

Exercice 1

1. Réurrence + formule du crible.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$$

2. Classique, par ensemble

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^n k (P(X > k-1) - P(X > k))$$

$$= \sum_{k=0}^n k P(X > k-1) - \sum_{k=0}^n k P(X > k)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) P(X > i) - \sum_{k=0}^{n-1} k P(X > k) \quad \text{car } P(X > n) = 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$$

3. $\forall x > 0, \lfloor \ln(x) \rfloor \leq x-1 \leq x$

$\hookrightarrow$ inégalité classique de concavité

Donc $0 \leq \lfloor \ln(X) \rfloor \leq X$. Par domination, comme $E(X)$ existe, $E(\lfloor \ln(X) \rfloor)$ existe

Exercice 2:

Notons que, comme $n > 4$, deux candidats ne peuvent pas être élus en même temps.

Notons A l'événement "un candidat est élu".

Soit X le nombre de voix obtenues par le candidat a (Y - candidat b , Z - candidat c).

Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; \frac{1}{3})$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n; \frac{1}{3})$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n; \frac{1}{3})$.

Attention: ces trois variables ne sont pas indépendantes!

On a $X + Y + Z = n$.

$$A = [X \geq n-2] \cup [Y \geq n-2] \cup [Z \geq n-2].$$

Ces trois événements étant incompatibles,

$$P(A) = P(X \geq n-2) + P(Y \geq n-2) + P(Z \geq n-2)$$

$$= 3 P(X \geq n-2) \quad \text{car même loi}$$

$$= 3 \left(\binom{n}{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{n}{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right) + \binom{n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

$$P(A) = 3 \left[\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{3^n} + n \cdot \frac{2}{3^n} + \frac{1}{3^n} \right]$$

Puis la probabilité qu'aucun candidat ne soit élu vaut $1 - P(A)$.

Exercice 3

Notons A l'événement: "la partie a un perdant" et Y le nombre de joueurs ayant obtenu pile.

$$A = [Y=1] \cup [Y=n-1]$$

$$\text{d'où } P(A) = \binom{n}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \binom{n}{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

puis $X \mapsto \frac{1}{2} \left(n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$, d'où $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4

$$1. S(\Omega) = [2; 2n].$$

$$\text{Si } k \in [2; n],$$

$$[S=k] = \bigcup_{i=1}^{k-1} [X=i] \cap [Y=k-i]$$

d'où par incaptilité (possible car $k-i \in [1; n]$)

$$P(S=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P([X=i] \cap [Y=k-i])$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i) \times P(Y=k-i) \text{ par indépendance}$$

$$P(S=k) = \frac{k-1}{n^2} \text{ si } k \in [2; n]$$

$$2. \text{ Soit } k \in [n+1; 2n].$$

$$\triangle [X=i] \cap [Y=k-i] \text{ possible si } 1 \leq i \leq n$$

$$\text{et si } 1 \leq k-i \leq n$$

$$\Leftrightarrow 1-k \leq -i \leq n-k$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{k-n}_{\geq 1 \text{ car } k \geq n+1} \leq i \leq \underbrace{k-1}_{\leq n \text{ car } k \leq 2n}$$

$$[S=k] = \bigcup_{i=k-n}^n [X=i] \cap [Y=k-i]$$

D'où comme précédemment

$$P(S=k) = \frac{n-(k-n)+1}{n^2} = \frac{2n-k+1}{n^2} \text{ si } k \in [n+1; 2n]$$

$$3. E(S) = E(X) + E(Y) = 2 \times \frac{n+1}{2} = n+1.$$

$$4. \forall k \in [1; n],$$

$$P(N \leq k) = P([X \leq k] \cap [Y \leq k])$$

$$= P(X \leq k) \times P(Y \leq k) \text{ par indépendance}$$

$$= \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

D'où $\forall k \in [1; n],$

$$P(N=k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2.$$

Rq: loi de n via l'anti-fonction de répartition.

Exercice 5

• $X_1 \sim \mathcal{U}(p)$

• $X_2(\Omega) = \mathbb{I}x_1 + \infty \mathbb{I}$

• Soit $k \in \mathbb{I}x_1 + \infty \mathbb{I}$.

$[X_2 = k]$ est réalisée si

- on a obtenu exactement $k-1$ succès lors des $k-1$ premières épreuves
- et la $k^{\text{ème}}$ épreuve est un succès.

Notas : Y le nombre de succès lors des $k-1$ premières épreuves

- A le l'événement : "la $k^{\text{ème}}$ épreuve est un succès".

$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(k-1, p)$.

$[X_2 = k] = [Y = k-1] \cap A_k$

$P(X_2 = k) = P(Y = k-1) \times P(A_k)$ car les épreuves sont indépendantes

$= \binom{k-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{1-k} \cdot p$

$= \binom{k-1}{k-1} \cdot p^k \cdot q^{1-k}$

Exercice 6

1. 5. While $n \cdot \max(\text{urnes}) \leq 1$:

8. $X = X + 1$

On peut remplacer 4. par $\text{choix} = \text{rd.randint}(1, n)$

ce qui serait plus simple --- Mais les concepteurs

aiment bien le générateur "minimal" $\text{rd.random}()$

2. $X_1 = 2$; $E(X_1) = 2$ et $V(X_1) = 0$

3. $X_2(\Omega) = \{2, 3\}$. $P(X_2 = 2) = \frac{1}{2}$; $P(X_2 = 3) = \frac{1}{2}$

$E(X_2) = \frac{5}{2}$ $E(X_2^2) = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{13}{2}$ $V(X) = \frac{13}{2} - \frac{25}{4} = \frac{1}{4}$

4.

(a) $X_n(\Omega) = \mathbb{I}2; n+1 \mathbb{I}$

$\hookrightarrow$ dans le pire des cas...

(b) Déterminer $P([X_n = k])$.

• On pose au hasard la boule : il y a n^k résultats possibles

• Pour que $[X_n = k]$ soit réalisée :

- on obtient des numéros différents lors des $k-1$ premières placements : $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+2)$ résultats possibles

$\hookrightarrow$ (il y a déjà $k-2$ numéros occupés)

- puis on retorque sur l'un des $k-1$ numéros : $k-1$ choix

D'où

$P(X_n = k) = \frac{n!}{(n-k+1)!} \times \frac{k-1}{n^k}$

Exercice 7

1. * Il y a 2^n poignées possibles (il s'agit du cardinal de $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$).

* Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Choisis une partie de $\{1, \dots, n\}$ contenant le numéro i revient à choisir une partie de $\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, d'où 2^{n-1} poignées contenant le numéro i .

$$* \text{ D'où } P(A_i) = \frac{1}{2} \text{ et } Y_i \subset \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Rappel: $Y_i(\omega) = \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = \{0, 1\}$ (d'une loi de Bernoulli)

$$\text{et } \begin{cases} Y_i = 1 \Leftrightarrow A_i \text{ réalisée} \\ Y_i = 0 \Leftrightarrow A_i \text{ non réalisée} \end{cases}$$

$$2. X = \sum_{i=1}^n i \cdot Y_i$$

$$\text{D'où } E(X) = \sum_{i=1}^n i E(Y_i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$