Révisions - Analyse de 1$^{\text{ère}}$ année

Exercice 1

1. f est dérivable sur $[0;\frac{\pi}{4}[$ et $\forall x \in [0;\frac{\pi}{4}[$,

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} > 0.$$

De plus $f(0) = 1$ et $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Comme f est continue et strictement croissante sur $[0;\frac{\pi}{4}[$,
f est bijective de $[0;\frac{\pi}{4}[$ sur $f([0;\frac{\pi}{4}[) = [1;\sqrt{2}[$.

On a donc $J = [1;\sqrt{2}[$.

2. $\forall y \in [1;\sqrt{2}[$,

$$f(f^{-1}(y)) = y \iff \frac{1}{\cos(f^{-1}(y))} = y$$

$$\iff \cos(f^{-1}(y)) = \frac{1}{y}$$

Puis $\sin^2 + \cos^2 = 1$ donc

$\sin^2(f^{-1}(y)) = 1 - \frac{1}{y^2}$. Comme $f^{-1}(y) \in [0;\frac{\pi}{4}[$,

$\sin(f^{-1}(y)) \geq 0$ donc $\sin(f^{-1}(y)) = \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}$

3. f est dérivable sur $[0;\frac{\pi}{4}[$ et f' ne s'annule pas sur $]0;\frac{\pi}{4}[$. Par contre $f'(0) = 0$.

f^{-1} est dérivable sur $f(]0;\frac{\pi}{4}[) =]1;\sqrt{2}[= J \setminus \{1\}$.

$\forall y \in J\setminus\{1\}$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\frac{\sin(f^{-1}(y))}{\cos^2(f^{-1}(y))}}$$

$$= \frac{\cos^2(f^{-1}(y))}{\sin(f^{-1}(y))} = \frac{1}{y^2\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}}$$

$$= \frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}$$

4.
```
function y=f(x)
    y= 1/cos(x)
endfunction
x = 0 : 0.01 : %pi/4
y= feval
plot2d(x,y)   // courbe de f
plot2d(y,x)   // courbe de f^-1
```

A2

Exercice 2

1.(a) * f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et

$\forall x \geq 0,\ f'(x) = -\dfrac{1}{(2+x)^2} < 0$: f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1/2 \searrow 0$

En particulier, $\forall x \in [0;+\infty[,\ f(x) \in [0;+\infty[$: l'intervalle $[0;+\infty[$ est stable par f.

* Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

$$f(\alpha) = \alpha \iff \frac{1}{2+\alpha} = \alpha$$
$$\iff \alpha^2 + 2\alpha = 1$$
$$\iff \alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$$

$\Delta = 4+4 = 8$ $\quad \alpha_1 = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2} < 0$

$\alpha_2 = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2} > 0$

Donc $f(\alpha) = \alpha \iff \alpha = -1+\sqrt{2}$
avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$

Rque : on demande de déterminer α donc appliquer le théorème de la bijection à $G : x \mapsto f(x) - x$ ne suffit pas.

(b) Déjà fait

(c) Comme f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\forall x \in [0;+\infty[,\ |f'(x)| = \dfrac{1}{(2+x)^2} \leq \dfrac{1}{4}$

l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall (x,y) \in [0;+\infty[^2,\ |f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{4}|y-x|$$

2.(a) Comme $[0;+\infty[$ est stable par f, que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, par récurrence évidente : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$ et u_n est bien défini

(b) $u_0 = 1,\ u_1 = \dfrac{1}{3}$: $u_1 < u_0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante

$u_2 = \dfrac{1}{2+\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{7} > u_1$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$, d'après le 1.(c), comme $\begin{cases} u_n \in [0;+\infty[\\ \alpha \in [0;+\infty[\end{cases}$,

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$
$$\iff |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

Ex-2 (suite)

2.(c) Soit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot |u_0 - \alpha|$ ".

- Initialisation : si $n=0$, $\left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha|$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$
$$\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \cdot |u_0 - \alpha| \text{ donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie.}$$

- Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot |u_0 - \alpha|$

Puis : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot |u_0 - \alpha| = 0$ donc par encadrement

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

(d)

```
v=1 ; n=0;
while abs(v-(-1+sqrt(2)))> 10^-4
        v = 1/(2+v)
        n=n+1
end
disp(n)
```

4. Autre méthode :

$u_2 = \frac{3}{7} < 1 = u_0$.

