Corrigé succint : Révisions : algèbre linéaire et polynômes

Exercice 1
Utiliser le cours sur les polynômes (**)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $k \in [[0,n]]$, $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $f_k(x) = \exp(kx)$.
Prouver que $\mathcal{B} = (f_0, \cdots, f_n)$ est libre.

Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\lambda_0.f_0 + \cdots + \lambda_n.f_n = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_0 + \lambda_1.\exp(x) + \cdots + \lambda_n.\exp(nx) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_1.e^x + \lambda_2.(e^x)^2 + \cdots + \lambda_n.(e^x)^n = 0$$

Notons $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k.X^k$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(e^x) = 0$, le polynôme admet donc une infinité de racines (tous les réels strictement positifs puisque la fonction exp est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$).
Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, ce qui implique que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Bilan : $\boxed{\text{la famille } \mathcal{B} = (f_0, \cdots, f_n) \text{ est libre}}$

Exercice 2
idem EML sujet 0 (**)
Cf corrigé EML sujet 0.

Exercice 3
Diagonalisation simultanée - questions 2 et 3 pas faciles mais reviennent régulièrement (***)
Soit E un ev sur $\mathbb{R}$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$.
On suppose que f admet n valeurs propres distinctes λ_1, λ_2, ..., λ_n.

1. Soit $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Supposons que T soit un polynôme annulateur de f. D'après le cours,

$$Sp(f) \subset \{ \text{ racines de } T\} \Leftrightarrow \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \{ \text{ racines de } T\}$$

   ce qui est absurde car $deg(T) \leq n-1$ et $T \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc T admet au plus $n-1$ racines distinctes.

   Bilan : $\boxed{T \text{ n'est pas un polynôme annulateur de } f}$

2. Soit $P = (X-\lambda_1). \cdots .(X-\lambda_n)$. Justifions que P est un polynôme annulateur de f.

   $f \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim(E) = n$ et f possède n valeurs propres distinctes, f est donc diagonalisable. Il existe donc une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = D$. On a alors

$$\begin{aligned} P(D) &= (D-\lambda_1.I).(D-\lambda_2.I)\cdots.(D-\lambda_n.I) \\ &= Diag(0, \lambda_2-\lambda_1, \cdots, \lambda_n-\lambda_1).Diag(\lambda_1-\lambda_2, 0, ..., \lambda_n-\lambda_2).\cdots.Diag(\lambda_1-\lambda_n, ..., 0) \\ &= Diag(0, 0, \cdots, 0) = 0 \end{aligned}$$

   P est donc un polynôme annulateur de D.
   Par conséquent, $\boxed{P \text{ est un polynôme annulateur de } f}$

3. Soit u un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Alors

$$f(g(u)) = g(f(u)) = g(\lambda.u) = \lambda.g(u)$$

   Par conséquent, $g(u) \in Ker(f-\lambda.Id)$. Comme tous les sous-espaces propres de f sont de dimension 1, on a $Ker(f-\lambda.Id) = Vect(u)$ $(u \neq 0)$, donc il existe un réel α tel que $g(u) = \alpha.u$.

   Bilan : $\boxed{\text{si } u \text{ est un vecteur propre de } f, \text{ alors } u \text{ est aussi un vecteur propre de } g}$

   Attention : u est un vecteur propre de g mais qui n'est pas associé à la valeur propre λ en général !

4. Nous avons déjà dit qu'il existe une base $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ de E formée de vecteurs propres de f, qui permet de diagonaliser f.
   Comme u_1, ..., u_n sont encore des vecteurs propres de g, $\mathcal{B}$ est aussi une base de E formée de vecteurs propres de g : $\boxed{\text{la matrice de } g \text{ dans cette base } \mathcal{B} \text{ est donc également diagonalisable}}$

Exercice 4
Classique - pas dur (*)
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et a_1, a_2, ..., a_{n+1} n+1 réels deux à deux distincts.
Soit l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $f(P) = (P(a_1), P(a_2), \cdots, P(a_{n+1}))$.
Prouver que f est un isomorphisme. Donner la matrice de f dans les bases canoniques.

On montre facilement que l'application f est linéaire.
Calculons ensuite le noyau de f. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} P \in Ker(f) &\Leftrightarrow f(P) = 0 \\ &\Leftrightarrow P(a_1) = \cdots = P(a_{n+1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow P \text{admet n+1 racines distinctes } a_1, \cdots, a_{n+1} \\ &\Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]} \text{ car } deg(P) \leq n \end{aligned}$$

Donc $Ker(f) = \{0\}$ et f est injective. D'après le th. du rang, $\dim(Im(f)) = n+1-\dim(Ker(f)) = n+1$, et comme $Im(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, on en déduit que $Im(f) = \mathbb{R}^{n+1}$, ce qui signifie que f est surjective. Ainsi f est bijective.

