choisissant des valeurs arbitraires ailleurs. Par exemple, on peut prendre

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2x}}\Phi'(\sqrt{2x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}x^{-1/2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si on note $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1/2)}x^{-1/2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ la densité usuelle de la loi $\gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$, on constate que $f = \dfrac{\Gamma(1/2)}{2\sqrt{\pi}}g$.
Mais $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$, de sorte que $\dfrac{\Gamma(1/2)}{2\sqrt{\pi}} = 1$. Et donc $f = g$: $\dfrac{X^2}{2}$ suit une loi $\gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

À présent, si les X_i sont indépendantes et suivent des lois normales $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors les $\dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$ suivent des loi normales centrées réduites, et donc les $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ suivent une loi $\gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
Puisqu'elles sont mutuellement indépendantes[14], par stabilité des lois γ, on en déduit que

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}\right) = \gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Et donc $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \hookrightarrow \chi^2(n).}$

[12] F étant continue sur $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$, elle est continue à droite en 0.

[13] C'est-à-dire sauf en 0.

[14] Car les X_i le sont.

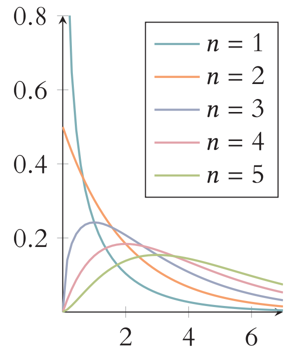


FIGURE 1– La densité de la loi $\chi^2(n)$ pour différentes valeurs de n.

11. Notons qu'une variable gaussienne **centrée** est soit une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, soit une variable presque sûrement égale à 0.

11.a. Notons $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, de sorte que

$$\forall i \in [\![1, n]\!]^2,\ H_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j}G_j.$$

Pour tout $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, on a donc

$$\sum_{i=1}^n a_iH_i = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_im_{i,j}G_j = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_im_{i,j}\right)}_{\in\mathbf{R}}G_j.$$

Par définition d'un vecteur gaussien, $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_iH_i$ est donc une variable gaussienne centrée.

Donc $\boxed{(H_1, \ldots, H_n) \text{ est un vecteur gaussien.}}$

11.b. Notons que G_i et G_j possèdent tous deux un moment d'ordre deux, et qu'on a

$$0 \leqslant |G_iG_j| \leqslant \frac{1}{2}\left(G_i^2 + G_j^2\right).$$

Or, $\dfrac{1}{2}(G_i^2 + G_j^2)$ possède une espérance, et donc il en est de même de G_iG_j.

Classique

L'inégalité

$$|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

s'obtient en développant

$$(|x| - |y|)^2 \geqslant 0.$$

12.a. Soit $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbf{R}^n$. Si $a=0$, alors $\sum_{i=1}^n a_iG_i$ est la variable constante égale à 0, qui suit la loi $\mathcal{G}(0,0)$, et est donc gaussienne centrée.
Si $a\neq 0$, alors, par indépendance des G_i et par stabilité des lois normales, on a alors

$$\sum_{i=1}^n a_iG_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n a_iE(G_i), \sum_{i=1}^n a_i^2V(G_i)\right)=\mathcal{N}\left(0,\sum_{i=1}^n a_i^2\right).$$

Et donc $\sum_{i=1}^n a_iG_i$ est une variable gaussienne centrée.
On en déduit que $(G_1,\dots,G_n)$ est un vecteur gaussien.
De plus, par indépendance des G_i, on a alors, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, avec $i\neq j$, $E(G_iG_j)=E(G_i)E(G_j)=0$.
Et si $i=j$, il vient $E(G_iG_i)=E(G_i^2)=V(G_i)+E(G_i)^2=1$.
Ainsi, la matrice $\Lambda(G)$ possède tous ses coefficients nuls, à l'exception des coefficients diagonaux qui sont égaux à 1 : c'est la matrice $I_n\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Danger
G_i et G_i ne sont bien évidemment pas indépendantes, donc il n'est pas question d'affirmer que

$$E(G_i^2)=E(G_i)E(G_i).$$

12.b. Nous allons prouver que le vecteur gaussien $(H_1,\dots,H_n)$ possède la même loi que $(G_1,\dots,G_n)$, et pour cela utilisons le résultat admis dans l'énoncé : si $\Lambda(G)=\Lambda(H)$, alors H et G ont même loi.
Notons $Q=(q_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, de sorte que $H_i=\sum_{j=1}^n q_{i,j}G_j$.
Soient $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Alors

$$H_iH_j=\left(\sum_{k=1}^n q_{i,k}G_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^n q_{j,\ell}G_\ell\right)=\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n q_{i,k}q_{j,\ell}G_kG_\ell.$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc $E(H_iH_j)=\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n q_{i,k}q_{j,\ell}\underbrace{E(G_kG_\ell)}_{=0\text{ si }k\neq\ell}=\sum_{k=1}^n q_{i,k}q_{j,k}$.
Mais Q est une matrice orthogonale par hypothèse, donc $Q^tQ=I_n$.
Par la formule du produit matriciel, le coefficient de Q^tQ situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est

$$(Q^tQ)_{i,j}=\sum_{k=1}^n q_{i,k}({}^tQ)_{j,k}=\sum_{k=1}^n q_{i,k}q_{j,k}.$$

Et donc en déduit que $\sum_{k=1}^n q_{i,k}q_{j,k}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Ainsi, $E(H_iH_j)=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } u\neq j\end{cases}$ de sorte que $\Lambda(H)=I_n=\Lambda(G)$.
Par conséquent, les vecteurs aléatoires $(G_1,\dots,G_n)$ et $(H_1,\dots,H_n)$ ont la même loi.
En particulier, les lois marginales sont les mêmes, et donc les G_i suivent toutes la loi normale centrée réduite.
Enfin, les G_i étant mutuellement indépendantes, il en est de même des H_i. En effet, on a, pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n[H_i\leqslant x_i]\right)=P\left(\sum_{i=1}^n[G_i\leqslant x_i]\right)=\prod_{i=1}^n P(G_i\leqslant x_i)=\prod_{i=1}^n P(H_i\leqslant x_i).$$

Remarque
Notons que

$$\sum_{k=1}^n q_{i,k}q_{j,k}$$

est le produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de Q avec sa $j^{\text{ème}}$ ligne (pour le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$).
Et donc les lignes d'une matrice orthogonale forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$.
En écrivant ${}^tQQ=I_n$, on prouverait de même que les colonnes d'une matrice orthogonale forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ pour le produit scalaire canonique.

13.a. Notons p_i l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est P_i.
Alors, d'après la question 3.c, les p_i sont des projecteurs, avec $p_i\circ j=0$ pour $i\neq j$.
De plus, les matrices P_i étant symétriques et la base canonique étant orthonormée[15], les p_i sont des $\boxed{\text{projecteurs orthogonaux.}}$
Soient à présent $i\neq j$ et soit $x_i\in\operatorname{Im}(p_i)$ et $x_j\in\operatorname{Im}(p_j)$. Alors

$$\langle x_i,x_j\rangle=\langle p_i(x_i),p_j(x_j)\rangle=\langle x_i,p_i(p_j(x_j))\rangle=\langle x_i,(p_i\circ p_j)(x_j)\rangle=\langle x_i,0\rangle=0.$$

Donc $\boxed{\operatorname{Im}(p_i)\text{ et }\operatorname{Im}(p_j)\text{ sont orthogonales.}}$

[15] Pour le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$.

13.b. On a $\mathbf{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(p_i)$ et les $\mathrm{Im}(p_i)$ sont deux à deux orthogonaux, donc la concaténation $\mathscr{B}$ de bases orthonormées des $\mathrm{Im}(p_i)$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathscr{B}$ est formée de vecteurs propres de p_i.
En effet, si $x \in \mathrm{Im}(p_i)$, alors $x \in E_1(p_i)$ et si $x \in \mathrm{Im}(p_j)$ avec $j \neq i$, alors $p_i(x) = p_i(p_j(x)) = 0$ car $p_i \circ p_j = 0$. Et donc $\mathrm{Im}(p_j) \subset \mathrm{Ker}(p_i) = E_0(p_i)$.
Ainsi, la matrice de p_i dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale.
Soit Q la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Q est une matrice orthogonale car matrice de passage entre deux bases orthonormées de $\mathbf{R}^n$, et par la formule de changement de base, il vient

$$QP_i{}^tQ = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_{can}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(p_i)P_{\mathscr{B}_{can},\mathscr{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_i)$$

qui est donc diagonale.
Ainsi, $\boxed{\text{les matrices } QP_1{}^tQ, QP_2{}^tQ, \dots, QP_k{}^tQ \text{ sont simultanément diagonales.}}$

> **Diag. simultanée**
> Il était évident que les P_i étaient toutes diagonalisables : ce sont des matrices de projecteurs. Donc l'existence de Q_i telle que $Q_iP_i{}^tQ_i$ soit diagonale est immédiate.
> Le fait qu'on puisse choisir la même matrice de passage Q pour tous les P_i n'a en revanche rien d'immédiat.

13.c. Notons que r_1 est un entier, strictement positif par hypothèse.
Nous venons de prouver que $D_1 = QP_1{}^tQ$ est diagonale, et ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de P_1, à savoir 1, qui apparaît r_1 fois car $\dim E_1(P_1) = r_1$ et 0, qui apparaît $n - r_1$ fois car $\dim E_0(P_1) = n - \mathrm{rg}(P_1) = n - r_1$.
Notons donc $D_1 = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où les λ_i valent donc 0 ou 1.
Notons que par construction de Q, les r_1 premiers vecteurs colonne de Q forment une base de $\mathrm{Im}(p_1)$, et donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{r_1} = 1$ et $\lambda_{r_1+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.
Alors

$${}^tGP_1G = {}^tGP_1G = {}^tG{}^tQD_1^2QG = {}^tHD_1H, \text{ où } H = QG.$$

D'après la question 12, les H_i sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi normale centrée réduite. Et alors

$${}^tGP_1G = {}^tH\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 & \dots & H_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 H_1 \\ \vdots \\ \lambda_n H_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i H_i^2 = \sum_{i=1}^{r_1} H_i^2.$$

$\lambda_i = 1$ si $i \leqslant r_1$ et 0 sinon.

Ainsi, la variable aléatoire ${}^tGP_1G$ est la somme des carrés de r_1 variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. D'après la question 10, on a donc $\boxed{{}^tGP_1G \hookrightarrow \chi^2(r_1).}$

13.d. Toujours par construction de Q, les colonnes r_1+1 à r_1+r_2 de Q sont formées par des éléments de $\mathrm{Im}(p_2)$. On montrerait alors de même que précédemment que ${}^tGP_2G = \sum_{i=r_1+1}^{r_2} H_i^2$.
Et de manière générale, que pour $i > 1$,

$${}^GP_iG = \sum_{j=r_1+\cdots+r_{i-1}+1}^{r_1+\cdots+r_i} H_i^2.$$

Les H_i étant mutuellement indépendantes, par le lemme des coalitions, $\boxed{\text{les } {}^tGP_iG \text{ sont mutuellement indépendantes.}}$

> **Coalitions**
> La version au programme du lemme des coalitions permet de prouver l'indépendance de deux variables aléatoires, mais il est assez intuitif que le résultat reste valable pour l'indépendance de k variables X_i fonctions des H_i, du moment que chacune est formée à partir d'un ensemble des H_i dont ne dépend aucune autre X_j.

14.a. Par indépendance des $X_{i,j}$ et par stabilité des lois normales, $\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m} X_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, qm)$ et donc $\boxed{\overline{X} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{qm}\right).}$

Dans la suite, nous renumérotons les variables $X_{1,1}, X_{2,1}, \dots, X_{q,1}, X_{1,2}, \dots, X_{q,m}$ en $X_1, \dots, X_n$ où $n = q \times m$.
Ainsi, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}(X_{i,j} - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.
Il est alors classique que

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2\overline{X}X_i + \overline{X}^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^n X_i + n\overline{X}^2$$
$$= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n\overline{X}^2 + n\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X}^2.$$

Soit alors Q une matrice orthogonale dont la première ligne est $\frac{1}{\sqrt{n}}(1,\dots,1)$, et soit $H = QX$.

Alors $H_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i = \sqrt{n}\overline{X}$, de sorte que $H_1^2 = n\overline{X}^2$.

De plus, on a

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 = {}^tXX = {}^t({}^tQH)({}^tQH) = {}^tH(\underbrace{Q\,{}^tQ}_{=I_n})H = {}^tHH = \sum_{i=1}^n H_1^2.$$

Et donc

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^n H_i^2 - H_1^2 = \sum_{i=2}^n H_i^2.$$

Or, d'après la question 12.b, les H_i sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi normale centrée réduite, donc on en déduit :

- que $\sum_{i=1}^q\sum_{j=1}^m (X_{i,j} - \overline{X})^2 = \sum_{i=2}^n H_i^2$ suit la loi $\chi^2(n-1) = \boxed{\chi^2(qm-1)}$;
- par le lemme des coalitions, que $\boxed{\overline{X} = \sqrt{n}H_1 \text{ est indépendante de } \sum_{i=1}^q\sum_{j=1}^m (X_{i,j} - \overline{X})^2 = \sum_{i=2}^n H_i^2.}$

Détails

Une telle matrice orthogonale existe car $\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Elle peut donc être complétée en une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, notée $\mathcal{B}$. Alors la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est orthogonale (car matrice de passage entre deux bases orthonormées) et sa première colonne est $\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

Sa transposée est alors une matrice orthogonale qui vérifie la condition souhaitée.

14.b. Comme précédemment, notons $X_1,\dots,X_n = X_{1,1}, X_{2,1},\dots,X_{q,1},X_{1,2},\dots,X_{q,m}$, de sorte que $X_{i,j} = X_{i+(j-1)q}$.

Ainsi, $Z_j = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^q X_{i,j} = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^q X_{i+(j-1)q}$.

Nous pouvons donc voir les variables $X_1,\dots,X_n$ comme regroupées en m «paquets» de q variables.

On a également, comme précédemment, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

Soit P la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ qui, à un vecteur $(x_1,\dots,x_n)$ associe le vecteur des $\left(x_k - \frac{1}{q}\sum_{i=1}^q x_{i+\lfloor\frac{k-1}{q}\rfloor q}\right)$.

Autrement dit, P est la matrice qui au vecteur des $X_{i,j}$ associe le vecteur des $X_{i,j} - Z_j$.

P est donc la matrice «diagonale par blocs»,

Inversement

Si l'on connaît $k \in [\![1, n]\!]$, il est possible de retrouver le couple (i, j) qui lui correspond : $i-1$ (qui varie entre 0 et $q-1$) est le reste de la division euclidienne de k par q et $(j-1)$ en est le quotient. Soit encore

$$j = \left\lfloor\frac{k}{q}\right\rfloor + 1$$

et $i = k - (j-1)q + 1$.

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_q & 0 & \dots & 0\\ \hline 0 & A_q & & \vdots\\ \hline \vdots & & \ddots & \vdots\\ \hline 0 & \dots & 0 & A_q\end{array}\right) \text{ où } A_q = \begin{pmatrix}\frac{q-1}{q} & -\frac{1}{q} & \dots & -\frac{1}{q}\\ -\frac{1}{q} & \frac{q-1}{q} & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ -\frac{1}{q} & \dots & -\frac{1}{q} & \frac{q-1}{q}\end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on a $A_q = I_q - \frac{1}{q}J_q$, où J_q est la matrice de $\mathcal{M}_q(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

J_q est de rang 1, de sorte que 0 en est valeur propre et $\dim E_0(J_q) = q-1$.

Puisque J_q est diagonalisable car symétrique, la somme de ses valeurs propres[16] est égale à sa trace, qui vaut q.

Donc q est également valeur propre de J_q, avec un sous-espace propre de dimension 1. Ainsi, J_q est semblable à $D_q = \mathrm{Diag}(\underbrace{0,\dots,0}_{q-1\text{fois}},q)$: il existe $P_q \in GL_q(\mathbf{R})$ telle que $J_q = P_qD_qP_q^{-1}$.

[16] Comptées autant de fois que la dimension des sous-espaces propres associés.

Et donc

$$A_q = I_q - \frac{1}{q}J_q = P_q I_q P_q^{-1} - \frac{1}{q}P_q D_q P_q^{-1} = P_q\left(I_q - \frac{1}{q}D_q\right)P_q^{-1} = P_q \mathrm{Diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{q-1 \text{fois}},0)P_q.$$

En particulier, $\mathrm{rg}(A_q) = q-1$. Et donc $\mathrm{rg}(P) = m(q-1)$.

$\mathrm{rg}(P)$

Il est assez facile de se convaincre qu'il n'y a «pas de relations» entre les colonnes des différents paquets de taille q.
Plus précisément, si on note F_j le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ engendré par colonnes $1+(j-1)q$ à jq de P, alors les F_j sont deux à deux orthogonaux, et donc en somme directe. Et chacun d'entre eux est de dimension $\mathrm{rg}(A_q) = q-1$.
Et alors l'espace vectoriel engendré par les colonnes de Q est

$$\bigoplus_{j=1}^{m} F_j$$

qui est donc de dimension

$$\sum_{j=1}^{m} \dim F_j = m(q-1).$$

Soit à présent Q la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ qui à un vecteur $(x_1,\dots,x_n)$ associe le vecteur des $\left(\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} x_{i+\lfloor\frac{k-1}{q}\rfloor q} - \frac{1}{qm}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$.
Autrement dit, Q est la matrice qui au vecteur des $X_{i,j}$ associe le vecteur des $(Z_j - \overline{X})$.
Alors la matrice Q est

$$Q = \frac{1}{q}\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc}
1-\frac{1}{m} & \dots & 1-\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \dots & -\frac{1}{m} & \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{m} & \dots & -\frac{1}{m} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\
1-\frac{1}{m} & \dots & 1-\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \dots & -\frac{1}{m} & \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{m} & \dots & -\frac{1}{m} \\
\hline
-\frac{1}{m} & \dots & -\frac{1}{m} & 1-\frac{1}{m} & \dots & 1-\frac{1}{m} & & & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
-\frac{1}{m} & \dots & -\frac{1}{m} & 1-\frac{1}{m} & \dots & 1-\frac{1}{m} & & & & \vdots & & \vdots \\
\hline
\vdots & & \vdots & & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
\hline
-\frac{1}{m} & \dots & -\frac{1}{m} & \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{m} & \dots & -\frac{1}{m} & 1-\frac{1}{m} & \dots & 1-\frac{1}{m} \\
\vdots & \ddots & \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-\frac{1}{m} & \dots & -\frac{1}{m} & \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{m} & \dots & -\frac{1}{m} & 1-\frac{1}{m} & \dots & 1-\frac{1}{m}
\end{array}\right).$$

Les colonnes 1 à q sont identiques, de même que les colonnes $q+1$ à $2q$, etc.
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ engendré par les colonnes de Q. F est donc engendré par les colonnes $1, q+1, \dots, (m-1)q+1$.
Notons donc $C_1, \dots, C_m$ ces colonnes, de sorte que

$$C_1 = \left(\begin{array}{c}
1-\frac{1}{m} \\ \vdots \\ 1-\frac{1}{m} \\ \hline -\frac{1}{m} \\ \vdots \\ -\frac{1}{m} \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline -\frac{1}{m} \\ \vdots \\ -\frac{1}{m}
\end{array}\right), \dots, C_m = \left(\begin{array}{c}
-\frac{1}{m} \\ \vdots \\ -\frac{1}{m} \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \hline -\frac{1}{m} \\ \vdots \\ -\frac{1}{m} \\ \hline 1-\frac{1}{m} \\ \vdots \\ 1-\frac{1}{m}
\end{array}\right).$$

Il est alors facile de voir que $C_1 + \dots + C_m = 0$, et donc $C_m = -\sum_{i=1}^{m-1} C_i$. Ainsi, $F = \mathrm{Vect}(C_1,\dots,C_{m-1})$.
Prouvons à présent que $(C_1,\dots,C_{m-1})$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_{m-1}$ des réels tels que

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_{m-1}C_{m-1} = 0.$$

Par identification des coefficients, les q premières équations sont

$$\lambda_1\left(1-\frac{1}{m}\right)-(\lambda_2+\cdots+\lambda_{m-1})\frac{1}{m}=0.$$

De même, pour tout $i\in[\![1,m-1]\!]$, on obtient[17]

$$\lambda_i\left(1-\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{m}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m-1}\lambda_j=0.$$

[17] En regardant les équations obtenues par identification des lignes $(i-1)m+1$ à im.

Enfin, les m dernière équations sont

$$-\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i=0.$$

Ainsi, pour tout $i\in[\![1,m-1]\!]$, on a $\lambda_i=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m-1}\lambda_j$ de sorte que

$$\lambda_i\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{m}\lambda_i=0\Leftrightarrow\lambda_i=0.$$

Donc $(C_1,\dots,C_{q-1})$ est libre, et donc forme une base de F.
On en déduit que $\dim F=m-1$ et donc $\mathrm{rg}(Q)=m-1$.

Soit enfin R la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent $-\frac{1}{n}=-\frac{1}{qm}$.
R est évidemment une matrice de rang 1 car toutes ses colonnes sont égales[18].

[18] Et non nulles !

De plus, on a $P+Q+R=I_n$ et P,Q,R sont trois matrices symétriques.
D'après les calculs de rang effectués précédemment, on a alors

$$\mathrm{rg}(P)+\mathrm{rg}(Q)+\mathrm{rg}(R)=m(q-1)+(m-1)+1=mq=n.$$

D'après la question 13.a, ce sont donc des matrices de projecteurs orthogonaux.
Et alors

$${}^tXPX={}^tXP^2X={}^t(PX)(PX)=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}(X_{i,j}-Z_j)^2$$

Ce résultat est plutôt intuitif, puisque nous avons choisi P pour qu'il soit vrai. Prouvons le tout de même de manière détaillée[19].
Pour $k\in[\![1,n]\!]$, on a

$$(PX)_k=X_k-\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}X_{i+\lfloor\frac{k-1}{q}\rfloor q}.$$

[19] Nous donnons les détails uniquement pour le lecteur qui serait perdu : penser à définir P comme nous l'avons fait le jour du concours était déjà le signe d'une **excellente** copie !

Et donc

$$\begin{aligned}{}^t(PX)(PX)=\sum_{k=1}^{n}((PX)_k)^2&=\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\frac{1}{q}\sum_{\ell=1}^{q}X_{\ell+\lfloor\frac{k-1}{q}\rfloor q}\right)^2\\&=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}\left(X_{i+(j-1)q}-\frac{1}{q}\sum_{\ell=1}^{q}X_{\ell+(j-1)q}\right)^2\\&=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}\left(X_{i,j}-\frac{1}{q}\sum_{\ell=1}^{q}X_{\ell,j}\right)^2\\&=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}(X_{i,j}-Z_j)^2.\end{aligned}$$

Détails

Tout entier $k\in[\![1,n]\!]$ s'écrit de manière unique $k=i+(j-1)q$ avec $1\leqslant i\leqslant q$ et $1\leqslant j\leqslant m$.
On a alors

$$k-1=i-1+(j-1)q$$

de sorte que

$$\left\lfloor\frac{k-1}{q}\right\rfloor=j-1.$$

Ainsi, d'après la question 13.c $\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}(X_{i,j}-Z_j)^2$ suit la loi du khi-deux de paramètre $\mathrm{rg}(P)=(m-1)q$. Donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}(X_{i,j}-Z_j)^2 \hookrightarrow \chi^2((m-1)q).}$$

De même, on a ${}^tXQX = {}^tXQ^2X = {}^t(QX)(QX) = q\sum_{j=1}^{m}(Z_j-\overline{X})^2$.

Là encore, donnons les détails[20] : on a

$$\begin{aligned}
{}^t(QX)(QX) &= \sum_{k=1}^{n}((QX)_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{q}\sum_{\ell=1}^{q}X_{\ell+\lfloor\frac{k-1}{q}\rfloor q} - \frac{1}{qm}\sum_{m=1}^{n}X_m\right)^2\\
&= \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{q}\sum_{\ell=1}^{q}X_{\ell+(j-1)q}-\overline{X}\right)^2\\
&= \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{q}\sum_{\ell=1}^{q}X_{\ell,j}-\overline{X}\right)^2\\
&= \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}\left(Z_j-\overline{X}\right)^2 = q\sum_{j=1}^{m}(Z_j-\overline{X})^2.
\end{aligned}$$

[20] Notamment pour se convaincre que le facteur q a bien sa place ici.

Le terme à l'intérieur de la somme ne dépend pas de i.

D'après 13.c, on a donc $q\sum_{j=1}^{m}(Z_j-\overline{X})^2$ qui suit une loi du khi-deux de paramètre $\mathrm{rg}(Q)=m-1$. Donc

$$\boxed{q\sum_{j=1}^{m}(Z_j-\overline{X})^2 \hookrightarrow \chi^2(m-1).}$$

Enfin, d'après la question 13.d, $\boxed{\text{ces deux variables sont indépendantes.}}$

Mieux

En utilisant ${}^tXRX = \overline{X}^2$, on prouve même que ces deux variables aléatoires sont indépendantes de $\overline{X}^2$.

HEC 2015

Abordable en première année : ✗

L'objet du problème est d'aborder quelques questions mathématiques relatives au comportementasymptotique de systèmes dynamiques discrets ou continus susceptbiles de modéliser l'évolution temporelle de divers phénomènes, en particulier économiques (croissance économique, prix d'équilibre, etc).
Les trois parties du problème sont indépendantes.
Dans tout le problème :

- On note p un entier supérieur ou égal à 1.
- Pour tout vecteur $b \in \mathbf{R}^p$, on note B la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{R}^p$.
- La transposée d'une matrice A est notée A^T. La matrice identité de $M_p(\mathbf{R})$ est notée I_p.
- Pour tout application $x : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \to & \mathbf{R} \\ t & \mapsto & x(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t)) \end{array}$, on note :
  - ⋆ $x'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_p'(t))$ en tout point où les fonctions $x_1, \ldots, x_p$ sont dérivables ;
  - ⋆ $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \left(\lim\limits_{t\to+\infty} x_1(t), \ldots, \lim\limits_{t\to+\infty} x_p(t)\right)$ lorsque les fonctions $x_1, \ldots, x_p$ admettent des limites finies lorsque t tend vers $+\infty$.
- Pour toute suite $(x(n))_{n\in\mathbf{N}} = (x_1(n), \ldots, x_p(n))_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de $\mathbf{R}^p$ pour laquelle les suites $(x_1(n))_{n\in\mathbf{N}}, \ldots, (x_p(n))_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes, on définit la limite de la suite $(x(n))_{n\in\mathbf{N}}$ par :
  - ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} x(n) = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_1(n), \ldots, \lim\limits_{n\to+\infty} x_p(n)\right)$.

Partie I. Deux exemples de pilotage linéaire.
Soit A une matrice non nulle de $M_p(\mathbf{R})$ et b un vecteur de $\mathbf{R}^p$. Soit $x_1, \ldots, x_p$ p fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+$. On dit qu'une application $x : t \mapsto x(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t))$ définie sur $\mathbf{R}_+$, à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ est *pilotée par le couple* (A, b), si pour tout réel $t \geqslant 0$, les matrices colonnes $X(t)$ et $X'(t)$ de $x(t)$ et $x'(t)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^p$ vérifient le système : $\forall t \geqslant 0,\ X'(t) = AX(t) + b$.
On appelle *équilibre du système piloté par le couple* (A, b), tout vecteur $x^* \in \mathbf{R}^p$ vérifiant : $AX^* + B = 0$.
On dit qu'un équilibre x^* est *attractif* si pour toute application x pilotée par (A, b), on a $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x^*$.

1. *Le cas $p = 1$.*
   Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ et x une fonction dérivable sur $\mathbf{R}_+$, à valeurs réelles, vérifiant : $\forall t \geqslant 0,\ x'(t) = ax(t) + b$.
   a. Calculer la dérivée de la fonction $y : t \mapsto \left(x(t) + \dfrac{b}{a}\right) e^{-at}$.
   b. En déduire que pour tout $t \geqslant 0$, on a : $x(t) = -\dfrac{b}{a} + \left(x(0) + \dfrac{b}{a}\right) e^{at}$.
   c. On identifie a à la matrice de $M_1(\mathbf{R})$ dont l'unique coefficient est a. Montrer que le système piloté par le couple (a, b) admet un unique équilibre, puis montrer que cet équilibre est attractif si et seulement si $a < 0$.
2. *Exemple 1.* Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = (1, 1)$. Soit $x : t \mapsto x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ une application définie sur $\mathbf{R}_+$, à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, pilotée par le couple (A, b).
   a. Déterminer l'unique équilibre x^* du système piloté par le couple (A, b).
   b. Justifier l'existence d'une matrice inversible Q telle que la matrice $Q^{-1}AQ$ sont diagonale.
   Pourquoi peut-on choisir la matrice Q de telle manière que $Q^{-1} = Q^T$?
   c. Trouver deux réels λ et μ, $(\lambda \leqslant \mu)$ et une matrice inversible Q vérifiant : $Q^{-1} = Q^T$ et $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.
   d. Pour tout $t \geqslant 0$, on pose $W(t) = Q^T X(t)$.
      i. Vérifier pour tout $t \geqslant 0$, l'égalité $W'(t) = DW(t) + Q^T B$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.
      ii. À l'aide des résultats de la question 1, en déduire que l'équilibre x^* est attractif.
3. On suppose $p \geqslant 2$. Soit $\mathscr{B}_p = (e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbf{C}^p$ et u_p l'unique endomorphisme de $\mathbf{C}^p$ tel que $u_p(e_1) = e_p$ et pour tout $k \in [\![2, p]\!]$, $u_p(e_k) = e_{k-1}$.

a. Écrire la matrice A_p de l'endomorphisme u_p dans la base $\mathscr{B}_p$. Quel est son rang ?

b. Soit $\varepsilon \in \mathbf{C}$ une racine p-ième de l'unité et G la matrice colonne de $M_{p,1}(\mathbf{C})$ de composantes $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}$. Montrer que F est un vecteur propre de A_p et préciser la valeur propre complexe associée.

c. Montrer que l'endomorphisme u_p est diagonalisable.

d. Montrer que le polynôme $X^p - 1$ de $\mathbf{C}[X]$ est un polynôme annulateur de u_p. L'endomorphisme u_p admet-il un polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à p ?

e. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. L'endomorphisme $P(u_p)$ de $\mathbf{C}^p$ est-il diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ?

4. *Exemple 2.* Soit α et β deux réels tels que $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha + \beta \neq 1$ et $M = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta \\ \beta & -1 & \alpha \\ \alpha & \beta & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

a. On note A la matrice A_p de la question 3 dans le cas où $p = 3$.

i. Déterminer un polynôme P à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2, tel que $M = P(A)$.

ii. En déduire les valeurs propres complexes de M ainsi que leurs parties réelles et imaginaires respectives.

b. Soit $c = (1, 1, 1) \in \mathbf{R}^3$.

i. Trouver l'unique équilibre x^* du système piloté par le couple (M, c).

ii. Vérifier que l'application $x : t \mapsto x(t) = x^* + e^{(\alpha+\beta-1)t}c$ est piloté par le couple (M, c).

iii. En déduire une condition nécessaire portant sur α et β pour que l'équilibre x^* soit attractif.

On suppose désormais que la condition précédente est réalisée.

c. On pose : $N = M^T + M$.

i. Quelles sont les valeurs propres de la matrice N ?

ii. Déterminer un réel $\theta > 0$ tel que toutes les valeurs propres de N soient inférieures ou égales à -2θ.

d. On rappelle que $c = (1, 1, 1)$. On considère une application x pilotée par le couple (M, c). On note y l'application définie sur $\mathbf{R}_+$, à valeurs dans $\mathbf{R}^3$, telle que $y : t \longmapsto x(t) - x^*$ et φ la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$, à valeurs réelles, telle que $\varphi : t \mapsto e^{2\theta t}\|Y(t)\|^2$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique de $M_{3,1}(\mathbf{R})$.

i. Vérifier que l'application y est pilotée par le couple $(M, 0_{\mathbf{R}^3})$.

ii. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et que : $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $\varphi'(t) = e^{2\theta t} \times T(t)^T(N + 2\theta I_3)Y(t)$.

iii. Montrer que la fonction φ est décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

iv. En déduire que l'équilibre x^* est attractif.

Partie II. Un exemple de pilotage non linéaire.

Un exemple de *pilotage non linéaire* est fourni par un modèle de croissance économique endogène à deux secteurs dans lequel le taux de croissance du stock de capital et le taux de croissante du stock de connaissances sont représenté, depuis une date choisie comme origine, par des fonctions x_1 et x_2 respectivement.

Dans ce modèle où ρ désigne un paramètre réel strictement positif, les deux fonctions x_1 et x_2 sont dérivables sur $\mathbf{R}_+$, à valeurs réelles, et vérifient le système :

$$\forall t \geqslant 0, \begin{cases} x_1'(t) = F_1(x_1(t), x_2(t)) \\ x_2'(t) = F_2(x_1(t), x_2(t)) \end{cases} \qquad (S)$$

dans lequel les deux fonctions F_1 et F_2 définies sur $\mathbf{R}^2$, à valeurs réelles, sont données par :

$$\forall (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2, \begin{cases} F_1(u_1, u_2) = (-u_1 + \rho(u_2 - u_1) + 1)u_1 \\ F_2(u_1, u_2) = (-u_2 + \rho(u_1 - u_2) + 1)u_2 \end{cases}$$

5. **a.** Pour tout réel $\nu > -1$, on pose : $\forall t \geqslant 0$, $x_1(t) = x_2(t) = \dfrac{1}{1 + \nu e^{-t}}$.
Vérifier que l'application $x : t \longmapsto (x_1(t), x_2(t))$ est solution du système (S).

b. En déduire que pour tout réel $c \in]0, 1[$, il existe une solution de (S) à valeurs dans $[c; +\infty[^2$.

c. Quel est l'unique couple $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ vérifiant $F_1(x_1^*, x_2^*) = 0$ et $F_2(x_1^*, x_2^*) = 0$?

d. Toutes les solutions de (S) convergent-elles vers x^* lorsque t tend vers $+\infty$?

6. Pour tout réel r, on note q_r la forme quadratique sur $\mathbf{R}^2$ associée à la matrice symétrique $Q_r = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathscr{C}_r$ l'ensemble défini par : $\mathscr{C}_r = \{(u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2 : q_r(u_1, u_2) = 1\}$.

a. Pour quelles valeurs de r la forme quadratique q_r est-elle définie positive ? Que peut-on dire alors de la partie $\mathscr{C}_r$ de $\mathbf{R}^2$?

Dans la suite de cette question, r et s sont deux réels vérifiant les inégalités : $0 < s < r < 1$.

b. Justifier que l'ensemble $\{q_s(u_1,u_2) ; (u_1,u_2) \in \mathscr{C}_r\}$ admet une borne inférieure, notée $m_{r,s}$ et une borne supérieure, notée $M_{r,s}$ et que ces deux bornes sont atteintes.

c. Justifier que la contrainte d'appartenance à l'ensemble $\mathscr{C}_r$ est non critique.

d. Énoncer la condition nécessaire du premier ordre pour un extremum de q_s sous la contrainte $\mathscr{C}_r$.

e. En déduire les valeurs de $m_{r,s}$ et $M_{r,s}$ et établir l'existence d'un réel μ tel que :

$$\forall (u_1,u_2) \in \mathbf{R}^2,\ q_s(u_1,u_2) \leqslant \mu q_r(u_1,u_2).$$

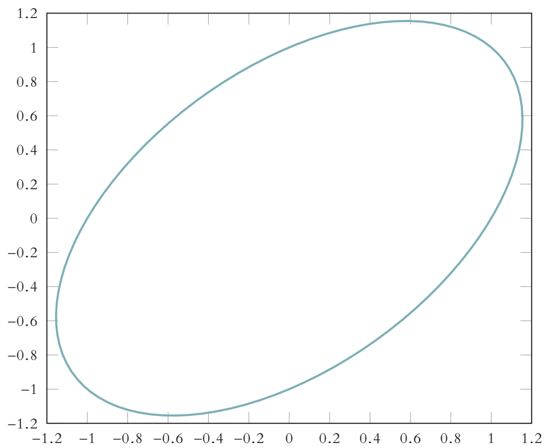
7. On conserve les notations de la question 6.

a. Soit $(v_1,v_2) \in \mathbf{R}^2$ et $(u_1,u_2) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(v_1 - v_2, v_1 + v_2)$.
Vérifier que $(u_1,u_2) \in \mathscr{C}_r$ si et seulement si on a : $(1-r)(v_1)^2 + (1+r)(v_2)^2 = 1$.

On se place désormais dans le cas où $r = \dfrac{1}{2}$ et $s = \dfrac{1}{4}$.

b. Pour faire tracer par `Scilab` le domaine $\mathscr{C}_r$, on peut utiliser le code suivant qui donne le graphique ci-dessous :

```
1  n = 100 ;
2  theta = linspace(0,2*%pi,n) ;
3  ct = cos(theta) ;
4  st = sin(theta) ;
5  Cr = [ct-(1/sqrt(3))*ct ;ct+(1/sqrt(3))*st] ;
6  plot(Cr(1, :),Cr(2, :))
```

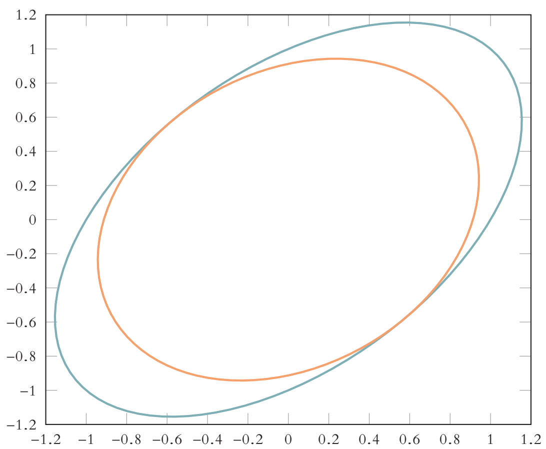


En s'appuyant sur le résultat de la question 7.a, expliquer la méthode employée.
On précisera la signification de la ligne 2 ainsi que le format et le contenue des matrices `Cr` et `Cr(1, :)`.

c. Soit $z_0 > 0$ une valeur affectée à la variable `z` utilisée ci-dessous. Compléter la ligne 7 afin de tracer la ligne de niveau z_0 de la fonction q_n.

```
7  Csz = [sqrt(z)*( ? ? *ct+ ? ?) : sqrt(z)*( ? ?*ct+ ? ? *st)] ;
8  plot(Csz(1, :),Csz(2, :))
```

d. Le graphique suivant a été obtenu à l'aide des deux scripts précédents pour une valeur z_0 affectée à la variable `z`. Laquelle ?
On justifiera la réponse donnée et on précisera pourquoi les deux courbes ont des tangentes communes.



8. Soit c un réel de $]0,1[$ et x une solution de (S) à valeurs dans $[0,+\infty[^2$.
On pose pour tout $t \geqslant 0$: $y_1(t) = x_1(t) - 1$ et $y_2(t) = x_2(t) - 1$. Pour $s = \dfrac{\rho}{1+\rho}$, on note f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$, à valeurs réelles, telle que $f(t) = q_s(y_1(t), y_2(t))$.

a. Vérifier pour tout $t \geqslant 0$, l'égalité : $f'(t) = -2(1+\rho)\left(x_1(t)\,(y_1(t)-sy_2(t))^2 + x_2(t)\,(y_2(t)-sy_1(t))^2\right)$.

b. En déduire que pour $r = \dfrac{2s}{1+s^2}$, on a pour tout $t \geqslant 0$: $f'(t) \leqslant -2c \times \dfrac{1-}{1-r} \times q_r(y_1(t), y_2(t))$.

c. Justifier pour tout $t \geqslant 0$ l'inégalité : $f'(t) \leqslant 2cf(t)$. En déduire que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

9. Quelle propriété peut-on déduire de l'étude précédente pour toute solution de (S) dont chacune des composantes admet un minorant strictement positif ?

Partie II. Pilotage pas à pas dans un contexte aléatoire.

Dans cette partie, on s'intéresse à un exemple de système se présentant sous la forme d'une équation de récurrence dont les coefficients sont soumis à une perturbation aléatoire.

On suppose $p \geqslant 2$. Soit A une matrice non nulle de $M_p(\mathbf{R})$ et b un vecteur de $\mathbf{R}^p$.

Soit $(x(n))_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbf{R}^p$ définie par son terme initial $x(0)$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ X(n+1) = AX(n) + B.$$

On appelle *équilibre du système piloté pas à pas par le couple* (A, b), tout vecteur $x^* = (x_1^*, \ldots, x_p^*) \in \mathbf{R}^p$ qui vérifie : $X^* = AX^* + B$.

On suppose qu'il existe une matrice inversible $Q \in M_p(\mathbf{R})$ telle que la matrice $D = Q^{-1}AQ$ soit diagonale et que tous les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de D appartiennent à l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

10. Montrer que le système piloté pas à pas par le couple (A, b) admet un unique équilibre x^*.

La perturbation aléatoire du système se traduit par le fait que les coordonnées de x^* sont des paramètres inconnus qu'on peut chercher à estimer à partir des données observées que constituent les valeurs successives de vecteurs aléatoires $y(n) = (y_1(n), \ldots, y_p(n))$ à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ et soumis au système perturbé.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, centrées et admettant chacune un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $v_n = V(U_n)$ la variance de U_n.

Soit $x(0) \in \mathbf{R}^p$ et $(y(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ définie par :

$$\begin{cases} Y(1) = (A + U_1 I_p)X(0) + B \\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ Y(n+1) = (A + U_{n+1} I_p)Y(n) + B \end{cases}$$

où pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $Y(n)$ est la matrice colonne $(y_k(n))_{1\leqslant k\leqslant p}$.

11. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathbf{E}(y(n))$ le vecteur colonne $\left(E(y_1(n)), \ldots, E(y_p(n))\right) \in \mathbf{R}^p$ et $\mathbf{E}(Y(n))$ la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{R}^p$.

a. Calculer $\mathbf{E}(Y(1))$ et justifier pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'égalité : $\mathbf{E}(Y(n+1)) - X^* = A\Big(\mathbf{E}(Y(n)) - X^*\Big)$.

b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(y(n)) = x^*$.

12. Soit $(z(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^p$ définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $Z(n) = Q^{-1}Y(n)$.

a. Montrer pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $k \in [\![1, p]\!]$, que : $V\big(z_k(n+1)\big) = (\lambda_k^2 + v_{n+1})V\big(z_k(n)\big) + v_{n+1}\Big(E\big(z_k(n)\big)\Big)^2$.

b. En déduire que si la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et de limite nulle, alors il existe un réel $c_k \in], 01[$, un entier naturel N et un réel $M_k > 0$ tels que : $\forall n \geqslant N$, $V\big(z_k(n+1)\big) \leqslant c_k V\big(z_k(n)\big) + M_k v_{n+1}$.