* Soit $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\mathcal{P}(n)$: " $v_n \geq v_{n+1}$ "

Initialisation : si $n=0$, $v_0 = u_0 \geq u_2 = v_1$ donc $\mathcal{P}(1)$ vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$v_n \geq v_{n+1} \iff u_{2n} \geq u_{2n+2}$$

Comme f est décroissante, $f \circ f$ est croissante donc

$$f \circ f(u_{2n}) \geq f \circ f(u_{2n+2})$$

$$\iff u_{2n+2} \geq u_{2n+4} \iff v_{n+1} \geq v_{n+2} \text{ donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie}$$

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$: $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} \leq u_{2n}$ d'où par décroissance de f :

$$f(u_{2n+2}) \geq f(u_{2n}) \iff u_{2n+3} \geq u_{2n+1} \iff w_{n+1} \geq w_n.$$

Donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|w_n - v_n| = |f(u_{2n+1}) - u_{2n}| = |f(u_{2n}) - f(u_{2n-1})|$$
$$\leq \frac{1}{4} |u_{2n} - u_{2n-1}|$$
$$\leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 |u_{2n-1} - u_{2n-2}| = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot |w_{n-1} - v_{n-1}|$$
$$\leq \dots$$
$$\leq \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \cdot |w_0 - v_0|$$

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n - v_n = 0$

Bilan : les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers la même limite l.

De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n = f(v_n)$

d'où en passant à la limite, par continuité de f sur $\mathbb{R}_+$,

$$l = f(l) \iff l = \alpha.$$

Donc $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \alpha \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \alpha \end{cases}$

et d'après le cours, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

Exercice 3

1. f_n est dérivable sur $]0;n]$ et

$\forall x\in]0;n]$, $f'(x) = 1 - \frac{n}{x}$.

Comme $0 < x \leq n$, $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{n}{x} \geq 1 \Rightarrow 1 - \frac{n}{x} \leq 0$

et de plus $1 - \frac{n}{x} < 0$ si $x\in]0;n[$.

Donc f_n est strictement décroissante sur $]0;n]$.

x	0		n
$f_n'(x)$		$-$	0
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$n-n\ln n$

Comme f_n est continue et strictement décroissante sur $]0;n]$, f_n est bijective de $]0;n]$ sur $f_n(]0;n]) = [n-n\ln(n);+\infty[$.

Comme $0\in[n-n\ln(n);+\infty[$, il existe un unique $x\in]0;n]$ tel que $f_n(x)=0$.

Cette solution est notée u_n.

2. $f_n(1) = 1 > 0$ et $f_n(e) = e - n\ln(e) = e - n < 0$ car $n \geq 3$.

Par stricte décroissance de f_n,

$u_n \in]1;e[$.

3. On sait que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ donc $u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = 0$

$\iff \ln(u_{n+1}) = \frac{u_{n+1}}{n+1}$

D'où

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1})$$
$$= u_{n+1} - \frac{n}{n+1}u_{n+1}$$
$$= \frac{1}{n+1}u_{n+1} > 0$$

Ainsi $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$ d'où $u_{n+1} > u_n$ par stricte décroissance de f_n.

La suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est strictement décroissante.

Ex-3

4. $(U_n)_{n\geq 3}$ est décroissante et minorée par 1, donc converge vers $l \geq 1$.

On a $u_n - n\ln(u_n) = 0$

$\iff \ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$

Comme (u_n) est bornée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.

D'autre part, par continuité de ln sur $[1;+\infty[$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(l)$. D'où $\ln(l)=0 \iff l=1$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

5. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et que $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$,

$\ln(u_n) \underset{x\to 1}{\sim} u_n - 1$ d'où $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

Exercice 4

Soit $0<a<1$ et $\forall x \in [0;\pi]$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(ax)-1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

* $f \in \mathcal{C}^1(]0;\pi])$ par quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

* Il reste à montrer que:

- f est dérivable en 0
- f' est continue en 0, c'est à dire que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.