Bilan : $\boxed{f \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels}}$

Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \cdots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{C} = (e_1, \cdots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors

$$Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Exercice 5
Matrices carrées de rang 1 (**)
Soit $n \in \mathbb{N}$ où $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

1. Comme A est une matrice de rang 1, toutes ses colonnes sont proportionnelles donc il existe une matrice colonne U et des coefficients v_1, ..., v_n tels que

$$A = \begin{pmatrix} v_1.U & v_2.U & \cdots & v_n.U \end{pmatrix} = U.{}^tV$$

   où $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

2. On a alors
$$A^2 = U.{}^tV.U.{}^tV = ({}^tV.U).U.{}^tV = ({}^tV.U).A$$
car ${}^tV.U$ est un réel. En notant $m(A) = {}^tV.U$ ce réel, on a a lors $A^2 = m(A).A$.

3. On a aussi :
$$AU = U.{}^tV.U = m(A).U$$
et $U \neq 0$ puisque U est de rang 1. Par conséquent U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $m(A)$.

4. Comme $A^2 = m(A).A$, le polynôme $P = X^2 - m(A).X$ est annulateur de A. Ainsi
$$Sp(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \{0, m(A)\}$$
Par ailleurs, $rg(A) = 1$ donc $\dim(Ker(A)) = n-1 \geq 1$ donc $0 \in Sp(A)$. On a déjà vu que $m(A) \in Sp(A)$.

Bilan : $\boxed{Sp(A) = \{0, m(A)\}}$

5. Notons f l'application canoniquement associée à A. Alors $\dim(Ker(f)) = n-1$. Soit $(u_1, \cdots, u_{n-1})$ une base de $Ker(f)$, que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_{n-1}, u_n)$ de E .La matrice de f dans cette base est alors de la forme
$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$
avec $B \neq 0$. Comme deux matrices représentant le même endomorphisme dans deux bases sont semblables, on en déduit que $\boxed{A \text{ est semblable à } B}$.

Remarque : si $m(A) \neq 0$, alors A est diagonalisable et on peut prendre $B = Diag(0, ..., 0, m(A))$. Par contre, si $m(A) = 0$, la matrice A ne sera pas diagonalisable. C'est le cas par exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour cette matrice, on peut prendre $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on a $m(A) = {}^tV.U = 0$.

Exercice 6
Polynômes de Lagrange, très souvent utilisés (**)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $n+1$ réels deux à deux distincts a_1, a_2, ..., a_{n+1}.
On considère les $n+1$ polynômes $(L_j)_{1 \leq j \leq n+1}$ où
$$L_j = \prod_{1 \leq k \leq n+1 \text{ où } k \neq j} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$$

1. Pour tout $j \in [[1, n+1]]$, $deg(L_j) = n$ (produit de n polynômes de degré 1). De plus, on montre de façon classique que
$$\forall (i,j) \in [[1, n+1]]^2, \quad L_j(a_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

2. Montrons que $\mathcal{B} = (L_1, L_2, \cdots, L_{n+1})$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j.L_j = 0_{\mathbb{R}[X]} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.L_j(x) = 0$$

Soit $i \in [[1, n]]$. En évaluant la relation ci-dessus en $x = a_i$, on trouve avec la question ci-dessus que $\lambda_i = 0$. Ainsi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ donc la famille $\mathcal{B}$ est libre. Comme de plus $Card(\mathcal{B}) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe des coefficients $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j.L_j$. D'où, pour tout $i \in [[1, n]]$, en évaluant en $x = a_i$: $P(a_i) = \lambda_i$.

Bilan : $\boxed{P = \sum_{j=1}^{n+1} P(a_j).L_j}$

4. $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, donc
$$P = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$
Remarque : lien avec l'exercice 4 : la famille $\mathcal{B} = (L_1, \cdots, L_{n+1})$ des polynômes de Lagrange est l'image par la bijection réciproque f^{-1} de l'isomorphisme de l'ex.4 de la famille $(e_1, ..., e_{n+1})$ (base canonique de $\mathbb{R}^n$).

Exercice 7
Polynômes de Legendre - 4 pas facile (***)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $P_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $deg(P_n) = 2n$, et donc $deg(L_n) = 2n - n = n$.
Par ailleurs le monôme dominant de P_n est X^{2n}. En dérivant n fois ce monôme, on obtient le monôme dominant de L_n, qui va donc être $\frac{(2n)!}{n!}.X^n$. Le coefficient dominant de L_n est donc $\frac{(2n)!}{n!}$.

2. Le polynôme $P_n^{(2n)}$ est de degré 0, c'est donc un polynôme constant. On l'obtient en dérivant $2n$ fois le monôme dominant de P_n, qui est X^{2n} (la dérivée $2n$-ième des autres termes donne 0). On trouve donc que $P_n^{(2n)} = (2n)!$.

3. On peut remarquer que $P_n = (X-1)^n.(X_1)^n$. Ceci implique que 1 et -1 sont des racines de P_n d'ordre n. D'après le cours, pour tout $k \in [[0, n-1]]$, $P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$.