13. On suppose que la série de terme général v_n est convergente. Soit $k \in [\![1, p]\!]$.
Avec les notations de la question 12.b, on pose pour tout $m \in \mathbf{N}$: $\alpha_m = V\big(z_k(N+m)\big)$ et $w_m = M_k v_{N+m+1}$.

a. Montrer que pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a : $\alpha_{m+1} \leqslant (c_k)^{m+1}\,\alpha_0 + \sum\limits_{j=0}^{m} w_j (c_k)^{m-j}$.

b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} V\big(z_k(n)\big) = 0$.

c. Montrer que la suite $\big(y_k(n)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers x_k^*.

Grâce aux résultats des questions 11.b et 13.c, on peut dire que $\big(y(n)\big)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *est une suite d'estimateurs de* x^* *asymptotiquement sans biais et convergente.*

HEC 2015 : CORRIGÉ

Partie I : Deux exemples de pilotage linéaire

1. *Le cas* $p = 1$

1.a. On a $\forall t \in \mathbf{R}_+, y'(t) = x'(t)e^{-at} - a\left(x(t) + \frac{b}{a}\right)e^{-at}$. Mais $x'(t) = ax(t) + b$, de sorte que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, y'(t) = ax(t)e^{-at} + be^{-at} - ax(t)e^{-at} - be^{-at} = 0.$$

1.b. De la question précédente, on déduit que y est une fonction constante : $\forall t \geqslant 0, y(t) = y(0) = x(0) + \frac{b}{a}$.
Et donc

$$\forall t \geqslant 0, \left(x(t) + \frac{b}{a}\right)e^{-at} = x(0) + \frac{b}{a} \Leftrightarrow \boxed{\forall t \geqslant 0, x(t) = -\frac{b}{a} + \left(x(0) + \frac{b}{a}\right)e^{at}.}$$

1.c. Si x^* est un équilibre du système piloté par le couple (a, b), alors $ax^* + b = 0 \Leftrightarrow x^* = -\frac{b}{a}$.
Inversement, il est évident que $x^* = -\frac{b}{a}$ est un équilibre du système.
Donc le système piloté par le couple (a, b) admet un $\boxed{\text{unique équilibre qui est } x^* = -\frac{b}{a}.}$

Si $a < 0$, et si x est une application pilotée par le couple (a, b), alors

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} -\frac{b}{a} + \left(x(0) - \frac{b}{a}\right)e^{at} = -\frac{b}{a} = x^*.$$

Donc si $a < 0$, x^* est un équilibre attractif.
Si $a > 0$, soit $\lambda \neq x^*$, et soit $x : t \mapsto -\frac{b}{a} + \left(\lambda + \frac{b}{a}\right)e^{at}$.
Alors x est une application pilotée par le couple (a, b), qui diverge en $+\infty$ (car $e^{at} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ et $\lambda + \frac{b}{a} \neq 0$).
Donc x^* n'est pas un équilibre attractif.

$\boxed{\text{Ainsi, } x^* \text{ est un équilibre attractif si et seulement si } a < 0.}$

2. *Exemple 1*

2.a. $x^* = (x_1, x_2)$ est un équilibre du système piloté par le couple (A, b) si et seulement si

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mais A est inversible (car son déterminant vaut $3 \neq 0$), d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{(1, 1) \text{ est l'unique équilibre du système piloté par } (A, b).}$

2.b. A est une matrice symétrique réelle, donc elle est diagonalisable en base orthonormée : il existe une matrice diagonale D est une matrice orthogonale Q (donc vérifiant $Q^{-1} = Q^T$) telles que $A = QDQ^{-1} \Leftrightarrow Q^{-1}AQ = D$.

2.c. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors λ est valeur propre de A si et seulement si $\operatorname{rg}(A - \lambda I_2) < 2$. Or

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2-\lambda \\ -2-\lambda & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + (2+\lambda)L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2-\lambda \\ 0 & -\lambda^2 - 4\lambda - 3 \end{pmatrix}.$$

Donc $\operatorname{rg}(A - \lambda I_2) < 2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, -3\}$.
Ainsi, les valeurs propres de A sont -1 et -3.

Nous avons obtenu à la question précédente un vecteur propre associé à la valeur propre -1 : il s'agit de $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Donc $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in E_{-3}(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+y=-3x\\x-2y=-3y\end{cases} \Leftrightarrow x=-y.$$

Donc $E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

En divisant les vecteurs obtenus par leur norme, une base orthonormée de $E_{-1}(A)$ est $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et une base orthonormée de $E_{-3}(A)$ est $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. La concaténation de ces bases permet d'obtenir une base orthonormée de $M_{2,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de A.

Ainsi, si on pose $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$, Q est orthogonale et on a

$$A = Q\begin{pmatrix}-3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}Q^{-1} \Leftrightarrow Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix}-3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

2.d.i. On a $X'(t) = AX(t)+B = QDQ^TX(t)+B$, et donc $Q^TX'(t) = DQ^TX(t)+Q^TB = DW(t)+Q^TB$. Il suffit donc de vérifier que $W'(t) = Q^TX'(t)$.

Or, si on note $Q^T = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$, on a

$$\forall t \geqslant 0, W(t) = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax_1(t)+bx_2(t)\\cx_1(t)+dx_2(t)\end{pmatrix}$$

et donc en utilisant la définition de la dérivée d'un vecteur (=dérivation composante par composante) donnée dans l'énoncé,

$$\forall t \geqslant 0, W'(t) = \begin{pmatrix}ax_1'(t)+bx_2'(t)\\cx_1'(t)+dx_2'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{pmatrix} = Q^TX'(t).$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, W'(t) = DW(t) + Q^TB.}$$

2.d.ii. Notons $W(t) = \begin{pmatrix}w_1(t)\\w_2(t)\end{pmatrix}$ et $Q^TB = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$.

Alors x est pilotée par le couple (A, b) si et seulement si

$$\forall t \geqslant 0, \begin{pmatrix}w_1'(t)\\w_2'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3w_1(t)\\-w_2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall t \geqslant 0, \begin{cases}w_1'(t) = -3w_1(t)+b_1\\w_2'(t) = -w_2(t)+b_2\end{cases}$$

soit encore si et seulement si w_1 est pilotée par le couple $(-3, b_1)$ **et** w_2 est pilotée par le couple $(-1, b_2)$.

Mais $-3 < 0$ et $-1 < 0$, donc d'après la question 1.c, l'équilibre de chacun de ces couples est attractif.

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} w_1(t) = b_1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} w_2(t) = \dfrac{b_2}{3}$.

Remarquons que $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = Q^TB = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$, et donc $b_1 = b_2 = \sqrt{2}$. Alors il vient :

$$\forall t \geqslant 0 \begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix} = X(t) = QW(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1(t)\\w_2(t)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}w_1(t)+w_2(t)\\-w_1(t)+w_2(t)\end{pmatrix}.$$

En passant à la limite, , il vient

$$\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lim_{t\to+\infty} w_1(t)+w_2(t)\right) = 1 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} w_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lim_{t\to+\infty} -w_1(t)+w_2(t)\right) = 1.$$

Donc si x est pilotée par (A, b), on a $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = (1, 1)$.

Ainsi, toute application x pilotée par (A, b) vérifie $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = (1, 1) = x^*$, et donc $\boxed{x^* \text{ est un équilibre attractif.}}$

3.a. La matrice A_p de u_p dans la base $\mathscr{B}_p$ est

$$\boxed{A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_p(\mathbf{C}).}$$

Échelonnons la matrice A_p en effectuant les opérations successives $L_p \leftrightarrow L_{p-1}, L_{p-1} \leftrightarrow L_{p-2}, \dots, L_2 \leftrightarrow L_1$. C'est-à-dire en remontant progressivement la dernière ligne en première position, et en descendant une fois chacune des autres lignes.

On obtient alors la matrice I_p qui est inversible, de sorte que $\boxed{\operatorname{rg}(A_p) = p.}$

3.b. *Rappel : une racine p-ième de l'unité est un complexe z vérifiant $z^p = 1$.*

Soit donc ε une racine p-ième de l'unité et $G = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon^{p-1} \end{pmatrix}$. Alors

$$A_p G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \vdots \\ \varepsilon^{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \vdots \\ \varepsilon^{p-1} \end{pmatrix} = \varepsilon G.$$

Puisque $G \neq 0$, on en déduit que G est un vecteur propre de A_p, associé à la valeur propre (complexe) ε.

3.c. *Rappelons qu'il existe exactement p racines p-ièmes de l'unité qui sont les $e^{\frac{2ik\pi}{p}}, k \in [\![0, p-1]\!]$. Il n'est pas nécessaire (et pas explicitement au programme) de connaître ces racines pour retrouver le fait qu'il y en a p : le polynôme $X^p - 1$ possède p racines (comptées avec multiplicité) complexes d'après le théorème de d'Alembert Gauss. Et comme son polynôme dérivé est pX^{p-1} qui ne possède que 0 comme racine, et que 0 n'est pas une racine de $X^p - 1$, alors aucune des racines complexes n'est une racine double : les p racines complexes de $X^p - 1$ sont des racines simples, et donc il existe p racines p-èmes de l'unité.*

Ainsi, $A_p \in M_p(\mathbf{C})$ possède p valeurs propres distinctes, et donc est diagonalisable. Par conséquent, il en est de même de l'endomorphisme u_p.

3.d. Par les questions précédentes, il existe une matrice diagonale D dont les coefficients sont les racines p-ièmes de l'unité et une matrice inversible Q telles que $A_p = QDQ^{-1}$.
Alors $A_p^p = (QDQ^{-1})^p = QD^pQ^{-1}$. Or, D est diagonale, donc D^p est encore diagonale, et ses coefficients diagonaux sont les coefficients diagonaux de D élevés à la puissance p.
Puisque ces coefficients sont des racines p-èmes de l'unité, $D^p = I_p$. Et donc $A_p^p = QI_pQ^{-1} = I_p$.

Ainsi, $\boxed{X^p - 1 \text{ est un polynôme annulateur de } A_p, \text{ et donc de } u_p.}$

Si $P \in \mathbf{C}[X]$ est un polynôme annulateur non nul de u_p, alors les valeurs propres de u_p doivent être des racines de P. Et donc P doit nécessairement posséder au moins p racines distinctes, et étant non nul, il doit alors être de degré au moins p.

Donc $\boxed{u_p \text{ ne possède pas de polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à } p.}$

3.e. Avec les notations précédentes, on a

$$P(A_p) = P(QDQ^{-1}) = QP(D)Q^{-1}.$$

Or, si on note $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ les coefficients diagonaux de D (qui sont les racines p-èmes de l'unité), on a

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(\varepsilon_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\varepsilon_p) \end{pmatrix}.$$

Et donc $P(A_p)$ est semblable à la matrice diagonale $P(D)$: elle est diagonalisable, et ses valeurs propres sont les $P(\varepsilon_i)$, $1 \leqslant i \leqslant p$.
Ainsi, $P(u_p)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont les images par P des racines p-èmes de l'unité.

4. *Exemple 2*

4.a. Dans cette question, on a donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.a.i. Un calcul rapide prouve que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $M = -I_3 + \alpha A + \beta A^2 = P(A)$, où P désigne le polynôme $\beta X^2 + \alpha X - 1$.

4.a.ii. Dans la question 3, nous avons montré qu'il existe une matrice $Q \in M_3(\mathbf{C})$ inversible telle que

$$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$$

où $1, j, j^2$ sont les trois racines cubiques de l'unité, avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \bar{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Ainsi, on a

$$M = P(A) = QP\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}\right)Q^{-1} = Q\begin{pmatrix} P(1) & 0 & 0 \\ 0 & P(j) & 0 \\ 0 & 0 & P(j^2) \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

Donc M est semblable à une matrice diagonale, donc elle est diagonalisable, et ses valeurs propres sont $P(1), P(j)$ et $P(j^2)$, avec

$$\begin{aligned} P(1) &= \alpha + \beta - 1 \\ P(j) &= \beta j^2 + \alpha j - 1 = \left(-1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta) \\ P(j^2) &= \beta j^4 + \alpha j^2 - 1 = \beta j + \alpha j^2 - 1 = \left(-1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

4.b.i. Nous pourrions résoudre le système $MX^* = -C$, mais les calculs seraient très vite fastidieux. Notons plutôt que $AC = C$, et donc

$$MC = (-I_3 + \alpha A + \beta A^2)C = -C + \alpha C + \beta AC = -C + \alpha C + \beta C = (1 - \alpha - \beta)C.$$

Puisque par hypothèse on a $1 - \alpha - \beta \neq 0$, il vient $M \times \left(\frac{1}{\alpha+\beta-1}C\right) = \frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta-1}C = -C$.

Donc $X^* = \frac{1}{\alpha+\beta-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un équilibre du système.

Il s'agit bien de l'unique équilibre car les valeurs propres de M sont toutes non nulles (car $P(1) \neq 0$ et les parties imaginaires de $P(j)$ et $P(j^2)$ sont non nulles), donc M est inversible, et par conséquent, il X^* est l'unique vecteur $X \in M_{3,1}(\mathbf{R})$ tel que $MX = -C$.

4.b.ii. L'application x est évidemment dérivable et pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} X'(t) = e^{(\alpha+\beta-1)t}(\alpha+\beta-1)C = e^{(\alpha+\beta-1)t}MC &= Me^{(\alpha+\beta-1)t}C + \underbrace{(MX^* + C)}_{=0} \\ &= M\left(X^* + e^{\alpha+\beta-1)t}C\right) + C = MX(t) + C. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc l'application } x \text{ est pilotée par le couple } (M, c).}$

4.b.iii. Si x^* est attractif, alors l'application x de la question précédente doit vérifier $\lim_{t\to+\infty} x(t) = x^*$, soit $\lim_{t\to+\infty} e^{(\alpha+\beta-1)t} = 0$.
Cette condition n'est vérifiée que si $\alpha + \beta - 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta < 1$.
Une condition nécessaire (mais pas forcément suffisante) pour que x^* soit attractif est $\boxed{\alpha + \beta < 1.}$

4.c. Dans la suite, on a donc $N = \begin{pmatrix} -2 & \alpha+\beta & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & -2 & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & \alpha+\beta & -2 \end{pmatrix}$.

4.c.i. Soit J la matrice de $M_3(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On a $J\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, de sorte que 3 est valeur propre de J. De plus, $\mathrm{rg}(J) = 1$. Alors $\dim E_0(J) = 3 - \mathrm{rg}(J) = 2$, et donc 0 est valeur propre de J avec un sous-espace propre de dimension 2.

Par conséquent, J est diagonalisable (la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut 3) et il existe une matrice inversible Q telle que $J = Q^{-1}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}Q$. Alors

$$\begin{aligned} N = (\alpha+\beta)J+(-2-\alpha-\beta)I_3 &= Q^{-1}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3(\alpha+\beta)\end{pmatrix}Q+Q^{-1}\begin{pmatrix}-2-\alpha-\beta&0&0\\0&-2-\alpha-\beta&0\\0&0&-2-\alpha-\beta\end{pmatrix}Q \\ &= Q^{-1}\begin{pmatrix}-2-\alpha-\beta&0&0\\0&-2-\alpha-\beta&0\\0&0&2(\alpha+\beta-1)\end{pmatrix}Q. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{\text{les valeurs propres de } N \text{ sont } -2-\alpha-\beta \text{ et } 2(\alpha+\beta-1).}$

4.c.ii. Si l'on pose $\theta = 1-\alpha-\beta > 0$, alors $-2-\alpha-\beta \leqslant -2(1-\alpha-\beta) = -2\theta$ et $2(\alpha+\beta-1) = -2\theta$.

Donc $\boxed{\text{toutes les valeurs propres de } N \text{ sont bien inférieures ou égales à } -2\theta.}$

4.d.i. y est évidemment dérivable sur $\mathbf{R}_+$ car x l'est, et pour tout $t \geqslant 0$,

$$Y'(t) = X'(t) = MX(t)+C = M(Y(t)+X^*)+C = MY(t)-C+C = MY(t)+0_{\mathbf{R}^3}.$$

Donc $\boxed{y \text{ est bien pilotée par le couple } (M, 0_{\mathbf{R}^3}).}$

4.d.ii. Si $y = (y_1, y_2, y_3)$, alors $\|Y(t)\|^2 = y_1(t)^2 + y_2(t)^2 + y_3(t)^2$, et puisque chacune des y_i est dérivable, il en est de même de $t \mapsto \|Y(t)\|^2$.

La fonction $t \mapsto e^{2\theta t}$ est évidemment dérivable et donc il en est de même de φ. On a alors pour tout $t \geqslant 0$,

$$\varphi'(t) = 2\theta e^{2\theta t}(y_1(t)^2+y_2(t)^2+y_3(t)^2) + 2e^{2\theta t}\left(y_1(t)y_1'(t)+y_2(t)y_2'(t)+y_3(t)y_3'(t)\right).$$

Mais en utilisant le fait que Y est pilotée par le couple $(M, 0_{\mathbf{R}^3})$, on obtient

$$\forall i \in \{1,2,3\}, y_i'(t) = \sum_{j=1}^{3} m_{i,j}y_j(t)$$

où $M = (m_{i,j})$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= 2e^{2\theta t}\left(\sum_{i=1}^{3} y_i(t)\left(\theta y_i(t) + 2\sum_{j=1}^{3} m_{i,j}y_j(t)\right)\right) \\ &= 2e^{2\theta t}\left(Y(t)^T\theta I_3 Y(t) + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} m_{i,j}y_i(t)y_j(t)\right) \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} Y(t)^T N Y(t) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} n_{i,j}y_i(t)y_j(t) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(m_{i,j}+m_{j,i})y_i(t)y_j(t) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} m_{i,j}y_i(t)y_j(t) + \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} m_{j,i}y_i(t)y_j(t) \end{aligned}$$

$$= \quad 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} m_{i,j}y_i(t)y_j(t)$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \varphi'(t) = e^{2\theta t}Y(t)^T(N+2\theta I_3)Y(t).}$$

4.d.iii. Puisque N est diagonalisable, $N+2\theta I_3$ l'est également, et ses valeurs propres sont $-2-\alpha-\beta+2\theta < 0$ et $-2(1-\alpha-\beta)+2\theta = 0$.
Puisque toutes les valeurs propres de $N+2\theta I_3$ sont négatives, pour tout vecteur $Y \in M_{3,1}(\mathbf{R})$, on a $Y^T(N+2\theta I_3)Y \leqslant 0$, et en particulier pour $Y = Y(t)$. Par conséquent, $\forall t \geqslant 0, \varphi'(t) \leqslant 0$, et donc φ est décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

4.d.iv. La fonction φ est positive (donc minorée par 0) et décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Elle admet donc une limite finie ℓ en $+\infty$.
Et alors

$$\lim_{t\to+\infty} \|Y(t)\|^2 = \lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(t)}{e^{2\theta t}} = 0.$$

Pour $i \in \{1,2,3\}$, on a $0 \leqslant y_i(t)^2 \leqslant \|Y(t)\|^2$, et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{t\to+\infty} y_i(t)^2$. On en déduit que pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y_i(t) = 0$, et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.
Ceci signifie donc que $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x^*$, et donc $\boxed{\text{l'équilibre } x^* \text{ est attractif.}}$

Partie II : Un exemple de pilotage non linéaire

5.a. Les fonctions x_1 et x_2 sont dérivables comme quotients de fonctions usuelles dérivables (dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbf{R}_+$), et on a

$$\forall t \geqslant 0, x_1'(t) = x_2'(t) = \frac{-ve^{-t}}{(1+ve^{-t})^2}.$$

Alors pour tout $t \geqslant 0$, il vient

$$(-x_1(t)+\rho(x_2(t)-x_1(t))+1)x_1(t) = (-x_1(t)+1)x_1(t) = \frac{-ve^{-t}}{(1+ve^{-t})^2} = x_1'(t)$$

et de même $x_2'(t) = (-x_2(t)+\rho(x_1(t)-x_2(t))+1)x_2(t)$, de sorte que $\boxed{(x_1,x_2) \text{ est solution du système } (S).}$

5.b. Soit $c \in]0,1[$, et soit $v = \frac{1}{c}-1$.
Alors soient comme précédemment x_1 et x_2 les deux fonctions définies sur $\mathbf{R}_+$ par $x_1(t) = x_2(t) = \frac{1}{1+ve^{-t}}$.
Pour tout $t \geqslant 0$, on a $e^{-t} \leqslant 1$, et donc

$$1+ve^{-t} \leqslant 1+v = \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{1+ve^{-t}} \geqslant c.$$

Donc $\boxed{(x_1,x_2) \text{ est une solution du système } (S), \text{ à valeurs dans } [c;+\infty[^2.}$

5.c. Il est aisé de voir que $(1,1)$ est solution du système $\begin{cases} F_1(x_1,x_2) = 0 \\ F_2(x_1,x_2) = 0 \end{cases}$. L'énoncé précise que nous cherchons **l'unique solution** de ce système, donc en considérant que l'unicité est donnée par l'énoncé, $(1,1)$ est l'unique solution du système.

Prouvons tout de même qu'il s'agit bien de la seule solution. Soient donc x_1, x_2 deux réels strictement positifs vérifiant

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2) = 0 \\ F_2(x_1,x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-x_1+\rho(x_2-x_1)+1)x_1 = 0 \\ (-x_2+\rho(x_1-x_2)+1)x_2 = 0 \end{cases}$$

Puisque x_1, x_2 sont non nuls, ce système est équivalent à

$$\begin{cases} -x_1+\rho(x_2-x_1)+1 = 0 \\ -x_2+\rho(x_1-x_2)+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1+\rho(x_2-x_1)+1 = 0 \\ x_2 = \frac{1+\rho x_1}{1+\rho} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1+\rho\frac{1-x_1}{1+\rho}+1 = 0 \\ x_2 = \frac{1+\rho x_1}{1+\rho} \end{cases}$$

La première équation nous donne alors $x_1 = 1$, et donc $x_2 = 1$.
Ainsi, $\boxed{(x_1^*, x_2^*) = (1,1) \text{ est bien l'unique solution du système.}}$

5.d. Toutes les solutions de la forme $x_1(t) = x_2(t) = \frac{1}{1+ve^{-t}}$ convergent vers $(1,1)$ lorsque t tend vers $+\infty$, mais nous n'avons jamais dit que toutes les solutions de (S) étaient de cette forme. Par exemple, si l'on pose $x_1(t) = x_2(t) = 0$, alors (x_1, x_2) est une solution de (S), et on n'a pas

$$\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = \lim_{t\to+\infty} x_2(t) = 1.$$

Donc il existe des solutions de (S) qui ne convergent pas vers x^* lorsque t tend vers $+\infty$.

6.a. *La formulation de la question est regrettable, car la notion de forme quadratique définie positive est hors programme. Précisons qu'une forme quadratique q sur $\mathbf{R}^n$ est définie positive si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}^n - \{0\}$, $q(x) > 0$.*
D'après l'étude du signe d'une forme quadratique réalisée lors du cours de calcul différentiel, cela signifie que les valeurs propres de la matrice de q sont toutes strictement positives.

Notons que pour $(u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$q_r(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 - 2ru_1u_2 = (u_1 - ru_2)^2 + (1-r^2)u_2^2.$$

• <u>Si $1 - r^2 > 0$</u> : alors pour $u_1 \neq ru_2$, $q_r(u_1,u_2) \geqslant (u_1 - ru_2)^2 > 0$, et si $u_1 = ru_2$ et $u_2 \neq 0$, alors $q_r(u_1, u_2) \geqslant (1-r^2)u_2^2 > 0$.
Donc pour $(u_1, u_2) \neq (0,0)$, on a $q_r(u_1, u_2) > 0$: q_r est définie positive.
• <u>Si $1 - r^2 \leqslant 0$</u> : alors $q_r(r, 1) = (1-r^2) \leqslant 0$, donc q_r n'est pas définie positive.
Par conséquent, q_r est définie positive si et seulement si $1 - r^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < r < 1$.
La fonction q_r est continue (car polynomiale) sur $\mathbf{R}^2$, et donc $\mathscr{C}_r = \{(u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2 : q_r(u_1, u_2) = 1\}$ est une partie fermée de $\mathbf{R}^2$.
Si de plus q_r est définie positive, alors si $(u_1, u_2) \in \mathscr{C}_r$, on a $(1-r^2)u_2^2 = 1 - (u_1 - ru_2)^2 \leqslant 1 \Rightarrow |u_2| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$.
De même, on a $(u_1 - ru_2)^2 = 1 - (1-r^2)u_2^2 \leqslant 1 \Rightarrow |u_1 - ru_2| \leqslant 1$. Mais alors

$$|u_1| = |(u_1 - ru_2) + ru_2| \leqslant |u_1 - ru_2| + |ru_2| \leqslant 1 + |r|\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Ainsi, en notant $M = \max\left(1 + \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\right)$, on a

$$(u_1, u_2) \in \mathscr{C}_r \Rightarrow \begin{cases} |u_1| \leqslant M \\ |u_2| \leqslant M \end{cases}$$

de sorte que $\boxed{\mathscr{C}_r \text{ est une partie bornée de } \mathbf{R}^2.}$
Donc si q_r est définie positive, alors $\mathscr{C}_r$ est une partie fermée bornée de $\mathbf{R}^2$.

6.b. La fonction q_s est continue sur $\mathbf{R}^2$, car polynomiale.
Puisque $0 < r < 1$, $\mathscr{C}_r$ est fermée bornée d'après la question précédente, et donc q_s admet sur $\mathscr{C}_r$ un maximum et un minimum.

6.c. La fonction q_r est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ car polynomiale. On a alors

$$\forall (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2, \nabla q_r(u_1, u_2) = (2u_1 - 2ru_2, 2u_2 - 2ru_1).$$

On a donc $\nabla q_r(u_1, u_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = ru_2 \\ u_2 = ru_1 \end{cases}$. En particulier, si $\nabla q_r(u_1, u_2) = 0$, alors $u_1 = r^2 u_1$, et puisque $1 - r^2 \neq 0$, $u_1 = 0$, et donc $u_2 = 0$.
Si $(u_1, u_2) \in \mathscr{C}_r$, alors $(u_1, u_2) \neq (0,0)$, et donc $\nabla q_r(u_1, u_2) \neq 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{la contrainte } \mathscr{C}_r \text{ est non critique.}}$

6.d. Si q_s admet un extremum (local) sous la contrainte $\mathscr{C}_r$ en (u_1, u_2) alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\boxed{\begin{cases} (u_1, u_2) \in \mathscr{C}_r \\ \nabla q_s(u_1, u_2) = \lambda \nabla q_r(u_1, u_2) \end{cases}}$$

6.e. D'après la question précédente, (u_1, u_2) est un point critique de q_s sous la contrainte $\mathscr{C}_r$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 - 2ru_1u_2 = 1 \\ u_1 - su_2 = \lambda(u_1 - ru_2) \\ u_2 - su_1 = \lambda(u_2 - ru_1) \end{cases}$$

Si $\lambda = 1$, alors la seconde équation est $-su_2 = -ru_2 \Leftrightarrow u_2(r-s) = 0$. Puisque $r \neq s$, il vient alors $u_2 = 0$. De même, la troisième équation donne $u_1 = 0$, et alors la première équation n'est pas vérifiée. Donc $\lambda \neq 1$.
Alors la seconde équation nous donne $u_1 = \frac{s-\lambda r}{1-\lambda}u_2$. Et alors la troisième équation permet d'obtenir

$$u_2(1-\lambda) = (s-\lambda r)u_1 \Rightarrow u_2 = \left(\frac{s-\lambda r}{1-\lambda}\right)^2 u_2 \Rightarrow u_2\left(1 - \left(\frac{s-\lambda r}{1-\lambda}\right)^2\right) = 0.$$

Comme précédemment, si $u_2 = 0$, alors $u_1 = 0$, et la première équation n'est pas vérifiée.
Donc $\left(\frac{s-\lambda r}{1-\lambda}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{s-\lambda r}{1-\lambda} = \pm 1$.

- Si $\frac{s-\lambda r}{1-\lambda} = 1$: alors $u_1 = u_2$ et par substitution dans la première équation, on obtient

$$u_1^2 + u_1^2 - 2ru_1^2 = 1 \Leftrightarrow (1-r)u_1^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2(1-r)}}.$$

Nous avons donc deux points critiques sous la contrainte $\mathscr{C}_r$, qui sont

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2(1-r)}}, \frac{1}{\sqrt{2(1-r)}}\right) \text{ et } \left(-\frac{1}{\sqrt{2(1-r)}}, -\frac{1}{\sqrt{2(1-r)}}\right).$$

- Si $\frac{s-\lambda r}{1-\lambda} = -1$: alors $u_1 = -u_2$, et par substitution dans la première équation, on obtient

$$u_1^2 + u_1^2 + 2ru_1^2 = 1 \Leftrightarrow (1+r)u_1^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}.$$

Nous avons ainsi deux autres points critiques sous la contrainte $\mathscr{C}_r$, qui sont

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}, -\frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}\right) \text{ et } \left(-\frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}, \frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}\right).$$

En résumé, q_s admet quatre points critiques sous la contrainte $\mathscr{C}_r$. On a alors

$$q_s\left(\frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}, -\frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}\right) = q_s\left(-\frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}, \frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}\right) = \frac{1}{1+r} + \frac{s}{1+r} = \frac{1+s}{1+r}$$

et de même

$$q_s\left(\frac{1}{\sqrt{2(1-r)}}, \frac{1}{\sqrt{2(1-r)}}\right) = q_s\left(-\frac{1}{\sqrt{2(1-r)}}, -\frac{1}{\sqrt{2(1-r)}}\right) = \frac{1}{1-r} - \frac{s}{1-r} = \frac{1-s}{1-r}.$$

$m_{r,s}$ et $M_{r,s}$ étant nécessairement atteints en l'un de ces quatre points, il reste à déterminer laquelle des deux valeurs $\frac{1-s}{1-r}$ et $\frac{1+s}{1+r}$ est la plus grande. Mais

$$\frac{1-s}{1-r} - \frac{1+s}{1+r} = \frac{(1+r)(1-s)-(1+r)(1+s)}{1-r^2} = \frac{2(r-s)}{1-r^2} \geqslant 0$$

de sorte que $\frac{1-s}{1-r} \geqslant \frac{1+s}{1+r}$.
On en déduit que

$$m_{r,s} = \frac{1+s}{1+r} \text{ et } M_{r,s} = \frac{1-s}{1-r}.$$

Si $(u_1, u_2) \neq 0$, puisque q_r est définie positive, on a $q_r(u_1, u_2) > 0$, et alors

$$q_r\left(\frac{u_1}{\sqrt{q_r(u_1,u_2)}}, \frac{u_2}{\sqrt{q_r(u_1,u_2)}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{q_r(u_1,u_2)}}\right)^2 q_r(u_1,u_2) = 1$$

si bien que $\left(\frac{u_1}{\sqrt{q_r(u_1,u_2)}}, \frac{u_2}{\sqrt{q_r(u_1,u_2)}}\right) \in \mathscr{C}_r$.
Alors, d'après la question précédente,

$$0 \leqslant \frac{1}{q_r(u_1,u_2)} q_s(u_1,u_2) = q_s\left(\frac{u_1}{\sqrt{q_r(u_1,u_2)}}, \frac{u_2}{\sqrt{q_r(u_1,u_2)}}\right) \leqslant M_{r,s} = \frac{1-s}{1-r}$$

et donc

$$q_s(u_1,u_2) \leqslant \frac{1-s}{1-r} q_r(u_1,u_2).$$

Pour $(u_1,u_2) = 0$, on a

$$q_s(u_1,u_2) = 0 = q_r(u_1,u_2) \leqslant \frac{1-s}{1-r} q_r(u_1,u_2).$$

Nous venons donc de prouver que

$$\boxed{\forall (u_1,u_2) \in \mathbf{R}^2, q_s(u_1,u_2) \leqslant \frac{1-s}{1-r} q_r(u_1,u_2).}$$

7.a. Par définition de $\mathscr{C}_r$, on a $(u_1,u_2) \in \mathscr{C}_r$ si et seulement si $q_r(u_1,u_2) = 1$. Or

$$\begin{aligned}
q_r(u_1,u_2) &= \frac{1}{2} q_r(v_1 - v_2, v_1 + v_2) \\
&= \frac{1}{2}\left((v_1-v_2)^2 + (v_1+v_2)^2 - 2r(v_1-v_2)(v_1+v_2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2v_1^2 + 2v_2^2 - 2r(v_1^2 - v_2^2)\right) \\
&= (1-r)v_1^2 + (1+r)v_2^2
\end{aligned}$$

On a donc bien $(u_1,u_2) \in \mathscr{C}_r$ si et seulement si $(1-r)v_1^2 + (1+r)v_2^2 = 1$.

7.b. Avec les notations de la question précédente, on a

$$(u_1,u_2) \in \mathscr{C}_r \Leftrightarrow \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{3}{2}v_2^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}v_1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}v_2\right)^2 = 1.$$

Autrement dit, $(u_1,u_2) \in \mathscr{C}_r$ si et seulement si le point de coordonnées $\left(\frac{v_1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}v_2\right)$ est sur le cercle trigonométrique (le cercle de centre l'origine du plan et de rayon 1).
Mais un point (x,y) est sur le cercle trigonométrique si et seulement si il existe un réel $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.

En termes de nombres complexes, $z = x + iy$ est de module 1 si et seulement si il s'écrit $z = e^{i\theta}$, avec θ l'argument de z.

Comme de plus, $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2)$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2)$, il vient $(u_1,u_2) \in \mathscr{C}_r$ si et seulement si il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que

$$u_1 = \cos(\theta) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\theta) \text{ et } u_2 = \cos(\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\theta).$$

La ligne (2) du programme `Scilab` sert à diviser l'intervalle $[0, 2\pi]$ en 99 intervalles de même longueur, et affecte au vecteur `theta` les extrémités de ces intervalles.
La matrice `Cr` créée à la ligne (5) est alors une matrice à deux lignes et 100 colonnes, telle que chaque colonne contienne les coordonnées d'un point (u_1,u_2) correspondant à une valeur de θ.
En particulier, `Cr(1, :)` est la première ligne de `Cr` (et donc contient les abscisses des 100 points correspondants), et `Cr(2, :)` est la deuxième ligne de `Cr` (et donc contient les ordonnées des points).
La ligne (8) du code proposé sert à tracer les 100 points en question.

7.c. Comme à la question 7.a, on peut prouver que $(u_1, u_2) \in \mathscr{C}_s$ si et seulement si

$$(1-s)v_1^2 + (1+s)v_2^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}v_1^2 + \frac{5}{4}v_2^2 = 1.$$

Comme précédemment, on peut prouver que cette condition est vérifiée si et seulement si il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que

$$\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 = \cos\theta \text{ et } \frac{\sqrt{5}}{2}v_2 = \sin\theta.$$

Soit si et seulement si

$$u_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta + \sqrt{\frac{2}{5}}\sin\theta.$$

Enfin, on a

$$q_s(u_1, u_2) = z_0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_0}q_s(u_1, u_2) = 1 \Leftrightarrow q_s\left(\frac{u_1}{\sqrt{z_0}}, \frac{u_2}{\sqrt{z_0}}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{u_1}{\sqrt{z_0}}, \frac{u_2}{\sqrt{z_0}}\right) \in \mathscr{C}_s.$$

Ainsi, il vient

$$q_s(u_1, u_2) = z_0 \Leftrightarrow \exists\theta \in [0, 2\pi] : \begin{cases} u_1 = \sqrt{z_0}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta - \sqrt{\frac{2}{5}}\sin\theta\right) \\ u_2 = \sqrt{z_0}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta + \sqrt{\frac{2}{5}}\sin\theta\right) \end{cases}$$

Ceci nous permet donc de compléter la ligne (7) du programme `Scilab` de la manière suivante (sur le même principe que le programme proposé en 7.b :

```
Csz = [sqrt(z)*(sqrt(2/3)*ct - sqrt(2/5)*st) ;sqrt(z)*(sqrt(2/3)*ct + sqrt
(2/5)*st)] ;
```

7.d. Notons que les deux courbes s'intersectent en deux points. En ces points, on a alors $(u_1, u_2) \in \mathscr{C}_r$ et $q_s(u_1, u_2) = z_0$.
De plus, on remarque que la ligne de niveau z_0 de q_s est incluse dans $\mathscr{C}_r$. Plus précisément, si $(u_1, u_2) \in \mathscr{C}_r$, alors la demi-droite d'origine $(0,0)$ passant par (u_1, u_2) coupe la ligne de niveau z_0 de q_s «avant» de couper $\mathscr{C}_r$. Cela signifie qu'il existe $\lambda \in]0, 1]$ tel que $q_s(\lambda u_1, \lambda u_2) = z_0 \Leftrightarrow q_s(u_1, u_2) = \frac{z_0}{\lambda^2} \geqslant z_0$.

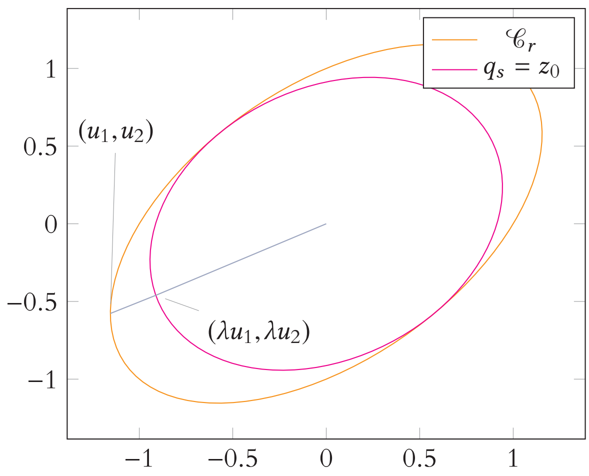


Figure 1 – La ligne de niveau de q_s est «à l'intérieur» de $\mathscr{C}_r$.

Ceci prouve que z_0 est le minimum de q_s sur $\mathscr{C}_r$, et nous avons prouvé en 6.e que ce minimum est $\frac{1+s}{1+r} = \frac{5}{6}$. Ainsi, $\boxed{z_0 = \frac{5}{6}.}$

Notons que nous avions alors prouvé que ce minimum était atteint en les points

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}, -\frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ et } \left(-\frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}, \frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

ce qui est bien cohérent avec ce que nous observons sur le dessin car $\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0.58$.
La condition obtenue à la question 6.d, qui affirme que les gradients de q_s et q_r sont colinéaires. Mais le gradient étant orthogonal aux lignes de niveau, les tangentes à $\mathscr{C}_r$ et $\mathscr{C}_s$ sont donc parallèles. Ayant un point commun, elles sont confondues.

8.a. Par définition de q_s, on a

$$\forall t \geqslant 0, f(t) = y_1(t)^2 + y_2(t)^2 - 2sy_1(t)y_2(t).$$

Puisque y_1 et y_2 sont dérivables, il en est de même de f et

$$\forall t \geqslant 0, f'(t) = 2y_1(t)y_1'(t)+2y_2(t)y_2'(t)-2sy_1(t)y_1'(t)-2sy_2(t)y_2'(t) = 2y_1'(t)(y_1(t)-sy_2(t))+2y_2'(t)(y_2(t)-sy_1(t)).$$

Or, (x_1, x_2) étant solution de (S), on a $y_1' = x_1' = (-x_1 + \rho(x_2 - x_1) + 1)x_1$ et de même $y_2' = x_2' = (-x_2 + \rho(x_1 - x_2) + 1)x_2$. De plus

$$-x_1+\rho(x_2-x_1)+1 = -y_1-1+\rho(y_2-y_1)+1 = -y_1+\rho(y_2-y_1) = -y_1(1+\rho)+\rho y_2 = -(1+\rho)(y_1-sy_2).$$

De même, on a $-x_2 + \rho(x_1 - x_2) + 1 = -(1 + \rho)(y_2 - sy_1)$, de sorte que $\forall t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\left(y_1(t) - sy_2(t)\right)\left(-(1+\rho)(y_1(t) - sy_2(t))\right)x_1(t) + 2\left(y_2(t) - sy_1(t)\right)\left(-(1+\rho)(y_2(t) - sy_1(t))\right)x_2(t) \\ &= \boxed{-2(1+\rho)\left(x_1(t)\left(y_1(t) - sy_2(t)\right)^2 + x_2(t)\left(y_2(t) - sy_1(t)\right)^2\right)} \end{aligned}$$

8.b. Par hypothèse, les fonctions y_1 et y_2 sont à valeurs dans $[c, +\infty[$, donc pour tout $t \geqslant 0$, on a $-y_1(t) \leqslant -c$ et $-y_2(t) \leqslant -c$, de sorte que

$$f'(t) \leqslant -2c(1+\rho)\left((y_1(t) - sy_2(t))^2 + (y_2(t) - sy_1(t))^2\right).$$

En développant les carrés, il vient $\forall t \geqslant 0$,

$$f'(t) \leqslant -2c(1+\rho)\left((1+s^2)y_1(t)^2 + (1+s^2)y_2(t)^2 - 4sy_1(t)y_2(t)\right).$$

Or, sachant que $r = \frac{2s}{1+s^2}$, on a

$$1 - r = 1 - \frac{2s}{1+s^2} = \frac{1+s^2-2s}{1+s^2} = \frac{(1-s)^2}{1+s^2}$$

et donc $\frac{1-s}{1-r} = \frac{1+s^2}{1-s}$. Enfin, $s = \frac{\rho}{1+\rho}$, de sorte que $1 - s = 1 - \frac{\rho}{1+\rho} = \frac{1}{1+\rho}$.
On en déduit que pour tout $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} f'(t) &\leqslant -2c\frac{1+s^2}{1-s}\left(y_1(t)^2 + y_2(t)^2 - \frac{4s}{1+s^2}y_1(t)y_2(t)\right) \\ &\leqslant -2c\frac{1-s}{1-r}\left(y_1(t)^2 + y_2(t)^2 - 2ry_1(t)y_2(t)\right) \\ &\leqslant \boxed{-2c\frac{1-s}{1-r}q_r\left(y_1(t), y_2(t)\right)} \end{aligned}$$

8.c. Notons qu'on a bien $s \in]0, 1[$ car $\rho > 0$.
De plus, $1 + s^2 - 2s = (1-s)^2 > 0$, de sorte que $0 \leqslant 2s < 1 + s^2$, et donc $0 \leqslant r < 1$.
Enfin, $\frac{r}{s} = \frac{2}{1+s^2} > 1$, de sorte que $s < r$.
Nous avons donc bien $0 < s < r < 1$, et sommes donc en mesure d'appliquer les résultats de la question 6, et en particulier de la question 6.e. Ainsi $\forall t \geqslant 0$,

$$q_s(t_1(t), y_2(t)) \leqslant \frac{1-s}{1-r}q_r(y_1(t), y_2(t)) \Rightarrow -\frac{1-s}{1-r}q_r(y_1(t), y_2(t)) \leqslant -q_s(y_1(t), y_2(t)).$$

Par conséquent, nous avons bien

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, f'(t) \leqslant -2cf(t).}$$

La forme quadratique q_s est définie positive, de sorte que $\forall t \in \mathbf{R}, f(t) = q_s(y_1(t), y_2(t)) \geqslant 0$.
Et puisque $c > 0$, on en déduit que $\forall t \in \mathbf{R}, f'(t) \leqslant 0$.

Ainsi, la fonction f est décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Étant minorée (par 0), elle admet une limite finie ℓ en $+\infty$, et cette limite est positive ou nulle.