* $\forall x \in]0;\pi]$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\cos(ax)-1}{x\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Or: $x\sin\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

$1-\cos(u) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$ donc $\cos(u)-1 \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{u^2}{2}$

et ici: $\cos(ax)-1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{a^2x^2}{2}$

D'ici: $\frac{\cos(ax)-1}{x\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{a^2x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} \underset{x\to 0}{\sim} -a^2$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -a^2$: f est dérivable en 0 et $f'(0) = -a^2$

* $\forall x \in]0;\pi]$,

$$f'(x) = \frac{-a\sin(ax)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right) - (\cos(ax)-1)\cdot\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

- $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{4}$
- pour le numérateur, nous devons utiliser des DL.

On sait que $\sin(x) = x + o(x)$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x)$, d'où

$$-a\sin(a).\sin\left(\frac{x}{2}\right) - (\cos(ax)-1).\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= -a(ax+o(x)).\left(\frac{x}{2}+o(x)\right)$$

$$-\left(1-\frac{(ax)^2}{2}-1+o(x^2)\right).\frac{1}{2}\left(1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}+o(x^2)\right)$$

$$= -\frac{a^2}{2}x^2 + \frac{a^2}{4}x^2 + o(x^2)$$

$$= -\frac{a^2}{4}x^2 + o(x^2)$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{a^2}{4}x^2$$

D'où par quotient $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{a^2}{4}x^2}{\frac{x^2}{4}} \underset{x\to 0}{\sim} -a^2$

et $\lim_{x\to 0} f'(x) = -a^2 = f'(0)$ donc f' est continue en 0.

<u>Bilan</u> : $\underline{f \in \mathcal{C}^1([0;\pi])}$

<u>Exercice 5 : lemme de Lebesgue</u>

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx$.

On pose

$u(x) = f(x)$ $\qquad u'(x) = f'(x)$

$v'(x) = \cos(nx)$ $\qquad v(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$. Par <u>intégration par parties</u>,

$$u_n = \left[f(x)\times\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{1}{n}.\int_0^\pi f'(x)\sin(nx)\,dx$$

$$= \underbrace{f(\pi)\times\frac{\sin(n\pi)}{n}}_{=0} - \underbrace{f(0)\times\frac{\sin(0)}{n}}_{=0} - \frac{1}{n}\int_0^\pi f'(x)\sin(nx)\,dx$$

$$= -\frac{1}{n}\int_0^\pi f'(x)\sin(nx)\,dx.$$

D'où

$$|u_n| = \frac{1}{n}.\left|\int_0^\pi f'(x)\sin(nx)\,dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{n}.\int_0^\pi |f'(x)|.|\sin(nx)|\,dx \quad \text{par inégalité triangulaire}$$

$$\leq \frac{1}{n}.\int_0^\pi |f'(x)|\,dx$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^\pi |f'(x)|\,dx}_{\text{constante}} = 0$, $\underline{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

Exercice 6

Soit u un réel fixé et $I = [-|u|, |u|]$

la fonction exp est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et $\forall t \in I$,

$|\exp''(t)| = e^t \leq e^{|u|}$.

D'après l'

|

d'où avec $a = 0$ et $b = u$ qui appartiennent à I :

$$|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} \cdot e^{|u|}$$

Exercice 7

$\star$ $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k^2}$

Comme $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$) par majoration

$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ converge.

$\star$ $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}}_{\text{termes pairs}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}}_{\text{termes impairs}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 8

1. $\forall x > 0$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$: la fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$.

Rappelons l'inégalité de Jensen (ou de concavité généralisée) :

si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in]0, +\infty[^n$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$,

si f concave sur I, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Ici : avec $(a,b,c) \in]0, +\infty[$ et

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$:

$$\ln\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c\right) \geq \frac{1}{3}\ln(a) + \frac{1}{3}\ln(b) + \frac{1}{3}\ln(c)$$

$$\iff \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq \frac{1}{3}\left(\ln(a) + \ln(b) + \ln(c)\right)$$

2. Il suffit d'appliquer la fonction exp.

3. la fonction sin est concave sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ car $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $\sin''(x) = -\sin(x) \leq 0$.

la courbe de la fonction sin est donc au-dessus de ses cordes sur cet intervalle.

On considère les points $O(0,0)$ et $A(\frac{\pi}{2}, 1)$ qui appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_{\sin}$. La droite (OA) a pour équation $y = \frac{2}{\pi}x$ et on a donc :

$\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$.