4. (a) On procède par récurrence sur k, montrons que pour tout $k \in [[0, n-1]]$, la proposition: $\mathcal{H}(k)$: $P_n^{(k)}$ a au moins $k+2$ racines distinctes dans $[-1, 1]$
est vraie.
   - Initialisation : si $k = 0$, on sait que $P_n(1) = P_n(-1) = 0$, donc P_n admet au moins deux racines distinctes dans $[-1, 1]$.
   - Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(k)$ est vraie : $P_n^{(k)}$ admet au moins $k+2$ racines distinctes dans $[-1, 1]$. Notons $a_0 = -1 < a_1 < ... < a_{k+2} = 1$ ces racines. Pour tout $i \in [[0, k+1]]$, on a $P_n^{(k)}(a_i) = P_n^{(k)}(a_{i+1}) = 0$. D'après le théorème de Rolle, la dérivée de $P_n^{(k)}$ s'annule sur $]a_i, a_{i+1}[$, en un réel noté b_{i+1}. Ceci nous fournit $k+1$ racines $b_1 < b_2 < \cdots < b_{k+1}$ de $P_n^{(k+1)}$, qui appartiennent toutes à $]-1, 1[$. Mais on sait également que -1 et 1 sont racines de $P_n^{(k+1)}$, ce qui nous donne bien au moins $k+3$ racines de $P_n^{(k)}$.
   - Bilan : pour tout $k \in [[0, n-1]]$, $P_n^{(k)}$ a au moins $k+2$ racines distinctes dans $[-1, 1]$.

(b) D'après le résultat précédent, la fonction $P_n^{(n-1)}$ admet au moins $n+1$ racines distinctes dans $[-1,1]$. En appliquant de nouveau de théorème de Rolle, on en déduit que $P_n^{(n)} = L_n$ admet au moins n racines distinctes dans $]-1,1[$. Mais le polynôme L_n étant de degré n, il ne peut pas avoir plus de n racines.

Bilan : $\boxed{L_n \text{ admet exactement } n \text{ racines distinctes dans }]-1,1[}$

5. On montre que :

$$\forall k \in [[0,n]], \quad ((X+1)^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}.(X+1)^{n-k} \text{ et } ((X-1)^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}.(X-1)^{n-k}$$

D'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} L_n &= ((X+1)^n.(X-1)^n)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.((X+1)^n)^{(k)}.((X-1)^n)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\frac{n!}{(n-k)!}.(X+1)^{n-k}.\frac{n!}{(k)!}.(X-1)^k \\ &= n!.\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.(X-1)^k.(X+1)^{n-k} \end{aligned}$$

Exercice 8
Polynômes de Tchebychev (de seconde espèce) (**)
Très classique : trigo, récurrence double... Variante des polynômes de Tchebychev
On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1, \; T_1 = 2X \text{ et } \forall n \geq 2, \; T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$$

1. On montre par une récurrence double assez facile que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n.

2. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété :
$\mathcal{H}(n)$: pour tout $\theta \in]0,\pi[$, $T_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.
Montrons par une récurrence double sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

- Initialisation : si $n=0$ et $n=1$, on a pour tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$T_0(\cos(\theta)) = 1 = \frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$T_1(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta) = \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)}$$

donc la propriété est vraie au rangs 0 et 1.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ et $\mathcal{H}(n+1)$ soient vraies. Alors pour tout $\theta \in]0,\pi[$,

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta).T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \\ &= \frac{2\cos(\theta)\sin((n+2)\theta) - \sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} & \sin((n+3)\theta) + \sin((n+1)\theta) = \sin((n+2)\theta + \theta) + \sin((n+2)\theta - \theta) \\ = \; & \sin((n+2)\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos((n+2)\theta) + \sin((n+2)\theta)\cos(-\theta) + \sin(-\theta)\cos((n+2)\theta) \\ = \; & 2\sin((n+2)\theta)\cos(\theta) \text{ par imparité du sin et parité du cos} \end{aligned}$$

et on en déduit bien que :

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+3)\theta)}{\sin(\theta)}$$

- Bilan : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

Remarque : nous avons utilisé comme formule de trigo :
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.
L'énoncé peut éventuellement aider ...

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in]0,\pi[$. D'après la question précédente,

$$T_n(\cos(\theta)) = 0 \Leftrightarrow \sin((n+1)\theta) = 0 \Leftrightarrow (n+1).\theta = k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{k.\pi}{n+1} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

On trouve alors n valeurs dans $]0,\pi[$: pour tout $k \in [[1,n]]$, $\theta_k = \frac{k.\pi}{n+1}$. De plus, la fonction cos étant strictement décroissante sur $]0;\pi[$, les réels $\alpha_k = \cos(\theta_k)$, où $k \in [[1,n]]$ sont deux à deux distincts.
Bilan : T_n admet n racines distinctes réelles $\alpha_k \in]-1,1[$ où $k \in [[1,n]]$, avec $\alpha_k = \cos(\frac{k.\pi}{n+1})$.

4. Le polynôme T_n est de degré n, de coefficient dominant $2n$, et on connait ses n racines distinctes. On en déduit que

$$\boxed{T_n = 2^n.\prod_{k=1}^{n}(X - \cos(\tfrac{k.\pi}{n+1}))}$$