Supposons par l'absurde que $\ell > 0$. Alors $\forall t \geqslant 0, f(t) \geqslant \ell$. Et donc $\forall t \geqslant 0, f'(t) \leqslant -2c\ell$.
Or, pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt \leqslant f(0) + \int_0^x (-2c\ell)dt \leqslant f(0) - 2c\ell x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

contredisant la positivité de f.
Ainsi, on a bien $\ell = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.}$$

9. Montrons que pour toute solution x de (S) dont chacune des composantes admet un minorant strictement positif, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x^*$.

Soit donc $x = (x_1, x_2)$ une solution de (S) telle qu'il existe $m_1 > 0$ et $m_2 > 0$ vérifiant

$$\forall t \geqslant 0, x_1(t) \geqslant m_1 \text{ et } x_2(t) \geqslant m_2.$$

Posons alors $c = \min\left(m_1, m_2, \frac{1}{2}\right)$. Alors $c \in]0,1[$, et x est à valeurs dans $[c, +\infty[^2$.
Il est donc possible d'appliquer les résultats de la question 8 : en posant $y_1(t) = x_1(t) - 1$, $y_2(t) = x_2(t) - 1$ et $f(t) = q_s(y_1(t), y_2(t))$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Mais $f(t) = q_s(y_1(t), y_2(t)) = (y_2(t) - sy_1(t))^2 + (1-s^2)y_1(t)^2$.
Donc $0 \leqslant (1-s^2)y_1(t)^2 \leqslant f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que $y_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et de même, en utilisant $f(t) = (y_1(t)-sy_2(t))^2+(1-s^2)y_2(t)^2$, on prouve que $y_2(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} x_1(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} x_2(t) = 1$.
Ainsi, pour toute solution x de (S) dont chacune des composantes est minorée par un réel strictement positif, on a

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} x(t) = x^*.}$$

Partie III : Pilotage pas à pas dans un contexte aléatoire

10. X^* est un équilibre du système si et seulement si

$$X^* = AX^* + B \Leftrightarrow (I_p - A)X^* = B.$$

Or, la matrice $I_p - A$ est diagonalisable, car

$$I_p - A = I_p - QDQ^{-1} = QI_pQ^{-1} - QDQ^{-1} = Q(I_p - D)Q^{-1}$$

et donc $I_p - A$ est semblable à la matrice diagonale $I_p - D$.
Comme de plus toutes les valeurs propres de A sont différentes de 1, il en est de même des coefficients diagonaux de D. Et alors les coefficients diagonaux de $I_p - D$, qui sont les valeurs propres de $I_p - A$, sont tous non nuls.
On en déduit que 0 n'est pas valeur propre de $I_p - A$, de sorte que cette matrice est inversible.
Alors il existe bien un unique vecteur X^* tel que $(I_p - A)X^* = B$, et donc le système piloté pas à pas par le couple (A, b) admet $\boxed{\text{un unique équilibre.}}$

11.a. Montrons une fois pour toutes que si $A \in M_p(\mathbf{R})$ est une matrice **fixée** et X est un vecteur aléatoire à p lignes, alors $E(AX) = AE(X)$.
En effet, si l'on note $y_1, \dots, y_p$ les coordonnées de Y, on a

$$\forall i \in [\![1, p]\!], (AY)_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j}y_j$$

et donc par linéarité de l'espérance, $E((AY)_i) = \sum\limits_{j=1}^p a_{i,j}E(y_j)$.

Nous reconnaissons bien là le coefficient situé à la i-ème ligne du vecteur $A \times E(Y)$.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a $\left(U_1 I_p X(0)\right)_i = U_1 x_i(0)$, et donc $E\left((U_1 I_p X(0)_i)\right) = x_i(0)E(U_1) = 0$ car U_1 est centrée. Les matrices $AX(0)$ et B étant constantes, on en déduit que

$$\boxed{E(Y(1)) = AX(0) + B.}$$

Pour $n \geqslant 1$, on a

$$Y(n+1) = (A+U_{n+1}I_p)Y(n)+B = (A+U_{n+1}I_p)Y(n)+X^*-AX^* \Leftrightarrow Y(n+1)-X^* = A\left(Y(n)-X^*\right)+U_{n+1}I_pY(n).$$

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, une récurrence rapide prouve que la variable aléatoire $y_i(n)$ est fonction des variables aléatoires $U_1,\dots,U_n$.
Par le lemme des coalitions, $y_i(n)$ est alors indépendante de U_{n+1}. De plus, $U_1,\dots,U_n$ admettant une espérance, il en est de même de $y_i(n)$. Et par indépendance de U_{n+1} et de $y_i(n)$, il vient alors

$$E(U_{n+1}y_i(n)) = E(U_{n+1})E(y_i(n)) = 0 \times E(y_i(n)) = 0.$$

Puisque le coefficient à la i-ème ligne de $U_{n+1}I_pY(n)$ est $U_{n+1}y_i(n)$, on en déduit que $E\left(U_{n+1}I_pY(n)\right) = 0$.
Et alors

$$E(Y(n+1)-X^*) = AE(Y(n)-X^*) + E\left(U_{n+1}I_pY(n)\right) = \boxed{AE(Y(n)-X^*).}$$

11.b. Une récurrence immédiate utilisant le résultat de la question précédente prouve que

$$\forall n \in \mathbf{N}, E(Y(n)-X^*) = A^{n-1}E(Y(1)-X^*) = A^{n-1}\left(AX(0)+B-X^*\right) = A^n\left(X(0)-X^*\right)$$

Or, pour $n \in \mathbf{N}$, on a

$$A^n = (QDQ^{-1})^n = QD^nQ^{-1} = Q\mathrm{diag}(\lambda_1^n,\dots,\lambda_p^n)Q^{-1}.$$

Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}^p$, les coefficients de $A^nX = QD^nQ^{-1}X$ sont des combinaisons linéaires (dont les coefficients ne dépendent que de ceux de Q, Q^{-1} et X, et en particulier ne dépendent pas de n) de $\lambda_1^n,\dots,\lambda_p^n$.
Autrement dit, pour tout $x \in \mathbf{R}^p$, et tout $i \in [\![1,p]\!]$, il existe des réels $\mu_1,\dots,\mu_p$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, (A^nX)_i = \sum_{j=1}^{p} \mu_j\lambda_j^n.$$

Par hypothèse, les λ_j sont tous dans $]-1,1[$, de sorte que $\lambda_j^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et donc quel que soit $i \in [\![1,p]\!], (A^nX)_i \to 0$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}^p$, $A^nX \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ceci est en particulier vrai pour $X = X(0)-X^*$, de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} E(Y(n)-X^*) = \lim_{n\to+\infty} A^n(X(0)-X^*) = 0.$$

Et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(y(n)) = x^*.}$

12.a. L'égalité $Y(n+1) = (A+U_{n+1}I_p)Y(n)+B$ devient, après multiplication à gauche par Q^{-1} :

$$Z(n+1) = Q^{-1}Y(n+1) = (Q^{-1}A + Q^{-1}U_{n+1}I_p)Y(n) + Q^{-1}B = \\ (DQ^{-1} + U_{n+1}I_pQ^{-1})Y(n) + Q^{-1}B = (D+U_{n+1}I_p)Z(n) + Q^{-1}B.$$

En particulier, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $z_k(n+1) = (\lambda_k + U_{n+1})z_k(n) + c_k$, où c_k est le coefficient à la k-ème ligne de $Q^{-1}B$.

Bien que l'énoncé ne demande pas de vérifier que les $z_k(n)$ possèdent une variance, il n'est pas superflu de vérifier que c'est bien le cas avant de manipuler ces variances.

<u>Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $z_k(n)$ admet un moment d'ordre 2.</u>
Pour $n = 1$, $z_k(1) = \lambda_k + U_1\left(Q^{-1}X(0)\right)_k + c_k$, et donc $z_k(1)$ admet une variance car U_1

admet une variance.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et supposons que $z_k(n)$ admet un moment d'ordre 2.
Alors $z_k(n+1) = (\lambda_k + U_{n+1})z_k(n) + c_k = \lambda_k z_k(n) + U_{n+1}z_k(n) + c_k$.
Il est aisé de voir, comme à la question 11.a que $z_k(n)$ est indépendante de U_{n+1}. Par conséquent, $z_k(n)^2$ et U_{n+1}^2 sont également indépendantes, et admettent une espérance, de sorte que $U_{n+1}^2 z_k(n)^2 = (U_{n+1}z_k(n))^2$ admet une espérance.
Ainsi, $U_{n+1}z_k(n)$ admet un moment d'ordre 2 (qui est le produit de $E(U_{n+1}^2)$ par $E(z_k(n)^2)$), de même que $z_k(n)$, et ainsi $z_k(n+1)$ admet un moment d'ordre 2.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $z_k(n)$ admet un moment d'ordre 2, et donc une variance.

On a alors, par la formule de Huygens,

$$V(z_k(n+1)) = V\left((\lambda_k + U_{n+1})z_k(n)\right) = E\left((\lambda_k + U_{n+1})^2 z_k(n)^2\right) - E\left((\lambda_k + U_{n+1})z_k(n)\right)^2.$$

Or, $(\lambda_k + U_{n+1})$ et $z_k(n)$ sont indépendantes, donc

$$E\left((\lambda_k + U_{n+1})z_k(n)\right) = E(\lambda_k + U_{n+1})E(z_k(n)) = \left(\lambda_k + \underbrace{E(U_{n+1})}_{=0}\right)E(z_k(n)) = \lambda_k E(z_k(n)).$$

De plus, les variables $(\lambda_k + U_{n+1})^2$ et $z_k(n)^2$ sont indépendantes, donc

$$E\left((\lambda_k + U_{n+1})^2 z_k(n)^2\right) = E\left(((\lambda_k + U_{n+1})^2\right)E(z_k(n)^2) = \left(\lambda_k^2 + 2\lambda_k \underbrace{E(U_{n+1})}_{=0} + \underbrace{E(U_{n+1}^2)}_{=V(U_{n+1})=v_{n+1}}\right)E(z_k(n)^2).$$

Mais $E(z_k(n)^2) = V(z_k(n)) + E(z_k(n))^2$, de sorte que

$$V(z_k(n+1)) = \left(\lambda_k^2 + v_{n+1}\right)\left(V(z_k(n)) + E(z_k(n))^2\right) - \lambda_k^2 E(z_k(n))^2 = \boxed{\left(\lambda_k^2 + v_{n+1}\right)V(z_k(n)) + v_{n+1}E(z_k(n))^2.}$$

12.b. La variable aléatoire $z_k(n)$ est une combinaison linéaire (à coefficients ne dépendant pas de n) de $y_1(n), \dots, y_p(n)$. Et puisque les suites $(E(y_1(n)))_n, \dots, (E(y_p(n)))_n$ convergent, il en est de même de $(E(z_k(n)))_n$.
En particulier, la suite $\left(E(z_k(n))^2\right)_n$ converge, donc est bornée : il existe une constante $M_k > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $E(z_k(n))^2 \leqslant M_k$.
Puisque $-1 < \lambda_k < 1$, alors $\lambda_k^2 < 1$. Soit donc $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda_k^2 + \varepsilon < 1$.
La suite (v_n) étant de limite nulle, il existe un entier N tel que pour $n \geqslant N$, $v_n \leqslant \varepsilon$.
Et alors en posant $c_k = \lambda_k^2 + \varepsilon \in]0,1[$, pour tout $n \geqslant N$, on a

$$V(z_k(n+1)) \leqslant (\lambda_k^2 + \varepsilon)V(z_k(n)) + M_k v_{n+1} \leqslant \boxed{c_k V(z_k(n)) + M_k v_{n+1}.}$$

13.a. Montrons par récurrence que pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a

$$\alpha_{m+1} \leqslant (c_k)^{m+1}\alpha_0 + \sum_{j=0}^{m} w_j (c_k)^{m-j}.$$

Pour $m = 0$, le résultat est évident car $w_0 \geqslant 0$.
Supposons donc le résultat vrai pour m. Alors

$$\begin{aligned}
\alpha_{m+2} = V(z_k(N+m+2)) &\leqslant c_k V(z_k(N+m+1)) + M_k v_{N+m+2} \\
&\leqslant c_k \alpha_{m+1} + w_{m+1} \\
&\leqslant c_k\left(c_k^{m+1}\alpha_0 + \sum_{j=0}^{m} w_j c_k^{m-j}\right) + w_{m+1} \\
&\leqslant c_k^{m+2}\alpha_0 + \sum_{j=0}^{m} w_j c_k^{m+1-j} + w_{m+1} \\
&\leqslant c_k^{m+2}\alpha_0 + \sum_{j=0}^{m+1} w_j . c_k^{m+1-j}
\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $m+1$. Par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall m \in \mathbf{N}, \alpha_{m+1} \leqslant c_k^{m+1}\alpha_0 + \sum_{j=0}^{m} w_j c_k^{m-j}.}$$

13.b. Par hypothèse, $c_k \in]0,1[$, de sorte que $c_k^{m+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Admettons temporairement que $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{j=0}^{m} w_j(c_k)^{m-j} = 0$.

Puisque α_{m+1} est une variance, il s'agit d'un réel positif, et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{m\to+\infty} \alpha_m = \lim\limits_{m\to+\infty} \alpha_{m+1} = 0$.
Or, en utilisant $\alpha_n = V(z_k(n+N))$, il vient naturellement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} V(z_k(n)) = 0.}$$

Prouvons à présent (par trois méthodes différentes !) que $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{j=0}^{m} w_j(c_k)^{m-j} = 0$.

• <u>Première méthode</u> : «à la main».
Soit $\varepsilon > 0$. Les suites $(w_n)_n$ et $(c_k^n)_n$ étant de limites nulles, elles sont bornées, et il existe donc une constante $M > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leqslant w_n \leqslant M \text{ et } 0 \leqslant c_k^n \leqslant M.$$

La série de terme général w_j étant convergente, la suite de ses restes tend vers 0. Donc il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant N_1$, $\sum\limits_{j=n}^{+\infty} w_j \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}$.
Or, les w_j sont positifs (ce sont des variances), de sorte que

$$\forall m \geqslant n \geqslant M_1, \sum_{j=n}^{m} w_j \leqslant \sum_{j=n}^{+\infty} w_j \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Par le même argument, on prouve qu'il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall m \geqslant n \geqslant N_2, \sum_{j=n}^{m} c_k^j \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Notons à présent $A = \max(N_1, N_2) \in \mathbf{N}$. Alors pour $m \geqslant 2A$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m} w_j c_k^{m-j} &= \sum_{j=0}^{A} w_j c_k^{m-j} + \sum_{j=A+1}^{m} w_j c_k^{m-j} \\
&\leqslant \sum_{j=m-A}^{A} c_k^j w_{m-j} + \sum_{j=A+1}^{m} w_j c_k^{m-j} \\
&\leqslant M \sum_{j=m-A}^{A} c_k^j + M \sum_{j=A+1}^{m} w_j
\end{aligned}$$

Mais $m \geqslant 2A \Rightarrow m - A \geqslant A$, et donc $\sum\limits_{j=m-A}^{A} c_k^j \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}$. De même on a $\sum\limits_{j=A+1}^{m} w_j \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}$ et donc pour tout $n \geqslant 2A$,

$$0 \leqslant \sum_{j=0}^{m} w_j c_k^{m-j} \leqslant M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

En revenant à la définition de la limite d'une suite, cela prouve bien que

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{j=0}^{m} w_j c_k^{m-j} = 0.$$

• Seconde méthode : à l'aide de familles sommables.
Pour tout $(i,j) \in \mathbf{N}^2$, soit $a_{i,j} = w_i c_k^j$. On définit ainsi une suite double $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ à termes positifs.

Alors pour tout $i \in \mathbf{N}$, $\sum_j a_{i,j}$ converge absolument, et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = w_i \sum_{j=0}^{+\infty} c_k^j = \frac{w_i}{1-c_k}$.

Alors $\displaystyle\sum_i \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ converge absolument (car $\sum_i w_i$ converge).
Ceci prouve que la famille $a_{i,j}$ est sommable. Par le théorème de sommation par paquets, on a alors

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{m} a_{j,m-j} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{m} w_j (c_k)^{m-j}$$

et toutes les sommes ci-dessus convergent (absolument).
En particulier, la série de terme général $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} w_j (c_k)^{m-j}$ est convergente, donc son terme général tend vers 0 :

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty} \sum_{j=0}^{m} w_j c_k^{m-j} = 0.}$$

• Troisième méthode : avec des probabilités.
Cette dernière méthode, à base de probabilités, diffère peu de la précédente sur le fond, mais peut sembler plus logique si l'on a reconnu que la forme de la somme ressemble à un produit de convolution discret.
La série de terme général w_n est à termes positifs et converge. Notons S sa somme.
Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w_n}{S} = 1$, et donc la famille $\left(\frac{w_n}{S}\right)_n$ définit la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.
De même, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_k^n (1-c_k) = 1$.
Soient donc X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendantes et telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, P(X=n) = \frac{w_n}{S} \text{ et } P(Y=n) = c_k^n(1-c_k).$$

Alors $X+Y$ est encore une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, et de plus, nous savons que

$$\forall m \in \mathbf{N}, P(X+Y=m) = \sum_{j=0}^{m} P(X=j)P(Y=m-j) = \frac{1-c_k}{S}\sum_{j=0}^{m} w_j c_k^{m-j}.$$

Par la formule des probabilités totales, la série de terme général $P(X+Y=n)$ est absolument convergente, et en particulier son terme général tend vers 0 : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} P(X+Y=m) = 0$.
On en déduit que

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{j=0}^{m} w_j c_k^{m-j} = 0.$$

13.c. On a $|y_k(n) - x_k^*| \leqslant |y_k(n) - E(y_k(n))| + |E(y_k(n)) - x_k^*|$. Et donc

$$[|y_k(n) - x_k^*| \geqslant \varepsilon] \subset \left[|y_k(n) - E(y_k(n))| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup \left[|E(y_k(n)) - x_k^*| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

Et donc

$$P(|y_k(n) - x_k^*| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\left(|y_k(n) - E(y_k(n))| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|E(y_k(n)) - x_k^*| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Mais nous avons prouvé à la question 11 que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(y_k(n)) = x_k^*$, de sorte qu'il existe $M \in \mathbf{N}$ tel que

$$n \geqslant M \Rightarrow |E(y_k(n)) - x_k^*| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Et alors pour $n \geqslant M$, $P\left(|E(y_k(n)) - x_k^*| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$.

Puisque $Y(n) = QZ(n)$, pour tout k, $y_k(n)$ est une combinaison linéaire (à coefficients indépendants de n) de $z_1(n), \dots, z_p(n)$. Par conséquent, $y_k(n)$ admet une variance et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(y_k(n)) = 0$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à $y_k(n)$ (qui admet bien une variance), on a

$$P\left(|y_k(n) - E(y_k(n))| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \frac{4V(y_k(n))}{\varepsilon^2}.$$

Donc pour $n \geqslant M$, on a

$$P(|y_k(n) - x_k^*| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{4V(y_k(n))}{\varepsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit que $\boxed{(y_k(n))_n \text{ converge en probabilité vers } x_k^*.}$

HEC 2014

Non corrige

Dans ce problème, on s'intéresse à des opérations de transport dans des situations déterministes ou aléatoires, modélisées de manière discrète ou continue, dans le but de trouver un programme de transport optimal dont le coût serait le plus faible possible.
Les parties I, II et III sont largement indépendantes.

• Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
• Sous réserve d'existence, on note $E(Z)$ l'espérance d'une variable aléatoire Z.
• Pour tout entier N supérieur ou égal à 1, on note $\mathcal{E}_N$ l'ensemble des applications de $[\![1, N]\!]$ dans $[\![1, N]\!]$.

Préliminaire

1. Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
   a. Quel est le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{E}_N$?
   b. Parmi les éléments de $\mathcal{E}_N$, quel est le nombre d'applications injectives et parmi celles-ci, combien sont strictement monotones ? (Les réponses aux questions 1.a et 1.b seront données sans démonstration).
2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$.
   On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
   Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $Y(\omega) = \lfloor pX(\omega) \rfloor$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.
   a. Vérifier que Y est une variable aléatoire discrète. Calculer pour tout $n \in \mathbf{N}$, la probabilité $P([Y = n])$.
   b. Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   c. Établir les inégalités strictes : $0 < E(Y) < p$.
3. a. Pour tout couple $(r, s) \in \mathbf{N}^2$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^r (\ln x)^s \, dx$ est convergente. (On pourra utiliser le changement de variable $u = -\ln x$ après avoir justifié précisément sa validité).
   b. Établir pour tout couple $(r, s) \in \mathbf{N}^2$, l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 x^r (\ln x)^s \, dx = \frac{(-1)^s s!}{(r+1)^{s+1}}$.

Partie I. Transport dans une situation aléatoire

On dit que la loi d'une variable aléatoire Y est *accessible* depuis une variable aléatoire X, s'il existe une application $T : X(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que la variable aléatoire $T(X)$ suit la même loi que Y.
L'application T est alors appelée une *fonction de transport* de la variable aléatoire X vers la loi de Y.
On associe à T un *coût de transport* $C(T)$ défini, sous réserve d'existence, par : $C(T) = E\left((X - T(X))^2\right)$.

Dans toute cette partie, X désigne une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) =]0, 1[$ et suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$, c'est-à-dire admettant pour densité la fonction f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. Pour tout réel $a \in [0, 1-p]$, on note dans cette question, T_a la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$T_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a, a+p[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   a. Calculer la probabilité $P([T_a(X) = 1])$ et en déduire que les fonctions T_a sont des fonctions de transport de X vers une même loi que l'on précisera.
   b. Vérifier que le coût de transport $C(T_a)$ est égal à $\dfrac{1}{3} + p(1-p) - 2ap$.
   c. En déduire la valeur de a qui minimise $C(T_a)$ et exprimer le coût minimal correspondant en fonction de p.
5. Soit T_1 et T_2 les applications définies sur $]0, 1[$ par $T_1(x) = -\ln x$ et $T_2(x) = -\ln(1-x)$.
   a. Vérifier que T_1 et T_2 sont des fonctions de transport de X vers une loi que l'on précisera.

b. En utilisant les résultats de la question 3, comparer les coûts de transport $C(T_1)$ et $C(T_2)$.

c. À l'aide de la question 2, montrer que toutes les lois géométriques sont accessibles depuis X.

6. Dans cette question, Y désigne une variable aléatoire admettant une densité f_Y continue et strictement positive sur $\mathbf{R}$.

a. Justifier que la fonction de répartition F_Y de Y réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur l'intervalle ouvert $]0,1[$.

b. On note F_Y^{-1} la bijection réciproque de F_Y.
Montrer que F_Y^{-1} est une fonction de transport de la variable aléatoire X vers la loi de Y.

7. *Cas particulier: on suppose que Y suit la loi normale centrée réduite.*
On note F_Y la fonction de répartition de Y et φ la densité continue sur $\mathbf{R}$ de Y.

a. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y\, F_Y(y)\, \varphi(y)\, dy$.
À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} yF_Y(y)\varphi(y)\, dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

b. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(y - F_Y(y)\right)^2\varphi(y)\, dy$ est convergente et la calculer.

c. En déduire que le coût de transport $C(F_Y^{-1})$ est égal à $\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Partie II. Transport optimal dans une situation déterministe

Dans toute cette partie, N désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On considère N réels $d_1, d_2, \ldots, d_N$ (appelés points de départ) et N réels $a_1, a_2, \ldots, a_N$ (appelés points d'arrivée) vérifiant $d_1 < d_2 < \cdots < d_N$ et $a_1 < a_2 < \cdots < a_N$.
On pose : $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_N\}$ et $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$.

8. a. Montrer que pour tout couple $(k,\ell) \in [\![1,N]\!]^2$, on a : $d_k a_k \geqslant d_k a_\ell + d_\ell a_k - d_\ell a_\ell$.

b. En déduire à l'aide d'une double sommation que pour tout N-uplet $(p_1, p_2, \ldots, p_N) \in \mathbf{R}_+^N$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} p_k d_k a_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^{N} p_k d_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{N} p_k\, a_k\right). \qquad (1)$$

9. Soit $t \in \mathscr{E}_N$. On réordonne la liste $(t(1), t(2), \ldots, t(N))$ selon les valeurs croissantes et on note alors $(\widehat{t}(1), \widehat{t}(2), \ldots, \widehat{t}(N))$ la liste ordonnée obtenue. On a donc : $\widehat{t}(1) \leqslant \widehat{t}(2) \leqslant \cdots \leqslant \widehat{t}(N)$.

a. Justifier pour tout $n \in [\![1,N]\!]$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)} \leqslant \sum_{k=n}^{N} a_{\widehat{t}(k)}$.

b. On pose $d_0 = 0$. Justifier l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} d_n a_{t(n)} = \sum_{n=1}^{N} \left((d_n - d_{n-1}) \sum_{k=n}^{N} a_{t(k)}\right)$.

c. Établir l'inégalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} d_n a_{t(n)} \leqslant \sum_{n=1}^{N} d_n a_{\widehat{t}(n)}. \qquad (2)$

On appelle *programme de transport*, toute bijection T de D sur A, et *coût* d'un programme de transport T, la somme $c(T)$ définie par : $c(T) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} (d_k - T(d_k))^2$.

10. Soit $\widehat{T}$ le programme de transport défini par : pour tout $k \in [\![1,N]\!]$, $\widehat{T}(d_k) = a_k$.
Déduire des questions précédentes que le programme $\widehat{T}$ est optimal, c'est-à-dire que pour tout programme de transport T, on a : $c(T) \geqslant c(\widehat{T})$.

11. *Interprétation probabiliste des inégalités (1) et (2).*
Soit h une application croissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

a. En utilisant l'inégalité (1), établir pour toute variable aléatoire discrète X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, l'inégalité : $E(Xh(X)) \geqslant E(X)E(h(X))$.

b. Que peut-on en déduire pour le coefficient de corrélation linéaire de X et $h(X)$ lorsque les variances de X et $h(X)$ sont strictement positives ?

c. En utilisant l'inégalité (2), montrer que si X est une variable aléatoire discrète suivant la loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$ et t un élément de $\mathscr{E}_N$, on a : $E(h(X)t(X)) \leqslant E(h(X)\widehat{t}(X))$.

Partie III. Transport optimal dans une situation aléatoire.

Les définitions de fonction de transport et de coût de transport sont identiques à celles données dans le préambule de la partie I.

Dans toute cette partie, U désigne une variable aléatoire vérifiant $U(\Omega) = [0,1]$ et suivant la loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

Soit Y une variable aléatoire admettant une densité f_Y nulle hors d'un segment $[\alpha,\beta]$ $(\alpha < \beta)$ et dont la restriction à ce segment est continue et strictement positive. On note F_Y la fonction de répartition de Y.

On suppose l'existence d'une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, à valeurs dans $[\alpha,\beta]$, telle que la variable aléatoire $Z = g(U)$ suit la même loi que Y.

12. Pour tout entier $N \geqslant 1$, on pose pour tout $\omega \in \Omega$:

$$X_N(\omega) = \begin{cases} \lfloor 1 + NU(\omega) \rfloor & \text{si } 0 \leqslant U(\omega) < 1 \\ N & \text{si } U(\omega) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad Y_N(\omega) = g\left(\frac{X_N(\omega)}{N}\right).$$

   a. Trouver la loi de la variable aléatoire X_N.

   b. Établir l'existence d'une constante $\lambda > 0$, indépendante de N telle que : $\forall \omega \in \Omega,\ |Z(\omega) - Y_N(\omega)| \leqslant \dfrac{\lambda}{N}$.

   c. Montrer que pour tout réel y, on a : $F_Y\left(y - \dfrac{\lambda}{N}\right) \leqslant P([Y_N < y])$.

13. Pour tout $k \in [\![1,N]\!]$, on pose : $t_N(k) = g\left(\dfrac{k}{N}\right)$. On définit alors $\widehat{t}_N$ à partir de t_N, comme $\widehat{t}$ à partir de t dans la question 9.

   a. Établir pour tout $k \in [\![1,N]\!]$, les inégalités : $F_Y\left(\widehat{t}_N(k) - \dfrac{\lambda}{N}\right) \leqslant P([Y_N < \widehat{t}_N(k)]) < \dfrac{k}{N}$.

   b. On note F_Y^{-1} la fonction réciproque de la restriction à $[\alpha,\beta]$ de la fonction F_Y.

   Montrer que pour tout entier $N \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N} g\left(\frac{k}{N}\right) \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N}\left(F_Y^{-1}\left(\frac{k}{N}\right) + \frac{\lambda}{N}\right)$.

   c. En déduire l'inégalité : $E\big(Ug(U)\big) \leqslant E\big(UF_Y^{-1}(U)\big)$.

14. a. Parmi les fonctions de transport de classe $\mathscr{C}^1$ de U vers la loi de Y, trouver une fonction de transport T^* de coût minimal.

   b. On suppose que $Y = |4U - 2|$. Déterminer T^* et $C(T^*)$.

HEC 2012

Non corrige

Sujet : Entropie d'une variable aléatoire. **Facile**

Abordable en première année : ✓ (parties I et II.) **Intérêt** : ★★☆

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Commentaires : facile pour un sujet d'HEC. Une bonne introduction aux sujets de parisiennes. La question avec Taylor-Lagrange pour une fonction de plusieurs variables ne peut plus être faite avec le programme actuel.

Le problème a pour objet la mise en évidence de quelques propriétés de l'entropie de variables aléatoires discrètes ou à densité. La partie IV utilise dans un exemple, certaines des propriétés établies dans le problème.

On suppose que toutes les variables aléatoires introduites dans le problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. La notation exp désigne la fonction exponentielle.

Partie I. Quelques inégalités de concavité.

1. Soit h la fonction de $]0,1[$ dans $\mathbf{R}$ définie par : $h(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x)$.
   a. Montrer que la fonction h est positive et concave sur $]0,1[$.
   b. Montrer que h est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$. Ce prolongement est-il de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$?
   c. Tracer la courbe représentative de h dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
2. Justifier pour tout réel $u > 0$, l'inégalité : $\ln u \leqslant u - 1$. Pour quelles valeurs de u a-t-on : $\ln u = u - 1$?
3. Soit d la fonction de $(]0,1[)^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par : $d(x,y) = x\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) + (1-x)\ln\left(\dfrac{1-y}{1-x}\right)$.

   Montrer que $d(x,y) \leqslant 0$ et préciser les couples (x,y) de $(]0,1[)^2$ pour lesquels $d(x,y) = 0$.
4. On considère trois fonctions ℓ, r et f vérifiant les hypothèses suivantes :
   - ℓ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles et concave sur $\mathbf{R}$ (on note ℓ' la fonction dérivée de ℓ) ;
   - r est définie et continue sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ;
   - f est définie et continue sur $\mathbf{R}$, à valeurs positives ou nulles, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$;
   - les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(r(x))f(x)\,dx$ sont convergentes.

   a. Établir pour tout couple (x,y) de $\mathbf{R}^2$, l'inégalité : $\ell(x) - \ell(y) \leqslant \ell'(y)(x-y)$.
   b. Montrer pour tout réel y, l'inégalité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(r(x))f(x)\,dx \leqslant \ell(y) + \ell'(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)f(x)\,dx - y\right)$.
   c. En déduire l'inégalité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(r(x))f(x)\,dx \leqslant \ell\left(\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)f(x)\,dx\right)$.
5. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite réelle et $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de réels positifs ou nuls vérifiant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$, telles que les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} r(x_n)p_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ell(r(x_n))p_n$ soient convergentes.

   Établir l'inégalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ell(r(x_n))p_n \leqslant \ell\left(\sum_{n=1}^{+\infty} r(x_n)p_n\right)$.

Partie II. Entropie dans le cas continu.

On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions f définies et continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs strictement positives, vérifiant $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ et telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(f(x))\,dx$ soit convergente.

Pour toute variable aléatoire X ayant pour densité un élément f de $\mathscr{F}$, on définit l'entropie $H(X)$ de X par :

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(f(x))\,dx.$$

6. On note Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et φ sa densité continue.
   a. Justifier l'existence de l'entropie $H(Z)$ de Z et la calculer.
   b. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et X une variable aléatoire qui admet pour densité un élément f de $\mathscr{F}$. Montrer que la variable aléatoire $Y = aX + b$ admet une densité appartenant à $\mathscr{F}$ et que $H(Y) = H(X) + \ln a$.
   c. En déduire l'entropie d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance μ et d'écart-type $\sigma > 0$.
7. Dans cette question, on considère les couples (f, g) de $\mathscr{F}^2$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) dx$ est convergente. On pose alors : $D(f, g) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) dx$.
   a. Montrer que $D(f, g) \geqslant 0$.
   b. On suppose que $D(f, g) = 0$. Établir l'égalité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) + 1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) f(x)\, dx = 0$.
   En déduire que $f = g$.

Partie III. Entropie dans le cas discret.

8. Dans cette question, N désigne un entier supérieur ou égal à 2.
   Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, N]\!]$. On pose pour tout k de $[\![1, N]\!]$: $p_k = P([X = k])$.
   L'entropie $H(X)$ de X est définie par : $H(X) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{N} p_k \ln(p_k)$.
   S'il existe un entier k de $[\![1, N]\!]$ tel que $p_k = 0$, on pose par convention : $p_k \ln(p_k) = 0$.
   On note h_N la fonction de $(]0, 1[)^N$ dans $\mathbf{R}$ définie par : $h_N(x) = h_N(x_1, \dots, x_N) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{N} x_k \ln(x_k)$.
   a. Calculer en tout point x de $(]0, 1[)^N$, le gradient $\nabla h_N(x)$ et la matrice hessienne $\nabla^2 h_N(x)$ de h_N.
   b. Montrer que pour l'optimisation de h_N sous la contrainte $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} x_k = 1$, il existe un unique point critique x^* que l'on précisera.
   c. En utilisant la question 5 ou l'égalité de Taylor-LagrangeHors programme... à l'ordre 1, montrer que h_N admet en x^* un maximum global sous la contrainte $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} x_k = 1$.
   d. Parmi les variables aléatoires à valeurs dans $[\![1, N]\!]$, quelle est la loi de celles qui ont la plus grande entropie ?

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites réelles strictement positives $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telles que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ vérifiant pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $P([X = n]) = p_n$ avec $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathscr{S}$.
On appelle entropie de X, le réel $H(X)$ défini sous réserve de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p_n |\ln(p_n)|$, par :

$$H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n |\ln(p_n)|.$$

9. Soit $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de $\mathscr{S}$ telle que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} np_n$ est convergente.
   a. Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $\sqrt{p_n}\,|\ln(p_n)| \leqslant 1$.
   b. Établir pour tout $n \geqslant n_0$ tel que $p_n \leqslant \dfrac{1}{n^3}$, l'inégalité : $p_n|\ln(p_n)| \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}}$.
   c. En déduire que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $p_n|\ln(p_n)| \leqslant \max\left\{\dfrac{1}{n^{3/2}}, 3p_n \ln n\right\}$.
   d. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p_n|\ln(p_n)|$ est convergente.
   Que peut-on en conclure sur l'entropie d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ possédant une espérance ?
10. Soit θ un réel de $]0, 1[$ et $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite de $\mathscr{S}$ définie par : pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $p_n = \theta(1-\theta)^{n-1}$.
   Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ qui vérifie pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $P([X = n]) = p_n$.
   a. Reconnaître la loi de X ; préciser son espérance, puis calculer son entropie.
   b. Écrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function y = X(theta)` permettant de simuler X.

c. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ ayant une espérance égale à celle de X. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on pose : $q_n = P([Y = n])$. On suppose que $(q_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathscr{S}$ et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} q_n \ln\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)$ est convergente.

Établir l'égalité : $H(Y) - H(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} q_n \ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$.

d. Déterminer le signe de $H(Y) - H(X)$. Conclusion.

Partie IV. Entropie et taux de rendement asymptotique.

11. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs réelles, définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, qui converge en probabilité vers une variable aléatoire X.

a. Montrer que pour tout n de $\mathbf{N}^*$, l'application Z_n définie sur Ω par $Z_n : \omega \longmapsto \exp\left(X_n(\omega)\right)$ est une variable aléatoire. De même, on note Z la variable aléatoire $Z : \omega \longmapsto \exp\left(X(\omega)\right)$.
Soit ε et α deux réels strictement positifs.

b. Justifier l'existence d'un réel s tel que $P([|X| \geqslant s]) < \alpha$.

c. Soit K_1, K_2 et K_3 trois éléments de $\mathscr{A}$. Montrer que $P(K_1 \cup K_2 \cup K_3) \leqslant P(K_1) + P(K_2) + P(K_3)$; en déduire l'inégalité : $P([|Z_n - Z| \geqslant \varepsilon]) \leqslant P([|X| \geqslant s]) + P([|X_n - X| \geqslant 1]) + P([|X_n - X| \geqslant \varepsilon \exp(-1-s)])$.

d. Conclure.

On considère une succession de courses hippiques entre N chevaux participants $(N \geqslant 2)$ numérotés $1, 2, \ldots, N$.
Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on note G_n la variable aléatoire égale au numéro du cheval gagnant de la n-ième course.
On suppose que les variables aléatoires $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ à valeurs dans $[\![1, N]\!]$, sont définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi. On suppose qu'il n'y a qu'un seul gagnant par course.
On pose pour tout k de $[\![1, N]\!]$ et pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $p_k = P([G_n = k])$, avec $0 < p_k < 1$.
Pour tout k de $[\![1, N]\!]$, on note c_k $(c_k > 1)$ la cote du cheval k ; ainsi, un parieur qui a misé un montant m_k sur le cheval k perdra sa mise quelle que soit l'issue de la course, mais recevra la somme $m_k c_k$ si le cheval k est gagnant. On suppose que les cotes $c_1, c_2, \ldots, c_N$ sont fixes au cours du temps.
À l'occasion de la première course, un parieur dispose d'une somme monétaire $r_0 > 0$ qu'il souhaite répartir en totalité entre les N chevaux dans les proportions respectives $f_1, f_2, \ldots, f_N$, où pour tout k de $[\![1, N]\!]$, $0 < f_k < 1$.
À l'issue de cette première course, le parieur dispose d'une somme monétaire $R_1 = r_0 M_1$ avec $M_1 > 0$.
À l'occasion de la deuxième course, ce parieur réinvestit en totalité la somme R_1 entre les N chevaux dans les mêmes proportions $f_1, f_2, \ldots, f_N$.
À l'issue de cette deuxième course, le parieur dispose d'une somme monétaire $R_2 = R_1 M_2$ avec $M_2 > 0$, et ainsi de suite...
La richesse monétaire R_n acquise au terme de n courses est donc : $R_n = r_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{n} M_i$.
On définit pour tout n de $\mathbf{N}^*$, le taux de rendement moyen des paris par : $T_n = \left(\dfrac{R_n}{r_0}\right)^{1/n} - 1$.

12. a. Justifier que $(M_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs strictement positives et de même loi.

b. On suppose que la variable aléatoire $\ln(M_1)$ admet une espérance $E\big(\ln(M_1)\big)$ et une variance $V\big(\ln(M_1)\big)$.
Montrer que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable certaine τ que l'on exprimera en fonction de $E\big(\ln(M_1)\big)$. Le réel τ est le taux de rendement asymptotique des paris.

13. La stratégie du parieur consiste à choisir les proportions $f_1, f_2, \ldots, f_N$ qui maximiseraient τ.
On rappelle que les proportions $f_1, f_2, \ldots, f_N$ sont constantes au cours du temps.

a. Montrer que : $\tau = \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{N} p_k \ln(f_k c_k)\right) - 1$.

b. En déduire la stratégie optimale du parieur et la valeur optimale de τ associée à ses paris.

c. On suppose dans cette question que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{c_k} = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} p_k \ln(p_k c_k) \geqslant 0$.
Dans quel cas le parieur ne dispose-t-il d'aucune stratégie lui permettant de s'assurer un taux de rendement asymptotique optimal strictement positif?

HEC 2011

Sujet : Rayon spectral d'une matrice

Abordable en première année : ✗

Thèmes du programme abordés : diagonalisation, nombres complexes.

Moyen

Intérêt : ★★☆

Pour tout couple (p, q) d'entiers de $\mathbf{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{C})$) l'ensemble des matrices à p lignes et q colonne à coefficients réels (resp. complexes) et $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ (resp. $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$) cet ensemble lorsque $p = q$.
On note I_p la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$.

Dans tout le problème :

• pour tout p de $\mathbf{N}^*$, on identifie les espaces vectoriels $\mathbf{C}^p$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{C})$, c'est-à-dire que l'on identifie tout élément de $\mathbf{C}^p$ avec le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{C}^p$;

• on note ${}^tA$ la transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{C})$, $|z|$ le module d'un nombre complexe z, i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$, et on admet que la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ a pour limite 0 si et seulement si la suite réelle $(|z_n|)_{n\in\mathbf{N}^*}$ a pour limite 0 ;

• pour toute matrice $A = (a_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$, on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A, et on pose : $\rho(A) = \max\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$ et $N(A) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} \sum\limits_{j=1}^{p} |a_{k,j}|$;

• le vecteur nul de $\mathbf{C}^p$ est noté 0. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbf{R}^p$, on note $X < Y$ (resp. $X \leqslant Y$) si pour tout k de $[\![1, p]\!]$, on a $x_k < y_k$ (resp. $x_k \leqslant y_k$). En particulier, si les coordonnées de X sont toutes positives (resp. strictement positives), on note $X \geqslant 0$ (resp. $X > 0$) ;

• pour tout vecteur V de $\mathbf{C}^p$, on note $|V|$ le vecteur de $\mathbf{R}^p$ dont les coordonnées sont les modules de celles de V.

Soit $(M_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on pose $M_n = (m_{k,j}(n))_{1\leqslant k,j\leqslant p}$.
On dit que la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers la matrice $M = (m_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$, si pour tout couple (k, j) de $[\![1, p]\!]^2$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} m_{k,j}(n) = m_{k,j}$; on note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = M$.
On admet sans démonstration que si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(B_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont deux suites de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ convergeant respectivement vers des matrices A et B, alors la suite $(A_n + B_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers la matrice $A + B$, la suite $(A_nB_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers la matrice AB et, pour tout réel α, la suite $(\alpha A_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers la matrice αA.

Une matrice $A = (a_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ est dite **positive** (resp. **strictement positive**) si pour tout couple (k, j) de $[\![1, p]\!]^2$, on a : $a_{k,j} \geqslant 0$ (resp. $a_{k,j} > 0$).

Le problème a pour objet l'étude des relations entre les valeurs propres de module maximal d'une matrice et la limite éventuelle de la suite des puissances entières de cette matrice. Ces relations, appliquées aux matrices positives et strictement positives, interviennent notamment dans la théorie des processus markoviens et dans les questions relatives à l'existence et la stabilité de l'équilibre général d'une économie.

Partie I. Deux exemples

1. *Exemple 1.* Soit A et J les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définies par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Calculer J^2 et déterminer les valeurs propres de J.

   b. Exprimer A en fonction de I_3 et J, et en déduire $\mathrm{Sp}(A)$ et $\rho(A)$.

   c. Exprimer pour tout n de $\mathbf{N}^*$, A^n en fonction de I_3, J et n. En déduire, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, la valeur de $N(A^n)$.

   d. Montrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers une matrice M que l'on explicitera et dont on précisera le rang. Montrer que M est la matrice d'un projecteur de $\mathbf{R}^3$.

2. *Exemple 2.* Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 1 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$.

   a. Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$. Justifier que A est diagonalisable. Calculer $N(A)$ et $\rho(A)$.

b. Déterminer une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{C})$ formée de vecteurs propres de A.
c. Expliciter pour tout n de $\mathbf{N}^*$, la matrice A^n. Comparer $\rho(A^n)$ et $\rho(A)^n$.
d. Montrer que pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on a : $N(A^n) = 2^{\frac{n}{2}}\,(1 + |\sin(n\pi/4)|)$. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty}(N(A^n))^{1/n}$ et $\rho(A)$.

Partie II. Un critère de convergence vers la matrice nulle

*Dans cette partie, on note $A = (a_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$, λ une valeur propre **complexe** de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^p$ un vecteur propre de A associé à λ.*

3. Soit k_0 un entier de $[\![1,p]\!]$ pour lequel on a $0 < |x_{k_0}| = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant p} |x_j|$.

Établir les encadrements suivants : $|\lambda| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{p} |a_{k_0,j}| \leqslant N(A)$ et $0 \leqslant \rho(A) \leqslant N(A)$.

4. Soit n un entier de $\mathbf{N}^*$ et μ une valeur propre de A^n telle que $|\mu| = \rho(A^n)$.

a. Montrer que λ^n est une valeur propre de A^n. En déduire l'inégalité : $\rho(A^n) \geqslant (\rho(A))^n$.
b. Montrer que le polynôme $X^n - \mu$ admet n racines complexes distinctes. On note $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ ces racines.
c. Établir l'égalité : $A^n - \mu I_p = \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(A - \alpha_j I_p)$.
d. Montrer qu'il existe un entier j_0 de $[\![0, n-1]\!]$ pour lequel α_{j_0} est une valeur propre de A.
e. En déduire l'égalité : $\rho(A^n) = (\rho(A))^n$. Établir l'encadrement : $0 \leqslant \rho(A) \leqslant (N(A^n))^{1/n}$.

5. On suppose que la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} N(A^n) = 0$. En déduire que $\rho(A) < 1$.

6. Dans cette question, on suppose que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbf{C}$.
On pose pour tout réel ε strictement positif : $A_\varepsilon = \dfrac{1}{\rho(A)+\varepsilon}A$.

a. Montrer que si $\rho(A) < 1$, alors la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$.
b. Montrer que $\rho(A_\varepsilon) < 1$. En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a : $N(A_\varepsilon^n) \leqslant 1$.
c. Établir pour tout n de $\mathbf{N}^*$, la relation : $N(A^n) = (\rho(A)+\varepsilon)^n N(A_\varepsilon^n)$.
d. À l'aide des questions précédentes, établir pour tout $n \geqslant n_0$, l'encadrement :

$$0 \leqslant (N(A^n))^{1/n} - \rho(A) \leqslant \varepsilon.$$

En déduire que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(N(A^n))^{1/n} = \rho(A)$.

Dans la suite du problème, on admet que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(N(A^n))^{1/n} = \rho(A)$ et que la suite $(A^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ si et seulement si on a $\rho(A) < 1$.

Partie III. Matrices positives – Relations entre $\rho(A)$ et les coefficients de A

Dans cette partie, on considère une matrice $A = (a_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ positive et non nulle.

7. Soit $B = (b_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ vérifiant pour tout couple (k,j) de $[\![1,p]\!]^2$: $b_{k,j} \leqslant a_{k,j}$.
Montrer que pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on a : $N(B^n) \leqslant N(A^n)$. En déduire l'inégalité : $\rho(B) \leqslant \rho(A)$.

8. On suppose dans cette question qu'il existe une constante s vérifiant pour tout k de $[\![1,p]\!]$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{k,j} = s$.

Établir l'égalité : $\rho(A) = s$.

9. On pose $\sigma = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant p} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{k,j}$. À l'aide des questions 7 et 8, établir l'encadrement : $\sigma \leqslant \rho(A) \leqslant N(A)$.

10. Soit X un vecteur de $\mathbf{R}^p$ tel que $X > 0$ et soit Δ_X la matrice diagonale de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ dont les éléments diagonaux sont les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_p$ de X.

a. Après avoir justifié l'existence de l'inverse Δ_X^{-1} de Δ_X, calculer la matrice $\Delta_X^{-1} A \Delta_X$.
b. Établir l'encadrement : $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant p} \dfrac{1}{x_k} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j \leqslant \rho(A) \leqslant \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} \dfrac{1}{x_k} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j$.
c. En déduire que s'il existe un réel positif β vérifiant $\beta X < AX$, il vérifie également $\beta < \rho(A)$.

Partie IV. Matrices strictement positives

Dans cette partie, la matrice $A = (a_{k,j})_{1\leqslant k,j\leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ est strictement positive, λ est une valeur propre ***complexe*** *de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, et $X \in \mathbf{C}^p$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*

11. a. Montrer que $\rho(A) > 0$.

 b. Établir la relation : $|AX| \leqslant A|X|$. En déduire que l'on a : $\rho(A)|X| \leqslant A|X|$.

 c. On pose : $Z = A|X|$. Montrer que $Z > 0$.

 d. On pose $Y = A|X| - \rho(A)|X|$ et on suppose $Y \neq 0$. Établir les relations : $AY > 0$ et $\rho(A)Z < AZ$.

 e. En déduire que $\rho(A)$ est une valeur propre de A et que $|X|$ est un vecteur propre de A associé à $\rho(A)$.

12. On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 non nuls et vérifiant $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.
On pose : $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, avec $(\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi[^2$.

 a. Montrer que $\theta_1 = \theta_2$.

 b. On considère p nombres complexes ($p \geqslant 2$) $z_1, z_2, \dots, z_p$ tous non nuls et vérifiant $\left|\sum_{j=1}^{p} z_j\right| = \sum_{j=1}^{p} |z_j|$.

 Établir l'existence d'un réel $\theta \in [0, 2\pi[$ vérifiant pour tout j de $[\![1, p]\!]$: $z_j = |z_j|e^{i\theta}$.

13. Montrer que $|X| > 0$ et que $|AX| = A|X|$. En déduire l'existence d'un réel θ de $[0, 2\pi[$ tel que $X = |X|e^{i\theta}$.

14. a. Montrer que $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module maximal.

 b. On suppose qu'il existe deux vecteurs propres $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$ de la matrice A associés à la valeur propre $\rho(A)$, linéairement indépendants.

 En considérant le vecteur $u_1 V - v_1 U$, aboutir à une contradiction. En déduire la dimension du sous-espace propre associé à $\rho(A)$.

15. a. Montrer que A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.

 b. Soit Z un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre $\rho(A)$. Justifier que les coordonnées de Z sont toutes strictement positives ou toutes strictement négatives.

 c. Soit U un vecteur propre de A vérifiant $U > 0$, associé à la valeur propre $\rho(A)$. On pose $Y = \dfrac{1}{{}^tZU} Z$.

 Établir les relations suivantes : $Y > 0$, ${}^tAY = \rho(A)Y$ et ${}^tYU = 1$.

16. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ définie par $M = U\,{}^tY$ où U a été défini à la question 15.c.

 a. Montrer que M est la matrice d'un projecteur de $\mathbf{R}^p$ dont on précisera l'image et le noyau.

 b. Établir pour tout n de $\mathbf{N}^*$, la relation : $\left(\dfrac{1}{\rho(A)}A - M\right)^n = \left(\dfrac{1}{\rho(A)}A\right)^n - M$.

17. Soit μ une valeur propre non nulle de $(A - \rho(A)M)$ et W un vecteur propre de $(A - \rho(A)M)$ associé à μ.

 a. Montrer que $MW = 0$. En déduire que μ est également une valeur propre de A et que $|\mu| \leqslant \rho(A)$.

 b. En raisonnant par l'absurde et en utilisant la question 14.a, montrer que $|\mu| < \rho(A)$.

 c. Déduire des résultats précédents que $\rho(A - \rho(A)M) < \rho(A)$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\rho(A)}A\right)^n = M$.

Partie V. Un algorithme de calcul de $\rho(A)$ et d'un vecteur propre associé.

On munit l'espace vectoriel $\mathbf{R}^p$ de son produit scalaire canonique. On note $\|\,\|$ la norme euclidienne associée.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ strictement positive, symétrique, admettant p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ telles que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_p|$. Soit V_0 un vecteur de $\mathbf{R}^p$ tel que $V_0 > 0$. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base orthonormée de $\mathbf{R}^p$ formée de vecteurs propres de A tels que pour tout k de $[\![1, p]\!]$, $Ae_k = \lambda_k e_k$.

On rappelle qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de $\mathbf{R}^p$ converge vers un vecteur L de $\mathbf{R}^p$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|X_n - L\| = 0$ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = L$.

On définit la suite $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de $\mathbf{R}^p$ par : V_0, et pour tout n de $\mathbf{N}$, $V_{n+1} = AV_n$.

18. a. Soit $V_0 = \sum_{k=1}^{p} s_k e_k$, la décomposition de V_0 dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$. Montrer que $s_1 \neq 0$.

 b. Établir la relation : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|} = \lambda_1$.

 c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V_n}{\|V_n\|}$ (on distinguera deux cas suivant le signe de s_1).

19. On suppose déjà définis en `Scilab` une fonction `norme` qui calcule la norme d'un vecteur V.

- **a.** Écrire une fonction d'entête `function Vn = puissance(A,n,V0)` qui calcule pour tout entier naturel n non nul, le vecteur V_n défini ci-dessus.
- **b.** Écrire une fonction `function V = vectpropre(A,n,V0)` qui calcule la valeur approchée d'un vecteur propre associé à λ_1 obtenu pour une valeur de n donnée et une fonction `function lambda = valpropre(A,n,V0)` qui calcule la valeur approchée de λ_1 obtenue pour une valeur de n donnée.
  On expliquera les différentes étapes de ces fonctions.

HEC 2011 : CORRIGÉ

Partie I : Deux exemples

1. *Exemple 1.*

1.a. On a $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$. Donc un polynôme annulateur de J est $X^2 - 3X = X(X-3)$, de sorte que $\mathrm{Spec}(J) \subset \{0, 3\}$.
Or J est de rang 1, donc 0 est valeur propre de J, et $\dim E_0(J) = 3 - \mathrm{rg}(J) = 2$.
De plus, on a $J\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc 3 est également valeur propre de J.
Ainsi, $\boxed{\mathrm{Spec}(J) = \{0, 3\}.}$

Notons au passage[1] que J est diagonalisable, semblable à $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[1] Bien que ce ne soit pas demandé.

1.b. On a $A = \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I_3$. Or, il existe une matrice P inversible telle que $J = P^{-1}DP$, et donc

$$A = \frac{1}{2}\left(P^{-1}DP - I_3\right) = \frac{1}{2}\left(P^{-1}DP - P^{-1}I_3P\right) = \frac{1}{2}P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P.$$

On en déduit que $\mathrm{Spec}(A) = \{1, -\frac{1}{2}\}$. Alors $\boxed{\rho(A) = 1.}$

1.c. Par la formule du binôme de Newton, puisque J et I_3 commutent, on a

$$A^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}J^k.$$

Or, en utilisant $J^2 = 3J$, une récurrence rapide prouve que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $J^k = 3^{k-1}J$.
Et donc

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{2^n}\left((-1)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}3^{k-1}J\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\left((-1)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}3^k - (-1)^n\right)J\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\left((-1)^n I_3 + \frac{1}{3}\left((3-1)^n - (-1)^n\right)J\right) \\
&= \left(\frac{-1}{2}\right)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)J.
\end{aligned}$$

Ainsi, les coefficients diagonaux de A^n valent $\frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{n}\right)^n\right)$, et tous les autres valent $\frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$.
En particulier, tous ces coefficients sont positifs, et donc pour chaque ligne de A^n, la somme des valeurs absolues des coefficients vaut

$$\frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{n}\right)^n\right) + \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) = 1.$$

On en déduit donc que $\boxed{N(A^n) = 1.}$

1.d. Lorsque $n \to +\infty$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n I_3 \to 0$ et $\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)J \to \frac{1}{3}J$, donc $A^n \to \frac{1}{3}J$.
On a alors

$$\left(\frac{1}{3}J\right)^2 = \frac{1}{9}J^2 = \frac{1}{3}J.$$

Donc cette matrice est bien une matrice de projecteur.

2. *Exemple 2*

2.a. A est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Donc $\mathrm{Spec}(A) = \{1, 1+i, 1-i\}$.
En particulier, A possède trois valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable.
On a alors $\rho(A) = |1+i| = \sqrt{2}$, et $N(A) = |1+i| + 1 = 1 + \sqrt{2}$.

2.b. On a $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ et $E_{1+i}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Pour le dernier sous-espace propre, il s'agit de résoudre un système linéaire (à coefficients complexes !). On a :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_{1-i}(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1+i & 1\\0 & 0 & 1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (1-i)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1-i)x \\ (1+i)y + z = (1-i)y \\ (1-i)z = (1-i)z \end{cases}$$

On obtient alors $\begin{cases} x = 0 \\ 2iy = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{iz}{2} \end{cases}$ de sorte que $E_{1-i}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\i\\2\end{pmatrix}\right)$.

Ainsi, une base de $\mathbf{C}^3$ formée de vecteur propres de A est

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\\2\end{pmatrix}.}$$

Sans calculs !
Ne résolvons pas un système pour trouver ces vecteurs propres : on sait déjà que les sous-espaces propres sont de dimension 1, et ces deux vecteurs propres se lisent directement sur A, en remarquant que les deux premières colonnes sont nulles, à l'exception du coefficient diagonal.

2.c. La question précédente a prouvé que

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1+i & 0\\0 & 0 & 1-i\end{pmatrix}P \text{ avec } P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & i\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -i/2\\0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$A^n = P^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & (1+i)^n & 0\\0 & 0 & (1-i)^n\end{pmatrix}P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & (1+i)^n & \frac{i}{2}\left((1-i)^n - (1+i)^n\right)\\0 & 0 & (1-i)^n\end{pmatrix}.$$

Mais on a alors

$$(1-i)^n - (1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^n - \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^n = 2^{n/2}\left(e^{-in\pi/4} - e^{-in\pi/4}\right) = -22^{n/2}i\sin(n\pi/4).$$

Classique
$1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$
$1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

Et donc la somme des modules des coefficients de la seconde ligne de A^n vaut

$$2^{n/2} + 2^{n/2}|\sin(n\pi/4)| = 2^{n/2}\left(1 + |\sin(n\pi/4)|\right).$$

Il est facile de voir que la somme des modules des coefficients des deux autres lignes est inférieure et donc

$$\boxed{N(A^n) = 2^{n/2}\left(1 + |\sin(n\pi/4)|\right).}$$

On a alors

$$\sqrt{2} \leqslant N(A^n)^{1/n} = \sqrt{2}\left(1 + |\sin(n\pi/4)|\right)^{1/n} \leqslant \sqrt{2}2^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}.$$

Méthode
Afin de mieux contrôler le terme $|\sin(n\pi/4)|$ qui vaut tantôt 0 tantôt 1, le plus simple est de le majorer par 1.

Puisque $\rho(A) = \sqrt{2}$, on constate donc que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} N(A^n)^{1/n} = \rho(A).}$$

Partie II. Un critère de convergence vers la matrice nulle

3. Par définition, $N(A) = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \sum_{j=1}^{p} |a_{k_0,j}|$. Et donc en particulier,

$$\sum_{j=1}^{p} |a_{k,j}| \leqslant N(A).$$

Si X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors $AX = \lambda X$. En particulier, en comparant les coefficients situés à la k_0-ème ligne, on a

$$|\lambda x_{k_0}| = \left| \sum_{j=1}^{p} a_{k_0,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |a_{k_0,j}||x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |a_{k_0,j}||x_{k_0}|.$$

Inégalité triangulaire

En divisant par $|x_{k_0}|$, qui est non nul car X n'est pas le vecteur nul[2], il vient

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |a_{k_0,j}|.$$

Ceci étant vrai pour toute valeur propre de A, on en déduit en particulier que $\rho(A) \leqslant N(A)$. De plus, il est évident que $\rho(A) \geqslant 0$, par définition.

4.a. On a $AX = \lambda X$, et alors, une récurrence rapide prouve que $A^n X = \lambda^n X$. Puisque $X \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que λ^n est valeur propre de A^n.
Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, on a $|\lambda^n| \leqslant \rho(A^n)$.
De plus, on sait que $|\lambda^n| = |\lambda|^n$, et donc

$$\left(\max_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} |\lambda| \right)^n = \max_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} |\lambda^n|$$

de sorte que $\boxed{\rho(A)^n \leqslant \rho(A^n).}$

Explication
$\rho(A^n)$ est le module de la plus grande valeur propre de A^n.

4.b. Si on les compte avec multiplicité, alors le polynôme $X^n - \mu$ possède n racines complexes, c'est le théorème de D'Alembert-Gauss.
Mais son polynôme dérivé est nX^{n-1} qui ne possède que 0 comme racine.
Si $\mu \neq 0$, alors les racines de $X^n - \mu$ sont non nulles, donc $X^n - \mu$ possède bien n racines distinctes.
En revanche, si $\mu = 0$, alors $X^n - \mu$ possède 0 comme unique racine, d'ordre de multiplicité n. On peut donc prendre $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n - 1 = 0$.

Erreur d'énoncé
Si $\mu = 0$, ces racines ne sont en fait pas distinctes. Ce n'est pas gênant pour la suite.

4.c. On a $X^n - \mu = \prod_{j=0}^{n-1} (X - \alpha_j)$, et donc en passant aux polynômes de matrices, il vient

$$A^n - \mu I_p = \prod_{j=1}^{p-1} (A - \alpha_j I_p).$$

4.d. μ est valeur propre de A^n, donc $A^n - \mu I_p$ n'est pas inversible.
Si aucun des α_i n'était valeur propre de A, alors toutes les $A - \alpha_j I_p$ seraient inversible, et donc il en serait de même de $A^n - \mu I_p = \prod_{j=0}^{p-1} (A - \alpha_j I_p)$.
Puisque $A^n - \mu I_p$ n'est pas inversible, l'une des $A - \alpha_j I_p$ n'est pas inversible, et donc l'un des α_j est une valeur propre de A.

Rappel
Un produit de matrices inversible est inversible.

4.e. Si α_{j_0} est valeur propre de A, alors $\rho(A) \geqslant |\alpha_{j_0}|$ et donc $\rho(A)^n \geqslant |\alpha_{j_0}|^n = |\alpha_{j_0}^n| = |\mu| = \rho(A^n)$.
Puisqu'on avait déjà prouvé l'inégalité inverse, on en déduit que $\boxed{\rho(A^n) = \rho(A)^n.}$
Comme de plus, on a $\rho(A^n) \leqslant N(A^n)$, on en déduit, par croissance de la fonction $x \mapsto x^{1/n}$ que $\rho(A^n)^{1/n} \leqslant (N(A)^n)^{1/n}$ et donc

$$\boxed{0 \leqslant \rho(A) \leqslant (N(A^n))^{1/n}.}$$

[2] Et donc l'un de ses coefficients est non nul, donc de valeur absolue strictement positive.

5. Notons $a_{k,j}(n)$ le coefficient situé à la k-ème ligne et j-ème colonne de A^n.
Si A^n converge vers la matrice nulle, alors pour tout couple (k,j) d'entiers, on a $A_{k,j}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En particulier, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $N_{k,j}$ tel que pour $n \geqslant N_{k,j}$, $|a_{k,j}(n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{p}$.

Soit alors $N = \max\limits_{1\leqslant k,j\leqslant p} N_{k,j}$. Alors pour $n \geqslant N$, on a $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} |a_{k,j}| \leqslant p\frac{\varepsilon}{p} \leqslant \varepsilon$.
En prenant le maximum de ces quantités lorsque k varie, il vient, toujours pour $n \geqslant N$,

$$0 \leqslant N(A) = \max_{1\leqslant j\leqslant p} \sum_{j=1}^{p} |a_{k,j}| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on reconnaît bien la définition de $N(A^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Si on avait $\rho(A) \geqslant 1$, alors par la question précédente, $N(A^n)^{1/n} \geqslant 1$ et donc $N(A) \geqslant 1^n \geqslant 1$, ce qui est en contradiction avec $\lim\limits_{n\to+\infty} N(A^n) = 0$.

On en déduit que $\boxed{\rho(A) < 1.}$

6.a. Puisque A est diagonalisable, elle est semblable à $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$, où les λ_i sont les différentes valeurs propres de A, chacune apparaissant autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé. Et puisque $\rho(A) < 1$, on a $\forall i \in [\![1,p]\!], |\lambda_i| < 1$.
Alors $D^n = \mathrm{Diag}(\lambda_1^n,\dots,\lambda_p^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Mais alors, si P est telle que $A = P^{-1}DP$, alors $\boxed{A^n = P^{-1}D^nP \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

6.b. Avec les notations de la question 6.a, A_ε est semblable à $\dfrac{1}{\rho(A)+\varepsilon}\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$, et donc les valeurs propres de A_ε sont $\dfrac{\lambda_1}{\rho(A)+\varepsilon},\dots,\dfrac{\lambda_p}{\rho(A)+\varepsilon}$.
En particulier, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on a

$$\left|\frac{\lambda_i}{\rho(A)+\varepsilon}\right| = \frac{|\lambda_i|}{\rho(A)+\varepsilon} \leqslant \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon} < 1.$$

On en déduit donc que $\rho(A_\varepsilon) < 1$.
Alors, par la question 6.a, $(A_\varepsilon^n)_n$ converge vers la matrice nulle.
D'après le résultat de la question 5, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} N(A_\varepsilon^n) = 0$.
En particulier[3], il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $N(A_\varepsilon^n) \leqslant 1$.

[3] C'est la définition de la convergence d'une suite : pour n assez grand $N(A_\varepsilon^n)$ est assez petit.

6.c. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $A_\varepsilon^n = \dfrac{1}{(\rho(A)+\varepsilon)^n}A^n$. En particulier, la somme des modules des coefficients de la k-ème ligne de A_ε^n est égale à $\dfrac{1}{(\rho(A)+\varepsilon)^n}$ fois la somme des modules des coefficients de la k-ème ligne de A^n. Et en prenant le maximum sur les lignes, il vient

$$N(A_\varepsilon^n) = \frac{1}{(\rho(A)+\varepsilon)^n}N(A^n) \Leftrightarrow N(A^n) = (\rho(A)+\varepsilon)^n N(A_\varepsilon^n).$$

6.d. Pour $n \geqslant n_0$, on a

$$N(A_\varepsilon^n) \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(\rho(A)+\varepsilon)^n}N(A^n) \leqslant 1.$$

Soit encore $N(A^n) \leqslant (\rho(A)+\varepsilon)^n$. Par croissance de la fonction $t \mapsto t^{1/n}$, il vient

$$N(A^n)^{1/n} \leqslant \rho(A)+\varepsilon \Leftrightarrow N(A^n) - \rho(A) \leqslant \varepsilon.$$

De plus, il a déjà été prouvé à la question 4.e. que $0 \leqslant N(A^n)^{1/n} - \rho(A)$. On a donc bien

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0, 0 \leqslant N(A^n)^{1/n} - \rho(A) \leqslant \varepsilon.}$$

Ceci étant vrai[4] pour tout ε, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} N(A^n)^{1/n} = \rho(A).}$$

[4] Ne perdons pas de vue que n_0 dépend tout de même de ε.

Partie III. Matrices positives – Relations entre $\rho(A)$ et les coefficients de A.

7. Notons qu'il est très facile[5] de voir que A^n et B^n sont des matrices positives pour tout n.
Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $B^n \leqslant A^n$.
Pour $n = 1$, c'est l'hypothèse de l'énoncé.
Supposons donc que $B^n \leqslant A^n$, et notons $a_{k,j}(n)$ (resp. $b_{k,j}(n)$) le coefficient à la k-ème ligne et j-ème colonne de A^n (resp. de B^n).
Alors pour tout $(k, j) \in [\![1, p]\!]^2$, on a

$$b_{k,j}(n+1) = \sum_{\ell=1}^{p} b_{k,\ell}(n) b_{\ell,j} \leqslant \sum_{\ell=1}^{p} a_{k,\ell}(n) a_{\ell,j} = a_{k,j}(n+1).$$

Ainsi, on a bien $B^{n+1} \leqslant A^{n+1}$.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $B^n \leqslant A^n$.

En particulier, pour $k \in [\![1, p]\!]$, on a

$$\sum_{j=1}^{p} b_{k,j}(n) \leqslant \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}(n) \leqslant N(A^n).$$

Et alors, en prenant le maximum sur k, il vient $\boxed{N(B^n) \leqslant N(A^n).}$
Et donc pour tout n, $N(A^n)^{1/n} \leqslant N(B^n)^{1/n}$, de sorte qu'en passant à la limite, $\boxed{\rho(A) \leqslant \rho(B).}$

[5] Même si pour être totalement rigoureux, il faudrait le prouver par récurrence.

Valeurs absolues
Puisqu'on manipule ici des matrices positives, on peut se dispenser des valeurs absolues dans la définition de N.

8. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$. Alors $AV = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1,j} \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{p,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ \vdots \\ s \end{pmatrix} = sV$. Donc s est valeur propre de A.

De plus, si λ est une valeur propre de A et si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé, alors

on a, en notant $m = \max_{1 \leqslant j \leqslant p} |x_j|$:

$$|\lambda| \cdot |x_k| = |\lambda x_k| = (|AX|)_k = \left| \sum_{j=1}^{p} a_{k,j} x_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{p} a_{k,j} |x_j| \leqslant ms.$$

m est non nul car $X \neq 0$, par définition d'un vecteur propre.

En prenant le maximum sur k, il vient $|\lambda| m \leqslant ms$, et donc en divisant par $m > 0$, on a donc $|\lambda| \leqslant s$.
Ainsi, toutes les valeurs propres de A sont de module inférieur à s, de sorte que $\rho(A) \leqslant s$.
Puisque s est valeur propre de A, on en déduit que $\boxed{\rho(A) = s.}$

Application
Par exemple, si A est la matrice de transition d'une chaîne de Markov, alors la somme de chaque ligne est égale à 1, donc la plus grande valeur propre est 1.

9. Notons qu'on a déjà prouvé à la question 3 que $\rho(A) \leqslant N(A)$, donc il s'agit ici de prouver que $\sigma \leqslant \rho(A)$.
Soit $B = (b_{k,j})$ la matrice définie par

$$b_{k,j} = \begin{cases} a_{k,j} & \text{si } \sum_{i=1}^{j} a_{k,i} \leqslant \sigma \\ \sigma - \sum_{i=1}^{j-1} a_{k,i} & \text{si } \sum_{i=1}^{j-1} a_{k,i} \leqslant \sigma \text{ et } \sum_{i=1}^{j} a_{k,i} \geqslant \sigma \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^{j-1} a_{k,i} > \sigma \end{cases}$$

Alors B est une matrice positive, $B \leqslant A$ et la somme des coefficients de chaque ligne vaut σ.

Par la question 8, on a $\rho(B) = \sigma$. Et par la question 7, il vient alors

$$\boxed{\sigma = \rho(B) \leqslant \rho(A).}$$

Explication
La matrice B est obtenue en gardant les coefficients de A, mais, pour les lignes dont la somme des coefficients est supérieure à σ, on a modifié les derniers coefficients afin que la somme de chaque ligne soit égale à σ.

10.a. Δ_X est diagonale, et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls[6] donc inversible.
Notons qu'alors $\Delta_X^{-1} = \text{Diag}\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_p}\right)$.
Remarquons que multiplier une matrice M à droite par Δ_X revient à multiplier la j-ème colonne de M par x_j.
De même, multiplier une matrice M à gauche par Δ_X^{-1} revient à multiplier la k-ème ligne de M par $\frac{1}{x_k}$.
Ainsi, $\boxed{\text{le coefficient à la } k\text{-ème ligne et } j\text{-ème colonne de } \Delta_X^{-1}A\Delta_X \text{ est } \frac{x_j}{x_k}a_{k,j}.}$

[6] Car strictement positifs

Détail
Pour se convaincre de ce fait, il suffit de faire le produit «à la main», mais on peut bien entendu également utiliser la formule du produit matriciel, en notant que pour une matrice diagonale, les seuls coefficients susceptibles d'être non nuls sont les coefficients diagonaux.

10.b. Notons que $\Delta_X^{-1}A\Delta_X$ est semblable à A, et donc possède les mêmes valeurs propres. En particulier, $\rho(A) = \rho(\Delta_X^{-1}A\Delta_X)$. Or

$$N(\Delta_X^{-1}A\Delta_X) = \max_{1\leqslant k\leqslant p} \sum_{j=1}^{p} \frac{x_j}{x_k a_{k,j}} = \max_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j.$$

Puisque $\rho(\Delta_X^{-1}A\Delta_X) \leqslant N(\Delta_X^{-1}A\Delta_X)$, on en déduit que

$$\boxed{\rho(A) \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j.}$$

De même, en appliquant le résultat de la question 9 à $\Delta_X^{-1}A\Delta_X$, il vient

$$\boxed{\min_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j \leqslant \rho(A).}$$

10.c. Supposons que $\beta X < AX$. Alors pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\beta x_k < \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j$. Et alors

$$\beta < \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j.$$

Puis en passant au minimum sur k, il vient

$$\beta < \min_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j \leqslant \rho(A)$$

de sorte que $\boxed{\beta < \rho(A).}$

Partie IV. Matrices strictement positives

11.a. Puisque A est strictement positive, la somme des coefficients de chaque ligne de A est strictement positive. En particulier, en reprenant les notations de la question 9, on a $\sigma > 0$, et donc $\boxed{\rho(A) \geqslant \sigma > 0.}$

Détail
Tous les coefficients de A sont strictement positifs !

11.b. Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Alors

$$|(AX)_k| = \left|\sum_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |a_{k,j}| \cdot |x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}|x_j| = (A|X|)_k.$$

Ainsi, on a bien $|AX| \leqslant A|X|$.
Puisque $AX = \lambda X$, on a donc $|AX| = |\lambda| \cdot |X|$. Et donc

$$\boxed{\rho(A)|X| \leqslant A|X|.}$$

11.c. Les coefficients de A sont tous strictement positifs. On a donc, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $Z_k = \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}|x_j| \geqslant 0$. Mais X est non nul, et donc il existe $k_0 \in [\![1,p]\!]$ tel que $|x_{k_0}| > 0$. Et alors

$$Z_k = \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}|x_j| \geqslant a_{k,k_0}|x_{k_0}| > 0.$$

On en déduit donc que $\boxed{Z > 0.}$

Piège — Pour des vecteurs, $Y \geqslant 0$ et $Y \neq 0$ ne garantit pas $Y > 0$, car il se pourrait par exemple que l'un des coefficients de Y soit nul.

11.d. D'après la question 11.b, on a $Y \geqslant 0$, et par hypothèse, $Y \neq 0$.
Mais tous les coefficients de A sont strictement positifs, donc on peut refaire le même raisonnement que celui que nous venons de faire à la question 11.c en remplaçant $|X|$ par Y, pour prouver que $AY > 0$.
Et alors, on a

$$AY > 0 \Leftrightarrow AA|X| - \rho(A)A|X| > 0 \Leftrightarrow AZ - \rho(A)Z > 0 \Leftrightarrow \boxed{\rho(A)Z < AZ.}$$

Remarque — On savait que $\rho(A)$ était le module d'une valeur propre de A, ce que nous venons de montrer, c'est qu'en fait cette valeur propre est un réel positif.

11.e. Z est strictement positif, et puisque $\rho(A)Z < AZ$, par la question 10.c, appliquée avec $\beta = \rho(A)$, on a $\rho(A) < \rho(A)$, ce qui est impossible.
On en déduit que $Y = 0$, et donc $A|X| = \rho(A)|X|$. Puisque $X \neq 0$, cela signifie que $\rho(A)$ est valeur propre de A.

12.a. Quitte à multiplier z_1 et z_2 par $e^{-i\theta_1}$, on peut supposer que $\theta_1 = 0$, c'est-à-dire que z_1 est un réel positif. Dans ce cas, il vient

Module — Si l'on peut faire cette hypothèse, c'est car multiplier un complexe par $e^{-i\theta_1}$ ne change pas son module.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= \left|z_1 + |z_2|\cos(\theta_2) + i|z_2|\sin(\theta_2)\right|^2 \\ &= (z_1 + |z_2|\cos(\theta_2))^2 + |z_2|^2 \sin\theta_2 \\ &= z_1^2 + |z_2|^2\left(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2\right) + 2z_1|z_2|\cos\theta_2 = z_1^2 + |z_2|^2 + 2z_1 z_2 \cos\theta_2. \end{aligned}$$

$|a+ib|^2 = a^2 + b^2$.

D'autre part, on a $(|z_1| + |z_2|)^2 = (z_1 + |z_2|)^2 = z_1^2 + 2z_1|z_2| + |z_2|^2$.
Ainsi, on a $|z_1 + |z_2|^2 = (z_1 + |z_2|)^2$ si et seulement si $\cos\theta_2 = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\theta_2 = 0$. Et donc $\boxed{z_1 \text{ et } z_2 \text{ ont même argument.}}$

Explication — L'inégalité triangulaire pour les complexes est une égalité si et seulement si les deux nombres ont le même argument.

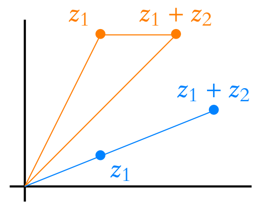


FIGURE 1– Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

12.b. Procédons par récurrence sur p.
Pour $p = 2$, la propriété vient d'être prouvée.
Supposons donc la propriété vraie au rang n et soient $z_1, \dots, z_{p+1}$ sont $p+1$ complexes non nuls tels que $\left|\sum_{j=1}^{p+1} z_j\right| = \sum_{j=1}^{p+1} |z_j|$.

D'après l'inégalité triangulaire, on a $\left|\sum_{j=1}^{p+1} z_j\right| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{p} z_j\right| + |z_{p+1}|$.

Supposons que $\left|\sum_{j=1}^{p} z_j\right| < \sum_{j=1}^{p} |z_j|$. Alors $\left|\sum_{j=1}^{p+1} z_j\right| < \sum_{j=1}^{p} |z_j| + |z_{p+1}|$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc nécessairement, $\left|\sum_{j=1}^{p} z_j\right| \geqslant \sum_{j=1}^{p} |z_j|$, et comme l'inégalité réciproque est vraie par l'inégalité triangulaire, il vient

$$\left|\sum_{j=1}^{p} z_j\right| = \sum_{j=1}^{p} |z_j|.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, cela signifie que les z_j, $1 \leqslant j \leqslant p$ ont tous le même argument θ. Or on a

$$\left|\sum_{j=1}^{p+1} z_j\right| = \sum_{j=1}^{p+1} |z_j| = \left|\sum_{j=1}^{p} z_j\right| + |z_{p+1}|.$$

Donc par la question 12.a, $\sum_{j=1}^{p} z_j$ et z_{p+1} ont même argument. Or, l'argument de $\sum_{j=1}^{p} z_j$ est θ, et donc celui de z_{p+1} est également θ.

Argument — Si tous les z_i ont le même argument, alors leur somme a encore le même argument (faire un dessin pour s'en convaincre).

Ainsi, les $p+1$ nombres complexes $z_1, \dots, z_{p+1}$ ont tous le même argument. Ceci prouve donc la propriété au rang $p+1$. Par le principe de récurrence, quel que soit $p \geqslant 2$ et quels que soient les nombres complexes non nuls $z_1, \dots, z_p$ tels que $\left|\sum_{j=1}^{p} z_j\right| = \sum_{j=1}^{p} |z_j|$, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $z_j = |z_j|e^{i\theta}$.

13. Il est évident que $|X| \geqslant 0$, et nous avons prouvé précédemment que $A|X| = \rho(A)|X|$. En particulier, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a

$$\rho(A)|x_k| = \sum_{j=1}^{p} a_{k,j}|x_j|.$$

Mais les $a_{k,j}$ sont tous strictement positifs, et X étant non nul, l'un au moins des $|x_j|$ est non nul. On en déduit donc que $\rho(A)|x_k| > 0$. Puisque $\rho(A) > 0$ d'après la question 11.a, c'est donc que $|x_k| > 0$. Ceci étant vrai pour tout k, on a bien $|X| > 0$.
De plus, nous savons que $AX = \lambda X$ et donc $|AX| = |\lambda X| = |\lambda| \cdot |X| = \rho(A)|X|$.
D'autre part nous avons prouvé à la question 11.e que $A|X| = \rho(A)|X|$, et donc $\boxed{|AX| = A|X|.}$
En considérant le premier coefficient de cette égalité matricielle, il vient

$$\left|\sum_{j=1}^{p} a_{1,j}x_j\right| = \sum_{j=1}^{p} |a_{1,j}x_j|.$$

Comme $A > 0$ et $X > 0$, les $a_{1,j}x_j$ sont des complexes non nuls, et donc par la question 12.b, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que les $a_{1,j}x_j$ soient tous d'argument θ.
Comme de plus les $a_{1,j}$ sont des réels strictement positifs, cela signifie que les x_j ont tous pour argument θ.
Autrement dit, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $x_j = |x_j|e^{i\theta}$. On en déduit que

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_p| \end{pmatrix} e^{i\theta} = |X|e^{i\theta}.}$$

Argument
Multiplier un nombre complexe par un réel positif ne change pas son argument.

14.a. Nous avons déjà prouvé que $|X|$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$. Par multiplication par le scalaire $e^{i\theta} \neq 0$, $X = e^{i\theta}|X|$ est également un vecteur propre associé à la valeur propre $\rho(A)$.
Or par hypothèse, X est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ. Donc $\lambda = \rho(A)$: la seule valeur propre de A de module $\rho(A)$ est $\rho(A)$.

14.b. Le vecteur $u_1V - v_1U$ est dans $E_{\rho(A)}(A)$ car U et V le sont.
De plus, ce vecteur est non nul car U et V sont linéairement indépendants[7], et $u_1 \neq 0$ car nous avons prouvé à la question 13 que $|U| > 0$.
Ainsi, $u_1V - v_1U$ est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre $\rho(A)$. Mais son premier coefficient est $u_1v_1 - v_1u_1 = 0$. Ceci contredit le résultat de la question 13 qui affirme que $|u_1V - v_1U| > 0$.
On en déduit que $\boxed{\text{le sous-espace propre associé à la valeur propre } \rho(A) \text{ est de dimension } 1.}$

[7] On travaille ici avec une valeur propre complexe, c'est-à-dire que l'on voit la matrice A comme un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$. En particulier, lorsqu'on parle de la dimension de ses sous-espaces propres, ont entend par là la dimension d'un espace vectoriel **complexe**.

Application
Si l'on combine les résultats des questions 11.e et 14.b, cela montre que si la matrice de transition A d'une chaîne de Markov est strictement positive (c'est-à-dire si de n'importe quel état on peut aller directement à n'importe quel autre état, on pensera notamment au cas du PageRank), alors 1 est valeur propre de A, avec un sous-espace propre de dimension 1, et ce sous-espace propre contient un vecteur dont toutes les composantes sont strictement positives. Il est alors aisé de se convaincre que ce sous-espace propre contient un seul vecteur probabiliste, c'est-à-dire dont la somme des composantes vaut 1.

15.a. λ est valeur propre de A si et seulement si $\operatorname{rg}(A - \lambda I_p) < p$. Mais

$$\operatorname{rg}(A - \lambda I_p) = \operatorname{rg}({}^t(A - \lambda I_p)) = \operatorname{rg}({}^tA - \lambda I_p)$$

et donc λ est valeur propre de A si et seulement si λ est valeur propre de ${}^tA$.

15.b. La question est floue, mais on suppose ici que l'on parle de vecteurs propres réels, et non plus de vecteurs propres complexes comme c'était le cas jusqu'à présent.
Soit donc $Z \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ tel que $AZ = \rho(A)Z$. On sait que $|Z| > 0$, et donc les coordonnées de Z sont toutes non nulles.
De plus, le résultat de la question 13 s'applique[8] : il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que toutes les coordonnées de Z aient pour argument θ.
Or, les z_j étant réels, ils ont pour argument soit 0 (s'ils sont strictement positifs), soit π (s'ils sont tous strictement négatifs).
Ainsi, les coordonnées de Z sont soit toutes strictement positives, soit toutes strictement négatives.

15.c. Notons que ${}^tZU$ est un nombre réel. Il est strictement positif si et seulement si tous les z_j sont strictement positifs. Dans tous les cas, ${}^tZU$ est «du même signe» que Z. Et donc les coefficients de $\frac{1}{{}^tZU}Z$ sont tous strictement positifs. Donc $\boxed{Y > 0.}$
Y est un multiple de Z, donc est également dans $E_{\rho(A)}({}^tA)$, de sorte que ${}^tAY = \rho(A)Y$.
Enfin, on a $\boxed{{}^tYU = \frac{1}{{}^tZU}{}^tZU = 1.}$

16.a. Notons que M est bien une matrice carrée car produit d'un vecteur colonne par un vecteur ligne de même taille p.
On a alors $M^2 = (U{}^tY)(U{}^tY) = U({}^tYU){}^tY = U{}^tY = M$.
Donc M est la matrice, dans la base canonique de $\mathbf{R}^p$, d'un projecteur de $\mathbf{R}^p$.
Notons que pour tout $X \in \mathbf{R}^p$, on a $MX = U \underbrace{{}^tYX}_{\in\mathbf{R}} \in \operatorname{Vect}(U)$ de sorte que l'image du projecteur associé à M est $\operatorname{Vect}(U)$.
De plus, on a $MX = 0 \Leftrightarrow U{}^tYX = 0 \Leftrightarrow {}^tYX = 0$, car $U \neq 0$.
Mais, si on identifie vecteurs lignes et vecteurs colonnes, alors $(X, Y) \mapsto {}^tXY$ est le produit scalaire canonique[9] de $\mathbf{R}^p$. Donc le noyau du projecteur associé à M est l'ensemble des X tels que ${}^tYX = 0 \Leftrightarrow \langle X, Y\rangle = 0$. Autrement dit, c'est $\operatorname{Vect}(Y)^\perp$.

Notations

On utilise ici les notations données au début de l'énoncé, identifiant $\mathbf{R}^p$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$. Notons qu'il s'agit juste d'identifier un vecteur colonne au vecteur ligne obtenu en le transposant.

16.b. On a $AM = AU{}^tY = \rho(A)U{}^tY = \rho(A)M$ et $MA = U{}^tYA = U{}^t({}^tAY) = U{}^t(\rho(A)Y) = \rho(A)U{}^tY = \rho(A)M$.
En particulier, A et M commutent, de sorte que par le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{\rho(A)^k}A^kM^{n-k} \\
&= \frac{1}{\rho(A)^n}A^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{\rho(A)^k}A^k(-1)^{n-k}M^{n-k} \\
&= \frac{1}{\rho(A)^n}A^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}M^{n-k} \\
&= \frac{1}{\rho(A)^n}A^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}M \\
&= \frac{1}{\rho(A)^n}A^n + \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\right)M \\
&= \frac{1}{\rho(A)^n}A^n + \left((1-1)^n - 1\right)M \\
&= \boxed{\frac{1}{\rho(A)^n}A^n - M.}
\end{aligned}$$

[9] Il suffit de l'écrire pour s'en convaincre :

$${}^tXY = x_1y_1 + \cdots + x_py_p.$$

Récurrence

Une récurrence rapide prouve que $AM = \rho(A)M$ implique que

$$A^kM = \rho(A)^kM.$$

Binôme de Newton dans $\mathbf{R}$.

17.a. Nous savons que $MW = 0$ si et seulement si ${}^tYW = 0$. Or, on a

$$AW - \rho(A)MW = \mu W.$$

En multipliant à gauche par ${}^tY$, il vient

$${}^tYAW - \rho(A){}^tYMW = \mu{}^tYW \Leftrightarrow \rho(A){}^tYW - \rho(A){}^tYW = \mu{}^tYW \Leftrightarrow 0 = \mu{}^tYW.$$

Puisque $\mu \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que ${}^tYW = 0$, et donc $MW = 0$.
On en déduit que $AW = \mu W$, et donc μ est également une valeur propre de A. Et puisque $\rho(A)$ désigne le module de la plus grande valeur propre, nécessairement, $\boxed{|\mu| \leqslant \rho(A).}$

17.b. Supposons que $|\mu| = \rho(A)$. Alors, par la question 14.a, $\mu = \rho(A)$.
Mais puisque le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$ est de dimension 1, il existe un scalaire λ, non nul, tel que $W = \lambda U$.
Ceci contredit alors le fait que $MW = 0$ car

$$MW = U{}^tYW = U{}^tY\lambda U = \lambda U{}^tYU = \lambda U.$$

Par conséquent, $\boxed{|\mu| < \rho(A).}$

Réels/complexes

On ne sait plus trop ici si l'on parle de vecteurs propres réels ou complexes. On peut supposer que μ est une valeur propre complexe et que W est également un vecteur propre complexe de $A - \rho(A)M$.

17.c. Nous venons de prouver que toute valeur propre complexe de $A - \rho(A)M$ est de module strictement inférieur à $\rho(A)$, donc $\rho(A - \rho(A)M) < \rho(A)$.
Par conséquent, $\rho\left(\frac{1}{\rho(A)}A - \rho(A)M\right) < 1$, et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\rho(A)}(A - \rho(A)M)\right)^n = 0.$$

Comme nous avons prouvé à la 14.b que

$$\left(\frac{1}{\rho(A)}A - M\right)^n = \left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n - M$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n - M = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^n = M.}$$

Partie V. Un algorithme de calcul de $\rho(A)$ et d'un vecteur propre associé.

18.a. La base $(e_1,\dots,e_p)$ étant orthonormée, on a $s_1 = \langle V_0, e_1\rangle$.
De plus, par la question 11.e, $\rho(A) = |\lambda_1|$ est une valeur propre de A, et donc $\lambda_1 = \rho(A)$.
De plus, $|e_1|$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1, et d'après la question 13, il existe un réel $e_1 = |e_1|e^{i\theta}$.
Mais e_1 étant un vecteur de $\mathbf{R}^p$, soit $e^{i\theta} = \pm 1$, et donc soit toutes les coordonnées de e_1 sont strictement positives (si $e^{i\theta} = 1$), soit elles sont toutes strictement négatives (si $e^{i\theta} = -1$).
Et donc, les coordonnées de V_0 étant toutes strictement positives,

$$s_1 = \langle V_0, e_1\rangle = \langle V_0, e^{i\theta}|e_1|\rangle = e^{i\theta}\underbrace{\langle V_0, |e_1|\rangle}_{>0} \neq 0.$$

18.b. Puisque e_i est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ_i, on a $Ae_i = \lambda_i e_i$ et donc

$$V_1 = \sum_{k=1}^p s_k A e_k = \sum_{k=1}^p s_k \lambda_k e_k.$$

Puis $S_2 = \sum_{k=1}^p s_k\lambda_k^2 e_k$, et plus généralement, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $V_n = \sum_{k=1}^p s_k\lambda_k^n e_k$.
On en déduit donc[10] que

$$\|V_n\|^2 = \sum_{k=1}^p s_k^2\lambda_k^{2n}.$$

[10] La base $(e_1,\dots,e_p)$ est orthonormée.

Or, pour tout $i \in [\![2,p]\!]$, $|\lambda_i| < |\lambda_1|$ de sorte que $\lambda_i^n \underset{n\to+\infty}{=} o(\lambda_1^n)$.
On en déduit donc que $\|V_n\|^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} s_1^2\lambda_1^{2n}$.
Et alors

$$\frac{\|V_{n+1}\|^2}{\|V_n\|^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{s_1^2\lambda_1^{2n+2}}{s_1^2\lambda_1^{2n}} = \lambda_1^2.$$

Et donc

$$\frac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|} = \sqrt{\frac{\|V_{n+1}\|^2}{\|V_n\|^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\lambda_1^2} = \lambda_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_1.$$

Signe
Notons que dans la question précédente, nous avons prouvé que

$$\lambda_1 = \rho(A) > 0.$$

18.c. D'après ce qui précède,

$$\frac{V_n}{\|V_n\|} = \sum_{k=1}^p \frac{s_k\lambda_k^n}{\|V_n\|}e_k$$

où $\frac{s_k\lambda_k^n}{\|V_n\|} \underset{n\to+\infty}{\sim} s_k\frac{\lambda_k^n}{|\lambda_1|\lambda_1^n}$.
En particulier, pour $i \in [\![2,p]\!]$, $\frac{\lambda_i^n}{\lambda_1^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $\dfrac{V_n}{\|V_n\|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{s_1}{|s_1|}$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V_n}{\|V_n\|} = \begin{cases} e_1 & \text{si } s_1 > 0 \\ -e_1 & \text{si } s_1 < 0 \end{cases}}$

Remarque

Notons que dans les deux cas, la limite est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1.

19.a. Il est facile de remarquer que $V_n = A^n V_0$ et donc la fonction suivante convient :

```
function Vn = puissance(A,n,V_0)
        Vn = A^n*V0 ;
endfunction
```

19.b. Si on utilise le résultat de la question 18.c, pour n suffisamment grand, $\dfrac{V_n}{\|V_n\|}$ est proche d'un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1.

```
function V = vectpropre(A,n,V0)
        V = puissance(A,n,V0)
        V = V/norme(V)
endfunction
```

Et de même, d'après 18.b, pour n suffisamment grand, $\dfrac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|}$ est proche de λ_1.

```
function lambda  = valpropre(A,n,V0)
        V = puissance(A,n,V0)
        lambda = norme(A*V)/norme(V)
endfunction
```

HEC 2009

Non corrige

Sujet : Suites récurrentes linéaires.
Abordable en première année : ✗
Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés des suites récurrentes linéaires intervenant dans l'analyse de processus aléatoires utilisés en prévision économique, ainsi que leur lien avec la notion de polynôme minimal.
Les parties II, III et IV sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Deux exemples.
Exemple 1.

1. On considère la suite $s = (s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par $s_1 = 1, s_2 = \dfrac{4}{5}, s_3 = \dfrac{2}{5}$ et la relation : pour tout n de $\mathbf{N}^*$,

$$s_{n+3} = \frac{3}{2}s_{n+2} - s_{n+1} + \frac{1}{4}s_n.$$

   a. Écrire une fonction `Scilab` d'entête `function sn = suite(s1,s2,s3,n)` qui, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, renvoie le n-ième terme de cette suite.
   b. Établir, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, l'égalité : $s_n = \dfrac{1}{5\times 2^{n-2}} + \dfrac{3}{5\times 2^{(n-2)/2}} \times \sin\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$.
   c. Déterminer la limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.
   d. Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + X - \dfrac{1}{4}$ admet une unique racine réelle λ_1, valant $\dfrac{1}{2}$: déterminer ses deux racines complexes λ_2 et λ_3 dont on précisera le module et un argument.
   e. On admet qu'il existe trois nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vérifiant, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, la relation suivante : $s_n = \dfrac{\alpha_1}{2^n} + \alpha_2\lambda_2^n + \alpha_3\lambda_3^n$. Calculer α_1, α_2 et α_3. Retrouver la limite de la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Exemple 2.
Soit (x, y) un élément de $\mathbf{R}^2$ et P le polynôme de $\mathbf{R}[X]$ défini par : $P(X) = X^2 - xX - y$. On note r_1 et r_2 les racines réelles ou complexes, distinctes ou confondues du polynôme P.

2. a. Dans le plan rapporté à un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$, représenter graphiquement l'ensemble $\mathscr{D}$ des points de coordonnées (x, y) défini par :

$$\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / |y| < 1 \text{ et } |x| < 1 - y\}.$$

   b. Distinguer sur le graphique la partie de $\mathscr{D}$ dans laquelle les racines de P sont réelles.
3. En étudiant séparément le cas où les racines r_1 et r_2 sont réelles et le cas où elles sont complexes, établir l'équivalence des trois conditions suivantes :
   a. $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$
   b. $P(-1) > 0, P(1) > 0$ et $|r_1 r_2| < 1$
   c. $|y| < 1$ et $|x| < 1 - y$.

On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé et admettant un moment d'ordre 2. On note $E(A)$ et $V(A)$ respectivement et la variance d'une variable aléatoire A de $\mathscr{E}$. Si A et B appartiennent à $\mathscr{E}$, leur covariance est notée (A, B).
On appelle *processus aléatoire* $Y = (Y_t)_{t\in\mathbf{Z}}$, toute application Y définie sur $\mathbf{Z}$ à valeurs dans $\mathscr{E}$.
Soit $W = (W_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ un processus aléatoire constitué de variables aléatoires mutuellement indépendantes, vérifiant pour tout t de $\mathbf{Z}$, les égalités suivantes : $E(W_t) = 0$ et $V(W_t) == \sigma^2$, avec σ strictement positif fixé.
Soit (a_1, a_2) un élément de $\mathbf{R}^2$. On considère un processus aléatoire $Y = (Y_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ formé de variables aléatoires *centrées, de même variance strictement positive* et qui vérifient, pour tout t de $\mathbf{Z}$:

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + W_t.$$

On suppose que :

- pour tout couple (t, k) de $\mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$, $\operatorname{cov}(W_t, Y_{t-k}) = 0$;
- pour tout couple (t, k) de $\mathbf{Z}^2$, $\operatorname{cov}(Y_t, Y_{t-k})$ ne dépend que de k.

On pose alors, pour tout k de $\mathbf{Z}$: $\gamma_k = \text{cov}(Y_t, Y_{t-k})$ et $\rho_k = \dfrac{\gamma_k}{\gamma_0}$.

4. a. Que représente γ_0 pour le processus Y ?
   b. Établir, pour tout k de $\mathbf{Z}$, l'égalité $\gamma_{-k} = \gamma_k$.
   c. Montrer, pour tout t de $\mathbf{Z}$: $\gamma_k = \text{cov}(W_t, Y_t) = \sigma^2$.
5. *On suppose dans cette question que le couple* (a_1, a_2) *appartient à l'ensemble* $\mathscr{D}$ *défini dans la question 2.a.*
   a. Exprimer γ_1 et γ_2 en fonction de γ_0, a_1 et a_2. En déduire l'expression de ρ_1 et ρ_2 en fonction de a_1 et a_2.
   b. Établir les deux inégalités : $a_1\rho_1 + a_2\rho_2 \geqslant 0$ et $|\rho_1| < 1$, ainsi que l'encadrement : $0 \leqslant a_1\rho_1 + a_2\rho_2 < 1$.
   c. Exprimer γ_0 en fonction de $\sigma^2, a_1, a_2, \rho_1$ et ρ_2.
6. a. Montrer que la suite $(\rho_k)_{k\in\mathbf{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
   b. Soit r_1 et r_2 les racines du polynôme $P(X) = X^2 - a_1X - a_2$. Montrer que la suite $(\rho_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 si et seulement si $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$ (on distinguera trois cas : r_1 et r_2 réels avec $|r_1| < |r_2|$, r_1 et r_2 réels avec $|r_1| = |r_2|$, r_1 et r_2 complexes conjugués).

Partie II. Suites récurrentes linéaires d'ordre p.

Dans cette partie, p est un entier de $\mathbf{N}^*$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un élément de $\mathbf{C}^p$ vérifiant $a_p \neq 0$. On note $\mathscr{S}$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des suites complexes et $\mathscr{S}_p$ le sous-ensemble de $\mathscr{S}$ formé des suites $s = (s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ récurrentes linéaires d'ordre p, c'est-à-die, qui vérifient pour tout n de $\mathbf{N}^*$:

$$s_{n+p} = a_1s_{n+p-1} + a_2s_{n+p-2} + \cdots + a_ps_n.$$

7. Montrer que $\mathscr{S}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}$.
8. Soit Φ l'application de $\mathscr{S}_p$ dans $\mathbf{C}^p$ qui, à toute suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de $\mathscr{S}_p$, associe le p-uplet $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ de $\mathbf{C}^p$. Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de $\mathscr{S}_p$.
9. On note $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbf{C}^p$ et Φ^{-1} l'application réciproque de Φ. Pour tout i de $[\![1,p]\!]$, on considère la suite $v^{(i)} = \left(v_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par : $v^{(i)} = \Phi^{-1}(e_i)$.
   a. Justifier que la famille $(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(p)})$ constitue une base de $\mathscr{S}_p$. Préciser les coordonnées de toute suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de $\mathscr{S}_p$ dans la base $(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(p)})$.
   b. Calculer, pour tout j de $[\![1,p]\!]$, $v_j^{(1)}, v_j^{(2)}, \ldots, v_j^{(p)}$. Montrer que, pour tout i de $[\![1,p]\!]$, on a :$v_{p+1}^{(i)} = a_{p-i+1}$.
10. Soit δ l'application définie sur $\mathscr{S}_p$ par : pour toute suite $s = (s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de $\mathscr{S}_p$, $\delta(s) = (s_{n+1})_{n\in\mathbf{N}^*}$.
    a. Montrer que δ est un endomorphisme de $\mathscr{S}_p$.
    b. Déterminer la matrice Δ de δ dans la base $(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(p)})$.
11. Soit P le polynôme de $\mathbf{C}[X]$ défini par : $P(X) = X^p - a_1X^{p-1} - \cdots - a_{p-1}X - a_p$.
    a. Montrer que λ est une valeur propre de δ si et seulement si λ est une racine de P.
    b. Soit λ une valeur propre de δ. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à λ, et en déduire une condition nécessaire et suffisante sur P pour que δ soit diagonalisable.
    c. On suppose que P admet p racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_p$. Établir, pour toute suite $s = (s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de $\mathscr{S}_p$ l'existence d'un unique p-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ de $\mathbf{C}^p$ tel que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on ait : $s_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\lambda_i^n$.

Partie III. Polynôme minimal d'une suite récurrente linéaire.

Le contexte et les notations de cette partie sont ceux du préambule de la partie II et de la question 10.
On considère une suite $s = (s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de $\mathscr{S}_p$. On dit qu'un polynôme Q de $\mathbf{C}[X]$ est un *polynôme générateur de la suite* s, si $[Q(\delta)](s) = 0_{\mathscr{S}_p}$. On note J l'ensemble des polynômes générateurs de la suite s.

12. Montrer que J n'est pas réduit au polynôme nul.
13. Montrer que J est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[X]$.
14. Montrer que, si Q est un polynôme de J et A un polynôme de $\mathbf{C}[X]$, alors $Q \times A$ appartient à J.
15. On note N l'ensemble des degrés des polynômes non nuls de J.
    a. Justifier l'existence d'un polynôme Π de J tel que son degré soit le plus petit élément de N. On note d le degré de Π.
    b. En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que J est l'ensemble des polynômes de la forme $\Pi \times L$, avec L élément de $\mathbf{C}[X]$.
    c. En déduire qu'il existe un unique polynôme de J, noté Π^*, de coefficient dominant égal à 1 et de degré d. On dit que Π^* *est le polynôme générateur minimal de* s *et que son degré* d *st le degré de la suite* s.

16. *Un exemple.* Déterminer le polynôme générateur minimal et le degré de la suite $s = (s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ récurrence linéaire d'ordre 3 définie par : $s_1 = 0, s_2 = s_3 = 1$ et la relation : pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $s_{n+3} = 2s_{n+1} + s_n$.

17. Soit $s = (s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite récurrente linéaire de degré d $(d \geqslant 1)$ et soi k un entier strictement supérieur à d. On note H la matrice de $\mathscr{M}_k(\mathbf{C})$ définie par :

$$H = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{k+1} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} \end{pmatrix}.$$

Pour tout j de $[\![1,k]\!]$, on note U_j la j-ième colonne de H. On désigne par h l'endomorphisme de $\mathbf{C}^k$ canoniquement associé à H et, pour tout j, on note u_j le vecteur de $\mathbf{C}^k$ canoniquement associé à U_j.

a. Montrer que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_d)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(h)$.

b. Établir que, pour tout j de $[\![d+1,k]\!]$, la famille $(u_1, u_2, \dots, u_d, u_j)$ est liée. En déduire le rang de h et la dimension de $\mathrm{Ker}(h)$.

c. Montrer qu'un polynôme $Q(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} q_j X^j$ de $\mathbf{C}[X]$ appartient à J, si et seulement si l'élément $(q_0, q_1, \dots, q_{k-1})$ de $\mathbf{C}^k$ appartient à $\mathrm{Ker}(h)$.

d. *Un exemple.* Soit $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite récurrente linéaire de degré inférieur ou égal à 3 dont les premiers termes sont : $-1, 7, 5, 19, 29, 67, 125$. Déterminer le polynôme générateur minimal de cette suite.

Partie IV. Un algorithme de calcul d'un polynôme générateur d'une suite récurrente linéaire.

Soit d et k deux entiers tels que $1 \leqslant d \leqslant k$ et soit $s = (s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite complexe récurrente linéaire de degré d dont on connaît les $2k$ premiers termes ; on pose : $S(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2k-1} s_{2k-i} X^i$. On note $\mathbf{C}_k[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à k. Soit $Q(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} q_j X^j$ un polynôme de $\mathbf{C}_k[X]$. Le degré d'un polynôme T est noté $\deg(T)$.

18. On note $(\star)$ la relation suivante : pour tout n de $[\![1,k]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} q_j s_{n+j} = 0$.

Montrer que Q est un polynôme générateur de la suite s si et seulement si la relation $(\star)$ est vérifiée.

19. a. On pose, pour tout n de $[\![0,3k-1]\!]$: $t_n = \displaystyle\sum_{\substack{i\in[\![0,2k-1]\!],\, j\in[\![0,k]\!] \\ i+j=n}} q_j s_{2k-i}$. Établir l'égalité $QS = \displaystyle\sum_{n=0}^{3k-1} t_n X^n$.

b. On suppose la relation $(\star)$ vérifiée. Montrer, pour tout n de $[\![k,2k-1]\!]$, l'égalité : $t_n = 0$. En déduire l'existence de deux polynômes A et B de $\mathbf{C}_{k-1}[X]$ vérifiant : $QS = A + X^{2k}B$.

c. Réciproquement, on suppose qu'il existe deux polynômes A et B de $\mathbf{C}_{k-1}[X]$ vérifiant : $QS = A + X^{2k}B$. Montrer que la relation $(\star)$ est vérifiée.

20. Dans l'algorithme suivant, les variables A, B, C, D, E, F, R, S sont des polynômes, k est une constante entière. L'entier k et le polynôme S ont les valeurs données précédemment.

```
Initialisation  : A  :=X^{2k}, B  :=S, C := 0, D :=1
Corps  :
Tant que deg(B) ⩾ k
       effectuer la division euclidienne de A par B, A = BF+R avec R = 0 ou deg(R) < deg(
B).
       E  :=C - DF.
       C  := D,D  :=E, A :=B, B :=R
Fin de Tant que
Sortie  : Rendre D et B
```

Si U et V sont deux polynômes de $\mathbf{C}[X]$ tels qu'il existe un polynôme W de $\mathbf{C}_{k-1}[X]$ vérifiant $U = V + W^{2k}W$, on notera : $U \equiv V$.

a. Montrer que cet algorithme se termine, c'est-à-dire que l'on sort de la boucle.

b. Montrer qu'à l'initialisation, on a :

$$\deg(C) \leqslant 2k - \deg(A),\ \deg(D) \leqslant 2k - \deg(A),\ k \leqslant \deg(B) \leqslant \deg(A),\ CS \equiv A,\ DS \equiv B.$$

c. On suppose qu'à l'issue du j-ième passage dans la boucle, les relations précédentes sont vérifiées. Montrer qu'elles le sont encore à l'issue du $(j+1)$-ième passage.

d. Montrer que lorsque l'algorithme se termine, l'une des variables contient un plynôme générateur de la suite s. Quelle est cette variable ?

HEC 2005

Sujet : Fonctions Γ et digamma, applications à l'estimation. **Facile**
Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★
Thèmes du programme abordés : fonctions d'une variable, intégrales impropres, séries, calcul différentiel d'ordre 2, variables à densité, estimation ponctuelle.
La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.
Modifications apportées au sujet d'origine : ajout d'une question sur la loi $\Gamma(\theta, r)$ qui n'est plus au programme. La question 12.a a été reformulée en termes de fonction de classe $\mathscr{C}^2$.
Commentaires : un must ! Pas extrêmement difficile pour un sujet de parisiennes, mais couvre une grande partie du programme. Les deux premières parties nécessitent une certaine autonomie dans les calculs (convexité, comparaison série/intégrale, etc).

On rappelle que :

- pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{(x-1)\ln t}e^{-t}\,dt$ est convergente ;
- la fonction Γ est définie sur $\mathbf{R}_+^*$, et associe à tout réel x strictement positif, le réel strictement positif $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$;
- pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Pour tout entier naturel k non nul, et pour toute fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$, k fois dérivable, on note $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de la fonction f. Les dérivées première et seconde sont également notées f' et f''.

Dans les parties II et III du problème, exp désigne la fonction exponentielle. Les parties III et IV sont indépendantes. Le problème a pour objet la mise en évidence de certaines propriétés de la fonction Γ.

Partie I. Une expression de $\Gamma(x)$

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
   a. Pour tout réel u tel que $0 \leqslant u < 1$, montrer que $\ln(1-u) \leqslant -u$.
   En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0, n]$, l'inégalité : $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.
   b. Étudier les variations de la fonction φ définie sur $[0, \sqrt{n}[$ qui, à tout réel t de $[0, \sqrt{n}[$ associe :
   $$\varphi(t) = \ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) - t - n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right).$$
   c. Établir, pour tout réel t de $[0, \sqrt{n}]$, l'inégalité :
   $$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$
   d. Justifier, pour tout réel t de $[0, n]$, les inégalités :
   $$e^{-t} - \frac{t^2}{n}e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}.$$
   En déduire que, pour tout réel x strictement positif :
   $$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt.$$
2. a. Pour tout réel x strictement positif et pour tout entier naturel n non nul, montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 y^{x-1}\,dy$ et $\displaystyle\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n\,dy$ sont convergentes.
   On pose alors $B_0(x) = \displaystyle\int_0^1 y^{x-1}\,dy$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $B_n(x) = \displaystyle\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n\,dy$.

b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, l'égalité :

$$B_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

En déduire, pour tout n de $\mathbf{N}$, la formule :

$$B_n(x) = \frac{\Gamma(x)\times\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}.$$

c. Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^x(n-1)!$

d. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on pose $\lambda_n = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. Montrer que $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{n}}$.

Partie II. Dérivabilité de la fonction Γ et conséquences

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, et pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}\,dt$ est absolument convergente. On note $g_k(x)$ la valeur de cette intégrale.

b. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbf{R}_+^*$. Soit x_0 et x deux éléments distincts de $]a,b[$. Établir l'inégalité :

$$|\Gamma(x)-\Gamma(x_0)-(x-x_0)g_1(x_0)| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2}\int_0^{+\infty}(\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}\,dt.$$

c. Montrer l'inégalité suivante :

$$\int_0^{+\infty}(\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}\,dt \leqslant \int_0^1(\ln t)^2 t^{a-1}e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty}(\ln t)^2 t^{b-1}e^{-t}\,dt.$$

En déduire que la fonction Γ est dérivable en x_0 et que $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0)$.

d. Établir que la fonction Γ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et que $\Gamma' = g_1$.
On montrerait de même que la fonction Γ est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et que $\Gamma'' = g_2$. Ce résultat est admis dans toute la suite du problème.

4. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on pose $\gamma_n = -\ln n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

a. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité suivante :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a $0 < \gamma_n \leqslant 1$.

b. Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et convergente. On note γ sa limite.

5. **a.** Pour tout réel x strictement positif, et pour tout entier n strictement positif, montrer l'égalité :

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right] = \exp(-x\gamma_n)\times\frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n^x n!}.$$

b. On pose $v_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right]$.
Montrer que la suite $((v_n(x))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente. On note $\ell(x)$ sa limite. Montrer la relation :

$$\ell(x) = \frac{\exp(-\gamma x)}{x\Gamma(x)}.$$

6. **a.** Soit x un réel strictement positif fixé.
Montrer que la série de terme général $\dfrac{x}{n} - \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$, $n \geqslant 1$, est convergente.

b. Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité :

$$\ln(\ell(x)) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right].$$

En déduire, pour tout réel x strictement positif, la relation :

$$\ln(\Gamma(x)) = -\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right].$$

7. Soit ψ la dérivée de $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$, qui est donc définie sur $\mathbf{R}_+^*$.
Établir, pour tout réel x strictement positif l'égalité : $\psi(x+1) = \psi(x) + \dfrac{1}{x}$.
Déterminer un équivalent simple de $\psi(x)$ lorsque x tend vers 0^+.
Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la formule :

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

8. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère la fonction U_n définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$U_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On désigne par $A(x)$ la somme de la série de terme général $U_n(x)$.

a. Montrer que A est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. En particulier, exprimer, pour tout réel x strictement positif, $A'(x)$ et $A''(x)$ en fonction de $\Gamma(x)$, $\Gamma'(x)$ et $\Gamma''(x)$.

b. Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, la série de terme général $U_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente.

Dans toute la suite du problème, **on admet** les deux résultats suivants : pour tout réel x strictement positif on a

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(x) \text{ et } A''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n''(x).$$

c. Calculer $\psi(1)$ en fonction de γ. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln n - \psi(n))$.

9. On veut établir dans cette question que pour tout réel y strictement positif, on a $\psi'(y) > \dfrac{1}{y}$.
Soit x un réel strictement positif fixé. On considère la fonction G définie sur $\mathbf{R}_+^*$ qui, à tout réel t strictement positif, associe $G(t) = \dfrac{1}{(t+x)^2}$.

a. Montrer que sur $\mathbf{R}_+^*$, G est positive, strictement décroissante, et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} G(t)\,dt$ est convergente.

b. En déduire la double inégalité : $0 < \displaystyle\int_1^{+\infty} G(t)\,dt < \sum_{k=1}^{+\infty} G(k)$.

c. Établir l'inégalité : $\psi'(x) > \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2}$. Conclure.

Partie III. Estimation des paramètres d'une loi $\Gamma(\theta, r)$

Soit $(\theta, r) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, et soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(r)\theta^r} \times x^{r-1}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

10. Montrer que f est une densité de probabilités.
Si X est une variable aléatoire de densité f, on dit que X suit la loi Γ de paramètres θ et r et on note $X \hookrightarrow \Gamma(\theta, r)$.

On considère une variable aléatoire X, qui suit une loi $\Gamma(\theta, r)$, les deux paramètres inconnus θ et r étant des réels strictement positifs.
Soit p un entier supérieur ou égal à 2. On considère un p-échantillon i.i.d. $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ de la loi de X : les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_p$ sont mutuellement indépendantes et de même loi que X.

On désigne par $x_1, \ldots, x_p$, un p-échantillon de réalisations des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_p$, respectivement ; les réels $x_1, \ldots, x_p$ sont fixés, strictement positifs et non tous égaux.

Soit L la fonction (appelée fonction de vraisemblance) définie sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ qui, à tout couple (θ, r) de réels strictement positifs, associe :

$$L(\theta, r) = \prod_{i=1}^{p} f(x_i).$$

On pose $F(\theta, r) = \ln(L(\theta, r))$.

11. Montrer que la recherche du maximum de L sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ est équivalente à la recherche du maximum de F sur ce même ensemble.
12. a. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction F.
    b. Montrer que les éventuels points critiques (θ^*, r^*) vérifient le système (S) d'équations suivant

$$(S) \qquad \begin{cases} \theta^* r^* = \overline{x} & (1) \\ \ln r^* - \dfrac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma(r^*)} = \ln \overline{x} - \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \ln x_i & (2) \end{cases}$$

dans lequel $\overline{x} = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$.

13. On pose $K_p = \ln \overline{x} - \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \ln x_i$.
    a. Justifier, pour tout réel $x > 0$ et différent de 1, l'inégalité : $\ln x < x - 1$. En déduire que $K_p > 0$.
    b. Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$h(y) = \ln y - \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - K_p.$$

    Étudier les variations de h et dresser son tableau de variations.
    c. Montrer que l'équation (2) admet sur $\mathbf{R}_+^*$ une unique solution r^*. En déduire que le système d'équations (S) admet une unique solution (θ^*, r^*).
14. Écrire la hessienne $\nabla^2 F$ de F au point (θ^*, r^*). Déterminer le signe de son déterminant et de sa trace. En déduire qu'au point (θ^*, r^*), la fonction L admet un maximum local.

On peut démontrer qu'en ce point, on obtient en fait un maximum global de L. On dit que le couple (θ^*, r^*) est une estimation du couple inconnu (θ, r) obtenue par la méthode du maximum de vraisemblance.

Partie IV. Estimateur sans biais de l'écart-type σ d'une loi normale centrée
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée et d'écart-type σ ; le paramètre réel inconnu σ, est strictement positif.

15. Montrer que la variable aléatoire $T = \dfrac{X^2}{2\sigma^2}$ suit une loi γ de paramètre $1/2$. En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.
16. Pour n entier naturel non nul, on considère un n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ i.i.d. (indépendant, identiquement distribué) de la loi de X.
    a. On désigne par S_n la variable aléatoire $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{2\sigma^2}$. Quelle est la loi de probabilité de S_n ?
    b. En déduire que la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ est un estimateur sans biais de σ^2.
    c. Montrer que l'espérance de $\sqrt{Y_n}$, notée $E(\sqrt{Y_n})$, vérifie : $E(\sqrt{Y_n}) < \sigma$.
    d. Donner l'expression de $E(\sqrt{Y_n})$ en fonction de n et σ.
    e. Montrer que la variable aléatoire $\widehat{\sigma_n}$ définie par

$$\widehat{\sigma_n} = \frac{\lambda_n}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right)^{1/2}$$

    où λ_n a été défini dans la question 2.d, est un estimateur sans biais du paramètre σ.
17. a. Calculer la variance $V(\widehat{\sigma_n})$ de l'estimateur $\widehat{\sigma_n}$ en fonction de n et σ.
    b. La suite $(\widehat{\sigma_n})_{n \in \mathbf{N}^*}$ d'estimateurs de σ converge-t-elle en probabilité vers σ ?

HEC 2005 : CORRIGÉ

Partie I. Une expression de $\Gamma(x)$.

1.a. La fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est dérivable sur $[0,1[$, et sa dérivée est $x \mapsto -\dfrac{1}{1-x}$ qui est décroissante, de sorte que $x \mapsto \ln(1-x)$ est concave.
Sa courbe représentative se situe donc sous ses tangentes. En particulier, la tangente en $x=0$ est la droite d'équation $y=-x$, et donc $\forall u \in [0,1[$, $\boxed{\ln(1-u) \leqslant -u.}$
En particulier, pour tout $t \in [0,n]$, on a $\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \leqslant -\dfrac{t}{n}$. Soit encore $n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \leqslant -t$.
En passant à l'exponentielle[1], il vient donc

$$e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} = \boxed{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}.}$$

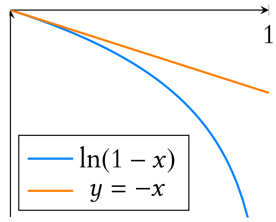


FIGURE 1– La fonction $\ln(1-x)$ et sa tangente en 0.

[1] Qui préserve le sens des inégalités car elle est croissante.

1.b. La fonction φ est dérivable[2] sur $[0,\sqrt{n}[$ et

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -\frac{2t}{n\left(1-\frac{t^2}{n}\right)} - 1 + \frac{1}{1-\frac{t}{n}}\\
&= \frac{-\frac{2t}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right) - \left(1-\frac{t^2}{n}\right)\left(1-\frac{t}{n}\right) + 1 - \frac{t^2}{n}}{1-\frac{t^2}{n}}\\
&= \frac{-\frac{2t}{n} + \frac{2t^2}{n^2} - 1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{n} - \frac{t^3}{n^2} + 1 - \frac{t^2}{n}}{\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\left(1-\frac{t}{n}\right)}\\
&= \frac{-\frac{t^3}{n^2} + \frac{2t^2}{n^2} - \frac{t}{n}}{\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\left(1-\frac{t}{n}\right)}\\
&= \frac{t}{n^2}\,\frac{-t^2+2t-n}{\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\left(1-\frac{t}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

[2] Car somme de composées de fonctions usuelles dérivables.

Le polynôme $-t^2+2t-n$ a pour discriminant $\Delta = 4-4n \leqslant 0$, et donc il est de signe constant sur $\mathbf{R}$. Étant de coefficient dominant négatif, on a donc $\forall t \in \mathbf{R}$, $-t^2+2t-n \leqslant 0$. On en déduit que $\varphi'(t) \leqslant 0$, $\forall t \in [0,\sqrt{n}[$ et donc que $\boxed{\varphi \text{ est décroissante sur cet intervalle.}}$

Alternative
Notons que

$$-t^2+2t-n = -(t-1)^2-(n-1) \leqslant 0$$

1.c. Il s'agit de prouver que pour $t \in [0,\sqrt{n}[$,

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \Leftrightarrow \ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right) - t \leqslant n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \Leftrightarrow \varphi(t) \leqslant 0.$$

Mais puisque φ et décroissante sur $[0,\sqrt{n}]$, avec $\varphi(0)=0$, elle est négative sur $[0,\sqrt{n}[$ et donc

$$\forall t \in [0,\sqrt{n}[, \boxed{\left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.}$$

1.d. D'après la question précédente, on a pour $t \in [0,\sqrt{n}[$,

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \Leftrightarrow e^{-t} - \frac{t^2}{n}e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

Pour $t \in [\sqrt{n},n]$, cette inégalité reste valable puisque $\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right) \leqslant 0$ et $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \geqslant 0$.

Et il a été prouvé à la question 1.a que pour tout $t \in [0,n]$, $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.
Après multiplication par $t^{x-1} \geqslant 0$, il vient, pour tout $t \in [0,n]$,

$$t^{x-1}e^{-t} - \frac{1}{n}t^{x+1}e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \leqslant t^{x-1}e^{-t}.$$

Et donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt - \frac{1}{n}\int_0^n t^{x+1}e^{-t}\,dt \leqslant \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt \leqslant \int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Lorsque $n \to +\infty$, $\displaystyle\int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(x)$.

De même $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} t^{x+1}e^{-t}\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x+2)$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^n t^{x+1}e^{-t}\,dt = 0$.

Et donc, par le théorème des gendarmes, il vient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \Gamma(x).}$$

Convergence

Notons que ces intégrales convergent, bien qu'elles soient impropres en 0 si $x \in]0,1[$.
Mais alors $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$, et nous reconnaissons alors une intégrale de Riemann convergente (car $1-x<1$).

2.a. Si $x \geqslant 1$, il s'agit de deux intégrales sur un segment, donc le résultat est évident.
En revanche, pour $x \in]0,1[$, les deux fonctions intégrées ne sont continues que sur $]0,1]$.
Mais $\displaystyle\int_0^1 y^{x-1}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{y^{1-x}}\,dy$, avec $1-x<1$: il s'agit donc d'une intégrale de Riemann convergente.
Et au voisinage de 0, $y^{x-1}(1-y)^n \underset{y\to 0}{\sim} y^{x-1}$, de sorte que par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n\,dy \text{ converge}}$ car $\displaystyle\int_0^1 y^{x-1}\,dy$ converge.

2.b. Notons que la valeur de $B_0(x)$ est facile à calculer[3]

$$B_0(x) = \lim_{A\to 0^+} \int_A^1 y^{x-1}\,dy = \lim_{A\to 0^+} \left[\frac{1}{x}y^x\right]_A^1 = \lim_{A\to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{A^x}{x} = \frac{1}{x}.$$

[3] C'est presque du cours.

Limite

Notons que la limite de A^x est nulle car $x \geqslant 0$.

Commençons par supposer que $x \geqslant 1$, de sorte qu'on peut directement procéder à une intégration par parties sur le segment $[0,1]$.
Posons donc $u(y) = \dfrac{1}{x}y^x$ et $v(y) = (1-y)^n$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, avec $u'(y) = y^{x-1}$ et $v'(y) = -n(1-y)^{n-1}$.
Par intégration par parties, on a alors

$$B_n(x) = \left[\frac{1}{x}y^x(1-y)^n\right]_0^1 + \frac{n}{x}\int_0^1 y^x(1-y)^{n-1}\,dy = \frac{n}{x}\int_0^1 y^x(1-y)^{n-1}\,dy = \frac{n}{x}B_{n-1}(x+1).$$

De proche en proche, on a alors

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \frac{n}{x}B_{n-1}(x+1)\\ &= \frac{n}{x}\frac{n-1}{x+1}B_{n-2}(x+2)\\ &= \cdots = \frac{n}{x}\frac{n-1}{x+1}\cdots\frac{1}{x+n-1}B_0(x+n)\\ &= \frac{n}{x}\frac{n-1}{x+1}\cdots\frac{1}{x+n-1}\frac{1}{x+n}\\ &= \boxed{\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}}. \end{aligned}$$

Si $x \in]0,1[$, le raisonnement est le même, sauf qu'il faut prendre un tout petit peu plus de précautions pour la première intégration par parties, puisque celle-ci doit être réalisée sur un segment de la forme $[A,1]$, puis il faudra passer à la limite lorsque $A \to 0^+$.
On prouve alors de la même manière que $B_n(x) = \dfrac{x}{n}B_{n-1}(x+1)$, le reste du raisonnement est alors le même.

Nous savons déjà que $n! = \Gamma(n+1)$.
D'autre part, en utilisant plusieurs fois[4] la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, il vient

[4] n fois pour être précis.

$$\Gamma(x+n+1) = (x+n)\Gamma(x+n) = (x+n)(x+n-1)\Gamma(x+n-1) = \cdots = (x+n)\cdots x\Gamma(x).$$

Et donc $\dfrac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(x)} = (x+n)(x+n-1)\cdots x$.

On en déduit donc bien que $\boxed{B_n(x) = \dfrac{\Gamma(x)\times\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}.}$

2.c. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$, procédons au changement de variable[5] $y = \dfrac{t}{n}$.
Alors il vient $dt = n\,dy$ et donc

$$\begin{aligned}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt &= \int_0^1 (1-y)^n\,(ny)^{x-1}\,n\,dy = n^x\int_0^1 (1-y)^n\,y^{x-1}\,dy\\ &= n^x B_n(x) = n^x\,\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.\end{aligned}$$

[5] Affine.

Et donc la limite de la question 1.d s'écrit encore

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\,n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x+n)}{n^x(n-1)!} &= \frac{(x+n-1)(x+n-2)\cdots x\Gamma(x)}{n^x(n-1)!}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(x+n-1))(x+n-2)\cdots x}{n^x(n-1)!}\,\frac{n^x\,n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x+n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.\end{aligned}$$

Et donc on a bien $\boxed{\Gamma(x+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^x(n-1)!}$

2.d. Commençons par traiter le cas des termes d'indice pair :

$$\lambda_{2n} = \frac{\Gamma(2n/2)}{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)} = \frac{(n-1)!}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}.$$

Mais $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1/2}(n-1)!$, de sorte que

$$\lambda_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n-1)!}{\sqrt{n}(n-1)!} = \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{2}{2n}}.$$

De même, pour les termes impairs, on a $\lambda_{2n+1} = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{\Gamma(n+1)} = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{n!}$. Et donc

$$\lambda_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1/2}(n-1)!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Et donc on a bien $\boxed{\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{n}}.}$

Détails
Pour que deux suites (u_n) et (v_n) soient équivalentes, il faut et il suffit que

$$\begin{cases} u_{2n} \sim v_{2n}\\ u_{2n+1} \sim v_{2n+1}\end{cases}$$

Cela découle du fait qu'une suite converge vers ℓ si et seulement si ses sous-suites des termes d'indice pair et des termes d'indice impair convergent vers la même limite, que l'on applique ici à $\frac{u_n}{v_n}$.

Partie II. Dérivabilité de la fonction Γ et conséquences.

3.a. La fonction $t\mapsto t^{x-1}(\ln t)^k\,e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
Au voisinage de 0, $t^{x-1}(\ln t)^k\,e^{-t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}(\ln t)^k$.
Et alors, si $\alpha\in]1-x,1[$, on a

$$t^\alpha t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t} \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1+\alpha}(\ln t)^k \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} 0$$

Détails
Il s'agit directement d'une croissance comparée, en notant que

$$x+1-\alpha>0.$$

Autrement dit, $t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t} \underset{t\to0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$.

Mais puisque $\alpha<1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge, et donc il en est de même de $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}\,dt$.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$e^{t/2}t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t} = \underbrace{\frac{t^{x-1}}{e^{t/4}}}_{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0}\underbrace{\frac{(\ln t)^k}{e^{t/4}}}_{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc $t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{-t/2})$.

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}\,dt$ converge et donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}\,dt$ converge.

3.b. Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$ fixé.
Appliquons alors l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f_t : u \mapsto t^{u-1} = e^{(u-1)\ln(t)}$.
Celle-ci est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$, avec $f_t'(u) = (\ln t)t^{u-1}$ et $f_t''(u) = (\ln t)^2 t^{u-1}$.
En particulier, pour $u \in [a,b]$, on a $|f_t''(u)| \leqslant (\ln t)^2 \max\limits_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}$.
Et donc par l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour x et x_0 dans $[a,b]$,

$$|f_t(x) - f_t(x_0) - (x-x_0)f_t'(x_0)| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2}(\ln t)^2 \max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}.$$

Après multiplication par e^{-t}, il vient donc, pour tout $t > 0$,

$$|t^{x-1}e^{-t} - t^{x_0-1}e^{-t} - (x-x_0)t^{x_0-1}(\ln t)e^{-t}| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2}(\ln t)^2 \max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}e^{-t}.$$

Et donc, par croissance de l'intégrale[6] :

$$\int_0^{+\infty} |t^{x-1}e^{-t} - t^{x_0-1}e^{-t} - (x-x_0)t^{x_0-1}(\ln t)e^{-t}|\,dt \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2}\int_0^{+\infty}(\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}\,dt.$$

[6] Sous réserve que l'intégrale de gauche converge, ce qui n'est pas totalement évident et que nous prouverons plus tard.

D'autre part, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}|\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x-x_0)g_1(x_0)| &= \left|\int_0^{+\infty}\left(t^{x-1}e^{-t} - t^{x_0-1}e^{-t} - (x-x_0)t^{x_0-1}(\ln t)e^{-t}\right)dt\right| \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} |t^{x-1}e^{-t} - t^{x_0-1}e^{-t} - (x-x_0)t^{x_0-1}(\ln t)e^{-t}|\,dt \\ &\leqslant \frac{(x-x_0)^2}{2}\int_0^{+\infty}(\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}\,dt.\end{aligned}$$

Il nous reste donc juste à justifier la convergence de cette dernière intégrale.
Pour $t \in]0,1]$, et $\alpha \in [a,b]$, on a $t^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln(t)}$, avec $\ln(t) \leqslant 0$, de sorte que

$$(\alpha-1)\ln(t) \leqslant (a-1)\ln(t) \Rightarrow |t^{\alpha-1}| \leqslant e^{(a-1)\ln t} = t^{a-1}.$$

Et donc $0 \leqslant (\ln t)^2\left(\max\limits_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t} \leqslant (\ln t)^2 t^{a-1}e^{-t}$.

Puisqu'il a été prouvé à la question 3.a que $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^2 t^{a-1}e^{-t}\,dt$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}\,dt$.

Pour $t \geqslant 1$, le raisonnement est le même, sauf que $\ln t \geqslant 0$, de sorte que pour $\alpha \in [a,b]$, $t^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln t} \leqslant t^{b-1}$.
Et puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty}(\ln t)^2 t^{b-1}e^{-t}\,dt$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty}(\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}\,dt$.
En conclusion $\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}\,dt$ converge et donc toutes les inégalités précédemment données sont bien légitimes.

3.c. Par la relation de Chasles,

$$\int_0^{+\infty}(\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}\,dt = \int_0^1(\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty}(\ln t)^2\left(\max_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\right)e^{-t}\,dt.$$

Et alors les calculs ont été faits à la question précédente, lorsque nous avons prouvé la convergence de l'intégrale.
On en déduit que pour $x \in]a,b[\setminus\{x_0\}$, on a

$$\left|\frac{\Gamma(x)-\Gamma(x_0)}{x-x_0} - g_1(x_0)\right| \leqslant \frac{|x-x_0|}{2}\left(\int_0^1 (\ln t)^2 t^{a-1}e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty}(\ln t)^2 t^{b-1}e^{-t}\,dt\right).$$

Et donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{\Gamma(x)-\Gamma(x_0)}{x-x_0} - g_1(x_0)\right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{\Gamma(x)-\Gamma(x_0)}{x-x_0} = g_1(x_0).$$

Détails

Les deux intégrales qui apparaissent ne dépendent pas de x.

Ceci signifie donc que Γ est dérivable en x_0 et que $\boxed{\Gamma'(x_0) = g_(x_0).}$

3.d. Soit $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$. Alors x_0 appartient à l'intérieur du segment $\left[\frac{x_0}{2}, 2x_0\right]$, qui est bien inclus dans $\mathbf{R}_+^*$.
Et donc le raisonnement de la question précédente s'applique : Γ est dérivable en x_0 et $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0)$.
Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$, $\boxed{\Gamma \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}_+^* \text{ et } \Gamma' = g_1.}$

Remarque

La dérivée Γ' que l'on obtient est exactement celle qu'on aurait obtenu en dérivant (par rapport à x) sans précaution la fonction dans l'intégrale définissant Γ.
Malheureusement, nous ne disposons d'aucun théorème nous assurant que la dérivée de l'intégrale est égale à l'intégrale de la dérivée, et donc il aurait été un peu cavalier d'affirmer directement que $\Gamma' = g_1$.

4.a. Soit $k \geqslant 1$. Alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$. Et donc pour tout $t \in [k, k+1]$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Par croissance de l'intégrale, il vient donc

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1}\frac{dt}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{dt}{k} = \frac{1}{k}.$$

En sommant ces relations pour k variant de 1 à $n-1$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

La somme de gauche est évidemment égale à $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$, et par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t} = \int_1^2\frac{dt}{t} + \int_2^3\frac{dt}{t} + \cdots + \int_{n-1}^n\frac{dt}{t} = \int_1^n\frac{dt}{t} = [\ln t]_1^n = \ln(n).$$

Donc déjà, $\boxed{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.}$

Il nous reste donc à voir que ces inégalités sont strictes.
On peut par exemple constater que $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{2}$ est continue, positive sur $[1,2]$, et n'est pas la fonction nulle.
Et donc $\int_1^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)dt > 0 \Leftrightarrow \int_1^2\frac{dt}{t} > \frac{1}{2}$.
Ainsi, l'une des inégalités que nous avons sommées ci-dessus est stricte, on obtient donc une inégalité stricte : $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} < \ln(n)$.
On prouverait de la même manière que l'autre inégalité est stricte.

4.b. On a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n = -\ln(n+1) + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} + \ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Or, la concavité de $x \mapsto \ln(1+x)$ prouve, comme à la question 1.a, que $\forall x \geqslant 0, \ln(1+x) \leqslant x$.
Et donc $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$, de sorte que $\gamma_{n+1}-\gamma_n \geqslant 0$.
Et donc la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante, et étant minorée[7], par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge.}}$

[7] Par 0 d'après la question précédente.

5.a. On a

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right] &= \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)\times\prod_{k=1}^{n}\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\frac{k+x}{k}\times\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k}\right)\\ &= \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n!}\exp\left(-x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n!}\exp\left(-x\left(\gamma_n+\ln(n)\right)\right)\\ &= \frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n!}\exp\left(-\gamma_n x\right)\frac{1}{e^{x\ln n}}\\ &= \boxed{\exp(-\gamma_n x)\frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n^x n!}.}\end{aligned}$$

5.b. Puisque $\gamma \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$, alors, par continuité de la fonction exponentielle, $\exp(-\gamma_n x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-\gamma x)$.
Et d'après la question 2.c, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x)$, de sorte que[8]

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{n^x n!} = \frac{1}{x\Gamma(x)}.$$

Et donc la suite $(v_n(x))$ est bien convergente, et sa limite vérifie $\boxed{\ell(x) = \frac{\exp(-\gamma x)}{x\Gamma(x)}.}$

[8] Le passage à l'inverse est légitime puisque $\Gamma(x) \neq 0$.

6.a. Puisque $\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{x^2}{n^2}\right)$$

et donc

$$\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{x^2}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2n^2}.$$

Et donc, d'après le critère des équivalents pour les séries à termes positifs[9], puisque la série[10] de terme général $\frac{x^2}{2n^2}$ converge, il en est de même de la série de terme général $\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$.

Équivalent

Rappelons que par **définition**, on a $u_n \sim v_n$ si et seulement si

$$u_n = v_n + o(v_n).$$

[9] $\frac{x^2}{2n^2}$ est clairement positif.

[10] De Riemann.

6.b. Par continuité de la fonction logarithme, on a $\ln(\ell(x)) = \lim\limits_{n\to+\infty}\ln(v_n(x))$. Mais

$$\ln(v_n(x)) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\right]\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right].$$

Et donc

$$\ln(\ell(x)) = \lim_{n\to+\infty} -\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right] = \boxed{-\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right].}$$

D'après 5.b, $\Gamma(x) = \frac{\exp(-\gamma x)}{x\ell(x)}$, et donc par continuité du logarithme,

$$\ln(\Gamma(x)) = -\gamma x - \ln x - \ln(\ell(x)) = \boxed{-\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right].}$$

Continuité

Rappelons que lorsqu'on affirme que $u_n \to \ell$ donc $f(u_n) \to f(\ell)$, la continuité de f en ℓ est essentielle.
Par exemple, si $f(x) = \lfloor x \rfloor$, on a

$$1 - \frac{1}{n} \to 1$$

mais

$$f\left(1-\frac{1}{n}\right) \not\to \lfloor 1 \rfloor.$$

Ceci tient au fait que f n'est pas continue en 1.

7. Notons $u : x \mapsto \ln(\Gamma(x+1))$. Alors nous savons que $u(x) = \ln(x\Gamma(x)) = \ln(x) + \ln(\Gamma(x))$.
Et donc en dérivant, $u'(x) = \dfrac{1}{x} + \psi(x)$.
Mais d'autre part, par dérivation d'une composée, $u'(x) = \psi(x+1)$.
Et donc on a bien $\boxed{\psi(x) = \psi(x+1) - \dfrac{1}{x}.}$
Puisque la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^1$, ψ est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
Et en particulier, $\psi(x+1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \psi(1)$.
Mais $\psi(1)$ est une constante, donc $\psi(1) = \underset{x\to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Et donc $\psi(x) = -\dfrac{1}{x} + \underset{x\to 0^+}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right) \boxed{\underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{1}{x}.}$
Enfin, pour $n \geqslant 2$, on a

$$\psi(n) = \psi(n-1)+\frac{1}{n-1} = \psi(n-2)+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1} = \cdots = \psi(1)+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1} = \boxed{\psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.}$$

> $\mathscr{C}^1$
> Nous savons que Γ est deux fois dérivable. Donc Γ' est dérivable, et donc continue, de sorte que Γ est bien de classe $\mathscr{C}^1$.

8.a. Grâce à la relation établie en 6.b, on a

$$A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right] = -\gamma x - \ln(x) - \ln(\Gamma(x)).$$

Mais Γ étant deux fois dérivable, il en est de même de $\ln\circ\Gamma$, et donc A est deux fois dérivable car somme de fonctions deux fois dérivables.
On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$A'(x) = \boxed{-\gamma - \frac{1}{x} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}}$$
$$A''(x) = \boxed{\frac{1}{x^2} - \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2}.}$$

8.b. Pour $k = 1$, on a

$$U_n^{(k)}(x) = U_n'(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}} - 1\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+x} - 1\right) = \frac{-x}{n(n+x)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{n^2}.$$

Et donc $|U_n'(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$, qui converge par comparaison à une série de Riemann convergente.
On a ensuite, $U_n''(x) = -\dfrac{1}{(n+x)^2}$, $U_n^{(3)}(x) = \dfrac{2}{(x+n)^3}$, $U_n^{(4)} = -\dfrac{2\times 3}{(x+n)^4}$, et plus généralement, une récurrence rapide prouve que

$$\forall k \geqslant 2,\ U_n^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(n+x)^k}.$$

En particulier, $\left|U_n^{(k)}(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(k-1)!}{n^k}$.
Et donc $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} U_n^{(k)}(x) \text{ converge absolument}}$, par comparaison à une série de Riemann convergente.

8.c. La relation de la question 6.b s'écrit encore

$$A(x) = -\gamma x - \ln(x) - \ln(\Gamma(x)).$$

Ce qui en dérivant donne

$$A'(x) = -\gamma - \frac{1}{x} - \psi(x).$$

Et donc en particulier pour $x=1$, $A'(1) = -\gamma - 1 - \psi(1)$.
Mais d'autre part, grâce au résultat admis,

$$A'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(1) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Remarque

Notons que les résultats admis nous expliquent qu'ici (et ici seulement !) on a le droit de dire que la dérivée de la somme infinie est égale à la somme infinie des dérivées. Ce qui est un problème difficile en général.

Or, il est classique que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. Et alors, pour $N \in \mathbf{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Et donc $A'(1) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = -1$.

Il vient donc

$$\psi(1) = -\gamma - 1 + 1 = \boxed{-\gamma.}$$

On a alors,

$$\ln(n) - \psi(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma_n - \left(\psi(1) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) = \gamma - \gamma_n + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{0.}$$

9.a. Il est évident que G est positive[11] sur $\mathbf{R}_+^*$, et G est dérivable, avec $G'(t) = -\dfrac{2}{(x+t)^3} < 0$, donc G est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

De plus, G est continue sur $[1, +\infty[$, et au voisinage de $+\infty$, $G(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} G(t)\,dt$ converge, il en est de même[12] de $\displaystyle\int_1^{+\infty} G(t)\,dt$.

[11] Et même strictement positive !

[12] Il s'agit de fonctions de signe constant.

9.b. On a, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et tout $t \in [k, k+1]$, $G(k+1) \leqslant G(t) \leqslant G(k)$, et donc par croissance de l'intégrale,

$$G(k+1) = \int_k^{k+1} G(k+1)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} G(t)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} G(k)\,dt = G(k).$$

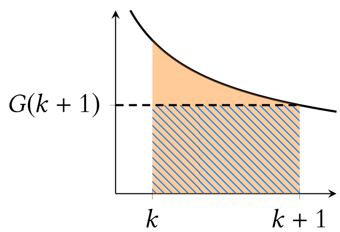


FIGURE 2– L'intégrale, qui est l'aire de la partie colorée est plus grande que l'aire de la partie hachurée, qui vaut $G(k+1)$ (c'est l'aire d'un rectangle de largeur 1 et de hauteur $G(k+1)$).

En sommant ces relations pour k allant de 1 à $n-1$, il vient, par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=1}^{n-1} G(k+1) \leqslant \int_1^n G(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} G(k).$$

En particulier, en réalisant un changement d'indice $i = k+1$ dans la première somme, il vient, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{i=2}^{n} G(i) \leqslant \int_1^n G(t)\,dt.$$

Mais la fonction G étant positive, $\displaystyle\int_1^n G(t)\,dt \leqslant \int_1^n G(t)\,dt + \underbrace{\int_n^{+\infty} G(t)\,dt}_{\geqslant 0} \leqslant \int_1^{+\infty} G(t)\,dt$.

On en déduit que la suite des sommes partielles de la série de terme général $G(k)$ sont majorées par $\displaystyle\int_1^{+\infty} G(t)\,dt$.

Mais puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs, cette suite des sommes partielles est croissante, et étant majorée, elle converge donc.

Autrement dit, la série de terme général $G(k)$ converge.

Et donc en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, il vient donc

$$\int_1^{+\infty} G(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} G(k).$$

Majoration

Notons que nous avons bien majoré par une constante, ce que n'était pas $\displaystyle\int_1^n G(t)\,dt$.

Il s'agit presque du résultat voulu, sauf qu'il s'agit d'une inégalité large et non stricte. Nous pourrions refaire le même calcul en commençant les sommes[13] à 2. On obtient alors

[13] Et l'intégrale.

$$\int_2^{+\infty} G(t)\,dt \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} G(k).$$

Il reste donc à prouver que $\displaystyle\int_1^2 G(t)\,dt \leqslant G(1)$.
Or, par stricte décroissance de G, on a, pour tout $t \in]1,2]$,

$$G(t) < G(1) \Leftrightarrow G(1) - G(t) > 0.$$

Et donc, la fonction $t \mapsto G(1) - G(t)$ étant continue, positive et non nulle sur $]1,2]$,

$$\int_1^2 (G(1) - G(t))\,dt > 0 \Leftrightarrow \int_1^2 G(t)\,dt > \int_1^2 G(1)\,dt = G(1).$$

Et donc on a bien

$$\int_1^{+\infty} G(t)\,dt = \int_1^2 G(t)\,dt + \int_2^{+\infty} G(t)\,dt < G(1) + \sum_{k=2}^{+\infty} G(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} G(k).$$

Enfin, la fonction G est continue, positive et non nulle sur $[1,+\infty[$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} G(t)\,dt > 0$.
Et donc on a bien prouvé que

$$\boxed{0 < \int_1^{+\infty} G(t)\,dt < \sum_{k=1}^{+\infty} G(k).}$$

9.c. Puisque $A'(x) = -\gamma - \dfrac{1}{x} - \psi(x)$, il vient

$$A''(x) = \frac{1}{x^2} - \psi'(x) \Leftrightarrow \psi'(x) = \frac{1}{x^2} - A''(x) = \frac{1}{x^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} U_k''(x).$$

Mais $U_k''(x) = -\dfrac{1}{(k+x)^2} = -G(k)$.
Et donc $\psi'(x) = \dfrac{1}{x^2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} G(k) > \dfrac{1}{x^2} + \displaystyle\int_1^{+\infty} G(t)\,dt$.
Or, pour $A > 1$,

$$\int_1^A G(t)\,dt = \int_1^A \frac{dt}{(x+t)^2} = \left[-\frac{1}{x+t}\right]_1^A = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+x}.$$

Et donc on a bien $\boxed{\psi'(x) > \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x+1}.}$
Enfin, on a, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} > \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{x}$$

de sorte que $\boxed{\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ \psi'(x) > \dfrac{1}{x}.}$

Partie III. Estimation des paramètres d'une loi $\Gamma(\theta, r)$.

10. La fonction f est positive[14] sur $\mathbf{R}$, et elle est continue sauf éventuellement en 0.
À l'aide du changement de variable affine $t = \dfrac{x}{\theta}$, il vient, sous réserve de convergence,

[14] Car Γ ne prend que des valeurs positives par positivité de l'intégrale.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(r)\theta^r} x^{r-1} e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(r)\theta^r} (\theta t)^{r-1} e^{-t}\theta \, dt \\
&= \frac{\cancel{\theta^r}}{\Gamma(r)\cancel{\theta^r}} \int_0^{+\infty} t^{r-1}e^{-t}\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(r)}\Gamma(r) = 1.
\end{aligned}$$

Convergence

On reconnaît ici une intégrale de référence convergente, donc par le théorème de changement de variable, l'intégrale de départ converge également.

Et donc $\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilités.}}$

11. L possède un maximum en (θ_0, r_0) si et seulement si

$$\forall (\theta, r) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*,\ L(\theta, r) \leqslant L(\theta_0, r_0).$$

Mais, par croissance de la fonction ln, ceci est équivalent à

$$\forall (\theta, r) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*,\ \ln(L(\theta, r)) \leqslant \ln(L(\theta_0, r_0)).$$

Autrement dit, L présente un maximum en (θ_0, r_0) si et seulement si F possède un maximum en (θ_0, r_0).

12.a. Notons que, les x_i étant strictement positifs,

$$F(\theta, r) = \sum_{i=1}^p \ln(f(x_i)) = \sum_{k=1}^p \ln\left(\frac{1}{\Gamma(r)\theta^r} x_i^{r-1}\exp\left(-\frac{x_i}{\theta}\right)\right) = \sum_{i=1}^p \left[-\ln(\Gamma(r)) - r\ln(\theta) + (r-1)\ln(x_i) - \frac{x_i}{\theta}\right].$$

Or, la fonction $(\theta, r) \mapsto r$ est classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}+^* \times \mathbf{R}_+^*$ car elle est polynomiale, donc par composition avec la fonction Γ qui est[15] de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, puis avec la fonction logarithme, $\mathscr{C}^2$ sur$\mathbf{R}_+^*$, $(\theta, r) \mapsto -\ln(\Gamma(r)$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.
De la même manière, $(\theta, r) \mapsto \theta$ et $(\theta, r) \mapsto r$ sont $\mathscr{C}^2$ car polynomiales, donc par composition par la fonction logarithme, puis par produit, $(\theta, r) \mapsto r\ln(\theta)$ est $\mathscr{C}^2$.
Et on montre de même que $(\theta, r) \mapsto (r-1)\ln(x_i) - \dfrac{x_i}{\theta}$ sont $\mathscr{C}^2$, de sorte que F est $\mathscr{C}^2$ par somme de fonctions $\mathscr{C}^2$.
On a alors, pour tout $(\theta, r) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$,

$$\partial_1 F(\theta, r) = \sum_{i=1}^p \left[-\frac{r}{\theta} + \frac{x_i}{\theta^2}\right] = \boxed{-\frac{pr}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^p x_i.}$$

$$\partial_2 F(\theta, r) = \sum_{i=1}^p \left[-\psi(r) - \ln(\theta) + \ln(x_i)\right] = \boxed{\sum_{i=1}^p \ln(x_i) - p\left(\psi(r) + \ln(\theta)\right).}$$

Et les dérivées d'ordre 2 sont données par

$$\boxed{\partial_{1,1}^2 F(\theta, r) = \frac{pr}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^p x_i} \boxed{\partial_{2,2}^2 F(\theta, r) = -p\psi'(r)} \boxed{\partial_{1,2}^2 F(\theta, r) = \partial_{2,1}^2 F(\theta, r) = -\frac{p}{\theta}.}$$

12.b. Un couple $(\theta^*, r^*) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ est un point critique de F si et seulement si

$$\begin{cases} -\dfrac{pr^*}{\theta^*} + \dfrac{1}{(\theta^*)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^p x_i = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^p \ln(x_i) - p\left(\psi(r^*) + \ln(\theta^*)\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(\theta^*)^2}(p\overline{x} - \theta^* p r^*) = 0 \\ \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^p \ln(x_i) = \psi(r^*) + \ln(\theta^*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta^* r^* = \overline{x} \\ \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^p \ln(x_i) = \dfrac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma(r^*)} + \ln\left(\dfrac{\overline{x}}{r^*}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \theta^* r^* = \overline{x} \\ \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=1}^p \ln(x_i) - \dfrac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma(r^*)} - \ln(r^*) = \ln(\overline{x}) \end{cases}}$$

[15] On a admis que Γ est deux fois dérivable et que $\Gamma'' = g_1$. Nous admettrons également que g_1 est continue, de sorte que Γ est $\mathscr{C}^2$.

13.a. Soit $\varphi : x \mapsto x - 1 - \ln(x)$.
Alors φ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

Donc φ' est strictement négative sur $]0,1[$, de sorte que φ est strictement décroissante sur $]0,1]$, avec $\varphi(1)=0$.
Et donc pour tout $x\in]0,1[$, $\varphi(x)>0 \Leftrightarrow \ln(x)<x-1$.
Sur $]1,+\infty[$, φ' est strictement positive, donc φ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, et donc pour tout $x\in]1,+\infty[$, $\varphi(x)>\varphi(1)=0 \Leftrightarrow \boxed{\ln(x)<x-1.}$

Remarque
Un argument de concavité de la fonction ln nous permettrait de prouver l'inégalité large, mais pour obtenir une inégalité stricte, il faut passer par l'étude de fonction.

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} K_p &= \ln\overline{x}-\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\ln x_i = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\left[\ln\overline{x}-\ln x_i\right] = -\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\ln\frac{\overline{x}}{x_i} \\ &\geqslant -\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\left[\frac{x_i}{\overline{x}}-1\right] = \frac{1}{\overline{x}}\underbrace{\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}x_i}_{=\overline{x}}-1 = \boxed{0.} \end{aligned}$$

De plus, les x_i ne sont pas tous égaux, et en particulier ne sont pas tous égaux à $\overline{x}$.
Et donc pour au moins l'un des $i\in[\![1,p]\!]$, $\frac{x_i}{\overline{x}}\neq 1$, de sorte que $-\ln\frac{x_i}{\overline{x}}>\frac{x_i}{\overline{x}}-1$.
Et donc on a

$$K_p > -\sum_{i=1}^{p}\left[\frac{x_i}{\overline{x}}-1\right]=0.$$

13.b. On a donc $h(y)=\ln(y)-\psi(y)-K_p$.
Puisque ψ est dérivable, il en est de même de h, et $h'(y)=\frac{1}{y}-\psi'(y)<0$.
On en déduit donc que h est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.
D'autre part, nous savons qu'au voisinage de 0, $\psi(y)\underset{y\to 0^+}{\sim}-\frac{1}{y}$.
Et donc $\ln(y)=\underset{y\to 0^+}{o}(\psi(y))$, de sorte que

Détails
C'est le résultat de la question 9.

Détails
Ce résultat a été établi à la question 7.

$$\ln(y)-\psi(y)\underset{y\to 0^+}{\sim}-\psi(y)\underset{y\to 0^+}{\sim}\frac{1}{y}.$$

On en déduit en particulier que $\lim\limits_{y\to 0^+}h(y)=+\infty$.
D'autre part, h étant décroissante, elle admet une limite[16] en $+\infty$.
Et alors

$$\lim_{y\to+\infty}h(y)=\lim_{n\to+\infty}h(n)=\lim_{n\to+\infty}(\ln n-\psi(n))-K_p=-k_p.$$

[16] Finie ou égale à $-\infty$.

Détails
La limite de $\psi(n)-\ln(n)$ a été calculée en 8.c.

Le tableau de variation de h est donc donné par :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	$0 \searrow -K_p$

13.c. Par le théorème de la bijection[17], h réalise une bijection de $\mathbf{R}+_+^*$ sur $]-K_p,+\infty[$. Et donc en particulier il existe un unique $r^*\in\mathbf{R}_+^*$ tel que $h(r^*)=0\Leftrightarrow \ln r^*-\frac{\Gamma(r^*)}{\Gamma'(r^*)}=K_p$.

Et alors, $\boxed{\left(\frac{\overline{x}}{r^*},r^*\right)\text{ est l'unique solution du système }(S).}$

[17] Qui s'applique car h est continue et strictement décroissante.

14. D'après les calculs réalisés précédemment, on a

$$\partial^2_{1,1}F\left(\frac{\overline{x}}{r^*},r^*\right)=\frac{pr^*}{\left(\frac{\overline{x}}{r^*}\right)^2}-\frac{2p\overline{x}}{\left(\frac{\overline{x}}{r^*}\right)^3}=-\frac{p\overline{x}}{\left(\frac{\overline{x}}{r^*}\right)^3}=-\frac{p(r^*)^3}{\overline{x}^2},\ \partial^2_{2,2}F\left(\frac{\overline{x}}{r^*},r^*\right)=-p\psi'(r^*).$$

Et de même, $\partial^2_{1,2}F(\theta^*,r^*) = \partial^2_{2,1}F(\theta^*,r^*) = -\dfrac{p\overline{x}}{r^*}$.
On a donc $\operatorname{tr}\left(\nabla^2 F(\theta^*,r^*)\right) = \partial^2_{1,1}F(\theta^*,r^*) + \partial^2_{2,2}F(\theta^*,r^*) < 0$ et

$$\det\left(\nabla^2 F(\theta^*,r^*)\right) = \frac{p^2}{(\theta^*)^2}\left(\frac{\overline{x}}{\theta^*}\psi'(r^*) - 1\right) = \frac{p^2}{(\theta^*)^2}\left(r^*\psi'(r^*) - 1\right).$$

Mais d'après la question 9, on a $\psi'(r^*) > \dfrac{1}{r^*}$ et donc $\det\left(\nabla^2 F(\theta^*,r^*)\right) > 0$.

Nous savons que les valeurs propres de $\det\left(\nabla^2 F(\theta^*,r^*)\right)$ sont les racines de

$$P(X) = X^2 - \operatorname{tr}\left(\nabla^2 F(\theta^*,r^*)\right) + \det\left(\nabla^2 F(\theta^*,r^*)\right).$$

Notons λ_1, λ_2 ces deux valeurs propres, de sorte que

$$P(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2) = X^2 - (\lambda_1+\lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2.$$

Par identification des coefficients de P, il vient donc

$$\det\left(\nabla^2 F(\theta^*,r^*)\right) = \lambda_1\lambda_2 \text{ et } \operatorname{tr}\left(\nabla^2 F(\theta^*,r^*)\right) = \lambda_1+\lambda_2.$$

On en déduit donc que $\lambda_1\lambda_2 > 0$, de sorte que λ_1 et λ_2 sont non nulles, et de même signe.
Et puisque $\lambda_1+\lambda_2 > 0$, toutes deux sont positives.
Et donc $\boxed{F \text{ possède un minimum local en } (\theta^*,r^*).}$

Détails
Il y a bien deux valeurs propres distinctes puisque la matrice hessienne est diagonalisable, et ne peut avoir une seule valeur propre puisqu'elle n'est pas diagonale.

Partie IV. Estimateur sans biais de l'écart-type σ d'une loi normale.

15. Il est évident que T est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$.
Pour $x \geqslant 0$, on a

$$P(T \leqslant x) = P\left(\frac{X^2}{2\sigma^2} \leqslant x\right) = P(X^2 \leqslant 2\sigma^2 x) = P\left(-\sigma\sqrt{2x} \leqslant X \leqslant \sigma\sqrt{2x}\right) = P\left(-\sqrt{2x} \leqslant \frac{X}{\sigma} \leqslant \sqrt{2x}\right).$$

Mais $\dfrac{X}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, et donc

$$P(T \leqslant x) = \Phi\left(\sqrt{2x}\right) - \Phi\left(-\sqrt{2x}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{2x}\right) - 1.$$

Donc la fonction de répartition de T est $F_T : x \mapsto \begin{cases} 2\Phi\left(\sqrt{2x}\right) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Puisque Φ est $\mathscr{C}^1$, F_T est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$.
D'autre part, on a

$$\lim_{x\to 0^+} F_T(x) = 2\Phi(0) - 1 = 2\frac{1}{2} - 1 = 0 = \lim_{x\to 0^-} F_T(x) = F_T(0).$$

$\mathscr{C}^1$
Φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ tout entier car on sait qu'il existe une densité de la loi normale qui est continue sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Donc F_T est continue en 0 et donc sur $\mathbf{R}$.
Ainsi, T est une variable à densité, dont une densité est donnée par

$$f_T : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2x}}\Phi'(\sqrt{2x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2x}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}x^{1/2-1}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisqu'il s'agit d'une densité, on a en particulier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} x^{1/2-1}e^{-x}\,dx = 1 \Leftrightarrow \boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.}$$

Et donc $f_T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1/2)}x^{1/2-1}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$
On reconnaît là une densité de la loi $\gamma(1/2)$, de sorte que $\boxed{T \hookrightarrow \gamma(1/2).}$

16.a. Puisque les X_i sont mutuellement indépendantes, il en est de même des $\dfrac{X_i^2}{2\sigma^2}$.
Mais nous venons de prouver que ces variables suivent toutes la loi $\gamma(1/2)$.
Et donc par stabilité des lois γ, $\boxed{S_n \hookrightarrow \gamma(n/2).}$

16.b. En particulier, on a $E(S_n) = \dfrac{n}{2}$, et donc par linéarité de l'espérance,

$$E(Y_n) = E\left(\frac{2\sigma^2}{n}S_n\right) = \frac{2\sigma^2}{n}E(S_n) = \boxed{\sigma^2.}$$

Puisque Y_n est une fonction[18] des n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, c'est bien un estimateur de σ^2, qui est donc $\boxed{\text{sans biais.}}$

[18] Ne dépendant pas de σ !

16.c. Puisque $\left(\sqrt{Y_n}\right)^2 = Y_n$, et que Y_n possède une espérance, $\sqrt{Y_n}$ possède un moment d'ordre 2, et donc une variance.
De plus, cette variance est non nulle car Y_n est une variable à densité, et donc $\sqrt{Y_n}$ n'est pas une variable certaine.
On a alors $V\left(\sqrt{Y_n}\right) = E(Y_n) - E\left(\sqrt{Y_n}\right)^2 = \sigma^2 - E\left(\sqrt{Y_n}\right)^2$.
Et donc[19] $V\left(\sqrt{Y_n}\right) > 0 \Leftrightarrow \boxed{E\left(\sqrt{Y_n}\right) < \sigma.}$

Variance nulle

Rappelons que seules les variables (presque) certaines possèdent une variance nulle.

[19] $E\left(\sqrt{Y_n}\right) \geqslant 0$ puisque $\sqrt{Y_n}$ est à valeurs positives.

16.d. Par linéarité de l'espérance, $E(\sqrt{Y_n}) = E\left(\sqrt{\dfrac{2\sigma^2}{n}}\sqrt{S_n}\right) = \sigma\sqrt{\dfrac{2}{n}}E(\sqrt{S_n})$.

Mais par le théorème de transfert,

$$E(\sqrt{S_n}) = \int_0^{+\infty} \sqrt{x}\frac{1}{\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x}\,dx = \frac{1}{\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty} x^{\frac{n+1}{2}-1}e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{\lambda_n}.$$

Et donc $\boxed{E(\sqrt{Y_n}) = \sqrt{\dfrac{2}{n}}\dfrac{\sigma}{\lambda_n}.}$

16.e. D'après les calculs effectués précédemment, on a

$$E\left(\widehat{\sigma_n}\right) = \frac{\lambda_n}{\sqrt{2}}E\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{1/2}\right) = \frac{\lambda_n}{\sqrt{2}}\sigma\sqrt{2}E\left(\sqrt{S_n}\right) = \sigma\lambda_n\underbrace{\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}}_{=1/\lambda_n} = \sigma.$$

Et donc $\boxed{\widehat{\sigma_n} \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma.}$

17.a. On a $\widehat{\sigma_n}^2 = \dfrac{\lambda_n^2}{2}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^2\right)^{1/2} = \dfrac{\lambda_n^2}{2}2\sigma^2 S_n$.
Et donc par linéarité de l'espérance,

$$E\left(\widehat{\sigma_n}^2\right) = \lambda_n^2\sigma^2E(S_n) = \lambda_n^2\sigma^2\frac{n}{2}.$$

Par la formule de Huygens, on a alors

$$V\left(\widehat{\sigma_n}\right) = E\left(\widehat{\sigma_n}^2\right) - E\left(\widehat{\sigma_n}\right)^2 = \lambda_n^2\sigma^2\frac{n}{2} - \sigma^2 = \boxed{\sigma^2\left(\lambda_n^2\frac{n}{2} - 1\right).}$$

17.b. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev[20],

$$P\left(\left|\widehat{\sigma_n} - \underbrace{E\left(\widehat{\sigma_n}\right)}_{=\sigma}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V\left(\widehat{\sigma_n}\right)}{\varepsilon^2}.$$

[20] Qui s'applique car $\widehat{\sigma_n}$ possède une variance.

Mais $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{n}}$, de sorte que $\lambda_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$ et donc $\lambda_n^2\dfrac{n}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Et donc $V\left(\widehat{\sigma_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par le théorème des gendarmes[21], on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|\widehat{\sigma_n} - \sigma| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $\boxed{\widehat{\sigma_n} \xrightarrow{P} \sigma.}$

[21] Une probabilité est positive.

ESCP (épreuve supprimée en 2006)

7

ESCP 2005

Sujet : loi trinomiale et loi de Poisson **Facile**
Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★
Thèmes du programme abordés : probabilités discrètes, couples de variables aléatoires discrètes, covariance.
Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.
Commentaires : un joli sujet de difficulté progressive. Une belle initiation aux sujets de maths II ou de parisiennes.

Ce problème est composé de trois parties largement indépendantes, même si certains objets introduits dans la partie II se retrouvent dans la partie III. La partie I étudie un exemple de couple aléatoire suivant une loi trinomiale. La partie II étudie les lois marginales d'un tel couple. La partie III propose une caractérisation de la loi de Poisson.

Partie I

On considère, dans cette partie des entiers naturels non nuls n, u, d, t et b, vérifiant $u+d+t=b$.
Une urne $\mathscr{U}$ contient b boules, parmi lesquelles u boules portent le numéro 1, d le numéro 2 et t le numéro 3.
Une expérience consiste en n tirages successifs d'une boule de l'urne $\mathscr{U}$ avec remise.
À chaque tirage, toutes les boules de l'urne $\mathscr{U}$ ont même probabilité d'être tirées.
Le modèle choisi pour cette expérience est l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ dans lequel l'univers Ω est l'ensemble $\{1,2,3\}^n$ des n-uplets d'éléments de l'ensemble $\{1,2,3\}$, et la tribu $\mathscr{T}$ est l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω, la probabilité P se déduisant naturellement des hypothèses qui ont été ou seront formulées.

Aucun tirage n'influe sur les autres en cela que, si une suite quelconque $(V_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ est telle que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la valeur de V_k ne dépend que du résultat du k-ième tirage, alors les variables $V_1, V_2, \dots, V_n$ sont mutuellement indépendantes.

On note U (respectivement D, T) la variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ dont la valeur est le nombre de boules numérotées 1 (respectivement 2, 3) tirées au cours de l'expérience.

1. Montrer que la variable aléatoire U suit une loi usuelle (à préciser), donner son espérance et sa variance. Donner, de même, les lois des variables aléatoires D et T, respectivement.
2. Les variables aléatoires U et D sont-elles indépendantes ? *Justifiez votre réponse.*
3. Déterminer, sans calcul, la loi de la variable aléatoire $U+D$, son espérance et sa variance.
4. En déduire que la covariance du couple (U,D) est égale à $-\dfrac{nud}{b^2}$.
5. *Simulation informatique*
   On considère la fonction `Scilab` nommée `simulation` déclarée comme suit :

```
function R = simulation(n)
  x=0 ; y=0 ;z=0 ;
  A = grand(1,n,'uin',1,6) ;
  for k=1 :n
    r = A(k) ;
    if r== 1 then
      x = x+1 ;
   else if r <=3 then
      y = y+1 ;
   else
      z = z+1 ;
   end
  end
end
R = [x,y,z]
endfunction
```

   Que réalise l'instruction `simulation(12)` ?
   On demande une réponse en rapport avec l'expérience précédemment étudiée et, en particulier, que soient précisées les valeurs des paramètres u, d, t et n dans la simulation proposée.

Dans toute la suite, m, i et j étant des entiers naturels, on note :

$$\binom{m}{i,j} = \begin{cases} \dfrac{m!}{i!j!(m-i-j)!} & \text{si } i+j \leqslant m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6. On considère deux entiers naturels k et ℓ vérifiant $k+\ell \leqslant n$.
Soit $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un élément donné de Ω comportant exactement k « 1 » et ℓ « 2 ».
Quelle est la probabilité $P(\{\omega\})$ de l'événement élémentaire $\{\omega\}$?
Dénombrer les n-uplets appartenant à l'ensemble Ω et comportant exactement k « 1 » et ℓ « 2 ».
En déduire que la probabilité de l'événement $[U=k] \cap [D=\ell]$ est égale à :

$$\binom{n}{k,\ell}\frac{u^k d^\ell t^{n-k-\ell}}{b^n}.$$

Ce résultat reste-t-il vrai si $k+\ell > n$?

Partie II : lois marginales d'un couple aléatoire de loi trinomiale.
On considère, dans cette partie, un entier naturel n et l'ensemble I_n défini par

$$I_n = \{(k,\ell)/\ k \in [\![0,n]\!] \text{ et } \ell \in [\![0,n]\!]\ k+\ell \leqslant n\}.$$

Un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ étant donné, ainsi que trois réels strictement positifs p, q et r vérifiant $p+q+r=1$, on considère un couple aléatoire (X_n, Y_n) défini sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs dans I_n, et tel que, pour tout couple $(k,\ell) \in I_n$:

$$P((X_n, Y_n) = (k,\ell)) = \binom{n}{k,\ell} p^k q^\ell r^{n-k-\ell}.$$

7. Vérifier que : $\displaystyle\sum_{(k,\ell)\in I_n} \binom{n}{k,\ell} p^k q^\ell r^{n-k-\ell} = 1.$
8. Montrer que les variables aléatoires X_n et Y_n suivent toutes deux une loi binomiale (en préciser les paramètres respectifs).
9. On se propose de calculer la covariance du couple (X_n, Y_n).
   a. On suppose que $n \geq 2$. Prouver que, pour tout couple $(k,\ell) \in I_n$ vérifiant $k \geq 1$ et $\ell \geq 1$, on a :
   $$k\ell\binom{n}{k,\ell} = n(n-1)\binom{n-2}{k-1,\ell-1}.$$
   En déduire que $E(X_n Y_n) = n(n-1)pq$.
   b. Cette relation est-elle encore vraie si $n=0$? si $n=1$?
   c. En déduire la valeur de la covariance $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n)$ du couple (X_n, Y_n).
10. Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

Partie III : Une caractérisation de la loi de Poisson.
Dans cette partie, la lettre n ne désigne plus un entier naturel fixé et on considère les suites $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des variables aléatoires définies, dans la partie précédente, pour chaque entier naturel n sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
On rappelle que, pour tout entier naturel n, les variables aléatoires X_n et Y_n suivent des lois binomiales dont les paramètres ont été calculés en **II.8**.
On considère par ailleurs, une variable aléatoire N *non presque sûrement constante* définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, à valeurs dans l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels et indépendante de tous les couples (X_n, Y_n), ce qui signifie que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $(i,j,k) \in \mathbf{N}^3$,

$$P([(X_n, Y_n) = (i,j)] \cap [N=k]) = P((X_n, Y_n) = (i,j))\, P(N=k)$$

On définit les fonctions $X : \Omega \longmapsto \mathbf{N}$ et $Y : \Omega \mapsto \mathbf{N}$ de la manière suivante : si N prend la valeur n, alors X (respectivement Y) prend la même valeur que X_n (respectivement Y_n).
A. Remarques générales.
11. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$,
$$[X=k] = \bigcup_{n=0}^{+\infty}([X_n=k] \cap [N=n]) = \bigcup_{n=k}^{+\infty}([X_n=k] \cap [N=n])$$
En déduire que X est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
On prouverait de même que Y est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

12. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, les variables aléatoires N et X_n, sont indépendantes.
On prouverait de même que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, les variables N et Y_n sont indépendantes.

13. Déduire des résultats précédents que, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$P(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} P(N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} P(N = n)$$

Exprimer de même, pour tout $\ell \in \mathbf{N}$, $P(Y = \ell)$ sous forme de somme d'une série.

14. Les variables aléatoires N et X sont-elles indépendantes ?
On considérera deux entiers a, et b vérifiant $0 \leq a < b$, $P(N = a) \neq 0$ et $P(N = b) \neq 0$, et on se préoccupera de l'événement $[N = a] \cap [X = b]$.

B. Si N suit une loi de Poisson, alors X et Y sont indépendantes.

On considère un réel strictement positif λ. On suppose que la variable aléatoire N suit la loi de Poisson de paramètre λ.

15. Montrer que X suit la loi de Poisson de paramètre λp et que Y suit la loi de Poisson de paramètre λq.

16. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
On commencera par justifier que, pour tout couple $(k, \ell) \in \mathbf{N}^2$,

$$P([X = k] \cap [Y = \ell]) = \sum_{n=k+\ell}^{+\infty} P([X_n = k] \cap [Y_n = \ell]) P(N = n)$$

C. Si X et Y sont indépendantes, alors N suit une loi de Poisson.

On ne suppose plus a priori *que la variable aléatoire N suit une loi de Poisson.* On suppose maintenant que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

17. Montrer que, pour tout réel z appartenant à $[0, 1]$, la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} z^n P(N = n)$ converge.

Dans toute la suite, si $z \in [0, 1]$, la somme de cette série est notée $\Phi(z)$.

Un lemme de Fubini : on **rappelle** le résultat suivant : soit $(r_{i,j})_{(i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}}$ une famille de réels *positifs* ou nuls.

On suppose que, pour tout $j \in \mathbf{N}$, la série $\sum r_{i,j}$ converge ; on note $C_j = \sum_{i=0}^{+\infty} r_{i,j}$. On suppose de plus que la série $\sum_{j \in \mathbf{N}} C_j$ converge.

Alors :

i) Pour tout $i \in \mathbf{N}$, la série $\sum_{j \in \mathbf{N}} r_{i,j}$ converge ; on note $L_i = \sum_{j=0}^{+\infty} r_{i,j}$ sa somme ;

ii) La série $\sum_{i \in \mathbf{N}} L_i$ converge et $\sum_{i=0}^{+\infty} L_i = \sum_{j=0}^{+\infty} C_j$.

On définit en ce cas la somme $\sum_{(i,j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}} r_{i,j}$ comme étant le nombre $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} r_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} r_{i,j} \right)$.

18. On considère deux réels α et β appartenant tous deux à $[0, 1]$. On définit sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ les variables aléatoires $A = \alpha^X$ et $B = \beta^Y$.
    a. Montrer que les variables aléatoires A et B admettent une espérance (que l'on ne cherchera pas à évaluer).
    b. Montrer que $0 \leq p\alpha + 1 - p \leq 1$ puis, en utilisant le lemme de Fubini, que

$$E(A) = \Phi(p\alpha + 1 - p)$$

On montrerait de même que $0 \leq q\beta + 1 - q \leq 1$ et que $E(B) = \Phi(q\beta + 1 - q)$.

19. On définit la variable aléatoire $C = AB = \alpha^X \beta^Y$.
    a. Justifier que la variable aléatoire C admet une espérance (que l'on ne cherchera pas à évaluer).
    b. Établir que $0 \leq p\alpha + q\beta + r \leq 1$, puis, en utilisant le théorème de transfert et le lemme de Fubini, que $E(C) = \Phi(p\alpha + q\beta + r)$.

20. Pour quelle raison peut-on affirmer que $E(AB) = E(A)E(B)$?
En déduire que, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$,

$$\Phi(1 - p(1-\alpha) - q(1-\beta)) = \Phi(1 - p(1-\alpha))\Phi(1 - q(1-\beta))$$

21. Montrer que, pour tout réel $z \in]0,1]$, $\Phi(z) > 0$. Que vaut $\Phi(1)$?

22. On définit l'application $\varphi : [0,1[\mapsto \mathbf{R}$ par la relation $\varphi(z) = \ln(\Phi(1-z))$.

- **a.** Montrer que, pour tous réels $a \in [0,p]$ et $b \in [0,q]$, $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.
  On pose dans toute la suite $\mu = \min(p,q)$ et $I = [0,\mu]$.
- **b.** Calculer $\varphi(0)$. Montrer que, pour tout couple $(n,a) \in \mathbf{N} \times I$ vérifiant $0 \leq na \leq \mu$, on a : $\varphi(na) = n\varphi(a)$.
- **c.** Montrer que, pour tout triplet $(n,m,a) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^* \times I$ tel que $0 \leqslant \frac{n}{m}, a \leqslant \mu$,

$$\varphi\left(\frac{n}{m}a\right) = \frac{n}{m}\varphi(a).$$

- **d.** Soit un couple $(x,a) \in \mathbf{R} \times I$ vérifiant $0 < xa < \mu$.
  Si r est un réel, on note $\lfloor r \rfloor$ la partie entière de r.
  Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$ et que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.
  Montrer que la fonction φ décroît sur $[0,1[$. En déduire que $\varphi(xa) = x\varphi(a)$.
- **e.** Montrer enfin qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = -\lambda x$.

23. On admet le résultat suivant :
Si la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est telle que, pour tout $z \in [1-\mu, 1]$, la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n z^n$ converge et est de somme nulle, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 0$.
Montrer que la variable aléatoire N suit la loi de Poisson de paramètre λ.

ESCP 2005 : Corrigé

Partie I

1. À chaque tirage, la probabilité de tirer une boule numérotée 1 vaut $\frac{u}{b}$, et par indépendance des tirages (qui ont lieu avec remise), on en déduit que U suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{u}{b}\right)$. De même, D suit la loi $\mathscr{B}\left(n, \frac{d}{b}\right)$ et T suit la loi $\mathscr{B}\left(n, \frac{t}{b}\right)$.

2. Les variables aléatoires U et D ne sont pas indépendantes, puisqu'il n'est pas possible de tirer simultanément n boules numérotées 1 et n boules numérotées 2. Plus formellement,

$$P([U=n]\cap[D=n]) = 0 \text{ et } P(U=n)\neq 0 \text{ et } P(D=n)\neq 0.$$

3. À chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule numérotée 1 ou 2 est $\frac{u+d}{b}$, et donc[1] $U+D$ suit la loi $\mathscr{B}\left(n, \frac{u+d}{b}\right)$. On en déduit que

$$\boxed{E(U+D) = n\frac{u+d}{b}} \text{ et } V(U+D) = n\frac{u+d}{b}\left(1-\frac{u+d}{b}\right) = \boxed{n\frac{(u+d)t}{b^2}}.$$

[1] $U+D$ compte le nombre de boules numérotées 1 ou 2 obtenues au cours des n tirages.

4. Nous savons que

$$V(U+D) = V(U)+V(D)+2\operatorname{Cov}(U,D) = n\frac{u}{b}\left(1-\frac{u}{b}\right)+n\frac{d}{b}\left(1-\frac{d}{b}\right)+2\operatorname{Cov}(U,D).$$

On en déduit que

$$2\operatorname{Cov}(U,D) = n\frac{(u+d)t}{b^2} - n\frac{u(d+t)}{b^2} - n\frac{d(u+t)}{b^2} = -2n\frac{ud}{b^2}$$

et donc

$$\boxed{\operatorname{Cov}(U,D) = -\frac{nud}{b^2}.}$$

Indépendance
Puisque cette covariance est non nulle, on retrouve le résultat de la question 2.

5. La commande `simulation(12)` simule douze tirages dans une urne comportant au total six boules, dont une seule boule numérotée «1», deux boules numérotées «2», et par conséquent trois boules numérotées «3».
La fonction retourne un vecteur ligne `(x,y,z)` où `x` représente le nombre de boules numérotées «1», `y` représente le nombre de boules numérotées «2» et `z` représente le nombre de boules numérotées «3» obtenus au cours de ces douze tirages.

6. La probabilité $P(\{\omega\})$ est la probabilité qu'un tirage donne exactement k boules numérotées 1 (les numéros de ces tirages étant fixés à l'avance : il s'agit des indices i tels que $x_i = 1$), ℓ tirages numérotés 2 et donc $n-k-\ell$ tirages numérotés 3.
Or, lors du i-ème tirage, la probabilité d'avoir une boule numérotée 1 est $\frac{u}{b}$, celle d'obtenir une boule numérotée 2 est $\frac{d}{b}$, etc.
Par indépendance des tirages, on en déduit que

$$P(\{\omega\}) = \left(\frac{u}{b}\right)^k\left(\frac{d}{b}\right)^\ell\left(\frac{t}{b}\right)^{n-k-\ell} = \boxed{\frac{u^k d^\ell t^{n-k-\ell}}{b^n}.}$$

Dénombrons les n-uplets de Ω contenant exactement k «1» et ℓ «2».
Pour se fixer un tel n-uplet, on peut commencer par fixer les places des k «1», et il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir ces places.
Puis, une fois fixé l'emplacement des «1», il s'agit de choisir où se situeront les «2» parmi les $n-k$ emplacements disponibles : il y a $\binom{n-k}{\ell}$ manières de choisir ces emplacements.
Ainsi, le nombre total de tels n-uplets est

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{\ell!(n-k-\ell)!} = \frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!} = \boxed{\binom{n}{k,\ell}.}$$

Dénombrement
Pour chaque choix de la place des 1, il y a $\binom{n-k}{\ell}$ choix de la place des 2. Ceci explique qu'on multiplie les coefficient binomiaux.

Enfin, remarquons que l'événement $[U=k]\cap[D=\ell]$ est la réunion des $\binom{n}{k,\ell}$ événements élémentaires $\{\omega\}$, où ω est un n-uplet comportant exactement k «1» et ℓ «2». Ces événements étant deux à deux incompatibles, et de probabilité $\dfrac{u^k d^\ell t^{n-k-\ell}}{b^n}$, on en déduit que

$$\boxed{P([U=k]\cap[D=\ell]) = \binom{n}{k,\ell}\frac{u^k d^\ell t^{n-k-\ell}}{b^n}.}$$

De plus, ce résultat reste vrai pour $k+\ell>n$, car alors $\binom{n}{k,\ell}=0$ par définition, et que les événements $[U=k]\cap[D=\ell]$ sont incompatibles[2].

[2] On ne peut tirer simultanément k boules numérotées «1» et ℓ boules numérotées «2», cela ferait un total de plus de n boules.

Partie II : lois marginales d'un couple aléatoire de loi trinomiale

7. Notons que $(k,\ell)\in I_n$ si et seulement si $\begin{cases}0\leqslant k\leqslant n\\ 0\leqslant \ell\leqslant n-k\end{cases}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{(k,\ell)\in I_n}\binom{n}{k,\ell}p^k q^\ell r^{n-k-\ell} &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!}p^k q^\ell r^{n-k-\ell}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k\sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{(n-k)!}{\ell!(n-k-\ell)!}q^\ell r^{n-k-\ell}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n-k}{\ell}q^\ell r^{n-k-\ell}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(q+r)^{n-k}\\
&=(p+(q+r))^n = 1^n = \boxed{1.}
\end{aligned}$$

8. Puisque la variable aléatoire Y_n prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$, $\{[Y_n=\ell], \ell\in[\![0,n]\!]\}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, pour $k\in[\![0,n]\!]$, par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
P(X_n=k) &= \sum_{\ell=0}^{n}P([X_n=k]\cap[Y_n=\ell])\\
&= \sum_{\ell=0}^{n-k}P([X_n=k]\cap[Y_n=\ell])\\
&= \sum_{\ell=0}^{n-k}\frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!}p^k q^\ell r^{n-k-\ell}\\
&= \binom{n}{k}p^k\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n-k}{\ell}q^\ell r^{n-k-\ell}\\
&= \binom{n}{k}p^k(q+r)^{n-k}\\
&= \boxed{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.}
\end{aligned}$$

Explication

Si $k+\ell>n \Leftrightarrow \ell>n-k$, alors

$P([X_n=k]\cap[Y_n=\ell])=0$.

Ainsi, $\boxed{X_n \text{ suit la loi binomiale } \mathscr{B}(n,p).}$ On montrerait de même que Y_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,q)$.

9.a. Soit $(k,\ell)\in I_n$ avec $k\geqslant 1, \ell\geqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned}
k\ell\binom{n}{k,\ell} &= k\ell\frac{n!}{k!\ell!(n-k-\ell)!} = \frac{n!}{(k-1)!(\ell-1)!(n-k-\ell)!}\\
&= n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!((n-2)-(k-1)-(\ell-1))!} = n(n-1)\binom{n}{k,\ell}.
\end{aligned}$$

L'existence de $E(X_nY_n)$ est claire car X_n et Y_n sont deux variables aléatoires finies, donc il en est de même de X_nY_n, qui admet donc une espérance.
Par le théorème de transfert (appliqué à la fonction $(x,y)\mapsto xy$), on a

$$\begin{aligned}
E(X_nY_n) &= \sum_{(k,\ell)\in I_n} k\ell P([X_n=k]\cap[Y_n=\ell])\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n-k} k\ell\binom{n}{k,\ell}p^kq^\ell r^{n-k-\ell}\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-k} k\ell\binom{n}{k,\ell}p^kq^\ell r^{n-k-\ell}\\
&=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-k} n(n-1)\binom{n-2}{k-1,\ell-1}p^kq^\ell r^{n-k-\ell}\\
&=n(n-1)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-k}\frac{(n-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!(n-k-\ell)!}p^kq^\ell r^{n-k-\ell}\\
&=n(n-1)\sum_{k'=0}^{n-2}\sum_{\ell'=0}^{n-k'-2}\frac{(n-2)!}{k'!\ell'!(n-2-k'-\ell')!}p^{k'+1}q^{\ell'+1}r^{n-2-k'-\ell'}\\
&=n(n-1)pq\sum_{k'=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k'!(n-2-k')!}p^{k'}\sum_{\ell'=0}^{n-2-k'}\frac{(n-2-k')!}{\ell'!(n-2-k'-\ell')!}q^{\ell'}r^{n-2-k'-\ell'}\\
&=n(n-1)pq\sum_{k'=0}^{n-2}\binom{n-2}{k'}p^{k'}\sum_{\ell'=0}^{n-2-k'}\binom{n-2-k'}{\ell'}q^{\ell'}r^{n-2-k'-\ell'}\\
&=n(n-1)pq\sum_{k'=0}^{n-2}\binom{n-2}{k'}p^{k'}(q+r)^{n-2-k'}\\
&=n(n-1)pq(p+q+r)^{n-2}\\
&=\boxed{n(n-1)pq.}
\end{aligned}$$

Chgts d'indices
On pose à la fois $k'=k-1$ et $\ell'=\ell-1$. Ainsi,
$\ell\leqslant n-k \Leftrightarrow \ell'\leqslant n-k'-2$.

9.b. Si $n=0$, alors X_n et Y_n sont toutes les deux des variables aléatoires certaines égales à 0, et donc $E(X_nY_n)=E(0)=0$, donc la formule reste valable.
Si $n=1$, alors X_1 et Y_1 sont à valeurs dans $\{0,1\}$, et les événements $[X_1=1]$ et $[Y_1=1]$ sont incompatibles (car $(1,1)\notin I_1$).
Donc $\forall\omega\in\Omega, X_1(\omega)=0$ ou $Y_1(\omega)=0$. Et donc

$$\forall\omega\in\Omega,(X_1Y_1)(\omega)=0.$$

On en déduit que $E(X_1Y_1)=0$, et donc la formule obtenue précédemment reste valable.

9.c. Par la formule de Huygens, on a

$$\mathrm{Cov}(X_n,Y_n)=E(X_nY_n)-E(X_n)E(Y_n).$$

Mais puisque nous avons prouvé que X_n et Y_n sont binomiales, il vient

$$\mathrm{Cov}(X_n,Y_n)=n(n-1)pq-(np)(nq)=\boxed{-npq.}$$

10. Puisque la covariance de X_n et Y_n n'est pas nulle, les deux variables aléatoires $\boxed{X_n \text{ et } Y_n \text{ ne sont pas indépendantes, au moins pour } n\geqslant 1.}$
Notons que ce résultat était prévisible et ne nécessitait pas forcément un calcul de covariance : on a $P(X_n=n)\neq 0$, $P(Y_n=n)\neq 0$ et $P([X_n=n]\cap[Y_n=n])=0$.

Dans le cas où $n=0$, alors X_0 et Y_0 sont toutes les deux certaines, et donc indépendantes (même si ce cas n'est pas des plus intéressants).

Indépendance
Une variable certaine est indépendante de toute autre variable aléatoire (y compris d'elle-même !)

Partie III : une caractérisation de la loi de Poisson
A : Remarques générales

11. Puisque $\{[N=n], n\in\mathbf{N}\}$ est un système complet d'événements, on a $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbf{N}}[N=n]$, et donc

$$\forall k\in\mathbf{N}, [X=k] = [X=k]\cap\Omega = [X=k]\cap\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}[N=n]\right) = \bigcup_{n=0}^{\infty}([X=k]\cap[N=n]).$$

Mais par définition de X, on sait que $[X=k]\cap[N=n] = [X_n=k]\cap[N=n]$.
Il vient donc

$$[X=k] = \bigcup_{n=0}^{\infty}([X_n=k]\cap[N=n]).$$

Explication

Si $N=n$, alors par définition, $X=X_n$.

Enfin, puisque $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$, pour $k>n$, on a $[X_n=k]=\emptyset$. On en déduit que

$$\boxed{[X=k] = \bigcup_{n=k}^{\infty}([X_n=k]\cap[N=n]).}$$

Soit $x\in\mathbf{R}$. Puisque X ne prend que des valeurs entières et positives, il est facile de voir que

$$[X\leqslant x]=\emptyset \text{ si } x<0 \text{ et } [X\leqslant x]=[X\leqslant\lfloor x\rfloor] \text{ sinon }.$$

Donc quitte à changer x en sa partie entière, il nous suffit de prouver que $\forall x\in\mathbf{N}, [X\leqslant x]\in\mathcal{T}$.
Puisque N et les X_n sont des variables aléatoires, on a,

$$\forall k\in\mathbf{N}, \forall n\in\mathbf{N}, [X_n=k]\in\mathcal{T}, [N=n]\in\mathcal{T} \text{ et donc } [X_n=k]\cap[N=n]\in\mathcal{T}.$$

Puisque $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable, on en déduit que

$$\forall k\in\mathbf{N}, [X=k]\in\mathcal{T}.$$

Enfin, pour $x\in\mathbf{N}$, on a

$$[X\leqslant x] = \bigcup_{k=0}^{x}[X=k]\in\mathcal{T} \text{ car } \mathcal{T} \text{ est stable par union finie.}$$

Méthode

Pour prouver que X est une variable aléatoire, il nous faut revenir à la définition d'une variable aléatoire : une application $X:\Omega\to\mathbf{R}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{T})$ si et seulement si

$$\forall x\in\mathbf{R}, [X\leqslant x]\in\mathcal{T}.$$

En général, il faut alors utiliser les propriété sdes tribus, puis le fait qu'on a affaire à d'autres variables aléatoires (ici N et les X_n.)

En résumé : $\boxed{\forall x\in\mathbf{R}, [X\leqslant x]\in\mathcal{T} : X \text{ est une variable aléatoire sur } (\Omega,\mathcal{T},P).}$

12. Soit $n\in\mathbf{N}$ fixé, et soient $(j,k)\in\mathbf{N}^2$. Puisque $\{[Y_n=j], j\in[\![0,n]\!]\}$ est un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales, il vient

$$\begin{aligned}
P([X_n=i]\cap[N=k]) &= \sum_{j=0}^{n}P([X_n=i]\cap[N=k]\cap[Y_n=j])\\
&= \sum_{j=0}^{n}P([(X_n,Y_n)=(i,j)]\cap[N=k])\\
&= \sum_{j=0}^{n}P([(X_n,Y_n)=(i,j)])P(N=k)\\
&= P(N=k)\sum_{j=0}^{n}P([X_n=i]\cap[Y_n=j])\\
&= P(N=k)P(X_n=i)
\end{aligned}$$

N est indépendante du couple (X_n, Y_n)

Formule des probabilités totales

Ainsi, $\boxed{\text{les variables } X_n \text{ et } N \text{ sont indépendantes.}}$

13. Soit $k\in\mathbf{N}$ fixé. Puisque les événements $[N=n]$ sont deux à deux incompatibles pour $n\in\mathbf{N}$, il en est de même des événements $[X_n=k]\cap[N=n]$, où n parcourt $\mathbf{N}$.
Donc par la question 11,

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{\infty}P([X_n=k]\cap[N=n]).$$

Mais les variables aléatoires X_n et N étant indépendantes, il vient

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(X_n=k)P(N=n) \\ &= \boxed{\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}P(N=n).} \end{aligned}$$

Enfin, comme $\binom{n}{k}=0$ si $k>n$, on a également

$$\boxed{\forall k\in\mathbf{N}, P(X=k)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}P(N=n).}$$

On prouverait de la même manière que

$$\boxed{\forall \ell\in\mathbf{N}, P(Y=\ell)=\sum_{n=\ell}^{\infty}\binom{n}{\ell}q^\ell(1-q)^{n-\ell}P(N=n).}$$

14. Les variables aléatoires N et X ne sont pas indépendantes.
En effet, la variable aléatoire N étant par hypothèse non presque certaine, il existe deux entiers $a<b$ tels que $P(N=a)\neq 0$ et $P(N=b)\neq 0$.
Puisque $P(N=b)\neq 0$, on a $P(X=b)\neq 0$. En effet,

$$P(X=b)\geqslant P([X=b]\cap[N=b])=P([X_b=b]\cap[N=n])=P([X_b=b])P(N=b)>0$$

Remarquons que les événements $[X=b]\cap[N=a]$ sont incompatibles car si $N=a$, alors X prend ses valeurs dans $[\![0,a]\!]$. Ainsi, $P([X=b]\cap[Y=a])=0\neq P(X=b)P(N=a)$.

Intuition

Ceci semble logique car la définition de X dépend de N.

B : Si N suit une loi de Poisson, alors X et Y sont indépendantes.

15. Soit $k\in\mathbf{N}$. Alors, par la formule prouvée à la question 13, on a

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(n-k)!}(1-p)^{n-k}\lambda^n \\ &= e^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1-p)^n\lambda^{n+k} \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k p^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1-p)^n\lambda^n \\ &= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)} \\ &= \boxed{e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}.} \end{aligned}$$

Nous reconnaissons là l'expression d'une $\boxed{\text{loi de Poisson de paramètre } \lambda p.}$
Le même calcul prouverait que Y suit une loi de Poisson de paramètre λq.

Classique

Ce résultat a déjà été rencontré en cours et en TD : une loi binomiale conditionnée par une loi de Poisson est une loi de Poisson.

16. Soit $(k,\ell)\in\mathbf{N}^2$. Alors puisque $\{[N=n], n\in\mathbf{N}\}$ est un système complet d'événements, il vient

$$\begin{aligned} [X=k]\cap[Y=\ell] &= \bigcup_{n=0}^{\infty}[X=k]\cap[Y=\ell]\cap[N=n] \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty}([X=k]\cap[N=n])\cap([Y=\ell]\cap[N=n]) \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{n=0}^{\infty} ([X_n = k] \cap [N = n]) \cap ([Y_n = \ell] \cap [N = n])$$
$$= \bigcup_{n=0}^{\infty} [X_n = k] \cap [Y_n = \ell] \cap [N = n]$$

On en déduit, car les événements $[N = n]$ sont deux à deux incompatibles, que

$$\begin{aligned} P([X = k] \cap [Y = \ell]) &= \sum_{n=0}^{\infty} P([X_n = k] \cap [Y_n = \ell] \cap [N = n]) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P([X_n = k] \cap [Y_n = \ell]) P(N = n) \\ &= \sum_{n=k+\ell}^{\infty} P([X_n = k] \cap [Y_n = \ell]) P(N = n) \end{aligned}$$

Bornes
Si $n < k + \ell$, alors
$$P([X_n = k] \cap [Y_n = \ell]) = 0.$$

Nous pouvons donc calculer

$$\begin{aligned} P([X = k] \cap [Y = \ell]) &= \sum_{n=k+\ell}^{\infty} \binom{n}{k, \ell} p^k q^\ell r^{n-k-\ell} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} p^k q^\ell \frac{1}{k!\ell!} \sum_{n=k+\ell}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k-\ell)!} r^{n-k-\ell} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \frac{q^\ell}{\ell!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} r^n \lambda^{n+k+\ell} \\ &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \frac{q^\ell}{\ell!} \lambda^{k+\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda r)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!} e^{\lambda r} \\ &= e^{-\lambda(p+q)} \frac{p^k}{k!} \frac{q^\ell}{\ell!} \\ &= \left(e^{-\lambda p} \frac{p^k}{k!} \right) \left(e^{-\lambda q} \frac{q^\ell}{\ell!} \right) \\ &= \boxed{P(X = k) P(Y = \ell).} \end{aligned}$$

Rappel
Pour étudier l'indépendance de deux variables **dsicrètes**, il suffit d'étudier les
$$P([X = x] \cap [Y = y]),$$
ce qui est plus pratique que les
$$P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]).$$

Ainsi, nous avons bien prouvé que

$$\forall (k, \ell) \in \mathbf{N}^2, P([X = k] \cap [Y = \ell]) = P(X = k) P(Y = \ell) : \boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$$

C. Si X et Y sont indépendantes, alors N suit une loi de Poisson

17. Si $z \in [0, 1]$, alors $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leqslant z^n P(N = n) \leqslant P(N = n)$.
Or la série $\sum_n P(N = n)$ converge (et sa somme vaut 1), donc il en est de même de la série $\sum_n z^n P(N = n)$.

18.a. Puisque $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, alors $0 \leqslant A \leqslant 1$ et $0 \leqslant B \leqslant 1$.
La variable aléatoire certaine égale à 1 admettant une espérance, il en est de même de A et de B.

Domination
Pour établir l'existence d'une espérance par domination, il est important d'avoir affaire à des variables positives, ne pas oublier de le vérifier.

18.b. Puisque $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, alors $0 \leqslant p\alpha \leqslant p$ et donc $0 \leqslant p\alpha + 1 - p \leqslant 1 - p + p \leqslant 1$.
D'après le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned} E(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k P(X = k) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} P(N = n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \alpha^k p^k (1-p)^{n-k} P(N = n) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\alpha^k p^k(1-p)^{n-k}P(N=n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p\alpha)^k(1-p)^{n-k} \text{ car } \binom{n}{k}=0 \text{ si } k>n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)(p\alpha+1-p)^n$$
$$= \boxed{\Phi(p\alpha+1-p).}$$

Fubini
Le théorème de Fubini (qui est un corollaire du théorème de sommation par paquets) nous dit que pour une famille de nombres positifs, si l'une des sommes doubles existe, alors on peut intervertir les deux sommes. C'est ce que l'on fait ici.

19.a. Puisque A et B sont toutes deux positives et majorées par 1, il en va de même pour C, qui admet alors une espérance pour les mêmes raisons.

19.b. Il est clair que $p\alpha+q\beta+r \geqslant 0$. De plus, $p\alpha+q\beta+r \leqslant p+q+r=1$.
Par application du théorème de transfert[3], on a

$$E(C) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\alpha^k\beta^\ell P([X=k]\cap[Y=\ell])$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\alpha^k\beta^\ell\sum_{n=0}^{\infty}P([X_n=k]\cap[Y_n=\ell])P(N=n)$$

[3] La version relative aux couples de variables aléatoires, appliqué ici à la fonction $g(x,y)=\alpha^x\beta^y$.

Ce dernier calcul reprend en fait le résultat intermédiaire de la question 16, qui reste valable dans ce cadre (nous n'avions alors pas utilisé le fait que la loi de N était connue). De plus, remarquons que le théorème de Fubini peut s'appliquer plusieurs fois de manières à permuter trois sommes : dès que l'une existe (et c'est bien le cas ici, puisque nous venons de prouver que $E(C)$ existe, et donc tous nos calcul jusqu'à présent sont justifiés), alors on peut permuter à loisir toutes les sommes, le théorème de Fubini garantissant en même temps leur convergence. Il vient donc

$$E(C) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\alpha^k\beta^\ell\binom{n}{k,\ell}p^kq^\ell r^{n-k-\ell}P(N=n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)\sum_{k=0}^{n}\alpha^kp^k\frac{n!}{(n-k)!k!}\sum_{\ell=0}^{n-k}\beta^\ell\frac{(n-k)!}{\ell!(n-k-\ell)!}q^\ell r^{n-k-\ell}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^kp^k\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n-k}{\ell}q^\ell\beta^\ell r^{n-k-\ell}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^kp^k(\beta q+r)^{n-k}$$
Binôme de Newton
$$= \sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)(\alpha p+\beta q+r)^n$$
Re-binôme !
$$= \boxed{\Phi(\alpha p+\beta q+r)}$$

20. Notons que le support de A est $\{\alpha^k, k\in\mathbf{N}\}$, et de même $B(\Omega)=\{\beta^\ell,\ell\in\mathbf{N}\}$.
De plus, $A=\alpha^k$ si et seulement si $X=k$. Ainsi, $\forall(k,\ell)\in\mathbf{N}^2$,

$$\begin{aligned} P([A=\alpha^k]\cap[B=\beta^\ell]) &= P([X=k]\cap[Y=\ell]) \\ &= P(X=k)P(Y=\ell) \\ &= P(A=\alpha^k)P(B=\beta^\ell) \end{aligned}$$

Indépendance
Nous disposerons dans quelques temps d'un résultat (appelé lemme des coalitions) qui garantit l'indépendance de A et B. En attendant, prouvons cette indépendance à la main.

Par conséquent, A et B sont indépendantes, et donc $E(C)=E(AB)=E(A)E(B)$.
Ceci étant vrai pour pour tous $\alpha,\beta\in[0,1]$, on a

$$\forall(\alpha,\beta)\in[0,1]^2, \Phi(p\alpha+1-p)\Phi(q\beta+1-q)=\Phi(p\alpha+q\beta+r)$$

et puisque $r=1-p-q$, on en déduit que

$$\boxed{\forall(\alpha,\beta\in[0,1]^2, \Phi(1-p(1-\alpha))\Phi(1-q(1-\beta))=\Phi(p\alpha+q\beta+1-p-q)=\Phi(1-p(1-\alpha)-q(1-\beta)).}$$

21. Si $z \in]0,1]$, alors $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(N=n)$.
Puisque N est non presque sûrement constante, il existe en particulier un entier $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $P(N = n_0) > 0$. Alors puisque le terme général de la série définissant Φ est strictement positif, on en déduit que

$$\Phi(z) \geqslant z^{n_0} P(N = n_0) > 0.$$

De plus, $\Phi(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) = 1$ car N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.

> **Positivité**
> Une somme (même infinie) de nombre positifs est positive, et strictement positive dès que l'un de ces nombres est non nul.
> De manière équivalente, cette somme est nulle ssi tous les nombres sont nuls.

22.a. Soit $a \in [0,p]$. Alors $a = p(1-\alpha)$, avec $\alpha = 1 - \frac{a}{p} \in [0,1]$. De même, si $b \in [0,q]$, alors $b = q(1-\beta)$ avec $\beta \in [0,1]$. Par la question 20, on a alors

$$\Phi(1-a-b) = \Phi(1-a)\Phi(1-b).$$

En prenant le logarithme des deux membres, il vient alors

$$\varphi(a+b) = \ln(\Phi(1-a-b)) = \ln(\Phi(1-a)) + \ln(\Phi(1-b)) = \boxed{\varphi(a)+\varphi(b).}$$

22.b. Par définition de φ, $\varphi(0) = \ln(\Phi(1)) = \ln(1) = 0$.
Soit $a \in I$. Prouvons par récurrence sur n que si $0 \leqslant na \leqslant \mu$, alors $\varphi(na) = n\varphi(a)$.
Pour $n = 0$, la propriété est claire car $\varphi(0) = 0$.
Supposons la propriété vérifiée au rang n, et supposons que $(n+1)a \leqslant \mu$. Alors

$$\varphi((n+1)a) = \varphi(na+a) = \varphi(na) + \varphi(a) = n\varphi(a) + \varphi(a) = (n+1)\varphi(a).$$

Ainsi, la propriété est vérifiée au rang $n+1$, et donc par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \text{ tel que } na \leqslant \mu, \varphi(na) = n\varphi(a).}$$

> **Récurrence**
> Cette récurrence est un peu particulière car elle ne prouve pas une propriété pour tout n, mais pour tout $n \leqslant \frac{\mu}{a}$.
> Autrement dit, on ne prouve la propriété que pour un nombre fini d'entiers.

22.c. Soit $(n,m,a) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^* \times I$ tel que $0 \leqslant \frac{n}{m}a \leqslant \mu$.
Le résultat étant évident pour $n = 0$, on peut supposer que $n \neq 0$. Alors $0 \leqslant \frac{a}{m} \leqslant \mu$, et donc

$$\varphi(a) = \varphi\left(m\frac{a}{m}\right) = m\varphi\left(\frac{a}{m}\right) \text{ par la question précédente.}$$

Puisque m est non nul, ceci signifie que $\varphi\left(\frac{a}{m}\right) = \frac{1}{m}\varphi(a)$.
Il vient alors

$$\varphi\left(\frac{n}{m}a\right) = \varphi\left(n\frac{a}{m}\right) = n\varphi\left(\frac{a}{m}\right) = \boxed{\frac{n}{m}\varphi(a)}.$$

22.d. Par définition de $\lfloor nx \rfloor$, on a

$$\lfloor nx \rfloor \leqslant nx \leqslant \lfloor nx \rfloor + 1$$

et donc en divisant par n (non nul par hypothèse),

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}.$$

On en déduit que

$$x - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$$

et donc par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x.}$$

Soient $z_1 \leqslant z_2 \in [0,1]$. Alors, $\forall n \in \mathbf{N}, z_1^n \leqslant z_2^n$, et donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leqslant z_1^n P(N=n) \leqslant z_2^n P(N=n).$$

Puisque les deux séries $\sum z_1^n P(N=n)$ et $\sum z_2^n P(N=n)$ convergent, on en déduit que

$$\Phi(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} z_1^n P(N=n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} z_2^n P(N=n) = \Phi(z_2).$$

Ainsi, la fonction Φ est croissante sur $[0,1]$. Par composition (à droite) par la fonction décroissante $x \mapsto 1-x$, on en déduit que $z \mapsto \Phi(1-z)$ est décroissante sur $[0,1]$, et enfin par croissance de la fonction ln, que $\boxed{\varphi \text{ est décroissante sur } [0,1[.}$
Ainsi, si $(x,a) \in \mathbf{R} \times I$ vérifient $0 \leqslant xa \leqslant \mu$, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \varphi\left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}a\right) \geqslant \varphi(xa) \geqslant \varphi\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}a\right)$$

ce qui en utilisant la question 22.c devient

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\varphi(a) \geqslant \varphi(xa) \geqslant \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\varphi(a).$$

Par le théorème des gendarmes lorsque n tend vers $+\infty$, il vient, (puisque $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ et $\frac{\lfloor nx \rfloor+1}{n}$ tendent tous deux vers x),

$$\boxed{\varphi(xa) = x\varphi(a).}$$

Rédaction On sait déterminer le sens de variation d'une composée de fonctions monotones, mais si besoin, il est possible de revenir à la définition de la monotonie en prenant $x_1 \leqslant x_2$ et en prouvant que $\varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$.

22.e. Notons $\lambda = -\frac{1}{\mu}\varphi(\mu)$. Alors montrons que λ est strictement positif. En effet,

$$\Phi(1-\mu) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\mu)^n P(N=n),$$

et si $n_0 \in \mathbf{N}^*$ est tel que $P(N=n_0) \neq 0$ (nous avons déjà justifié de l'existence d'un tel n_0 à la question 21.), alors $(1-\mu)^{n_0}P(N=n_0) < P(N=n_0)$, et donc

$$\Phi(1-\mu) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\mu)^n P(N=n) < \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) = \Phi(1) = 1.$$

On en déduit que $\varphi(\mu) < \varphi(0) = 0$. Et donc

$$\lambda = -\frac{1}{\mu}\varphi(\mu) > 0.$$

Enfin, si $x \in I$, alors $x = \frac{x}{\mu}\mu$ et d'après la question précédente,

$$\varphi(x) = \frac{x}{\mu}\varphi(\mu) = \frac{x}{\mu} \times (-\lambda\mu) = \boxed{-\lambda x.}$$

Méthode Il est évident que si un λ vérifiant les conditions de l'énoncé existe, alors

$$\varphi(\mu) = -\lambda\mu$$

et donc $\lambda = -\frac{\varphi(\mu)}{\mu}$.

Détails On sait que pour tout n,

$$(1-\mu)^n P(N=n) \leqslant P(N=n).$$

Donc on a une inégalité large sur les sommes des séries. Mais puisque pour n_0 (et probablement pour d'autres termes), l'inégalité est stricte, l'inégalité sur les sommes est également stricte.

23. Nous venons de prouver que $\forall x \in [0,\mu], \varphi(x) = -\lambda x$. On en déduit que

$$\forall z \in [1-\mu, 1], \Phi(z) = e^{\varphi(1-z)} = e^{\lambda z}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n z^n}{n!}.$$

Et donc, en revenant à la définition de Φ,

$$\forall z \in [1-\mu, 1], \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n z^n}{n!} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(P(N=n) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\right)z^n = 0.$$

D'après le résultat admis dans l'énoncé, cela signifie que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, P(N=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.}$$

Ceci signifie que N suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Nous venons donc de prouver que si X et Y sont indépendantes, alors nécessairement $\boxed{N \text{ suit une loi de Poisson.}}$

ESC (épreuve supprimée en 2010)

8

ESC 2009

Exercice 3

Sujet : Étude de l'inverse du produit de deux lois uniformes. **Facile**

Abordable en première année : ✗ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : Variables à densité.

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Commentaires : facile, mais idéal pour réviser les bases sur les variables à densité.

On considère le programme `Scilab` suivant, où l'on rappelle que `rand()` est une variable à densité suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, dont les exécutions successives donnent des variables indépendantes.

```
U = rand() ;
V = rand() ;
X = -log(U) ;
V = -log(Y) ;
Z = X+Y ;
```

1. Montrer que $X(\Omega) = \mathbf{R}^+$ et que la variable X suit une loi exponentielle de paramètre 1.
   (On considérera que, du fait que $[U = 0]$ est de probabilité nulle, $U(\Omega) =]0,1]$).
2. a. Quelle est la loi de Y ? Justifier que X et Y sont indépendantes.
   b. Déterminer une densité f de Z. Vérifier que si $x \geqslant 0$, alors $f(x) = xe^{-x}$.
   c. Déterminer la fonction de répartition de Z.
3. a. On note $T = e^Z$.
   Déterminer la fonction de répartition de T et montrer que T est une variable à densité.
   b. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{\ln(t)}{t^2} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

   est une densité de la variable aléatoire $\dfrac{1}{UV}$.

ESC 2009 : CORRIGÉ

EXERCICE 3

1. Notons que U étant simulée par `rand()`, elle suit une loi uniforme sur $]0,1]$.
On a alors $X = -\ln(U)$. Puisque U prend ses valeurs dans $]0,1]$, $\ln(U)$ prend ses valeurs dans $]-\infty, 0]$ et donc $X(\Omega) = \mathbf{R}^+$.
Pour $x < 0$, on a donc $F_X(x) = 0$.
Pour $x \geqslant 0$, il vient

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(-\ln(U) \leqslant x) = P(\ln(U) \geqslant -x).$$

Et donc, par croissance de la fonction exponentielle :

$$F_X(x) = P(U \geqslant e^{-x}) = 1 - P(U \leqslant e^{-x}) = 1 - F_U(e^{-x}).$$

Mais U suit une loi uniforme sur $[0,1]$ donc F_U est la fonction

$$t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Et puisque $0 \leqslant e^{-x} \leqslant 1$, on a donc $F_X(x) = 1 - e^{-x}$.
Par conséquent, F_X est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1, et donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{E}(1).}$

2.a. Puisque U et V suivent la même loi, $X = -\ln(U)$ et $Y = -\ln(V)$ suivent également la même loi, donc Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
U et V étant indépendantes, il en est de même de X et Y d'après le lemme des coalitions.

2.b. Rappelons que la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$ est également la loi $\gamma(1)$.
Par stabilité des lois γ, qui s'applique car X et Y sont indépendantes, $Z = X + Y \hookrightarrow \gamma(2)$.
Une densité de Z est donc

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

> **$\Gamma(2)$**
> Rappelons que $\Gamma(n) = (n-1)!$, de sorte que $\Gamma(2) = 1! = 1$.

2.c. Pour $x \leqslant 0$, on a $F_Z(x) = 0$, et pour $x \geqslant 0$, on a $F_Z(x) = \displaystyle\int_0^x te^{-t}\,dt$.
Une intégration par parties, en posant $u(t) = t$ et $v(t) = -e^{-t}$ qui sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ nous donne

$$F_Z(x) = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt = -xe^{-x} + 1 - e^{-x} = 1 - (x+1)e^{-x}.$$

En conclusion : $\boxed{F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(x+1)e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$

3.a. Puisque Z est à valeurs positives, T est à valeurs dans $[1, +\infty[$.
Et donc pour $x < 1$, $F_T(x) = 0$.
Pour $x \geqslant 1$, on a, par croissance de la fonction ln,

$$F_T(x) = P(T \leqslant x) = P(e^Z \leqslant x) = P(Z \leqslant \ln(x)) = F_Z(\ln(x)) = 1-(\ln(x)+1)e^{-\ln(x)} = 1 - \frac{\ln(x)+1}{x}.$$

Ainsi, on a $\boxed{F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{\ln x + 1}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$

Il est clair[1] que F_T est de classe $\mathscr{C}^1$ (et donc continue) sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
De plus on a

$$\lim_{x \to 1^-} F_T(x) = 0 = \lim_{x \to 1^+} F_T(x).$$

Donc F_T est continue en 1 et par conséquent sur $\mathbf{R}$ tout entier.
Ainsi, F_T est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en 1 : $\boxed{T \text{ est une variable à densité.}}$

[1] Par opérations sur des fonctions usuelles de classe $\mathscr{C}^1$.

3.b. On a $\dfrac{1}{UV} = \dfrac{1}{U}\dfrac{1}{V} = e^{-\ln(U)}e^{-\ln(V)} = e^{-\ln(U)-\ln(V)} = e^{Z} = T$.
Or, une densité de T est obtenue en dérivant F_T là où c'est possible[2] et en choisissant des valeurs arbitraires ailleurs.
Mais pour $x \neq 1$, on a

$$F_T'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ -\dfrac{\frac{1}{x}x - (\ln(x)+1)}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{\ln x}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ainsi, on peut prendre pour densité de T la fonction

$$\boxed{h : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{\ln(t)}{t^2} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}}$$

[2] C'est-à-dire sauf en $x = 1$.

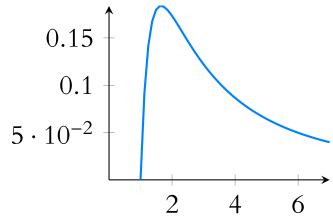


FIGURE 1– La densité h.

ESC 2007

Exercice 2

Sujet : Étude d'une suite d'intégrales impropres.

Moyen

Abordable en première année : ✓

Intérêt : ★★☆

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, séries, suites, `Scilab`

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

On pose pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$.

1. Prouver la convergence de l'intégrale impropre appelée I_n.
2. Monter que la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et converge vers une limite notée ℓ.
3. On pose, pour tout réel $A > 0$ et tout entier naturel n non nul : $I_n(A) = \displaystyle\int_0^{A} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$.

   Par une intégration par parties, montrer que $I_n(A) = \dfrac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\left(I_n(A) - I_{n+1}(A)\right)$.
4. Dans cette question on montre que la limite de $(J_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, notée ℓ, est nulle.
   - a. À l'aide de la question 3, montrer que : $\dfrac{J_n}{3n} = \dfrac{1}{3n\cdot 2^n} + (J_n - J_{n+1})$.
   - b. Justifier que les séries de terme général $(J_n - J_{n+1})$ et $\dfrac{1}{3n\cdot 2^n}$ sont convergentes.

     En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{J_n}{3n}$.
   - c. Soit β un réel non nul et (a_n) une suite équivalente à $\left(\dfrac{\beta}{3n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

     Justifier que la série de terme général a_n diverge et en déduire par l'absurde que $\ell = 0$.
5.
   - a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n} \leqslant \frac{1}{3n-1}$.
   - b. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
6.
   - a. Grâce à la question 3, montrer que pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n$.
   - b. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $I_n = I_1 \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$.
7. On admet que $I_1 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

   Compléter le programme `Scilab` suivant pour qu'il demande un entier supérieur à 2 et calcule puis affiche la valeur de I_n trouvée à la question 6.b.

```
n = input(......)
I = ......
for k=1 :n-1
        I = ....
end
disp(I)
```

ESC 2007 : Corrigé

Exercice 2

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^3)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc le seul éventuel problème de convergence est au voisinage de $+\infty$.

Mais, au voisinage de $+\infty$, on a $\dfrac{1}{(1+x^3)^n} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(x^3)^n} = \dfrac{1}{x^{3n}}$.

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3n}}$ est une intégrale[1] convergente, par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$ et donc de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$.

Méthode
Commencer systématiquement l'étude d'une intégrale par le domaine de continuité de l'intégrande permet de déterminer quelles bornes nécessiteront une étude plus fine.

[1] De Riemann.

2. Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on a $1 + x^3 \geqslant 1$ et donc

$$\frac{1}{(1+x^3)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(1+x^3)^n}.$$

Et donc, par croissance de l'intégrale,

$$J_{n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^3)^n} = J_n.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (J_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

D'autre part, pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{(1+x^3)^n} \geqslant 0$, et donc par positivité de l'intégrale, $J_n \geqslant 0$.

Ainsi, la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et minorée : par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge.}}$

Rappel
Il est important de vérifier que $1 + x^3 \geqslant 1$ car une suite géométrique de la forme $(q^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante si $q \geqslant 1$, mais décroissante si $0 < q < 1$.

Méthode
Pour montrer qu'une suite converge alors qu'on ne sait pas calculer sa limite, le plus simple est souvent de prouver qu'elle est croissante et majorée ou décroissante et minorée.

3. Posons $u(x) = \dfrac{1}{(1+x^3)^n}$ et $v(x) = x$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,A]$, avec $u'(x) = \dfrac{-3nx^2}{(1+x^3)^{n+1}}$ et $v'(x) = 1$. Alors, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
I_n(A) &= \left[\frac{x}{(1+x^3)^n}\right]_0^A + \int_0^A \frac{3nx^3}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx \\
&= \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\int_0^A \frac{(1+x^3)-1}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx \\
&= \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\left(\int_0^A \frac{dx}{(1+x^3)^n}\,dx - \int_0^A \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}\,dx\right) \\
&= \boxed{\frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\left(I_n(A) - I_{n+1}(A)\right).}
\end{aligned}$$

4.a. Dans l'égalité de la question 3, en prenant $A = 1$, il vient

$$J_n = \frac{1}{2^n} + 3n(J_n - J_{n-1}).$$

Et donc après division par $3n$,

$$\boxed{\frac{J_n}{3n} = \frac{1}{3n\cdot 2^n} + (J_n - J_{n+1}).}$$

Détails
Par définition, $J_n = I_n(1)$.

4.b. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{3n\cdot 2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{2^n}$ est une série[2] convergente, il en est de donc de même

[2] Géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$.

de la série de terme général $\dfrac{1}{3n\cdot 2^n}$.
D'autre part, pour $N\in\mathbf{N}^*$, on a

$$\sum_{n=1}^{N}(J_n-J_{n+1})=\sum_{n=1}^{N}J_n-\sum_{n=1}^{N}J_{n+1}=\sum_{n=1}^{N}J_n-\sum_{k=2}^{N+1}J_k=J_1-J_{N+1}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}J_1-\ell.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série de terme général (J_n-J_{n+1}) converge, c'est donc que la série converge.

Et donc, $\boxed{\text{la série de terme général } \dfrac{J_n}{3n} \text{ converge}}$ car somme de deux séries convergentes.

Rappel
Par **définition**, une série converge si et seulement si la série de ses sommes partielles converge.

4.c. La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente, et donc la série de terme général $\dfrac{\beta}{3n}=\dfrac{\beta}{3}\dfrac{1}{n}$ est également divergente.
Ainsi, par critère de comparaison pour les séries de signe constant[3], la série de terme général a_n diverge.
Supposons par l'absurde que $\ell\neq 0$. Alors, $\dfrac{J_n}{3n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\ell}{3n}$
Et d'après ce qui précède, la série de terme général $\dfrac{J_n}{3n}$ diverge, contredisant le résultat de la question précédente.
Ainsi, $\boxed{\ell=0.}$

[3] $\dfrac{\beta}{3n}$ est de signe constant, même si son signe dépend de celui de β.

Remarque
Cet équivalent ne serait pas valable pour $\ell=0$, car seule la suite nulle est équivalente à elle-même («on n'est jamais équivalent à 0, sauf si on est complètement nul !»).

5.a. Pour tout $x\geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{(1+x^3)^n}\leqslant\dfrac{1}{x^{3n}}$.
Et donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^3)^n}\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3n}}$.
Mais pour $A\geqslant 1$, on a

$$\int_1^A\frac{dx}{x^{3n}}=\left[-\frac{1}{3n-1}\frac{1}{x^{3n-1}}\right]_1^A=\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n-1}\frac{1}{A^{3n-1}}\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{3n-1}.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3n}}=\frac{1}{3n-1}$ et donc $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^3)^n}\leqslant\frac{1}{3n-1}}$.

Remarque
Si on a appris que pour $\alpha>1$,
$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{\alpha-1},$$
alors il est possible d'utiliser directement cette formule plutôt que de repasser par le calcul de la primitive sur un segment.

5.b. Nous avons donc, d'après la relation de Chasles,

$$0\leqslant I_n\leqslant J_n+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^3)^n}\leqslant J_n+\frac{1}{3n-1}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}J_n+\frac{1}{3n-1}=\ell+0=0$, et donc par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}I_n=0.}$$

6.a. Dans l'égalité de la question 3, faisons tendre A vers $+\infty$ en notant que $I_n=\displaystyle\lim_{A\to+\infty}I_n(A)$. Il vient alors

$$I_n=3n(I_n-I_{n+1})\Leftrightarrow 3nI_{n+1}=(3n-1)I_n\Leftrightarrow\boxed{I_{n+1}=\frac{3n-1}{3n}I_n.}$$

6.b. On a

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{3(n-1)-1}{3(n-1)}I_{n-1}\\&=\frac{3(n-1)-1}{3(n-1)}\frac{3(n-2)-1}{3(n-2)}I_{n-2}\\&=\cdots=\frac{3(n-1)-1}{3(n-1)}\frac{3(n-2)-1}{3(n-2)}\cdots\frac{3\times1-1}{3}I_1\\&=\boxed{I_1\prod_{k=1}^{n-1}\frac{3k-1}{3k}.}\end{aligned}$$

7. Il s'agit d'utiliser le résultat de la question 6.b et de calculer le produit à l'aide d'une boucle.

```
n =input('Entrez la valeur de n  :')
I = 2*%pi/(3*sqrt(3))
for k = 1  : n-1
        I = I*(3*k-1)/(3*k)
end
disp(I)
```

ESC 2006

Exercice 2

Sujet : Séries de Bertrand, majoration du reste. Facile

Abordable en première année : ✓ **Intérêt** : ★★★

Thèmes du programme abordés : intégrales impropres, séries numériques, `Scilab`

Informatique : les questions de `Turbo Pascal` du sujet original ont été traduites en questions de `Scilab`.

Modifications apportées au sujet d'origine : ajout d'une question intermédiaire (1.b) pour une comparaison série-intégrale

Commentaires : facile, mais un thème très classique : les comparaisons série/intégrales, (ou comment utiliser une intégrale pour étudier la nature d'une série).

On considère un réel $\alpha > 0$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)^{\alpha+1}}$.

On note, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$.

1. Soit f la fonction définie sur $I =]1, \infty[$ par $f(x) = -\dfrac{1}{\alpha\ln(x)^\alpha}$.
   - **a.** Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et calculer sa dérivée f'.
     Montrer que f est concave sur I
   - **b.** Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Montrer que : $0 \leqslant u_k \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}}$.
     En déduire que
     $$0 \leqslant S_n \leqslant u_2 + \int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}}.$$
   - **c.** Étudier la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln(t)^{\alpha+1}}$. En déduire la nature de la série de terme général u_n.
   - **d.** Soit un entier $k \geqslant 2$. Montrer que pour tout réel $t \in [k, k+1]$, $u_{k+1} \leqslant f'(t)$.
   - **e.** En déduire que pour tout entier $k \geqslant 2$, $u_{k+1} \leqslant \dfrac{1}{\alpha\ln(k)^\alpha} - \dfrac{1}{\alpha\ln(k+1)^\alpha}$.

Dans toute la suite, on note $L = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} u_k$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

2.
   - **a.** Exprimer R_n à l'aide de L et de S_n.
   - **b.** Soient p et n deux entier tels que $2 \leqslant n < p$.
     Montrer, grâce à 1.e que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} u_k \leqslant \frac{1}{\alpha\ln(n)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(p)^\alpha}$.
   - **c.** En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, : $0 \leqslant L - S_n \leqslant \frac{1}{\alpha\ln(n)^\alpha}$.
3.
   - **a.** Montrer que $\frac{1}{\alpha\ln(n)^\alpha} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow n \geqslant \exp\left((\alpha\varepsilon)^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$.
   - **b.** Compléter les pointillés du programme `Scilab` suivant afin que la fonction `approx` prenne comme paramètres deux réels strictement positifs α et ε et retourne un couple `n,S` où n est un entier naturel et $S = S_n$ soit la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{k\geqslant 2} u_k$ tels que l'écart entre S_n et L soit inférieur à ε.
     On rappelle que `floor` *désigne la fonction partie entière.*

```
function (n,S)=approx(alpha,epsilon)
  n = floor(.......)+1 ;
  S = ...... ;
  for k = ......
    ........
  end
endfunction
```

ESC 2006 : Corrigé

Exercice 2

1.a. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et ne s'annule pas sur I. Il en est donc de même de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{\alpha \ln(x)^\alpha}$. On a alors

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{\alpha \frac{1}{x} \ln(x)^{\alpha-1}}{\alpha \ln(x)^{2\alpha}} = \boxed{\frac{1}{x \ln(x)^{\alpha+1}}.}$$

Comme la fonction $x \mapsto x \ln(x)^{\alpha+1}$ est croissante, par passage à l'inverse, f' est décroissante. Et donc $\boxed{f \text{ est concave.}}$

Convexité/concavité

On peut dériver deux fois et vérifier que $f'' < 0$. Mais il ne faut pas oublier que si f est dérivable, on sait caractériser la convexité/concavité de f en utilisant le sens de variation de f', ce qui évite le calcul de f''.

1.b. Pour $t \in [k-1, k]$, puisque la fonction f' est décroissante

$$u_k = \frac{1}{k \ln(k)^{\alpha+1}} = f'(k) \leqslant f'(t) = \frac{1}{t \ln(t)^{\alpha+1}}.$$

Cette inégalité vaut pour tout $t \in [k-1, k]$, donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_{k-1}^{k} u_k \, dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t \ln(t)^{\alpha+1}} \Leftrightarrow \boxed{u_k \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t \ln(t)^{\alpha+1}}.}$$

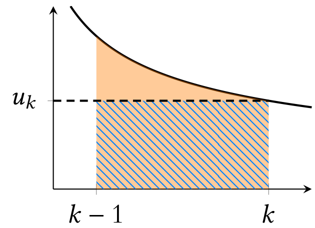


Figure 1– L'intégrale, qui est l'aire de la partie colorée est plus grande que l'aire de la partie hachurée, qui vaut u_k (c'est l'aire d'un rectangle de largeur 1 et de hauteur u_k).

De plus, il est évident que $u_k \geqslant 0$ car $k \geqslant 2$ et donc $\ln(k) > 0$.

Sommons à présent ces inégalités pour k variant de 3 à n :

$$0 \leqslant \sum_{k=3}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t \ln(t)^{\alpha+1}} = \int_{2}^{n} \frac{dt}{t \ln(t)^{\alpha+1}}$$

Relation de Chasles...

En ajoutant $u_2 \geqslant 0$, il vient

$$\boxed{0 \leqslant S_n \leqslant u_2 + \int_{2}^{n} \frac{dt}{t \ln(t)^{\alpha+1}}.}$$

1.c. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t \ln(t)^{\alpha+1}}$ est continue sur $[2, +\infty[$.
De plus, le calcul précédent montre que f en est une primitive. Ainsi, pour $A \geqslant 2$, on a

$$\int_{2}^{A} \frac{dt}{t \ln(t)^{\alpha+1}} = [f(t)]_2^A = \frac{1}{\alpha \ln(2)^\alpha} - \frac{1}{\alpha \ln(A)^\alpha} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha \ln(2)^\alpha}.$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^{\alpha+1}}$ converge et que

$$\boxed{\int_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha \ln(2)^\alpha}.}$$

Soit à présent $n \geqslant 2$. Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t \ln(t)^{\alpha+1}}$ est positive, on a[1]

$$\int_{2}^{n} \frac{dt}{t \ln(t)^{\alpha+1}} = \int_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^{\alpha+1}} - \underbrace{\int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^{\alpha+1}}}_{\geqslant 0} \leqslant \int_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha \ln(2)^{\alpha+1}}.$$

Et alors

$$0 \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{\alpha \ln(2)^{\alpha+1}}.$$

Mais (u_k) étant une suite à valeurs positives, la suite (S_n) est croissante. Étant croissante et majorée, elle converge. On en déduit[2] que $\boxed{\text{la série } \sum u_k \text{ est convergente.}}$

[1] Il est important que la fonction soit positive, cela permet de garantir que $\displaystyle\int_{n}^{+\infty} f(t)\,dt \geqslant 0$. On peut aussi réfléchir en terme d'aire : pour une fonction positive, si on intègre sur un domaine plus grand, on obtient une aire plus grande. C'est en revanche faux pour une fonction qui changerait de signe.

[2] La série $\sum u_k$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge.

Classique

Pour étudier la nature d'une série, on peut parfois se ramener comme ici à étudier une intégrale. L'avantage des intégrales sur les séries est que l'on sait souvent calculer des primitives, et donc des intégrales, alors qu'il est souvent délicat de calculer précisément des sommes partielles. Cette méthode se nomme comparaison série/intégrale.

1.d. Soit $t \in [k, k+1]$. Alors, par croissance de la fonction ln, il vient $0 \leqslant t\ln(t)^\alpha \leqslant (k+1)\ln(k+1)^\alpha$, puis, par passage à l'inverse

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t\ln(t)^\alpha} \Leftrightarrow \boxed{u_{k+1} \leqslant f'(t).}$$

Précaution
Le passage à l'inverse change le sens des inégalités seulement si les deux termes de départ sont de même signe (c'est la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$ mais pas sur $\mathbf{R}$!)

1.e. Soit $k \geqslant 2$. Intégrons l'inégalité obtenue précédemment sur le segment $[k, k+1]$. Alors

$$\int_k^{k+1} u_{k+1}\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f'(t)\,dt \Leftrightarrow u_{k+1} \leqslant f(k+1) - f(k).$$

En remplaçant f par l'expression donnée dans l'énoncé, il vient

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, \quad u_{k+1} \leqslant \frac{1}{\alpha\ln(k)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(k+1)^\alpha}.}$$

2.a. On a

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k - \sum_{k=2}^{n} u_k = \boxed{L - S_n.}$$

2.b. Reformulons le résultat de la question 1.e : nous avons prouvé que pour tout $k \geqslant 3$, on a

$$u_k \leqslant \frac{1}{\alpha\ln(k-1)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(k)^\alpha}.$$

En sommant ces relations pour k variant de $n+1$ à p, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{p} u_k &\leqslant \sum_{k=n+1}^{p}\left(\frac{1}{\alpha\ln(k-1)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(k)^\alpha}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{\alpha\ln(n)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(n+1)^\alpha} + \frac{1}{\alpha\ln(n+1)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(n+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha\ln(p-2)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(p-1)^\alpha} + \frac{1}{\alpha\ln(p-1)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(p)^\alpha}\\ &\leqslant \boxed{\frac{1}{\alpha\ln(n)^\alpha} - \frac{1}{\alpha\ln(p)^\alpha}.}\end{aligned}$$

2.c. Faisons tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente. Il vient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{1}{\alpha\ln(n)^\alpha}.$$

Mais $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = R_n = L - S_n$. De plus, R_n est positif car somme de termes positifs, donc

$$0 \leqslant L - S_n \leqslant \frac{1}{\alpha\ln(n)^\alpha}.$$

3.a. On a évidemment $\dfrac{1}{\alpha\ln(n)^\alpha} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \ln(n)^\alpha \geqslant \frac{1}{\alpha\varepsilon}$. Par croissance de la fonction $t \mapsto t^{1/\alpha}$, cette inégalité est équivalente à

$$\frac{1}{(\alpha\varepsilon)^{1/\alpha}} \leqslant \ln(n) \Leftrightarrow (\alpha\varepsilon)^{-\frac{1}{\alpha}} \leqslant \ln(n).$$

Enfin, par croissance de la fonction exponentielle, ceci est équivalent à $\boxed{n \geqslant \exp\left((\alpha\varepsilon)^{-\frac{1}{\alpha}}\right).}$

3.b. Il s'agit d'utiliser les résultats précédents : pour n supérieur ou égal à $\left\lfloor \exp\left((\alpha\varepsilon)^{-1/\alpha}\right)\right\rfloor + 1$, on a $0 \leqslant L - S_n \leqslant \varepsilon$.

Astuce
Le premier entier après un réel x est $\lfloor x \rfloor + 1$.

```
function [n,S]=approx(alpha,epsilon)
  n = floor(exp((alpha*epsilon)^(-1/alpha)))+1 ;
  S = 0 ;
  for k = 2 :n do
    S = S + 1/(k*log(k)^(alpha+1)) ;
  end
endfunction
```

Attention : la commande `Scilab` pour la fonction ln est `log`.

ESC 2005

Exercice 3

Sujet : Étude de la composition d'une urne évolutive

Moyen

Abordable en première année : ✗

Intérêt : ★★★

Thèmes du programme abordés : variables aléatoires discrètes, espérance conditionnelle

Modifications apportées au sujet d'origine : ajout d'une question `Scilab`

Commentaires : un exercice bien guidé utilisant les espérances conditionnelles.

Dans tout l'exercice, S désigne un entier naturel non nul fixé.
Une urne contient initialement $4S$ boules indiscernables au toucher, dont S boules rouges, S boules vertes et $2S$ boules bleues.
On effectue des tirages successifs d'une boule, au hasard, et avec le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne, mais on remet dans l'urne une boule bleue ;
- si la boule tirée est verte, on la remet dans l'urne ;
- si la boule tirée est bleue, on ne la remet pas dans l'urne, mais on remet dans l'urne une boule rouge.

On note, pour tout entier naturel n non nul, X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne **après** le n-ème tirage, et on note X_0 la variable aléatoire certaine égale à S.
On rappelle que si A désigne un événement de probabilité non nulle et X une variable aléatoire discrète, $E(X|A)$ est l'espérance de X pour la probabilité conditionnelle P_A :

$$E(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P_A(X = x).$$

1. Déterminer la loi de X_1, et calculer son espérance.
2. Déterminer la loi de X_2 et calculer son espérance.
3. On suppose désormais que n est un entier supérieur ou égal à $2S$, de sorte que

$$X_n(\Omega) = \{0, \dots, 3S\}.$$

   a. Soit $k \in [\![1, 3S-1]\!]$.
   Quelle est la composition de l'urne une fois l'événement $[X_n = k]$ réalisé ?
   En déduire la loi de X_{n+1} conditionnellement à l'événement $[X_n = k]$.

   b. Montrer que $E(X_{n+1}|X_n = k) = \left(1 - \dfrac{1}{2S}\right) k + \dfrac{3}{4}$.
   Cette formule est-elle encore vraie pour $k = 0$ et $k = 3S$?

   c. En déduire par la formule de l'espérance totale que $E(X_{n+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{2S}\right) E(X_n) + \dfrac{3}{4}$.

4. On note, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $2S$, $u_n = E(X_n)$.

   a. Déterminer le réel α tel que $\alpha = \left(1 - \dfrac{1}{2S}\right) \alpha + \dfrac{3}{4}$.

   b. Montrer que la suite $(u_n - \alpha)_{n \geqslant 2S}$ est géométrique.

   c. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, S et u_{2S}.

   d. Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} E(X_n) = \dfrac{3S}{2}$.

5. Écrire en `Scilab` une fonction `simule(S,n)` qui prend en entrée deux paramètres S et n, simule une série de n tirages dans une urne de $4S$ boules et retourne le nombre de boules rouges restant dans l'urne à l'issue de ces n tirages.

ESC 2005 : CORRIGÉ

EXERCICE 3

Notons qu'à tout moment, puisque le nombre total de boules est $4S$ et que le nombre de boules vertes est S, on a toujours

$$(\text{nombre de boules rouges}) + (\text{nombre de boules bleues}) = 3S.$$

1. Puisque nous connaissons la composition initiale de l'urne, nous pouvons affirmer que $X_1(\Omega) = \{S-1, S, S+1\}$ et que

$$P(X_1 = S-1) = \frac{S}{4S} = \frac{1}{4}, P(X_1 = S) = \frac{1}{4} \text{ et } P(X_1 = S+1) = \frac{2S}{4S} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que

$$E(X_1) = \frac{S-1}{4} + \frac{S}{4} + \frac{S+1}{2} = \boxed{S + \frac{1}{4}}.$$

Détails
$X_1 = S-1$ si on a tiré une boule rouge et $X_1 = S+1$ si on a rajouté une boule rouge, c'est-à-dire tiré une boule bleue.

2. L'énoncé ne donnant aucune contrainte sur S (si ce n'est que $S \neq 0$), il va nous falloir traiter séparément les cas $S = 1$ et $S > 1$.
Si $S > 1$: alors $X_2(\Omega) = [\![S-2, S+2]\!]$.
En considérant le système complet d'événements $[X_1 = S-1], [X_1 = S], [X_1 = S+1]$, et en appliquant la formule des probabilités totales, il vient :

$$P(X_2 = S-2) = P_{[X_1=S-1]}(X_2 = S-2)P(X_1 = S-1) + P_{[X_1=S]}(X_2 = S-2)P(X_1 = S) + P_{[X_1=S+1]}(X_2 = S-2)P(X_1 = S+1).$$

Mais si l'urne contenait S ou $S+1$ boules rouges à l'issue du premier tirage, elle en comptera toujours au moins $S-1$ à l'issue du second, et jamais $S-2$, donc

$$P_{[X_1=S]}(X_2 = S-2) = P_{[X_1=S+1]}(X_2 = S+2) = 0.$$

Et donc

$$P(X_2 = S-2) = P_{[X_1=S-1]}(X_2 = S-2)P(X_1 = S-1) = \frac{S-1}{4S}\frac{1}{4} = \boxed{\frac{S-1}{16S}}.$$

De même, on a

$$\begin{aligned} P(X_2 = S-1) &= P_{[X_1=S-1]}(X_2 = S-1)P(X_1 = S-1) + P_{[X_1=S]}(X_2 = S-1)P(X_1 = S) \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{8}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2 = S) &= P_{[X_1=S-1]}(X_2 = S)P(X_1 = S-1) + P_{[X_1=S]}(X_2 = S)P(X_1 = S) + P_{[X_1=S+1]}(X_2 = S)P(X_1 = S+1) \\ &= \frac{2S+1}{4S}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{S+1}{4S}\frac{1}{2} = \boxed{\frac{5S+3}{16S}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2 = S+1) &= P_{[X_1=S]}(X_2 = S+1)P(X_1 = S) + P_{[X_1=S+1]}(X_2 = S+1)P(X_1 = S+1) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Et enfin,

$$P(X_2 = S+2) = P_{[X_1=S+1]}(X_2 = S+2)P(X_1 = S+1) = \frac{2S-1}{4S}\frac{1}{2} = \boxed{\frac{2S-1}{8S}}.$$

Astuce
Apprenons à déceler à peu de frais les erreurs de calcul : la somme de ces probas doit valoir 1, prenez le temps de le vérifier au brouillon !

Si $S = 1$: alors X_2 ne peut prendre la valeur $S-2$ (car si $X_1 = S-1$, on ne peut plus tirer de boules rouges), mais seulement les valeurs $0, 1, 2, 3$. On a alors $P(X_2 = -1) = 0$ ce qui est cohérent avec la formule donnée précédemment pour $P(X_2 = S-1)$ dans le cas où $S = 1$. Les formules donnant les autres probabilités sont inchangées par rapport au cas où $S > 1$.

Dans les deux cas, l'espérance de X_2 est donnée par

$$E(X_2) = (S-2)\frac{S-1}{16S} + (S-1)\frac{1}{8} + S\frac{5S+3}{16S} + \frac{S+1}{4} + (S+2)\frac{2S-1}{8S} = \frac{16S^2+8S-2}{16S} = \boxed{S + \frac{1}{2} - \frac{1}{8S}}.$$

3.a. Une fois l'événement $[X_n = k]$ réalisé, l'urne contient k boules rouges, S boules vertes[1], et $3S - k$ boules bleues en vertu de la remarque faite au début.
On a alors $P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k+1)$ qui est la probabilité d'avoir tiré une boule bleue lors du $(n+1)$-ième tirage, sachant que l'urne contenait k boules rouges (et donc $3S - k$ boules bleues). Ainsi

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k+1) = \frac{3S-k}{4S}.$$

De même, $P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = \dfrac{S}{4S} = \dfrac{1}{4}$.
Et donc $P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k-1) = \dfrac{k}{4S}$.

[1] Le nombre de boules vertes ne change pas au cours du temps.

Remarque

On ne détermine que ces trois valeurs, car si $[X_n = k]$, alors X_{n+1} ne peut prendre que les valeurs $k-1$, k ou $k+1$ (on n'a ajouté ou retiré qu'au plus une boule).

3.b. Puisque nous avons déterminé la loi de X_{n+1} sachant $[X_n = k]$, nous pouvons calculer l'espérance conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = k]$:

$$E(X_{n+1}|X_n = k) = (k+1)\frac{3S-k}{4S} + \frac{k}{4} + (k-1)\frac{k}{4S} = k\frac{4S-2}{4S} + \frac{3S}{4S} = \boxed{\left(1 - \frac{1}{2S}\right)k + \frac{3}{4}.}$$

Pour $k = 0$, nous ne pouvons pas utiliser le résultat de la question précédente, mais nous savons qu'alors $P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{3S}{4S} = \dfrac{3}{4}$, et que $P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{4}$. Donc

$$E(X_{n+1}|X_n = 0) = 1 \times \frac{3}{4} = \left(1 - \frac{1}{2S}\right) \times 0 + \frac{3}{4}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la formule reste valable pour } k = 0.}$

Pour $k = 3S$, là encore il faut refaire le calcul : on a $P_{[X_n=3S]}(X_{n+1} = 3S) = \dfrac{1}{4}$ et $P_{[X_n=3S]}(X_{n+1} = 3S-1) = \dfrac{3S}{4S} = \dfrac{3}{4}$. Alors

$$E(X_{n+1}|X_n = 3S) = (3S-1)\frac{3}{4} + \frac{3S}{4} = 3S - \frac{3}{4} = 3S - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \left(1 - \frac{1}{2S}\right)3S + \frac{3}{4}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la formule est encore valable pour } k = 3S.}$

3.c. Puisque X_{n+1} est une variable finie, elle admet une espérance.
Par la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'événements $\{[X_n = k,\ k \in [\![0;3S]\!]\}$, on a alors

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{3S} E(X_{n+1}|X_n = k)P(X_n = k)\\
&= \sum_{k=0}^{3S}\left(\left(1 - \frac{1}{2S}\right)k + \frac{3}{4}\right)P(X_n = k)\\
&= \left(1 - \frac{1}{2S}\right)\sum_{k=0}^{3S} kP(X_n = k) + \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{3S} P(X_n = k)\\
&= \left(1 - \frac{1}{2S}\right)E(X_n) + \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{3S} P(X_n = k).
\end{aligned}$$

Hypothèses

Si l'on a remarqué que X_{n+1} admet une espérance, alors l'énoncé de la formule de l'espérance totale nous garantit l'existence des espérances conditionnelles (déjà prouvée à la question 3.c) et la convergence de la somme (qui est en fait évidente car c'est une somme finie).
Si au contraire on ne voit pas que X_{n+1} admet automatiquement une espérance, il faut alors dire qu'elle existe car les espérances conditionnelles existent et que la somme est finie, donc convergente.

Mais, puisque $\{[X_n = k], k \in [\![0, 3S]\!]\}$ est un système complet d'événements, alors

$$\sum_{k=0}^{3S} P(X_n = k) = 1.$$

Et donc

$$\boxed{E(X_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{2S}\right)E(X_n) + \frac{3}{4}.}$$

4.a. En résolvant l'équation, on obtient

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{2S}\right)\alpha + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha\frac{1}{2S} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{3S}{2}.}$$

4.b. En utilisant la relation de la question 3.c, on a pour $n \geqslant 2S$,

$$u_{n+1}-\alpha = \left(1 - \frac{1}{2S}\right)u_n+\frac{3}{4}-\alpha = \left(1 - \frac{1}{2S}\right)(u_n-\alpha)+\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2S}\right)\alpha + \frac{3}{4} - \alpha}_{=0} = \left(1 - \frac{1}{2S}\right)(u_n-\alpha).$$

Et donc $\boxed{\text{la suite } (u_n - \alpha)_{n\geqslant 2S} \text{ est géométrique de raison } \left(1 - \frac{1}{2S}\right).}$

Remarque

Vous avez probablement reconnu qu'en réalité, (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

4.c. Par la question précédente, en posant $v_n = u_n - \frac{3S}{2}$, alors $(v_n)_{n\geqslant 2S}$ est une suite géométrique de raison $1 - \frac{1}{2S}$. Ainsi,

$$\forall n \geqslant 2S,\ v_n = v_{2S}\left(1 - \frac{1}{2S}\right)^{n-2S} v_{2S}.$$

Mais $v_{2S} = u_{2S} - \frac{3S}{2}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2S,\ u_n = \left(1 - \frac{1}{2S}\right)^{n-2S}\left(u_{2S} - \frac{3S}{2}\right) + \frac{3S}{2}.}$$

Danger !

Ici, la suite n'est géométrique qu'à partir du rang $2S$, nous ne l'avons pas étudiée avant. La formule usuelle

$$v_n = v_0\left(1 - \frac{1}{2S}\right)^n$$

n'est donc pas valable ici !

4.d. Puisque $0 < 1 - \frac{1}{2S} < 1$, nous savons que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2S}\right)^{n-2S} = 0$ et on en déduit donc que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} E(X_n) = \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{3S}{2}.}$$

Intuition

Les boules rouges et bleues jouent des rôles symétriques dans l'expérience, et il y en a $3S$ en tout.
Même si au début, les boules bleues sont en plus grand nombre, au bout d'un certain temps (c'est-à-dire pour n grand), il doit y avoir en moyenne autant de boules rouges que de boules bleues dans l'urne, c'est-à-dire $\frac{3S}{2}$.

5. Une option[2] est par exemple le programme suivant :

```
1  function y=simule(S,n)
2      y=S
3      A = grand(1,n,'uin',1,4*S)
4      for i=1 :n
5          t = A(i)
6          if t <= y then
7              y = y-1
8          else if t>y+S then
9                  y=y+1
10             end
11         end
12     end
13 endfunction
```

Expliquons rapidement ce programme. La variable y sert à compter le nombre de boules rouges. On assimile les n boules aux nombres de $[\![1, 4S]\!]$, en considérant que les y premiers correspondent au boules rouges, que les S suivants correspondent aux boules vertes, et que les $3S - y$ derniers sont les boules bleues.
Nous commençons par déterminer directement les numéros des n boules tirées à l'aide de la ligne 3.
Puis, à l'aide d'une boucle `for` on modifie la composition de l'urne pour chaque tirage :

- si la boule tirée est rouge (`if t<=y`), on enlève une boule rouge de l'urne (`y = y-1`)
- si la boule tirée est bleue, on ajoute une boule rouge (`y = y+1`).
- si la boule tirée est verte, c'est-à-dire si son numéro est dans $[\![y + 1, y + S]\!]$, il ne se passe rien.

A l'issue de la boucle, y contient le nombre de boules rouges restant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage.

[2] Parmi beaucoup d'autres !

ESC 1999

Exercice 3

Sujet : nombre moyen de tirages avant de vider une urne.

Moyen

Abordable en première année : ✓

Intérêt : ★★☆

Thèmes du programme abordés : probabilités discrètes

La numérotation des questions n'est pas celle du sujet original.

Modifications apportées au sujet d'origine : Une question trop calculatoire a été supprimée (loi de X_4) , une question a été ajoutée à la fin (équivalent de $E(X_n)$)

Soit n un entier naturel non nul.
Une urne U_n contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule, en appliquant la règle suivante : si une boule tirée porte le numéro k, avant de procéder au tirage suivant, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne U_n de toutes ses boules.

Partie A : étude de cas particuliers.

1. Donner la loi de X_1, la loi de X_2 et leurs espérances.
2. Déterminer la loi de X_3 et calculer $E(X_3)$.

Partie B : calcul d'une probabilité.

On étudie désormais le cas général.

3. Calculer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.
4. Soit N_1 la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée.
   a. Reconnaître la loi de N_1.
   b. Justifier que $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $P_{[N_1=i]}(X_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqslant k-1 \\ P(X_{i-1} = k-1) & \text{si } i \geqslant k \end{cases}$
   c. Montrer que : $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=k-1}^{n-1} P(X_i = k-1)$.
5. Calculer $P(X_n = 2)$.
6. Pour $n \geqslant 2$, on pose : $v_n = n!P(X_n = n-1)$.
   a. Établir que : $\forall n \geqslant 2$, $v_{n+1} = v_n + n$.
   b. En déduire $P(X_n = n-1)$.

Partie C : recherche d'un équivalent de $E(X_n)$.

7. En utilisant le résultat de la question 4.c, montrer que : $\forall n \geqslant 2$, $E(X_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + 1$.
8. En déduire que : $\forall n \geqslant 2$, $E(X_n) = E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$.
9. Montrer enfin que : $\forall n \geqslant 1$, $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
10. a. Prouver que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.
    b. En sommant les inégalités obtenues à la question précédente, montrer que
$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{dt}{t}.$$
    c. Montrer que pour $n \geqslant 1$, $\ln(n) \leqslant E(X_n) \leqslant 1 + \ln(n)$, puis en déduire un équivalent simple de $E(X_n)$.

ESC 1999 : CORRIGÉ

EXERCICE 3

Dans toute la suite, on note $A_{i,k}$ l'événement : «on tire la boule k au i-ème tirage».

Partie A

1. Si l'urne ne contient que la boule numérotée 1, alors nécessairement celle-ci est obtenue au premier tirage, puis retirée de l'urne. Et donc l'urne est vide après un seul tirage : X_1 est la variable certaine égale à 1.
Et donc $E(X_1) = 1$.

Si $n = 2$, l'urne contient initialement deux boules numérotées 1 et 2.
Puisqu'on retire au moins une boule de l'urne après chaque tirage, $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
De plus, on a $[X_2 = 1] = A_{1,1}$ et donc $P(X_2 = 1) = P(A_{1,1}) = \frac{1}{2}$.
Et puisque $\{[X_2 = 1], [X_2 = 2]\}$ est un système complet d'événements, on a

$$P(X_2 = 1) + P(X_2 = 2) = 1 \Leftrightarrow P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Et donc $E(X_2) = \frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{2}.}$

2. Si $n = 3$, l'urne contient initialement les boules numérotées de 1 à 3, et comme précédemment, $X_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.
On a $[X_3 = 1] = A_{1,1}$ donc $P(X_3 = 1) = P(A_{1,1}) = \frac{1}{3}$.
De même, le seul moyen de nécessiter trois tirages pour vider l'urne est de tirer successivement les boules 3, 2 et 1. Et donc on a $[X_3 = 3] = A_{1,3} \cap A_{2,2} \cap A_{3,1}$, de sorte que $P(X_3 = 3) = P(A_{1,3} \cap A_{2,2} \cap A_{3,1})$.
Par la formule des probabilités composées, on a donc

$$P(X_3 = 3) = P(A_{1,3})P_{A_{1,3}}(A_{2,2})P_{A_{1,3}\cap A_{2,2}}(A_{3,1}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

Détails
Connaissant les résultats des tirages précédents, on connait la composition de l'urne avant un tirage donné.

Enfin, comme à la question 1,

$$P(X_3 = 2) = 1 - P(X_3 = 1) - P(X_3 = 3) = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $E(X_3) = \frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} = \boxed{\frac{11}{6}.}$

Partie B

3. Comme dans les cas particuliers précédents, on a $[X_n = 1] = A_{1,1}$ et donc

$$\boxed{P(X_n = 1) = P(A_{1,1}) = \frac{1}{n}.}$$

De même, le seul moyen de nécessiter n tirages pour vider l'urne est de tirer successivement les boules $n, n-1, \dots, 2, 1$ et donc

$$[X_n = n] = A_{1,n} \cap A_{2,n-1} \cap \cdots \cap A_{n,1}.$$

Et donc $P(X_n = n) = P(A_{1,n} \cap A_{2,n-1} \cap \cdots \cap A_{n,1})$.
Par la formule des probabilités composées, on a donc

$$\begin{aligned} P(X_n = n) &= P(A_{1,n})P_{A_{1,n}}(A_{2,n-1}) \cdots P_{A_{1,n}\cap\cdots\cap A_{n-1,2}}(A_{n,1}) \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{n-1} \cdots 1 = \boxed{\frac{1}{n!}.} \end{aligned}$$

4.a. La première boule tirée est choisie au hasard parmi les boules de 1 à n, qui sont toutes équiprobables, de sorte que $N_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

4.b. Sachant que $[N_1 = i]$, à l'issue du premier tirage, il ne reste que les boules 1 à $i-1$ dans l'urne.
Si $i \leqslant k-1$, alors, après le premier tirage il faudra au plus $i-1 \leqslant k-2$ autres tirages pour vider l'urne.
Et donc X_n ne peut prendre que des valeurs inférieures ou égales à $k-1$, de sorte que $P_{[N_1=i]}(X_n = k) = 0$.
En revanche, si $i \geqslant k$, alors le second tirage a lieu dans une urne contenant les boules de 1 à $i-1$.
Et donc le nombre de tirages nécessaires pour virer l'urne **après le premier tirage** est le même que le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne U_{i-1}.
En particulier, $P_{[N_1=i]}(X_n = k) = P(X_{i-1} = k-1)$.

Remarque
Ce raisonnement est encore valable si $i \leqslant k-1$, mais alors $P(X_{i-1} = k-1) = 0$.

4.c. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[N_1 = i],\ i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$, on a, pour $k \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}P(X_n = k) &= \sum_{i=1}^{n} P(N_1 = i) P(X_n = k \cap N_1 = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} P_{[N_1=i]}(X_n = k)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n} P(X_{i-1} = k-1)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=k-1}^{n-1} P(X_j = k-1).\end{aligned}$$

Chgt d'indice
$j = i-1$.

5. D'après la question précédente[1], on a

$$P(X_n = 2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} P(X_i = 1) = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}.}$$

[1] Appliquée avec $k = 2$.

6.a. Par définition, on a $v_{n+1} = (n+1)! P(X_{n+1} = n)$. En utilisant la question 5.c, il vient alors

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= (n+1)!\frac{1}{n+1}\sum_{i=n-1}^{n} P(X_i = n-1)\\ &= n!\big(P(X_{n-1} = n-1) + P(X_n = n-1)\big)\\ &= n!\frac{1}{(n-1)!} + n! P(X_n = n-1) = \boxed{n + v_n.}\end{aligned}$$

6.b. Nous savons déjà d'après la question 1 que $v_2 = 2! \times P(X_2 = 1) = 1$.
Et pour $n \geqslant 3$, en utilisant plusieurs fois le résultat de la question précédente,

$$\begin{aligned}v_n &= v_{n-1} + (n-1) = v_{n-2} + (n-2) + (n-1)\\ &= \cdots = v_2 + 2 + 3 + \cdots + n-1 = 1 + 2 + \cdots + n-1 = \frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

Rappel
On a
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Et donc $P(X_n = n-1) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{n(n-1)}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2(n-2)!}.}$

Vérification
Il n'est pas inutile de vérifier que ce résultat est cohérent avec les lois de X_2 et de X_3 calculées dans la partie A afin de déceler d'éventuelles erreurs.

Partie C.

7. D'après la question 4.c, on a, pour tout $k \geqslant 2$,

$$kP(X_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{i=k-1}^{n-1} \underbrace{k}_{=(k-1)+1} P(X_i = k-1) = \frac{1}{n}\sum_{i=k-1}^{n-1}(k-1)P(X_i = k-1) + \frac{1}{n}\sum_{i=k-1}^{n-1} P(X_i = k-1).$$

Et donc,

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k)$$

$$\begin{aligned}
&= P(X_n = 1) + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=k-1}^{n-1}(k-1)P(X_i = k-1) + \frac{1}{n}\sum_{i=k-1}^{n-1}P(X_i = k-1)\right)\\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=k-1}^{n-1}(k-1)P(X_i = k-1) + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=k-1}^{n-1}P(X_i = k-1)\\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=2}^{i+1}(k-1)P(X_i = k-1) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=2}^{i+1}P(X_i = k-1)\\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}jP(X_i = j) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}P(X_i = j)\\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}E(X_i) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}1\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}E(X_i) + \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\\
&= \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}E(X_i) + 1.}
\end{aligned}$$

On isole le terme correspondant à $k = 1$ pour lequel la relation de 4.c n'est pas valable.

Chgt d'indice
$j = k - 1$.

8. Pour $n = 2$, on a $E(X_2) = \dfrac{3}{2} = E(X_1) + \dfrac{1}{2}$.
Et pour $n \geqslant 3$, alors

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}E(X_i) + 1\\
&= \frac{1}{n}E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-2}E(X_i) + 1\\
&= \frac{1}{n}E(X_{n-1}) + \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-2}E(X_i) + 1\\
&= \frac{1}{n}E(X_{n-1}) + \frac{n-1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-2}E(X_i) + 1\right) + 1 - \frac{n-1}{n}\\
&= \frac{1}{n}E(X_{n-1}) + \frac{n-1}{n}E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}\\
&= \boxed{E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}.}
\end{aligned}$$

9. Nous savons déjà que $E(X_1) = 1 = \frac{1}{1}$.
Et pour $n \geqslant 2$,

$$E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n} = E(X_{n-2}) + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \cdots = E(X_1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

10.a. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$. En particulier,

$$\forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Et donc, par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1}\frac{dt}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{dt}{k} = \frac{1}{k}.}$$

Astuce
Ne perdons pas de temps à calculer une primitive de la constante $\frac{1}{k}$: l'intégrale d'une constante sur un segment est égale à cette constante fois la longueur du segment.

10.b. Sommons les inégalités précédemment obtenues pour k variant de 1 à $n-1$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

Notons que par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}=\int_1^2\frac{dt}{t}+\int_2^3\frac{dt}{t}+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{dt}{t}=\int_1^n\frac{dt}{t}.$$

En particulier, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leqslant\int_1^n\frac{dt}{t}$.

Mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1$. Et donc

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\leqslant\int_1^n\frac{dt}{t}\iff\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant 1+\int_1^n\frac{dt}{t}.$$

De même, toujours en sommant les inégalités de 10.a pour k variant de 1 à n, il vient

$$\int_1^{n+1}\frac{dt}{t}=\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

10.c. Nous savons calculer les intégrales de la question précédente :

$$\int_1^n\frac{dt}{t}=[\ln t]_1^n=\ln n \text{ et de même } \int_1^{n+1}\frac{dt}{t}=\ln(n+1)\geqslant\ln(n).$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\ln(n)\leqslant E(X_n)\leqslant\ln(n)+1.}$$

En divisant par $\ln n>0$, il vient

$$\frac{1}{\ln n}\leqslant\frac{E(X_n)}{\ln n}\leqslant 1+\frac{1}{\ln n}.$$

Et donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{E(X_n)}{\ln n}=1$, de sorte que $\boxed{E(X_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n.}$

Méthode

Une inégalité ne suffit pas à donner un équivalent, même si l'on sait que

$$1+\ln(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n.$$

Pour prouver un équivalent, il faudra toujours montrer que la limite du quotient tend vers 1 (et donc, si l'on souhaite, comme c'est le cas ici, utiliser une double inégalité, celle-ci se traduira en une limite grâce au théorème des gendarmes).